

SPIS TREŚCI

NUMERU 5 (101)

Soczewki grawitacyjne <i>mgr Krzysztof Górski</i>	str. 1
Zadania	str. 3
Soczewki grawitacyjne i mechanika klasyczna <i>dr Tomasz Kwast</i>	str. 4
Geometria Wszechświata <i>dr Roman Juszkiewicz</i>	str. 5
Nocne niebo	str. 9
Zadania, których nie umiemy rozwiązać	str. 9
Raz jeszcze o geometrii rzutowej <i>dr Marek Kordos</i>	str. 10
Oddziaływanie promieniowania elektromagnetycznego z materią (III) <i>doc. dr Jerzy Ginter</i>	str. 12
Dwaj taternicy... <i>prof. dr Jerzy Mioduszewski</i>	str. 14
Patrz w niebo	str. 16
Klub 44	str. 16

**W następnym numerze:
O Zyguncie Janiszewskim**

Informujemy naszych Czytelników, że od nr 7/1982 nakład Delty wzrośnie do 50.000 egzemplarzy, cena Delty wzrośnie do 20 zł, a okładki Delty z powrotem będą pełnokolorowe.

„Delta”
matematyczno-fizyczno-astronomiczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny:
doc. dr Jerzy Bartke
doc. dr Andrzej Bączyński
doc. dr Bolesław Gleichgewicht
prof. dr Kazimierz Goebel,
doc. dr Bolesław Iwaszkiewicz
doc. dr Tadeusz Iwiński
doc. dr Andrzej Januszajtis
doc. dr Tadeusz Jarzębowski
prof. dr Leon Jeśmanowicz
dr Henryk Kaczmarek
prof. dr Marek Kuczma
mgr Andrzej Mąkowski
prof. dr Bohdan Paczyński
prof. dr Arkadiusz Piekara
doc. dr Sławomir Ruciński
prof. dr Konrad Rudnicki
prof. dr Zbigniew Semadeni
doc. dr Grzegorz Sitarski
prof. dr Jan Stankowski

doc. dr Kazimierz Stępień
prof. dr Mieczysław Subotowicz
doc. dr Stefan Turnau
prof. dr Jerzy Wdowczyk
doc. dr Andrzej Woszczyk
prof. dr Janusz Zakrzewski —
wiceprzewodniczący
prof. dr Wojciech Żakowski —
przewodniczący

Redaguje Kolegium w składzie:
mgr inż. Krzysztof Biesaga — red. techn. graf.
mgr Tomasz Chlebowski
mgr Maciej Jędrzejczak
mgr Krystyna Kordos — sekr. red.
dr Marek Kordos — red. nac.
dr Tomasz Kwast — z-ca red. nac.
dr inż. arch. Jacek Mazur — ilustracje
dr Michał Szurek
doc. dr Michał Świącki — z-ca red. nac.

Adres Redakcji
ul. Hoża 69 pok. 151,
00-681 Warszawa

Zakład Narodowy im.
Ossolińskich — Wydawnictwo
Wrocław, Oddział w Warszawie
Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.
wyd.; 2,50 ark. druk.;
papier offsetowy V kl. 70 g. 61 cm
Wydrukowano w Drukarni im.
Rewolucji Październikowej
Warszawa, ul. Mińska 65
Nr zam. 2414/12/82 Z-86

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.
Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówkową, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.
Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Konto PKO I OM W-wa 1531-912
w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław
w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa
w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7
00-068 Warszawa, Poland or with
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68,
Bundesrepublik Deutschland.
— Earls Court Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain,
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia

Cena 1 egzemplarza zł 10—

nr indeksu 35723/35550

W 1979 roku amerykańsko-angielska grupa astronomów kierowana przez Raya Weymanna poszukiwała na niebie, w dziedzinie światła widzialnego, odpowiedników radioźródeł specjalnego typu, tzw. kwazarów (z ang. Quasi Stellar Radio Source). W trakcie tych badań odkryli oni intrygujący obiekt, któremu dane było stać się jedną z większych sensacji astronomicznych ostatnich lat — podwójny kwazar Q 0957 + 561A,B. Składa się on z dwóch źródeł o prawie równej jasności i jednakowym przesunięciu linii widmowych ku czerwieni, odległych od siebie na niebie o około 6 sekund łuku. Okazało się, że ich optyczne widma są z bardzo dużą dokładnością identyczne (wedle słów odkrywców widma te są podobne do siebie bardziej, niż widma jakichkolwiek dwóch spośród około 1500 znanych astronomom kwazarów). Odkrywczy zasugerowali, że znaleźli pierwszy obiekt, którego wygląd spowodowany został działaniem soczewki grawitacyjnej! Cóż to jednak oznacza?

Cofnijmy się na chwilę do roku 1916. Wiemy, że wtedy właśnie Albert Einstein sformułował ostatecznie swoją Ogólną Teorię Względności — zupełnie nową, rewelacyjną metodę opisu zjawisk grawitacyjnych. Sam autor teorii zaproponował kilka testów obserwacyjnych pozwalających ją skutecznie zweryfikować. Jeden z nich to porównanie wartości wyliczonej na bazie OTW ze zmierzoną obserwacyjnie wartością kąta ugięcia przechodzących w pobliżu Słońca promieni światła obserwowanych przez nas gwiazd.

Jak wiadomo, wyniki licznych obserwacji przeprowadzonych podczas zaćmień Słońca bardzo dobrze zgadzają się z przewidywaniami teorii. W latach trzydziestych Einstein zasugerowany przez czeskiego inżyniera Mandla sprawdził możliwość powstania podwójnego obrazu gwiazdy, gdy w pobliżu linii łączącej ją z Ziemią znajduje się druga gwiazda — działająca jak „soczewka grawitacyjna” (Czytelnik może sprawdzić, że odległość od Słońca obserwatora, który może obserwować dwa obrazy leżącej daleko za Słońcem punktowej gwiazdy, jest kilkanaście razy większa od wielkiej półosi orbity Plutona!). Zważywszy na małe prawdopodobieństwo współliniowego położenia dwóch gwiazd i Ziemi Einstein pesymistycznie ocenił możliwość znalezienia tego typu „soczewek” w Kosmosie. Niebawem astronom amerykański Fritz Zwicky zwrócił uwagę na możliwość istnienia soczewek grawitacyjnych w znacznie większych skalach przestrzennych niż te, charakterystyczne dla gwiazd, i o rozciąglej strukturze rozkładu masy, soczewek — galaktyk.

Do tej właśnie koncepcji nawiązali odkrywcy podwójnego kwazara. Sugerowali, że obiekt ten jest w istocie podwójnym obrazem pojedynczego kwazara (stąd taka identyczność charakterystyk obu obserwowanych źródeł), powstałych wskutek grawitacyjnego oddziaływania galaktyki leżącej „gdzieś” na drodze światła w kierunku Ziemi. Intensywne poszukiwania domniemanej galaktyki-soczewki zostały uwieńczone powodzeniem na jesieni 1979 roku. Jako pierwszy soczewkę — gigantyczną galaktykę eliptyczną, tzw. typu cD — zaobserwowali astronomowie amerykańscy z Kalifornii, pracujący na pięciometrowym teleskopie Hale’a w obserwatorium na Mt. Palomar.

Einstein zakładając, że Słońce działa jak masa punktowa, wyprowadził następujący wzór na kąt ugięcia promieni światła:

$$\alpha = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 R} = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}} \left(\frac{R_{\odot}}{R} \right) = 1''.75 (R_{\odot}/R),$$

gdzie

$G = 6,7 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$ — stała grawitacji

$M_{\odot} = 2 \times 10^{33} \text{ g}$ — masa Słońca

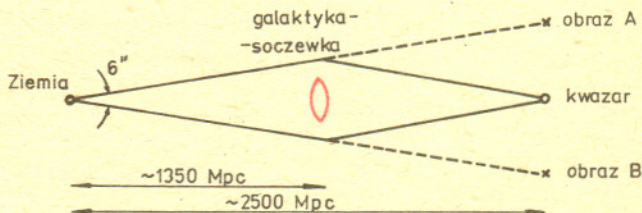
$R_{\odot} = 7 \times 10^{10} \text{ cm}$ — promień Słońca

$c = 3 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$ — prędkość światła

R — parametr zderzenia promienia światła — minimalna odległość pomiędzy prostą, wzdłuż której początkowo biegnie z nieskończoności promień, a środkiem Słońca.



Rys. 1. Podwójny kwazar Q 0957 + 561A,B. Zdjęcie lewe — podwójny kwazar w pełnej krasie; zdjęcie prawe — po usunięciu dolnego obrazu kwazara widać galaktykę-soczewkę.



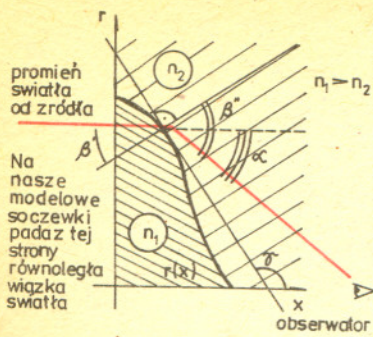
Rys. 2. Tak rozumiemy dziś konfigurację, w której powstał podwójny obraz kwazara.

Już wiosną 1980 roku odkryto (znowu przy współdziałaniu R. Weymanna) drugi osobliwy obiekt, którego morfologię wytłumaczono przyjmując hipotezę soczewki grawitacyjnej, potrójny kwazar Q 1115 + 080A,B,C (znowu identyczne przesunięcia ku czerwieni i bardzo podobne widma; odległości składników ok. 2'',5). Jednak do dzisiaj, mimo usilnych prób, nie udało się znaleźć ewentualnej soczewki powodującej taką konfigurację obrazów pojedynczego źródła (istniejące modele teoretyczne sugerują, iż mogłaby to być masywna galaktyka spiralna). Mijmy nadzieję, że los będzie łaskawy i lista znanych astronomom soczewek grawitacyjnych nie skończy się na tych dwóch (a właściwie 1 + 1/2) fascynujących obiektach!

II. SOCZEWKI „GRAWITACYJNE” NA ZIEMI

Spróbujmy teraz zbudować proste modele szklanych soczewek uginających promienie światła podobnie do soczewek grawitacyjnych — punktowych i rozciąglych. Pamiętajmy, że masa punktowa (np. Słońca) ugina promienie zgodnie z formułą:

$$\alpha_{\odot} = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}} \frac{R_{\odot}}{R} = 1''.75 \left(\frac{R_{\odot}}{R} \right).$$



Rys. 3.

Dla galaktyk z rozciągniętymi otoczkami (tzw. halo), w których gęstość maleje proporcjonalnie do $\frac{1}{r^2}$ (r — odległość od środka galaktyki), kąt ugięcia promienia światła w przybliżeniu nie zależy od parametru zderzenia. Przyjmujemy, że dla dużej, masywnej galaktyki prawdziwa jest zależność:

$$(2) \quad \alpha_G \cong \text{const} = 3''.$$

Spójrzmy teraz na rysunek obok. Przedstawia on przekrój przez górną część naszej modelowej soczewki wykonanej z materiału o współczynniku załamania n_1 . Lewa jej ściana dla uproszczenia rozważań jest płaska, prawa opisywana jest poszukiwaną funkcją $r(x)$. Ośrodek między obserwatorem i soczewką ma współczynnik załamania n_2 . Z rysunku widać, że

$$\frac{dr}{dx} = \text{tg} \gamma' = -\text{ctg} \beta'.$$

Z prawa Snelliusa wiadomo, że $\frac{n_1}{n_2} \sin \beta' = \sin \beta'' = \sin(\beta' + \alpha) = \sin \beta' \cos \alpha + \cos \beta' \sin \alpha$.

Z poprzednich rozważań wiemy, że kąt α jest bardzo mały (rzędu sekund łuku), więc prawdziwe jest przybliżenie $\sin \alpha \cong \alpha$, $\cos \alpha \cong 1$.

Otrzymujemy więc z prawa Snelliusa równość $\frac{n_1}{n_2} = 1 + \alpha \text{ctg} \beta'$.

Ostatecznie równanie różniczkowe opisujące kształt soczewki ma następującą postać

$$(3) \quad \frac{dr}{dx} = -\frac{\left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)}{\alpha(r)}.$$

Aby to równanie rozwiązać wykorzystamy nasze założenia o kształcie funkcji $\alpha(r)$.

1. Soczewka punktowa — Słońce.

$$\alpha_{\odot}(r) = 1'',75 \left(\frac{r}{R}\right)^{-1} = 1'',75 r^{-1}.$$

Niech $x^* = x/R$.

Z równania (3) mamy $\frac{dr^*}{r^*} = -A \cdot dx^*$, $A = 1,2 \times 10^5 \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)$.

Rozwiązanie ma postać $r^*(x^*) = r^*(0)e^{-A \cdot x^*}$.

Soczewka ta formą przypomina podstawkę kieliszka do wina.

Ponieważ tarcza Słońca jest nieprzezroczysta, przyjmujemy taki model soczewki jak na rysunku obok.

Poszukajmy teraz x^* w naszym modelu z $r^*(0) = 10$:

$$r^*(x_0^*) = 1 = 10e^{-A \cdot x_0^*}, \quad \text{stąd } x_0^* = \frac{1,9 \times 10^{-5}}{\frac{n_1}{n_2} - 1}.$$

Czytelnik z łatwością sprawdzi, że jeżeli krążek o średnicy 1 cm umieścimy około 107 cm od oka, to ma on taką samą średnicę kątową jak Słońce na niebie. Wybierzmy więc w naszym modelu $R_{\odot} = 5$ mm (i oglądajmy go z ok. 107 cm), co oznacza, że soczewka ma średnicę 10 cm i grubość (w środku):

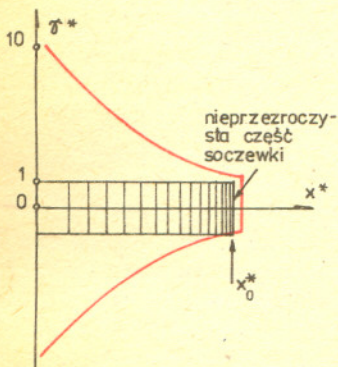
$$(4) \quad x_0 = \frac{10^{-4}}{\frac{n_1}{n_2} - 1} \text{ mm.}$$

2. Soczewki rozciągnięte — galaktyki

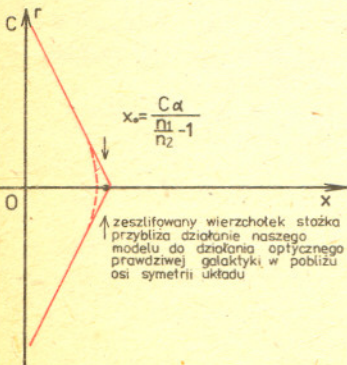
Podstawiając (2) do równania (3) otrzymujemy

$$dr = -\frac{\frac{n_1}{n_2} - 1}{\alpha} dx, \quad \text{czyli } r = -\frac{\frac{n_1}{n_2} - 1}{\alpha} x + C.$$

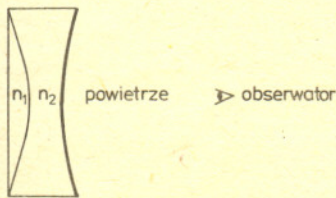
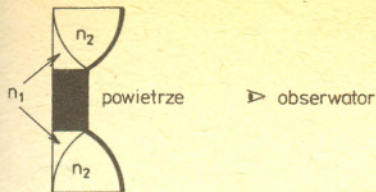
Z rysunku obok widzimy, że soczewka ta ma prostą formę stożka. Ponieważ zakładamy, że galaktyka jest „przezroczysta”, nie zasłaniamy centralnej części soczewki. Ponieważ promienie przechodzące przez środek galaktyki są uginane znacznie słabiej niż promienie przechodzące przez jej otoczkę (dlatego pisaliśmy $\alpha_G \cong \text{const}$) — zeszlifujemy środek soczewki tak jak na rysunku. Niech ta soczewka, tak jak poprzednia, ma średnicę około 10 cm (tzn. $C = 5$ cm).



Rys. 4.



Rys. 5.



Rys. 6.

Jesienią 1981 roku odkryto kolejną bliską parę kwazarów. Są one odległe od siebie o 7'',3, mają identyczne widma i przesunięcia ku czerwieni. Podejrzewa się, że jest to trzecia soczewka grawitacyjna.

Łatwo sprawdzić, że obrazy odległe na niebie o 6'' otrzymamy umieszczając ją, bagatela, ok. 3,5 km(!) od oka. Grubość jej wyraża się wzorem:

$$(5) \quad x_0 = \frac{7,2 \times 10^{-4}}{\frac{n_1}{n_2} - 1} \text{ mm.}$$

Formuły opisujące grubość naszych soczewek wskazują na istotną techniczną trudność w realizacji ewentualnej budowy takich „poglądowych” modeli. Otóż, jeśli ośrodek o współczynniku załamania n_2 to powietrze, to mianowniki wyrażen (4,5) dla typowych szkieł (współczynnik załamania n_1) są rzędu kilku dziesiątych. Jest to nader przykra okoliczność, zważywszy na konieczność szlifowania soczewek o grubości rzędu 10^{-3} mm! Można częściowo zmniejszyć trudność wypełniając przestrzeń między obserwatorem a soczewką szkłem o współczynniku załamania troszeczkę mniejszym niż współczynnik załamania szkła z którego wykonano soczewkę, tak by bardzo mały mianownik wyrażen (4) i (5) dawał grubości soczewek np. > 1 mm. Uważny Czytelnik zauważył już zapewne, że nie trzeba wypełniać dodatkowo materiałem o współczynniku załamania n_2 całej przestrzeni między właściwą soczewką a obserwatorem. Trzeba tylko odpowiednio zeszlifować powierzchnię dzielącą dodatkową część (n_2) soczewki i powietrze. Pytanie brzmi: jaki jest kształt tych powierzchni (patrz rysunek)? Wyżej nasze modele zostały określone jako poglądowe w cudzysłowie. Dlaczego? Dlatego, że kątowa zdolność rozdzielcza oka ludzkiego jest rzędu 1 minuty łuku. Wynika z tego, że zmiany położenia na sferze niebieskiej punktów znajdujących się za naszymi soczewkami ze szkła są gołym okiem niezauważalne. Oczywiście rezultat naszych obliczeń musiał być taki, ponieważ cały czas wymagaliśmy od naszych modeli, by ugiwały promienie światła tak samo, jak prawdziwe Słońce czy galaktyka, a przecież ogniskującego działania tych ostatnich nie można zauważyć gołym okiem.

Jednak modele nasze są poglądowe w tym sensie, że pokazują jak słabymi soczewkami, w „ziemskim” rozumieniu tego słowa, są soczewki grawitacyjne, oraz pozwalają zrozumieć różnice między działaniem soczewki punktowej i soczewki rozciągłej.

Jeżeli wykonać modele analogiczne do naszych w sposób najprostszy (tzn. n_1 — współczynnik załamania szkła lub pleksiglasu, n_2 — powietrza), to uzyska się przyrządy umożliwiające demonstrację jakościowych aspektów ogniskowania grawitacyjnego. Należy pamiętać jednak, że uzyskane soczewki będą znacznie silniejszymi układami optycznymi, niż ich obserwowane astronomiczne odpowiedniki.

Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 295. Przez x_1, x_2, x_3, x_4 i x_5 oznaczmy odległości punktu P leżącego w danym pięciokącie foremnym od prostych, na których leżą boki pięciokąta. Uporządkujmy te liczby tak, by $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$. Znaleźć największą i najmniejszą możliwą wartość x_3 .

Rozwiązanie na str. 9

M 296. W równaniu $x^2 + px + q = 0$ współczynnik p jest dokładny, natomiast q znany z dokładnością do 0,001. Z jaką dokładnością potrafimy określić pierwiastki tego równania, jeżeli $\Delta = p^2 - 4q > 100$?

Rozwiązanie na str. 10

M 297. Znaleźć wszystkie takie trójki liczb naturalnych x, y, z , większych od 1, że $z|xy+1, y|xz+1, x|yz+1$. ($p|q$ oznacza, że p jest dzielnikiem q).

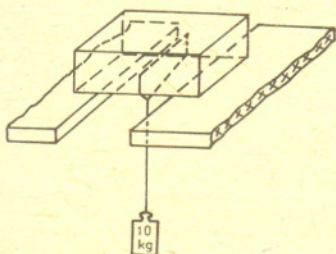
Rozwiązanie na str. 7

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

F 113. Miedzianą rurą przesyłana jest para wodna. W celu zmniejszenia strat ciepłych położono na rurze warstwę materiału izolującego (źle przewodzącego ciepło) o stałej grubości. Okazało się jednak, że straty ciepłe zamiast zmaleć — wzrosły. Wyjaśnić popełniony błąd. Rozwiązanie na str. 6

F 114. Jeżeli przez bryłę lodu przetrzuci się cienki, obciążony jak na rysunku drut metalowy, to po stosunkowo krótkim czasie przenika on przez lód, zaś bryła pozostaje nienaruszona. Zastąpienie drutu żyłką nylonową o tej samej średnicy nie wywołuje opisanego efektu. Dlaczego?

Rozwiązanie na str. 15



Soczewki grawitacyjne i mechanika klasyczna

Rozwińmy następujące zadanie (a po co — to się na końcu okaże): znaleźć kąt, o jaki zmienia się kierunek prędkości młej masy m przelatującej w pobliżu innej masy M . Rysunek ilustruje tę sytuację, a użyte na nim symbole nie wymagają chyba specjalnych objaśnień. Interesuje nas kąt α pomiędzy kierunkiem wektora prędkości ciała m bardzo daleko przed spotkaniem, a kierunkiem bardzo daleko po spotkaniu z masą M . Jest to kąt między asymptotami hiperboli, po której porusza się masa m nadlatując „z nieskończoności”, przy czym widać, że $\alpha = \pi - 2\psi$. Kogo rachunki zniechęcają, może teraz od razu przejść do słowa **OSTATECZNIE**, zaś chętnym przedstawiamy sposób rozwiązywania naszego zadania.

W każdej chwili x -owa składowa przyspieszenia ciała m wynosi $-\frac{GM}{r^2} \cos \varphi$ (G oznacza stałą grawitacji). Całkowita zmiana x -owej składowej prędkości jest, jak wiadomo, całką względem czasu tej składowej przyspieszenia, a więc

$$\Delta v_x = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{GM}{r^2} \cos \varphi dt.$$

Czas jako zmienną całkowania można stąd wyeliminować przy pomocy zasady zachowania momentu pędu. Mianowicie ten moment pędu wynosi $J = mr^2 \frac{d\varphi}{dt} = mRv_{\infty}$, gdzie v_{∞} oznacza prędkość ciała w nieskończoności. Zastępując zatem dt przez $d\varphi$ mamy

$$\Delta v_x = - \frac{GMm}{J} \int_{\psi}^{2\pi-\psi} \cos \varphi d\varphi = \frac{2GM}{Rv_{\infty}} \sin \psi.$$

Ale pełna zmiana x -owej składowej prędkości równa jest podwojonej wartości tej składowej w nieskończoności, gdyż składowa ta w wyniku spotkania zmienia tylko znak. Skoro więc $\Delta v_x = 2v_{\infty} \cos \psi$, to **OSTATECZNIE**

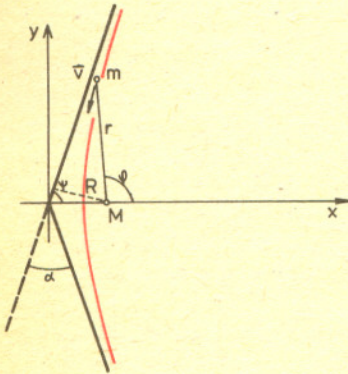
$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{GM}{Rv_{\infty}^2}.$$

Czy formułę tę można zastosować do obliczenia odchylenia promienia świetlnego w polu grawitacyjnym masy M ? Może wystarczy podstawić $v_{\infty} = c =$ prędkości światła i sprawa będzie załatwiona? Otóż takich chwytów stosować nie wolno — to mechanika klasyczna jest szczególnym przypadkiem relatywistycznej, a nie odwrotnie. Gdyby do tej formuły wstawić jednak niefrasośliwie c , to dla małych kątów (kiedy to $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$) byłoby

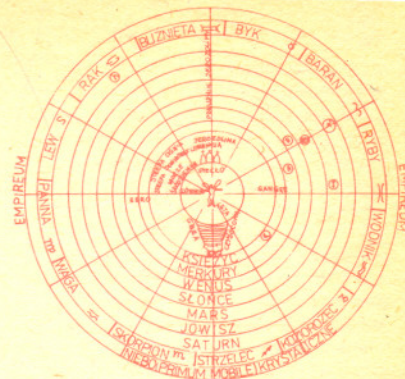
$$\alpha \approx \frac{2GM}{Rc^2},$$

podczas gdy w rzeczywistości w liczniku zamiast dwójki powinno być 4. Istnienia tej czwórki w żaden sposób nie udowodni się na gruncie mechaniki newtonowskiej, wynika ono dopiero z rzetelnego rozwiązania równań pola grawitacyjnego. Należy się tu wręcz dziwić, że poprzez tak proste klasyczne rozważania otrzymaliśmy wynik tak zbliżony z rzeczywistym, wynikającym uczciwie z teorii względności i z obserwacji — w końcu chodzi raptem o czynnik 2!

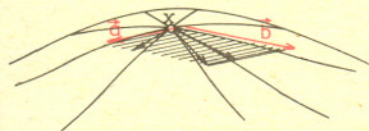
W praktyce uginanie światła przez realny obiekt („soczewkę grawitacyjną”) zachodzi w sposób mocno skomplikowany. W zjawisku tym ma znaczenie zarówno rozkład masy w tym obiekcie, jak i jego położenie względem kwazara, spełniającego rolę punktowego źródła światła. O ile obraz kwazara 0957+561 jest chyba dość dobrze wytłumaczony i galaktyka-soczewka jest po prostu zaobserwowana, to potrójny kwazar 1115+080 jest bardziej zagadkowy. Otóż żaden jako tako sensowny rozkład masy w galaktyce-soczewce nie jest w stanie wyjaśnić trójkątnego ustawienia składników obrazu. Byłoby w porządku, gdyby składniki te leżały w przybliżeniu na jednej prostej; w dodatku zresztą teoria wymaga, aby składników była liczba w każdym razie nieparzysta. W tej sytuacji kwazar 0957+561 jest istotnie najprawdopodobniej potrójny, tylko że jeden ze składników pokrywa się z galaktyką-soczewką. Można by próbować sprawdzić, czy obraz „trójkątny” nie może być wywołany przez kilka galaktyk-soczewek, ale taka sytuacja od razu wygląda na bardzo mało prawdopodobną. W związku z tym grupa amerykańskich astronomów przeprowadziwszy stosowne obliczenia modelowe doszła do wniosku, że najprawdopodobniej obraz kwazara 1115+080 jest w rzeczywistości pięciokrotny, gdzie składnik A jest podwójny, a piątego nie widać wskutek jego bardzo małej jasności. Obserwacje dowodzą, że najjaśniejszy składnik A jest istotnie wydłużony w oczekiwanym kierunku tak, że może być uważany za nałożenie się dwóch obrazów. Niestety, nadal nie została zaobserwowana galaktyka-soczewka. Być może jest ona niewidoczna po prostu z powodu wielkiej odległości i dlatego przedstawiona tu interpretacja osobliwego zjawiska będzie z pewnością jeszcze wielokrotnie sprawdzana.



Rys. 1. Tak wyobrażał sobie strukturę Wszechświata Dante Alighieri (rysunek pochodzi z „Boskiej Komedi” wydanej przez PIW w 1975 r.). Wszechświat Dantego ma wyróżnione miejsca i kierunki, nie jest więc ani izotropowy, ani jednorodny.

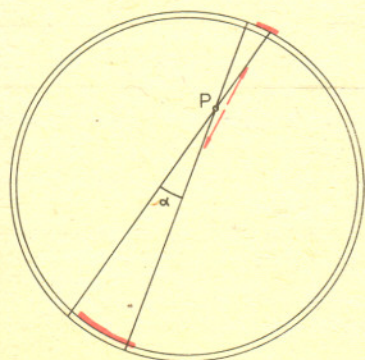


Aby zmierzyć krzywiznę Gaussa powierzchni dwuwymiarowej w punkcie X należy porównać promienie okręgów ściśle stycznych (najlepiej przylegających w otoczeniu punktu X) do geodezyjnych przechodzących przez ten punkt i wybrać promień najmniejszy (r_1) i największy (r_2). Krzywizna w punkcie X wynosi $K(X) = -1/r_1 r_2$, gdy środki obu okręgów leżą po tej samej stronie powierzchni, a $+1/r_1 r_2$, gdy leżą po przeciwnych stronach. Pojęcie to można uogólnić na przestrzeń trójwymiarową wprowadzając tak zwaną krzywiznę w dwukierunku $K(X, a, b)$. Przepis na obliczenie tej wielkości jest następujący: 1°. Zadajemy w punkcie X dwa wektory a i b . 2°. Spośród geodezyjnych przechodzących przez X wybieramy te, które w punkcie X mają styczne leżące w płaszczyźnie rozpiętej na wektorach a i b . 3°. Wyznaczamy krzywiznę Gaussa dwuwymiarowej powierzchni utworzonej przez te geodezyjne. Krzywizna ta jest równa poszukiwanej wielkości $K(X, a, b)$. W przestrzeni jednorodnej i izotropowej krzywizna $K(X, a, b)$ jest jednakowa we wszystkich punktach X i nie zależy od tego, w jaki sposób wybraliśmy wektory a i b .



Rys. 2. Konstrukcja geometryczna służąca do obliczenia krzywizny Gaussa w przestrzeni trójwymiarowej.

Twierdzenie Birkhoffa w przestrzeni euklidesowej udowodnił już Newton. Idea dowodu przedstawiona jest na rysunku. Natężenie pola grawitacyjnego jest wprost proporcjonalne do masy będącej źródłem tego pola i odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości. Rozważmy dwa fragmenty wydrążonej cienkościennej kuli widziane z punktu P pod małym kątem α . Pola powierzchni, a więc i masy fragmentów, są proporcjonalne do kwadratu odległości od P . Dlatego natężenia pola od fragmentów nie zależą od odległości i znoszą się. Dalszy ciąg dowodu pozostawiamy Czytelnikowi.



Dr Roman JUSZKIEWICZ

Według ogólnej teorii względności, własności geometryczne przestrzeni zależą od rozkładu gęstości, ciśnienia i prędkości materii. Zastanówmy się nad tym, jakie własności geometryczne miałby nasz Wszechświat, gdyby materia była w nim rozłożona jednorodnie i izotropowo. Jednorodność oznacza brak wyróżnionych punktów we Wszechświecie, a izotropia — brak wyróżnionych kierunków.

Dzięki jednorodności i izotropii czterowymiarową czasoprzestrzeń mieszczącą w sobie cały obecny Wszechświat wraz z całą jego przeszłością i przyszłością można pokroić na trójwymiarowe plasterki, będące powierzchniami stałego czasu. Każdy taki plasterek zawiera w sobie cały Wszechświat „uchwycony” w pewnej chwili czasu. Krzywizna Gaussa takiego trójwymiarowego plastra musi być jednakowa we wszystkich miejscach i może zależeć jedynie od czasu. Mamy więc do czynienia z trójwymiarową przestrzenią o stałej krzywiznie. Możliwe są trzy rodzaje takich przestrzeni: płaska, dla której krzywizna Gaussa znika ($K = 0$), eliptyczna ($K > 0$) oraz hiperboliczna ($K < 0$).

Zostawmy jednak na razie geometrię i zastanówmy się nad dynamiką. Rozważany tutaj model Wszechświata został po raz pierwszy zbadany przez Aleksandra Friedmana, radzieckiego matematyka, który w roku 1922 znalazł ogólne jednorodne i izotropowe rozwiązanie równań Einsteina. Powtórzenie rachunków Friedmana w popularnym artykule jest oczywiście niemożliwe. Na szczęście istotę sprawy można zrozumieć poprzestając na newtonowskiej teorii grawitacji, przy czym, jeżeli będziemy dostatecznie ostrożni, otrzymamy taki sam wynik! Skorzystamy przy tym z twierdzenia Birkhoffa.

Twierdzenie to (obowiązujące zarówno w teorii Einsteina jak i Newtona) mówi, że pole grawitacyjne wytwarzane na powierzchni kuli przez sferycznie symetryczny rozkład materii wypełniającej całą przestrzeń pochodzi jedynie od materii zawartej wewnątrz tej kuli. Zatem, aby prześledzić względny ruch dowolnej pary cząstek, wystarczy wokół jednej z cząstek narysować kulę o promieniu równym dzielącej je odległości i następnie badać ruch takiego kulistego obłoku materii, nie przejmując się resztą Wszechświata.

Teoria Newtona dostarcza poprawnego opisu ruchu materii wtedy, gdy pole grawitacyjne jest „słabe”, tj. gdy bezwymiarowy parametr Φ/c^2 (gdzie Φ = potencjał grawitacyjny, c = prędkość światła) jest mały w porównaniu z jednością. Przy $\Phi/c^2 \ll 1$ przewidywania teorii grawitacji Einsteina pokrywają się z przewidywaniami teorii Newtona, a zakrzywienie przestrzeni zanika. Gdy cała przestrzeń jest wypełniona materią o stałej gęstości ρ , potencjał grawitacyjny na

powierzchni kuli o promieniu r wynosi $\frac{4}{3}\pi r^2 G \rho$, gdzie G jest stałą grawitacyjną (oczywiście posłużyliśmy się tu twierdzeniem Birkhoffa). Warunek $\Phi/c^2 \ll 1$ jest więc spełniony wtedy, gdy

$$(1) \quad r \ll c(G\rho)^{-\frac{1}{2}}$$

Zatem wybierając obłok o dostatecznie małym promieniu będziemy mogli prześledzić jego ewolucję posługując się mechaniką newtonowską. Zastanówmy się najpierw nad tym problemem z czysto kinematycznego punktu widzenia.

Wysoki stopień symetrii naszego modelu nakłada silne ograniczenia na liczbę możliwych ruchów ośrodka. Jedynym ruchem, który zachowuje izotropię i jednorodność jest taki ruch, w którym odległości r_0 i r między dowolnymi dwoma punktami w chwilach t_0 i t spełniają warunek

$$(2) \quad r = R(t)r_0/R_0,$$

gdzie funkcja $R(t)$, zwana czynnikiem ekspansji, jest taka sama dla wszystkich par punktów (R_0 jest stałą, równą wartości R w chwili t_0).

Pole prędkości materii $v = dr/dt$ można wyznaczyć różniczkując równanie (2) względem czasu. Otrzymamy wówczas związek

$$(3) \quad v = Hr,$$

gdzie $H(t) = R^{-1}dR/dt$ jest tzw. stałą Hubble'a („stała” ta jest stała jedynie w przestrzeni,



Rozwiązanie zadania F 113

Straty ciepłe z powierzchni rury, a następnie z powierzchni izolacji odbywają się na drodze przewodzenia. W takim przypadku ilość ciepła tracona w jednostce czasu jest proporcjonalna do $(T_s - T_o)S$, gdzie T_s — temperatura powierzchni oddającej ciepło, T_o — temperatura otoczenia, S — pole powierzchni. Położenie warstwy izolującej zmniejszy pierwszy z czynników, zwiększy natomiast drugi. Może się więc zdarzyć, że wartość iloczynu wzrośnie. Jeśli ponadto współczynnik proporcjonalności nie zmaleje zbyt drastycznie, możemy mieć do czynienia z opisanym efektem. Większą szansę wystąpienia efektu dają kiepskie materiały izolujące.

Rozwiązanie równań różniczkowych opisujących transport ciepła w danym przypadku podaje precyzyjny warunek, przy którym wystąpi wzrost strat ciepłych. Wynika z niego dodatkowo, że efektowi sprzyjają małe średnice rurek. Opisany efekt, negatywny w danym przypadku, znajduje pozytywne wykorzystanie w elektrotechnice. Nałożenie odpowiedniej izolacji na przewodniki prądu ułatwia odprowadzenie wydzielającego się ciepła.

zależy jednak od czasu). Możliwa jest zatem jednorodna ekspansja (gdy $H > 0$) lub kurczenie ($H < 0$), przy czym w obu przypadkach punkty ośrodka oddalają się (przy $H > 0$) lub zbliżają (przy $H < 0$) do siebie z prędkością wprost proporcjonalną do dzielącej je odległości. Powróćmy jednak do naszego „obłoku próbnego”. Energia kinetyczna cząstki o masie m , znajdującej się na powierzchni sfery o promieniu r , wynosi $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mH^2r^2$. Łatwo jest również obliczyć energię potencjalną takiej cząstki — jest ona równa $-\frac{4\pi}{3}mr^2\rho G$. Całkowita energia wynosi zatem

$$(4) \quad E = mr^2 \left(\frac{H^2}{2} - \frac{4\pi G \rho}{3} \right) = \text{const.}$$

Równanie to można uzupełnić jeszcze zasadą zachowania masy obłoku

$$(5) \quad M = \frac{4}{3}\pi \rho r^3 = \text{const.}$$

Rozwiązując równania (4) i (5) można znaleźć zależność gęstości materii ρ i czynnika ekspansji R od czasu. Okazuje się przy tym, że istnieją trzy typy rozwiązań. Gdy $E > 0$, grawitacja nie jest w stanie zahamować procesu ekspansji naszego „obłoku próbnego”. Obłok, dla którego $E < 0$, jest grawitacyjnie związany i będzie się rozszerzał aż do chwili, gdy wytraci całą energię kinetyczną, po czym rozpocznie się proces kurczenia. Równania (4) i (5) najłatwiej jest rozwiązać w przypadku, gdy $E = 0$. Gęstość materii jest wówczas równa tzw. gęstości krytycznej

$$(6) \quad \rho_{kr} = 3H^2/8\pi G,$$

a rozwiązania mają postać

$$(7) \quad R(t) = R_0 \cdot (t/t_0)^{\frac{2}{3}}$$

oraz

$$(8) \quad \rho(t) = 1/6\pi G t^2.$$

Widać stąd, że obłok, w którym $\rho = \rho_{kr}$ ewoluuje podobnie do rozpatrywanego wcześniej obłoku o dodatniej energii ($E > 0$, $\rho < \rho_{kr}$): w miarę upływu czasu promień obłoku nieograniczenie rośnie, a gęstość materii maleje.

Warto jest porównać to rozwiązanie z rozwiązaniem z wyłączoną grawitacją. Kładąc $G = 0$ w równaniu (4) dostaniemy $r^2 H^2 = \text{const.}$, skąd $dR/dt = \text{const.}$ lub

$$(7A) \quad R = R_0 \cdot (t/t_0).$$

Otrzymaliśmy wynik zgodny z oczekiwaniami: wyłączając ciężenie wyłączyliśmy jedyną siłę działającą na cząstki wypełniające obłok i dlatego poruszają się one ruchem jednostajnym. Porównując zależność (7A) z (7) widzimy jak obecność pola grawitacyjnego wpływa na zachowanie obłoku — ekspansja odbywa się wolniej.

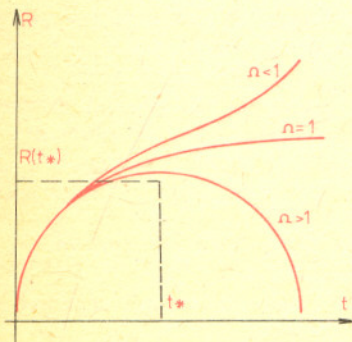
Klasyfikując modele Friedmana zamiast energii całkowitej E wygodniej jest posługiwać się bezwymiarowym parametrem

$$(9) \quad \Omega = \rho/\rho_{kr}.$$

Na podstawie otrzymanych dotąd wyników można powiedzieć, że jednorodne i izotropowe wszechświaty, w których gęstość materii jest mniejsza lub równa krytycznej ($\Omega \leq 1$), zawsze się rozszerzają, natomiast wszechświaty, w których $\rho > \rho_{kr}$ ($\Omega > 1$) najpierw się rozszerzają, a następnie kurczą.

Wszystkie modele Friedmana mają dwie wspólne cechy. Pierwszą z nich jest istnienie osobliwości (stanu, w którym gęstość materii jest nieskończona) przy $t = 0$. Drugą jest niestacjonarność. O istnieniu osobliwości można się przekonać kładąc $t = 0$ w równaniu (8) odpowiadającym modelowi z $\Omega = 1$. Zachowanie takie występuje również w modelach odpowiadających $\Omega \neq 1$. Przez pewien czas sądzono, że istnienie osobliwości w modelach Friedmana jest wynikiem symetrii i aby usunąć osobliwość wystarczy wprowadzić anizotropię i niejednorodność. Okazało się jednak, że osobliwość jest „nieusuwalna”. Udowodnili to dwaj fizycy brytyjscy — S. Hawking i R. Penrose — opierając się na ogólnej teorii względności i pewnych (bardzo „rozsądnych”) dodatkowych założeniach o postaci zależności między ciśnieniem a gęstością materii.

Czy można zatem twierdzić, że Wszechświat rozpoczął swoje istnienie od stanu, w którym gęstość materii była nieskończona? Z całą pewnością byłoby to przedwczesne. Do opisu bardzo wczesnego Wszechświata niezbędna jest kwantowa teoria grawitacji, która jeszcze nie została stworzona i nie można wykluczyć, że osobliwości pojawiają się w wyniku nieuzasadnionego ekstrapolowania wstecz naszej niekwantowej teorii grawitacji aż do chwili $t = 0$ (teoria niekwantowa powinna „puścić w szwach” dla czasów mniejszych od tzw. czasu Plancka, równego 10^{-43} sekundy).



Rys. 3. Ewolucja czynnika ekspansji w modelach o trzech różnych wartościach parametru Ω .



Rozwiązanie zadania M 297. Liczby x, y, z muszą być różne i możemy zatem przyjąć $x < y < z$. Mnożąc stronami równości $xy+1 = az, yz+1 = bx, xz+1 = cy$ mamy $(xy)^2 + xyz(x+y+z) + xy+yz+xz+1 = abxyz$, skąd $xy+yz+xz+1 = kxyz$, $k \geq 1$, a ponieważ $x < y < z$, więc $3yz+1 > xyz$ i $x \leq 3$. Jeśli teraz $x = 3$, to $3(y+z)+yz+1 \geq 3yz$ i $6z+1 \geq 2yz$, co jest niemożliwe, bo $3 < y < z$. Pozostaje więc przypadek $x = 2$, w którym z nierówności $2(y+z)+yz+1 \geq 2yz$, czyli $2(y+z)+1 \geq yz$ mamy $4z+1 > yz$ i $y \leq 4$. Gdyby $y = 4$, to mielibyśmy $2(4+z)+1 \geq 4z$, czyli $9 \geq 2z$, co jest niemożliwe, ponieważ $4 < y < z$. Pozostaje więc jedyna możliwość $y = 3$, dająca trójkę $(2, 3, 7)$.

Z kolei przyczyną niestacjonarności jest fakt, że dynamika tych modeli jest określona wyłącznie przez grawitację. W układzie złożonym z ciał oddziaływających ze sobą wyłącznie za pośrednictwem grawitacji stan równowagi jest niemożliwy. Równowagę wprowadzić mogłyby jedynie siły „pozagrawitacyjne” tak, jak dzieje się to np. w Słońcu, gdzie siły ciężkości równoważone są przez ciśnienie gazu i promieniowania. Gdy typowe odległości między oddziaływającymi ciałami są tak wielkie jak odległości rozpatrywane w kosmologii, wszystkie „pozagrawitacyjne” rodzaje sił stają się znikomo małe w porównaniu z siłami ciężkości, a stan równowagi staje się niemożliwy do zrealizowania.

Analiza oparta na mechanice newtonowskiej, która okazała się tak efektywna, gdy chodziło o zbadanie ewolucji lokalnych własności Wszechświata, niestety nie udzieli nam odpowiedzi na pytanie globalne: jaka jest krzywizna Wszechświata? Chcąc odpowiedzieć na to pytanie nie można już się wymigać od rachunków opartych na ogólnej teorii względności, toteż przytoczę od razu gotowy wynik

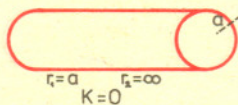
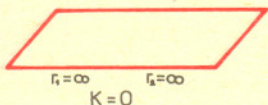
$$(10) \quad K = \frac{8\pi G \rho}{3c^2} - \frac{H^2}{c^2}.$$

Z zależności tej widać w jaki sposób rozkład gęstości materii i jej ruch wpływa na zakrzywienie przestrzeni.

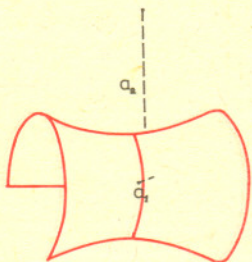
W tym miejscu proponuję Czytelnikowi chwilę wytchnienia i zabawy w geometrię zaściankową (w odróżnieniu od Globalnej Geometrii Wszechświata jako całości). Spróbujemy mianowicie odpowiedzieć na pytanie, jaki jest stosunek obwodu Słońca do jego promienia? Skorzystamy przy tym z założenia, że rozkład materii na zewnątrz Słońca jest jednorodny i izotropowy. Przy takim założeniu możemy skorzystać z twierdzenia Birkhoffa i obliczając krzywiznę Gaussa w otoczeniu Słońca możemy je traktować jak statyczny ($H = 0$), jednorodny i izotropowy wszechświat. Średnia gęstość materii Słońca wynosi $\rho_{\odot} = 1,4 \text{ g cm}^{-3}$ i wobec tego $K = 8\pi G \rho_{\odot} / 3c^2 \approx 8 \cdot 10^{-28} \text{ cm}^{-2}$. Promień równikowy Słońca wynosi $R_{\odot} = 7 \cdot 10^5 \text{ km}$. Równik Słońca jest zatem krótszy od $2\pi R_{\odot}$ o

$$\pi K R_{\odot}^3 / 3 \approx 3 \text{ km},$$

co odpowiada łukowi ok. $1''$. Oczywiście zmierzenie takiego „niedoboru” jest nierealne.



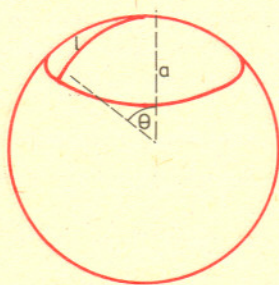
Nieskończona płaszczyzna i powierzchnia nieskończonego walca stanowią przykłady dwuwymiarowych powierzchni o krzywiznie zerowej. Geometria na takich powierzchniach jest lokalnie geometrią euklidesową (suma kątów trójkąta = π , stosunek długości okręgu do jego promienia = 2π).



$$r_1 = a_1 \quad r_2 = a_2$$

$$K = -1/a_1 a_2 < 0$$

Przykład dwuwymiarowej powierzchni o ujemnej krzywiznie. Na takiej powierzchni obowiązuje geometria Bolyai — Łobaczewskiego (suma kątów trójkąta $< \pi$, stosunek długości okręgu do jego promienia $> 2\pi$).



$$r_1 = r_2 = a$$

$$K = 1/a^2 > 0$$

Powierzchnia kuli o promieniu a stanowi przykład dwuwymiarowej powierzchni o krzywiznie dodatniej równej $1/a^2$. Odpowiednikiem prostej na takiej powierzchni jest łuk wielkiego okręgu, a odpowiednikiem okręgu o promieniu l jest okrąg złożony z punktów, których odległość (mierzona wzdłuż łuku wielkiego po powierzchni kuli) od pewnego punktu zwanego środkiem wynosi l . Dla okręgu przedstawionego na rysunku $l = a\theta$. Długość takiego okręgu równa jest $2\pi a \cdot \sin\theta$. Zatem stosunek długości okręgu do promienia wynosi $2\pi \sin\theta/\theta$ i jest mniejszy od 2π .

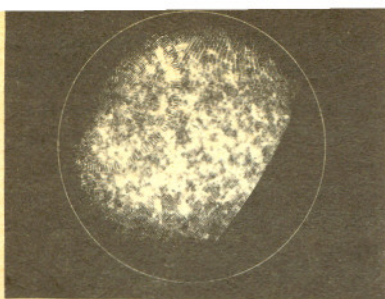
O słuszności bardzo ogólnego twierdzenia mówiącego o tym, że każda zakrzywiona powierzchnia jest lokalnie prawie płaska (co oznacza, że badając dostatecznie małe fragmenty powierzchni powinniśmy otrzymać wyniki dowolnie bliskie tych, jakie uzyskalibyśmy w geometrii euklidesowej), można się łatwo przekonać przechodząc do granicy $\theta \rightarrow 0$. Rzeczywiście, dla małych θ (tj. dla okręgów o dostatecznie małych promieniach) dostaniemy

$$\frac{\text{długość okręgu}}{\text{promień okręgu}} \approx 2\pi \left(1 - \frac{\theta^2}{6}\right) = 2\pi \left(1 - \frac{1}{6} K l^2\right).$$

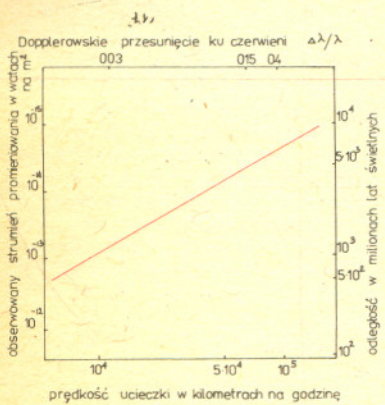
Skorzystaliśmy tu z faktu, że dla małych kątów $\sin\theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{6}$, oraz z tego, że $\theta = l/a = K^{1/2} l$.

Widać stąd, że odstępstwa od geometrii Euklidesa są tym mniejsze, im mniejszy jest promień rozpatrywanego okręgu od „promienia krzywizny” przestrzeni $K^{-1/2}$. To samo można udowodnić dla przestrzeni o ujemnej krzywiznie. Gdy w takiej przestrzeni rozpatrujemy obszary o rozmiarach $\ll [K]^{-1/2}$ możemy bezpiecznie posługiwać się geometrią Euklidesa. Podobna prawidłowość występuje również w przestrzeniach o większej liczbie wymiarów. W szczególności w przestrzeni trójwymiarowej o dodatniej krzywiznie K stosunek obwodu kuli do jej promienia r wynosi $2\pi \left(1 - \frac{1}{6} K r^2\right)$, gdy $r \ll K^{-1/2}$.

Suma kątów trójkąta w przestrzeni o dodatniej krzywiznie jest większa od π .



Rys. 4. Tak wygląda wielkoskalowy rozkład galaktyk w północnej półkuli nieba. Każdy jasny kwadracik reprezentuje klatkę $1^\circ \times 1^\circ$ w katalogu galaktyk Obserwatorium Licka. Rozmiar każdego kwadracika jest wprost proporcjonalny do liczby galaktyk o jasności obserwowanej $6,3 \cdot 10^{-16} \text{ W/m}^2$. Korzystając z rysunku 5 można oszacować, jak głęboko sięga katalog. Z takiego oszacowania wynika, że zasięg katalogu powinien być rzędu 10 miliardów lat świetlnych. Niejednorodności w rozkładzie przestrzennym galaktyk widoczne na mapie mają charakterystyczne rozmiary < 200 milionów lat świetlnych.



Rys. 5. Zależność między jasnością obserwowaną i prędkością dla najjaśniejszych galaktyk w 42 gromadach galaktyk. Każda gromada ma zwykle taką najjaśniejszą galaktykę w pobliżu swojego centrum, przy czym jasności absolutne najjaśniejszych galaktyk w poszczególnych gromadach są niemal identyczne, co umożliwia gładkie przejście od zależności (jasność obserwowana — prędkość) do zależności (odległość — prędkość) i narysowanie obrazka takiego jak powyższy. Prędkość ucieczki galaktyk wyznacza się z przemieszczenia prążków w ich widmach wywołanego efektem Dopplera. O metodach wyznaczania odległości tych galaktyk można się dowiedzieć z książki B. Muchotrzeb i B. Paczyńskiego „Granice Wszechświata” PWN 1981, wartej zresztą polecenia każdemu Czytelnikowi, który uzna temat poruszony w tym artykule za interesujący.

Jednym z klasycznych dowodów słuszności ogólnej teorii względności jest obserwacyjne potwierdzenie przewidzianego przez tę teorię zakrzywienia promieni świetlnych w polu grawitacyjnym Słońca. Ponieważ i w tym przypadku efekt powinien być rzędu KR_{\odot}^2 , więc można się spodziewać, że kąt odchylenia promieni jest porównywalny z otrzymanym przez nas „niedoborem”. Jest tak w istocie: kąt ten wynosi $1'',75$.
Powróćmy jednak do kosmologii. Z (10) wynika, że krzywizna przestrzeni zmienia się wraz z upływem czasu, przy czym Globalna Geometria Wszechświata jest

- eliptyczna $(K > 0)$, gdy $\Omega > 1$,
- płaska (euklidesowa) $(K = 0)$, gdy $\Omega = 1$,
- hiperboliczna $(K < 0)$, gdy $\Omega < 1$.

Wszechświat, w którym $\Omega > 1$, ma skończoną masę i skończony obwód, jest „zamknięty”. Przedłużając odcinek po powierzchni stałego czasu dotrzemy w końcu do miejsca, z którego wyruszyliśmy. Zupełnie inny jest świat, w którym $\Omega \leq 1$: ma on nieskończoną masę, a powierzchnie $t = \text{const}$ są w takim świecie „otwarte” (tj. przedłużając odcinek po takiej powierzchni nigdy nie osiągniemy punktu wyjścia).
A jaka jest geometria „prawdziwego Wszechświata”, tego w którym żyjemy? Odpowiedzi na to pytanie udzielić mogą jedynie obserwacje astronomiczne. Przede wszystkim należy sprawdzić, w jakim stopniu model Friedmana naśladuje realny Wszechświat, a następnie (gdyby okazało się, że przewidywania modelu znajdują potwierdzenie w obserwacjach) — zmierzyć parametry Ω i H .

Czy rozkład materii w realnym Wszechświecie jest jednorodny i izotropowy? Widok nocnego nieba usianego gwiazdami wydaje się temu przeczyć. O tym, że Wszechświat nie jest pozbawiony struktury świadczą również obserwacje astronomiczne obejmujące najbliższe 100 milionów lat świetlnych wokół nas: gwiazdy skupione są w galaktykach, które również nie są rozmieszczone w przestrzeni równomiernie i grupują się w gromady galaktyk. Okazuje się jednak, że stopień niejednorodności Wszechświata zależy od rozmiarów fragmentów które badamy: im większe są to rozmiary, tym mniej niejednorodny jest rozkład materii. W obszarach o rozmiarach przekraczających miliard lat świetlnych materia rozłożona jest już całkowicie równomiernie (liczba galaktyk zawartych w dowolnie wybranym sześcianie o krawędzi miliard lat świetlnych nie zależy od jego położenia w przestrzeni). Możemy się spodziewać więc, że w dostatecznie wielkich obszarach Wszechświat zachowuje się zgodnie z przewidywaniami modelu Friedmana. Pierwszym astronomem, który przekonał się o tym był Amerykanin Edwin Powell Hubble. Pod koniec lat dwudziestych, obserwując dalekie galaktyki za pomocą teleskopu na Mt. Wilson w Kalifornii, Hubble zauważył, że oddalają się one od nas z prędkością wprost proporcjonalną do odległości. Związek między prędkością ucieczki galaktyk, a odległością jest więc dokładnie taki, jak w modelu Friedmana: $v = Hr!$ Według obecnych danych obserwacyjnych stała Hubble’a ma wartość

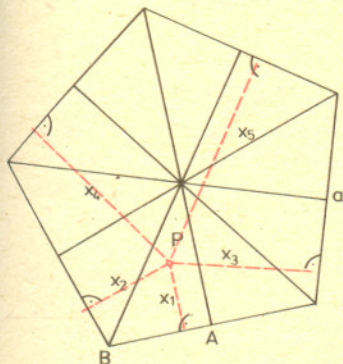
$$H = 17 \text{ km/s na milion lat świetlnych,}$$

przy czym wartość ta jest jednakowa we wszystkich kierunkach (ekspansja jest izotropowa). Fakt, że Wszechświat się rozpręża, oznacza, iż w przeszłości był bardziej gęsty. Ekspansja Wszechświata jest oczywiście procesem adiabatycznym, tj. zachodzi bez wymiany ciepła z otoczeniem (dzieje się tak po prostu dlatego, że Wszechświat nie ma żadnego „otoczenia”). Oznacza to, że materia w przeszłości była nie tylko gęstsza, ale i gorętsza niż obecnie. Ciekawe, co też mogło dziać się w środku naszego obłoku próbnego, gdy miał on temperaturę 10^{11} K ?
To już jednak całkiem inna historia.

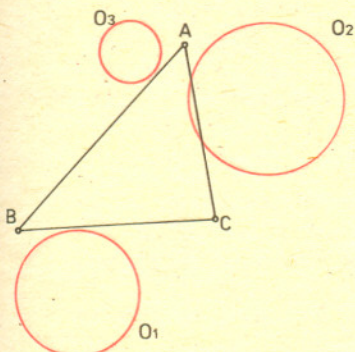
Nasz obłok próbny nie może być ani za mały (bowiem aby można było uznać rozkład materii za jednorodny, promień obłoku powinien wynosić co najmniej 300 milionów lat świetlnych), ani za duży (aby opis newtonowski był poprawny). Spełnienie obu tych warunków jest możliwe tylko wtedy, gdy $(G\rho)^{-1/2} c \gg 300 \text{ mln lat świetlnych}$. Nie znamy dokładnej wartości średniej gęstości materii we Wszechświecie, jednak wszystkie dane obserwacyjne, nawet bardzo ostrożnie interpretowane, wskazują, że nie jest ona większa od $10^{-29} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$. Stąd łatwo obliczyć, że wielkość $(G\rho)^{-1/2} c$ nie może być mniejsza od kilku miliardów lat świetlnych. Tak więc opis newtonowski możemy spokojnie stosować do obłoków zawierających wiele gromad galaktyk.

O tym, że model Friedmana dostarcza opisu uśrednionego po bardzo dużych obszarach warto jest pamiętać wtedy, gdy mówi się o „ekspansji Wszechświata”. Opis ten zupełnie zawodzi, gdy w grę wchodzi „małe” (w porównaniu z 300 milionami lat świetlnych) fragmenty Wszechświata: np. średnie odległości między galaktykami należącymi do tej samej gromady są stałe, podobnie Układ Słoneczny nie zmienia swoich rozmiarów (jeśli wykluczyć niektóre modele oparte na Hipotezie Wielkich Liczb — red.). Chciałbym również zapewnić Czytelnika, że rozmiary tej strony będą w przyszłym roku dokładnie takie same jak teraz.

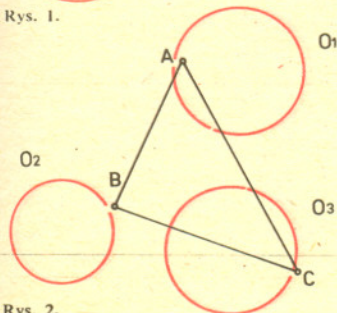
Rozwiązanie zadania M 295. Prowadząc proste łączące środek pięciokąta z jego wierzchołkami podzielimy pięciokąt na 10 trójkątów prostokątnych. Ze względu na symetrię naszej figury wystarczy rozpatrywać punkt P położony w jednym z tych trójkątów.



Korzystając teraz z tego, że z odległości punktu A od prostych p_1, p_2 mniejsza jest odległość od prostej leżącej po tej samej stronie dwusiecznej kąta pomiędzy p_1 i p_2 co i A , zauważymy, że numeracja odległości x_1, x_2, x_3, x_4 i x_5 jest taka, jak na rysunku. Łatwo teraz zauważyć, że x_3 przyjmuje wartość najmniejszą ($a \cos 18^\circ$)/2, gdy P jest środkiem boku pięciokąta, a największą $a \cos 18^\circ$ — gdy jest jednym z wierzchołków.



Rys. 1.



Rys. 2.

Równomiernie pokryte galaktykami niebo z rysunku 4 przypominało nam paradoks sformułowany 150 lat temu przez Olbersa: gdyby Wszechświat był jednorodny, nieskończony i niezmienny (według Olbersa są to naturalne założenia), to patrząc w dowolnym kierunku zawsze napotkalibyśmy jakąś gwiazdę, a więc całe niebo byłoby tak jasne jak tarcza słoneczna. Widać stąd, że czerń nocnego nieba, do której jesteśmy tak przyzwyczajeni, ma związek z budową całego Wszechświata i, że przynajmniej jedno z założeń Olbersa trzeba odrzucić. Dzisiaj wiemy już które. Wszechświat nie jest niezmienny — rozszerza się.

Zaniedbajmy na razie jego ewolucję i założmy, że gęstość galaktyk (n) i średnia moc emitowana przez każdą z nich (L) nie zmieniają się w czasie. Spróbujmy oszacować energię promieniowania padającego na jednostkę powierzchni Ziemi w jednostce czasu. W powłoce kulistej o promieniu

r i grubości Δr jest $n4\pi r^2 \Delta r$ galaktyk, a strumień energii od każdej z nich wynosi $\frac{L}{4\pi r^2}$. Tak

więc, strumień pochodzący od wszystkich galaktyk z tej powłoki nie zależy od jej promienia. Jeżeli Wszechświat jest nieskończony, to suma energii od powłok o różnych promieniach jest nieskończona. Uwzględnienie wzajemnego przesłaniania się galaktyk da oczywiście strumień skończony, ale ciągle jeszcze o wiele większy od obserwowanego.

W rozszerzającym się Wszechświecie energia fotonów maleje, podobnie jak maleje temperatura rozprężającego się adiabatycznie gazu. Poza tym, ponieważ liczba fotonów nie zmienia się, maleje także ich gęstość. Oba te efekty powodują zmniejszenie strumienia energii docierającej do Ziemi.

Oszacujmy je.

W wyniku zjawiska Dopplera energia fotonów padających na Ziemię jest $k = 1 + v/c$ razy mniejsza, niż ich energia w układzie związanym z oddalającą się galaktyką. Jeżeli prędkość galaktyki jest w przybliżeniu stała, to w czasie, jaki upływa między emisją fotonu i jego dojściem do Ziemi, Wszechświat zwiększa swe rozmiary również k razy, czyli gęstość maleje w tym czasie k^3 razy.

Tak więc, rozszerzanie się Wszechświata powoduje zmniejszenie strumienia energii docierającej do Ziemi k^4 razy. Ponieważ jednak zgodnie z prawem Hubble'a $v = Hr$, oznacza to, że strumień energii od poszczególnych powłok nie jest stały, a maleje jak czwarta potęga odległości. Poza tym docierające do Ziemi promieniowanie pochodzi teraz z fragmentu Wszechświata o promieniu równym co najwyżej c/H , bo z obszarów bardziej oddalonych światło nie zdążyło jeszcze do nas dotrzeć od chwili „wielkiego wybuchu”.

Jak się okazuje, wyznaczony tak strumień energii jest teraz zbyt mały. Łatwo zrozumieć dlaczego. Przecież, dzięki skończonej prędkości światła, obserwując to, co jest *daleko*, widzimy jak Wszechświat wyglądał *dawno*. Kiedyś gęstość galaktyk była większa niż obecnie, a więc jest ona większa daleko niż blisko. Powoduje to zwiększenie strumienia energii obserwowanego na Ziemi. Sięgając coraz dalej od Ziemi, czyli cofając się coraz bardziej w czasie, dochodzimy w końcu do momentu, kiedy nie było jeszcze galaktyk. Jednak ten okres ma już niewielki wpływ na wygląd nocnego nieba.

Jaki wpływ ma na te rozważania geometria Wszechświata jako całości?

Jeżeli Wszechświat jest jednorodny to powierzchnia kuli o promieniu r jest w nim równa $4\pi r^2 f(r)$, gdzie $f(r)$ jest, niezależnie od tego gdzie znajduje się środek kuli, zawsze tą samą funkcją zależną tylko od krzywizny. Strumień energii w środku kuli jest wtedy równy $\frac{L}{4\pi r^2 f(r)}$.

Końcowy wynik pozostanie więc bez zmian.

M. J.

Zadania, których nie umiemy rozwiązać

Ponieważ od czasu do czasu udaje nam się rozwiązać jakieś zadanie, dzisiaj prezentujemy dwa zadania. Z jednym sobie poradziliśmy, z drugim, jak dotąd, nie, choć są łudząco podobne. Niestety, tylko łudząco.

W obydwu zadaniach dane są trzy okręgi i trójkąt. W obydwu zadaniach należy skonstruować, o ile to możliwe, trójkąt przystający do danego, tak aby:

— w pierwszym przypadku — jego boki były styczne do danych okręgów (rys. 1),

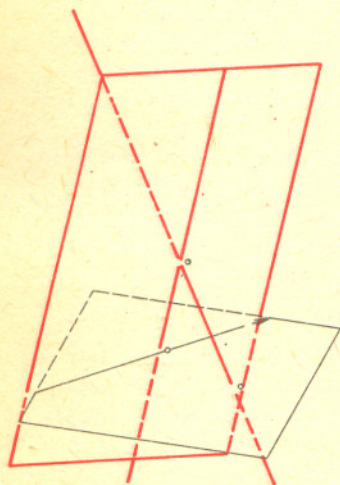
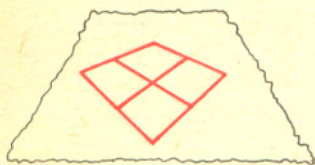
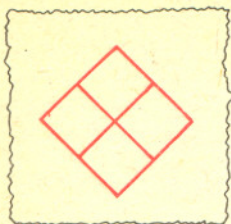
— w drugim przypadku — jego wierzchołki należały do danych okręgów (rys. 2).

Rozwiązanie jednego z tych zadań zamieszczamy w numerze. Nie piszemy tu którego, bo może ktoś będzie chciał się do tych zadań „przymierzyć” nie sugerując się informacją, które zadanie my umiemy rozwiązać.

Proof i Yasio

Raz jeszcze o geometrii rzutowej

Dr Marek KORDOS



Jeśli do każdej prostej na płaszczyźnie euklidesowej dołączymy nowy punkt — jej kierunek i umówimy się, że wszystkie nowe punkty tworzą nową prostą, to tak wzbogacona płaszczyzna będzie płaszczyzną rzutową. Pisaliśmy już o tym kilkakrotnie.

KTO JĄ ZROBIŁ I PO CO

Geometrię rzutową „wymyślili” siedemnastowieczni geometrzy. Patrząc mianowicie na triumfującą wówczas w malarstwie perspektywę zbieżną, gdzie proste równoległe zbiegały się na horyzoncie pomyśleli: w tym szaleństwie jest metoda! (też cytat z XVII wieku). Bo przecież każdy przyzna, że perspektywa zbieżna (= fotograficzna) doskonale przedstawia rzeczywistość. Stąd nieuniknione pytanie: jakie są jej geometryczne reguły. Z drugiej strony zauważyli, że znajomość tych reguł pozwoli ułatwić rozwiązywanie „zwyczajnych” zadań geometrycznych. Wystarczy bowiem na rysunek z danymi zadania spojrzeć perspektywicznie w odpowiedni sposób i już nie będzie na nim żadnych prostych równoległych. Rzecz jednak w tym, czy rezygnacja z pojęcia przystawiania (ono się psuje w perspektywie — prawda?) będzie mniejszą stratą, niż zysk z możliwości używania punktów przecięcia dowolnych prostych. Okazało się, że w każdym razie warto używać i tej metody.

JAK TO OBEJRZEĆ

Płaszczyzna rzutowa w momencie swego powstania była obiektem bardzo dziwnym. Były na niej zwykle proste, ale była też i „niezwykła”, były zwykle punkty, ale też i „niezwykłe”. Jednak wszelkie próby znalezienia jakiejś własności „niezwykłych” punktów czy prostej, wyróżniającej je od zwykłych nie udawały się. Wyciągnięto stąd słuszny (jak się potem okazało) wniosek, że nasz ogląd płaszczyzny rzutowej, jako wzbogaconej euklidesowej, jest tendencyjny. Jak zatem spojrzeć na nią obiektywnie?

Opisana niżej metoda jest szczególnym przypadkiem zastosowania ogólnego pojęcia *izomorfizmu*, wynalezione go pod koniec XIX w. „Izomorficzny” — znaczy „tak samo zbudowany”. Jeśli więc mamy obiekty izomorficzne, to mają one te same własności i możemy oglądać ten z nich, który nam „bardziej pasuje”. Tu do *standardowej* płaszczyzny rzutowej (opisanej wyżej) dołączymy kilka izomorficznych. W ten sposób oglądając to ten, to ów, być może dostatecznie wszechstronnie potrafiemy ją obejrzeć.

JEDNORODNOŚĆ

Srodkową płaszczyznę rzutową nazwiemy następujący obiekt: nad standardową płaszczyznę rzutową oieramy punkt, dalej zwany *środkiem*. Każdemu punktowi standardowej płaszczyzny rzutowej przyporządkowujemy prostą łączącą go ze *środkiem*. To przekształcenie daje nam właśnie *srodkową* płaszczyznę rzutową. Jej „punkty” to proste przechodzące przez *środek*. A jej „proste” — (oczywiście!) to płaszczyzny przechodzące przez *środek*. Łatwo zauważyć, że „niezwykłym” punktem płaszczyzny standardowej odpowiadają proste równoległe do jej euklidesowej części, a „niezwykłej” prostej — równoległa płaszczyzna. Leżeniu punktu na prostej w modelu standardowym odpowiada w modelu *srodkowym* leżenie prostych na płaszczyznach. Zauważmy jednak, że model *srodkowy* jest całkowicie *jednorodny*: wszystkie jego „punkty” i wszystkie jego „proste” nie różnią się wzajemnie.

DUALNOŚĆ

Metoda okazała się dobra — stosujemy ją dalej. Obierzmy mianowicie przestrzenny układ współrzędnych tak, aby *środek* naszego *srodkowego* modelu był początkiem układu, a więc miał współrzędne (0,0,0). Wówczas każdej prostej przechodzącej przez *środek* odpowiadać będzie trójka liczb (a, b, c) taka, że dowolny punkt tej prostej będzie postaci (a · t, b · t, c · t) — prawda? Tyle, że jednej prostej odpowiadać będzie wiele trójek, dokładniej — każda trójka proporcjonalna do (a, b, c) z wyjątkiem trójki (0, 0, 0) — ich zbiór oznaczmy [a, b, c]. Tak więc każdemu „punktowi” modelu *srodkowego* odpowiada pewien zbiór [a, b, c]. Zabierzmy się do płaszczyzn przechodzących przez *środek*. Każda z nich jest postaci

$$px + qy + rz = 0,$$

a więc i jej odpowiada jednoznacznie pewien zbiór [p, q, r] trójek. A więc każdej „prostej” modelu *srodkowego* też odpowiada pewien zbiór [p, q, r].

Powstaje nam więc model zwany *analitycznym*, w którym punkty są nierozróżnialne od prostych. Ciekawe! Tym ciekawsze, że prosta leży na płaszczyźnie, gdy jej wektor kierunkowy (a więc (a, b, c)) jest prostopadły do wektora prostopadłego do płaszczyzny (a więc (p, q, r)), czyli

(x)

$$ap + bq + cr = 0.$$

Rozwiązanie zadania M 296. Zapiszmy równanie „dokładne” w formie $y^2 + py + Q = 0$. Odejmując je od danego, mamy $(x^2 - y^2) + p(x - y) + q - Q = 0$, czyli $(x - y)(x + y + p) = Q - q$. Oznaczając przez y_1 pierwiastek dokładny bliższy x_1 , a przez x_2 drugi pierwiastek przybliżony mamy $|x_1 - y_1| = |Q - q| / |x_1 + y_1 + p| = |Q - q| / |x_1 + y_1 - (x_1 + x_2)| = |Q - q| / |y_1 - x_2|$. Ale $|y_1 - x_2| \approx \sqrt{\Delta} > 10$ i wobec tego $|x_1 - y_1| < 0,0001$.

Zatem i warunek na leżenie „punktu” na „prostej” w modelu środkowym tak samo się prezentuje ze strony „punktów”, jak i „prostych”.

Chwila namysłu i morał: Na płaszczyźnie rzutowej własności punktów i prostych niczym się nie różnią. Albo mocniej: Jeśli w twierdzeniu geometrii rzutowej zamienimy miejscami nazwy punktów i nazwy prostych, to otrzymamy znów (często inne) twierdzenie geometrii rzutowej. Ta własność nazywa się *dualnością*. Zatem, przez odpowiedni izomorfizm wykazaliśmy dualność.

DWA ZADANIA DLA CZYTELNIKA

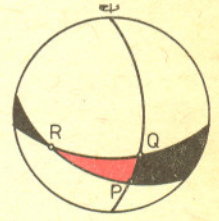
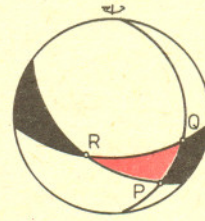
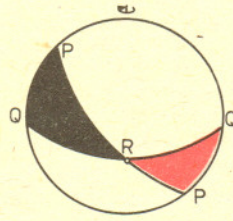
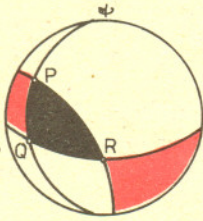
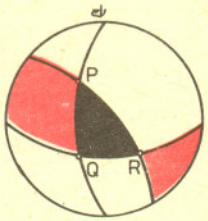
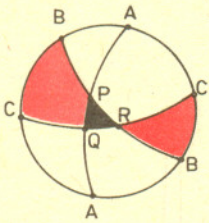
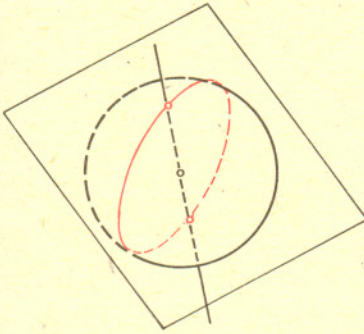
Pierwsze to w gruncie rzeczy formalność — po prostu nie sprawdziliśmy jeszcze, że wzór (x) opisujący leżenie „punktu” na „prostej” nie zależy od tego, którą konkretnie z trójek liczb odpowiadających „punktowi” i którą spośród trójek liczb odpowiadających „prostej” wybraliśmy. Ale nie zależy — Czytelniku, sprawdź!

I drugie zadanie: można ze standardowej płaszczyzny rzutowej przejść bezpośrednio do opisanego wyżej modelu analitycznego. Czytelniku, zrób to! (Ewentualną pomoc można znaleźć w „Delcie” 12/1980).

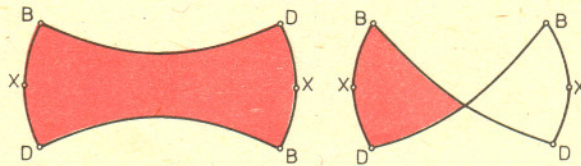
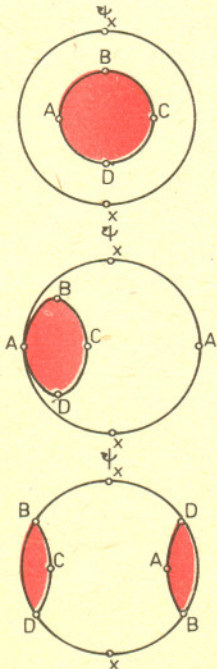
JEDNOSTRONNOŚĆ

Od modelu środkowego przejdziemy teraz do modelu *na sferze*. Mianowicie zobaczymy, co się stanie, jeśli „punkty” — tj. proste przechodzące przez środek i „proste” — tj. płaszczyzny przechodzące przez środek przetniemy ze sferą o środku... no, gdzieżby — oczywiście w środku. Nowymi „punktami” będą teraz pary antypodów, a nowymi „prostymi” — okręgi wielkie sfery. Model ten ma wielką zaletę — użyty do jego budowy surowiec (czyli sferę) można traktować tak jakby był to obiekt materialny. Można np. oglądać tylko tę stronę sfery, którą widać. I przy założeniu, że widzimy połowę sfery, będziemy mieli o modelu pełną informację. Istotnie — na półsferze jest reprezentowana każda para antypodów i to przeważnie przez jeden punkt. Oba antypody widać tylko na brzegu.

Taki sposób oglądania modelu na sferze ma wielką zaletę. Można obracać sferę, a zmieniający się na niej obraz będzie po prostu odpowiadał oglądaniu figury z różnych stron. Przecież, gdy jeden z antypodów będzie ginął nam z oczu z drugiej strony pojawi się jego *alter ego* — w naszym modelu ten sam punkt. Seria rysunków wskazuje np., że figura czarna i czerwona w istocie



wyglądają tak samo. Można te rysunki sprawdzić rysując kredą na globusie. A teraz właśnie o *jednostronności*. Narysujmy na sferze kółko. No i obracajmy. Po chwili stwierdzamy, że płaszczyzna rzutowa to suma kółka i wstęgi Möbiusa. Rzeczywiście — sklejenie obu B, obu D i obu X to wstęga Möbiusa. A że wstęga Möbiusa ma jedną tylko stronę, więc jedną stronę ma i cała płaszczyzna rzutowa.



ZNÓW ZADANIA

A raczej propozycje wykonania samodzielnych obserwacji:

1. Trzy proste dzielą płaszczyznę rzutową na cztery tak samo wyglądające figury.
2. Jedna prosta w ogóle nie dzieli płaszczyzny rzutowej.
3. Parabola, hiperbola i elipsa wyglądają na płaszczyźnie rzutowej tak samo.

MORAŁ

z tego taki: ci, co wymyślili geometrię rzutową, sami nie wiedzieli, jaka to zdumiewająca dyscyplina. A dziś, gdy już wiele o niej wiemy, właściwie zapomnieliśmy o jej „plastycznym” pochodzeniu. I uprawiamy ją jako suwerenną dyscyplinę wiedzy. W gruncie rzeczy tą drogą powstały wszystkie gałęzie nauki.

A zatem do roboty. Weźmy się za jakiś konkretny obiekt, skrupulatnie obejrzymy go ze wszystkich stron, przyjrzymy się obiektom izomorficznym i... nowa gałąź wiedzy gotowa.

Oddziaływanie promieniowania elektromagnetycznego z materią

Część III. Fizyczna natura „mikrooscylatorów“

Doc. dr Jerzy GINTER

W dwóch poprzednich częściach naszego cyklu omówiliśmy pewne elementy oddziaływania fali elektromagnetycznej z materią. W szczególności stwierdziliśmy, że dobrze można opisać to oddziaływanie przyjmując założenie, że w omawianych substancjach istnieją jakieś „mikrooscylatory”, które fala elektromagnetyczna może pobudzać do drgań. W szczególności wspominaliśmy o tym, że tymi „mikrooscylatorami” muszą być pojedyncze — tomy lub cząsteczki. Nie możemy tej sprawy omówić w pełnej ogólności, ograniczymy się tylko do kilku przykładów.

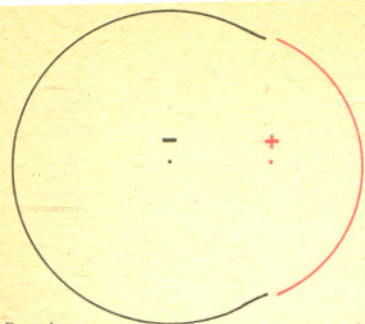
1. Cząsteczki z wiązaniem jonowym lub spolaryzowanym

Jak dobrze wiadomo, w cząsteczkach wielu związków chemicznych ładunki dodatnie i ujemne są przesunięte względem siebie. Na przykład w cząsteczce HCl (rys. 1) elektron walencyjny wodoru pewien czas przebywa w pobliżu jądra chloru. Atom chloru w cząsteczce ma więc nadmiarowy ładunek ujemny. Dodatni ładunek protonu nie jest całkowicie skompensowany przez ujemny ładunek elektronu, atom wodoru ma więc pewien ładunek dodatni. W przypadku HCl „efektywne ładunki” atomów są mniejsze od ładunku elementarnego — mówimy, że HCl ma wiązanie spolaryzowane. W związkach, w których elektron walencyjny kationu przekazany jest praktycznie całkowicie anionowi mówi się o wiązaniu jonowym. Warto przypomnieć, że cząsteczki o wiązaniu jonowym lub spolaryzowanym mają różny od zera moment dipolowy. W jaki sposób cząsteczki takie mogą oddziaływać z promieniowaniem? Istnieją tu dwie możliwości — związane odpowiednio z ruchem oscylacyjnym (drgającym) i rotacyjnym (obrotowym) cząsteczek.

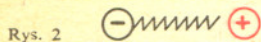
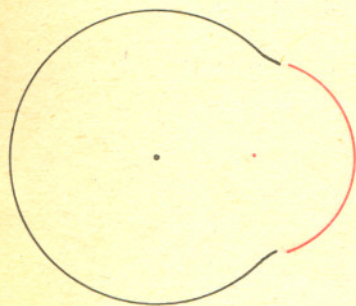
a. Oscylacje cząsteczek

Typowa cząsteczka dwuatomowa ma — przynajmniej w pewnym stopniu — własności zbliżone do dwóch kul połączonych sprężyną (rys. 2). Energia potencjalna wzajemnego oddziaływania atomów jest najmniejsza dla pewnej określonej odległości między jądrami. Dla HCl wynosi ona 128 pm (1,28 Å). Zarówno zbliżenie, jak i oddalenie jąder powoduje wzrost tej energii potencjalnej. Jeżeli w jakimś procesie — na przykład przy zbliżeniu dwóch cząsteczek — odległość pomiędzy jądrami zostanie odchylna od odległości odpowiadającej energii minimalnej, jądra zaczną wykonywać drgania. Kolejne fazy drgań tego typu przedstawia rysunek 3 (w rzeczywistości amplituda oscylacji jest znacznie mniejsza od średniej odległości między jądrami). Częstość drgań jest charakterystyczna dla cząsteczki, a zależy od mas jąder i od „siły wiązań”. Typowe częstości oscylacji cząsteczek odpowiadają zakresowi podczerwonych fal elektromagnetycznych. Dla HCl wynosi ona około $\omega = 2 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$. A więc cząsteczka HCl jest „mikrooscylatorem”, który może absorbować lub emitować promieniowanie podczerwone. Warto zwrócić uwagę, że siły od zewnętrznego pola elektrycznego, działające na poszczególne atomy cząsteczki mają przeciwne zwroty (rys. 4). „Starają” się więc albo rozciągnąć, albo ścisnąć molekułę.

Podaliśmy tutaj oczywiście tylko prosty model klasyczny. Pełny opis omówionych powyżej zagadnień wymaga stosowania metod mechaniki kwantowej. Warto także zwrócić uwagę, że bardziej złożone cząsteczki (np. H₂O czy NH₃) mogą wykonywać znacznie bardziej skomplikowane ruchy oscylacyjne. W szczególności ta sama cząsteczka może wykonywać drgania z różnymi częstościami własnymi. Rysunek 5 przedstawia takie drgania dla cząsteczki wody.



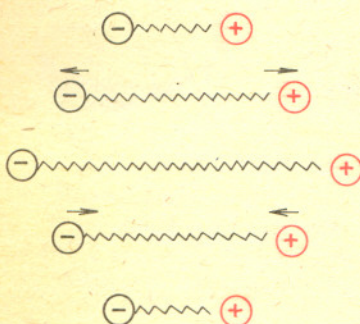
Rys. 1



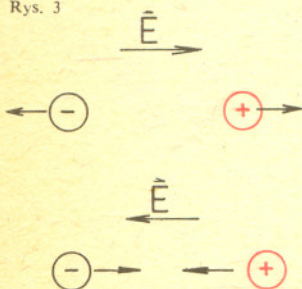
Rys. 2

Substancje, których cząsteczki mają nieznikający moment dipolowy, charakteryzują się wysoką stałą dielektryczną w stanie ciekłym. Przykładowo wynosi ona:

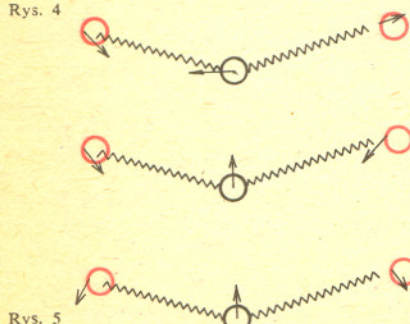
ciekły chlorowódor	$\epsilon = 86$
woda	$\epsilon = 81$
ciekły amoniak	$\epsilon = 22$



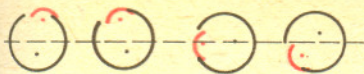
Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

b. Rotacje cząsteczek

Cząsteczka HCl (a także każda inna) może oprócz ruchu drgającego wykonywać ruch obrotowy wokół środka masy (rys. 6). Na pozór ruch taki nie ma nic wspólnego z oscylacjami. Przypomnijmy jednak, że ruch wahadła po okręgu może być traktowany jako złożenie dwóch ruchów harmoniczych, odbywających się w kierunkach prostopadłych. Podobnie ruch jonów wirującej cząsteczki może być potraktowany jako złożenie ruchów harmoniczych. A więc i teraz odnajdujemy pewne „mikrooscylatory”, które mogą oddziaływać z promieniowaniem elektromagnetycznym.

W modelu klasycznym częstość ruchu obrotowego cząsteczki może się zmieniać w sposób ciągły w dość szerokim zakresie. Nieruchomej cząsteczce odpowiada oczywiście częstość zerowa. Częstość maksymalna obrotu określona jest warunkiem, w którym siła odśrodkowa (w wirującym układzie odniesienia związanym z cząsteczką) jest wystarczająca do jej rozerwania na atomy, czyli do dysocjacji cząsteczki.

W rzeczywistości jednak obserwowane częstości nie są zupełnie dowolne — występuje zjawisko „kwantyzacji”, którego nie da się opisać w języku fizyki klasycznej. Absorbpcję związaną ze zmianą stanu ruchu obrotowego cząsteczek obserwuje się zwykle w bardzo dalekiej podczerwieni lub w obszarze mikrofal.

Cząsteczka może wykonywać jeszcze znacznie bardziej skomplikowane ruchy, które można traktować jako równoczesne złożenie drgań i obrotu cząsteczki. Poza tym cząsteczka jako całość może wykonywać ruch postępowy — nie ma to jednak istotnego wpływu na jej oddziaływanie z promieniowaniem.

Podobny charakter mają ruchy jąder w kryształach jonowych, np. w omawianym poprzednio fluoru litu.

2. Atom jako „mikrooscylator”

Problem budowy atomu był jednym z podstawowych zagadnień pierwszych dziesiątków lat bieżącego stulecia. Ogólnie znany jest tzw. „model planetarny”, wprowadzony przez Bohra. W modelu tym elektron miałby krążyć wokół jądra po torze kołowym lub eliptycznym, podobnie jak planety i komety układu słonecznego krążą wokół Słońca. Model ten tak narzucił się naszej wyobraźni, że do dziś jest jeszcze używany. Tymczasem już Bohr zdawał sobie sprawę z tego, że jest to model fałszywy. Naładowany elektron krążący (np. po kole) wokół jądra musiałby wysyłać promieniowanie elektromagnetyczne. Byłby bowiem naładowanym „mikrooscylatorem”, zbliżonym do wirującego po kole wahadła czy obracającej się cząsteczki HCl. Wysyłając promieniowanie — traciłby energię. Musiałby zatem spadać na jądro. Można obliczyć, że stałoby się to w czasie rzędu 10^{-8} s! Tymczasem atomy istnieją przez miliardy lat. Mamy więc do czynienia z zupełnie podstawową sprzecznością, która nie da się rozwikłać w ramach fizyki klasycznej.

W opisie kwantowym w ogóle pojęcia toru elektronu w atomie wprowadzić się nie da. Mówimy tylko o gęstości prawdopodobieństwa znalezienia elektronu w przestrzeni. Jest ona różna dla różnych stanów kwantowych — czyli dla różnych orbitali. Rozkład gęstości prawdopodobieństwa często traktuje się jako pewną otaczającą jądro atomu „chmurę elektronową”. Stany, w których chmura ta jest nieruchoma, nazywamy stanami stacjonarnymi. Rysunek 7 przedstawia rozkład gęstości prawdopodobieństwa w atomie wodoru w kilku takich stanach.

Są jednak stany, w których „chmurze elektronowej” (gęstości prawdopodobieństwa znalezienia elektronu) należy przypisać periodyczny ruch drgający. Częstości drgań takiej chmury może być bardzo wiele (w rzeczywistości — nieskończenie wiele), podobnie jak na przykład bardzo wiele jest możliwych częstości drgań napiętej struny czy drgań słupa powietrza w instrumencie dętym. Typowe drgania chmury elektronowej atomu wodoru przedstawia rysunek 8. Atom możemy więc traktować jako „mikrooscylator”, ale nie o jednej lecz o wielu częstościach własnych. Może on więc absorbować i emitować promieniowanie o wielu różnych częstościach. Stąd takie bogactwo atomowych linii widmowych. Warto wiedzieć, że różne atomy mogą absorbować i emitować promieniowanie w zakresie od fal radiowych do promieni X!



Rys. 7



Rys. 8

3. Podsumowanie

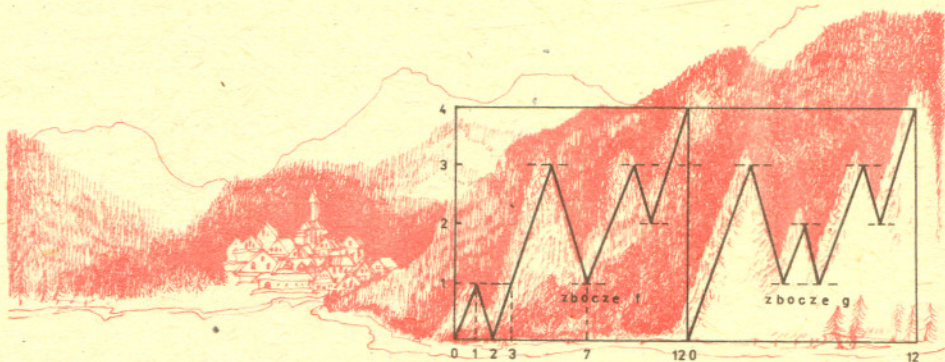
W tej części naszego cyklu starałem się pokazać na najprostszych przykładach, jaki jest fizyczny sens wprowadzonych poprzednio „mikrooscylatorów” w substancjach materialnych. Możliwych przykładów jest oczywiście znacznie więcej. Poza tym traktowaliśmy omawiane obiekty tak, jak gdyby były one od siebie niezależne, co jest dobrym przybliżeniem tylko dla rozrzedzonych gazów. W ciałach skondensowanych — ciałach stałych, cieczach i gazach pod wysokimi ciśnieniami — atomy czy cząsteczki silnie oddziałują ze sobą, co naturalnie bardzo komplikuje ruch układu.

Dwaj taternicy...

Prof. dr Jerzy MIODUSZEWSKI

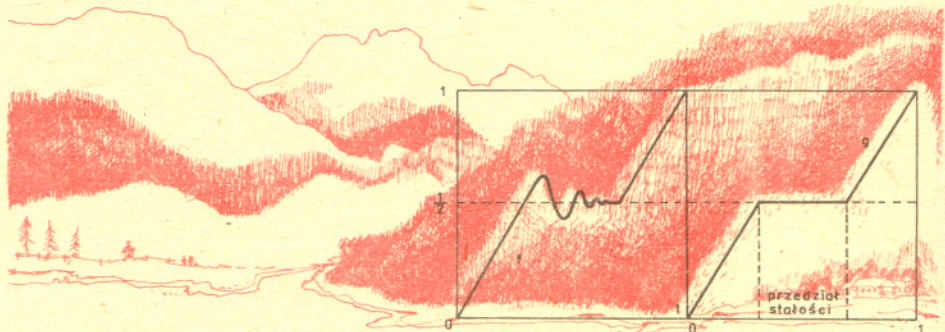
Dwaj taternicy, wychodząc z miejsc leżących na tym samym poziomie wchodzą na szczyt, jeden po zboczu o profilu $y = f(x)$, a drugi po zboczu o profilu $y = g(x)$, gdzie f i g są funkcjami ciągłymi o wartościach w odcinku $[0, 1]$; zmienna x też przebiega odcinek $[0, 1]$, założmy, że $f(0) = g(0) = 0$ (poziom wyjściowy) i $f(1) = g(1) = 1$ (szczyt).

Rys. 1. Funkcje f i g są tu bardzo proste: określa je pięć wartości $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ na zbiorze $\{0, 1, \dots, 12\}$, poza tym są liniowe.

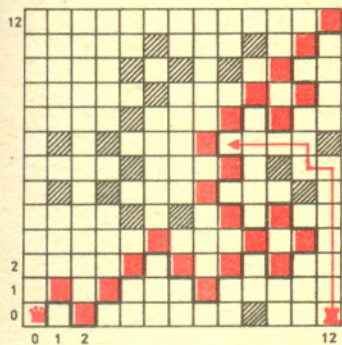


Czy mogą tak ułożyć marszruty, aby w każdej chwili być na tym samym ze sobą poziomie? Bardziej matematycznie: czy istnieją funkcje ciągłe $x = a(t)$ i $y = b(t)$ takie, że $f(a(t)) = g(b(t))$ dla każdego t z odcinka $0 \leq t \leq 1$ i takie, że $a(0) = b(0) = 0$ i $a(1) = b(1) = 1$? Tak mniej więcej zaczęli swoją pracę Sikorski i Zarankiewicz (*Fundamenta Mathematicae* 41 (1954), str. 339–344); byli inni autorzy, którzy również postawili sobie ten problem: T. Homma (*Kodai Mathematical Seminar Reports* 1 (1952), 13–16) i J. V. Whittaker (*A Mountain-climbing Problem, Canadian Journal of Mathematics* 18 (1966), str. 873–882); nie wykluczone, że byli jeszcze inni, bo interesujące zadania bywają stawiane i rozwiązywane wielokrotnie i niezależnie. Jeśli na żadnym ze zboczy nie ma przedziałów stałości, to marszruty spełniające warunki zadania istnieją. Zastrzeżenie co do przedziałów stałości jest istotne, na co wskazują funkcje przedstawione na rysunku 2.

Rys. 2. Funkcja g ma przedział stałości na wysokości $1/2$, a funkcja f ma nieskończenie wiele oscylacji wokół tego poziomu. Taternik idący po drobnych wzniesieniach i zagłębieniach zbocza f zmusiłby taternika idącego po zboczu g do chodzenia tam i z powrotem, nieskończenie wiele razy po przedziale stałości funkcji g .



Jeżeli założyć, że funkcje f i g mają jedynie skończenie wiele oscylacji, np. że są kawałkami liniowe, to można dopuścić istnienie przedziałów stałości; rozwiązania a i b można znaleźć wtedy również w postaci funkcji kawałkami liniowych. Ten przypadek, jak zobaczymy, nie jest wcale banalny, a okazuje się wystarczający dla zastosowań, o których także będzie mowa. Funkcje f i g są wyznaczone teraz przez podanie wartości na pewnym zbiorze skończonym — zbiorze punktów zmiany wzoru liniowego określającego funkcje (p. podpis pod rys. 1). Stąd, zadanie można w tym przypadku sprowadzić do kombinatoryki, tj. do zadania o zbiorach skończonych. Brzmi ono jak następuje. Dane są dwa odcinki zbioru liczb naturalnych, $B = \{0, 1, \dots, n\}$ i $A = \{0, 1, \dots, m\}$ i dwie funkcje f i g ze zbioru B na zbiór A takie, że $f(0) = 0, g(0) = 0, f(n) = g(n) = m$, z których każda jest *ciągła* w tym znaczeniu, że na elementach sąsiednich, j oraz $j+1$, przyjmuje wartości te same lub sąsiednie. Czy istnieje odcinek zbioru liczb naturalnych $C = \{0, 1, \dots, p\}$ i funkcje (w powyższym znaczeniu) ciągłe $a: C \rightarrow B$ i $b: C \rightarrow A$ takie, że $f(a(j)) = g(b(j))$ dla każdego j ? Z warunków zadania wynika, że $m \leq n \leq p$, skoro odwzorowania mają być „na”. Dla rozwiązania tego zadania spójrzmy na liczby naturalne z odcinka $B = \{0, 1, \dots, n\}$ jako na numery współrzędnych pól szachownicy $(n+1) \times (n+1)$. Zaczernijmy te pola (i, j) , dla których $f(i) = g(j)$. Dla przykładu: pola $(0, 0)$ będą na pewno zaczernione, a pola $(0, n)$ i $(n, 0)$ pozostaną białe.



Rys. 3. Szachownica 13×13 odpowiadająca funkcjom z rysunku 1. Nie ma drogi dla wieży, jest więc droga dla króla.

Na polach dotykających do prawego lub do dolnego brzegu szachownicy różnica $f(i) - g(j)$ jest nieujemna (jest tam bądź $j = 0$, a więc $g(j) = 0 \leq f(i)$, lub $i = n$, a więc $f(i) = n \geq g(j)$), a na polach dotykających do lewego lub górnego brzegu szachownicy ta sama różnica jest niedodatnia.

Pomyślmy wieżę stojącą na białym polu z prawego lub dolnego brzegu szachownicy. Nie może ona dojść po białych polach do żadnego z białych pól na górnym lub na lewym brzegu szachownicy: przechodząc z pola na pole sąsiednie wieża zmienia różnicę $f(i) - g(j)$ nie więcej niż o 1, więc idąc z pola, gdzie ta różnica jest dodatnia, na pole, gdzie ta różnica jest ujemna, musiałaby przejść przez pole, gdzie ta różnica jest równa 0, tj. przez pole zaczerńnione. Nasze zadanie będzie rozwiązane, jeśli znajdziemy przejście dla króla z pola $(0, 0)$ na pole (n, n) po polach zaczerńnionych. Istotnie, mając takie przejście i numerując chwile $0, 1, \dots, p$ począwszy od chwili 0, kiedy król stoi na polu $(0, 0)$ do chwili p , kiedy król stanie na polu (n, n) , dostaniemy dla każdej chwili t , $0 \leq t \leq p$, pozycję $(a(t), b(t))$ jego drogi; będzie zawsze $f(a(t)) = g(b(t))$, bo pola $(a(t), b(t))$ są zaczerńnione; funkcje a i b okażą się ciągłe, bo w chwilach sąsiednich, t i $t + 1$, współrzędne $a(t)$ i $a(t + 1)$ i tak samo współrzędne $b(t)$ i $b(t + 1)$, różnią się nie więcej niż o 1. Czy takie przejście dla króla się znajduje? Tak. Odpowiedź można znaleźć m.in. w „Kalejdoskopie matematycznym” Hugona Steinhausa (str. 32, wyd. 1956 r.), gdzie jest podana dla nieco innego zadania, a która w naszych warunkach tłumaczy się na następujące

Twierdzenie o szachownicy. Jeśli pewne pola szachownicy są zaczerńnione tak, by wieża nie mogła przejść po polach białych z żadnego z pól leżących wzdłuż dolnego i wzdłuż prawego brzegu szachownicy do żadnego z pól leżących wzdłuż jej lewego i wzdłuż jej górnego brzegu, to król może przejść po polach zaczerńnionych z lewego dolnego rogu szachownicy do prawego górnego.

Napisano w „Kalejdoskopie”, że jest to oczywiste, ale że dowód nie jest natychmiastowy. To twierdzenie o szachownicy można znaleźć także w innej książce Hugona Steinhausa „Jeszcze sto zadań” (tytuł tłumaczony z rosyjskiego; autor artykułu nie wie, czy ukazało się to po polsku), włączonej do jego książki „Zadaci i razmyślenia”, jako zadanie 97 można je znaleźć na str. 103 wyd. 1974 r.) Pojawiło się ono również w „Delcie” nr 9/1980, jako zadanie M 235, służąc jako lemat w dowodzie dwuwymiarowego twierdzenia Brouwera o punkcie stałym. Te okoliczności stanowią wygodny pretekst dla autora artykułu, pozwalający mu na niezamieszczenie dowodu, który rzeczywiście nie jest natychmiastowy.

Analogiczne zadanie dla szachownicy heksagonalnej (płaski plaster pszczeli) jest mniej kłopotliwe. Pisze o nim symetryczne: znika w nim różnica między królem i wieżą) jest mniej kłopotliwe. Pisze o nim David Gale w artykule „The Game of Hex and the Brouwer Fixed Point Theorem”, *The American Mathematical Monthly* 86 (1979), str. 818—827. Także i tym zadaniem można się posłużyć w dowodzie twierdzenia Brouwera. Zadanie w formie heksagonalnej pochodzi od Johna F. Nasha (1949), ale jest i prehistoria, o czym pisze Martin Gardner w rozdziale „The Game of Hex” na str. 73—83 swojej książki „The Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions”, New York 1959.

*

Często spotyka się próby określenia tego, czym jest matematyka. W książce „O poznawaniu. Szkice na lewą rękę” Jerome S. Brunner (szkic „O uczeniu się matematyki”, str. 130 i nast., PIW 1971, seria $\pm \infty$) pisze, że polega ona na sprowadzaniu zadań do łamigłówek, a potem do rozwiązywania tych łamigłówek. Jest to pogląd dość naturalny, ale nieczęsto wypowiediany, więc poparcie go autorytetem nie zaszkodzi.

*

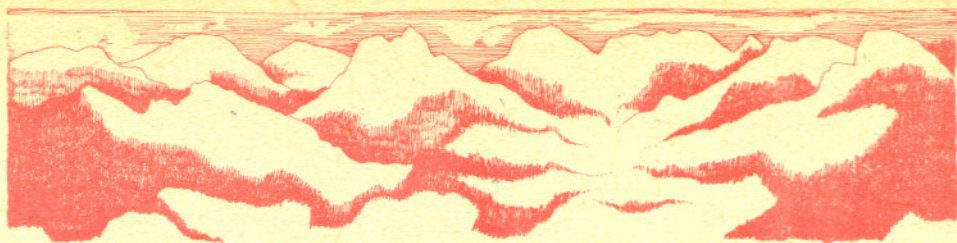
Łamigłówka o królu i wieży pozwala rozwiązać zadanie o taternikach, które też z kolei wygląda na łamigłówkę wyodrębnioną dla rozwiązania innych zadań. Kazimierz Zarankiewicz wykorzystał (*Biuletyn PAN*, 2 (1954), str. 117—120) zadanie o taternikach dla podania prostego dowodu następującego twierdzenia Dysona (1951): mając funkcję ciągłą rzeczywistą na powierzchni kuli, znajdziemy zawsze koło wielkie i wpisany w nie kwadrat, na którego wierzchołkach funkcja przyjmuje te same wartości. J. P. Huneke (1969) wykorzystał zadanie o taternikach do zbudowania dwu funkcji ciągłych f i g przekształcających odcinek na siebie i takich, że $f \cdot g = g \cdot f$ (tj. przemienne przy składaniu) oraz nie mających wspólnego punktu stałego, tj. takiego, że $f(x) = g(x) = x$, co obalało uzasadnioną wieloma przykładami hipotezę. Autor tego artykułu posłużył się (1962) zadaniem o taternikach do znalezienia prostego opisu kontinuum znanego pod nazwą pseudoluksu (które jest kontinuum nierozkładalnym i którego wszystkie podkontinua wielopunktowe są nierozkładalne, ale który ma pewne własności wspólne z okręgiem), odkrytego (1922) przez Knastera i zbadanego dokładniej (1948) w pracach Binga i Moise’a. Jeśli funkcje f i g , ciągłe i bez przedziałów stałości są niekoniecznie kawałkami liniowe, to marszruty utrzymujące taterników na równych ze sobą wysokościach też się znajdują: w ich poszukiwaniu wykorzystuje się pewną własność topologiczną kwadratu, bardzo podobną do wykorzystywanej poprzednio własności szachownicy.



Rozwiązanie zadania F 114

W każdym z przypadków lód poddawany jest działaniu znacznych ciśnień, co dla wody powoduje obniżenie temperatury topnienia. Niezbędne do topnienia ciepło napływa z najbliższego otoczenia (sąsiednie warstwy lodu oraz drut). Powstająca pod drutem ciecz wypierana jest ponad drut, gdzie krzepnie pod normalnym ciśnieniem wydzielając ciepło. Wtapianie się drutu w bryłę lodu jest procesem ograniczonym przez szybkość transportu ciepła od krzepnącej wody do topniejącego w obszarze podwyższonego ciśnienia lodu. W przypadku drutu szybkość ta jest znaczna, gdyż metale są świetnymi przewodnikami ciepła. Nylon przewodzi ciepło słabo (około dziesięciokrotnie słabiej niż lód) i tym razem decydujące jest przewodnictwo lodu, które z kolei ustępuje przynajmniej o trzy rzędy wielkości przewodnictwu metali.

H ₂	wodór
OH	hydroksyl
SiO	tlenek krzemu
SiS	siarczek krzemu
NS	siarczek azotu
SO	tlenek siarki
CH	metylidyn
CH ⁺	jon metylidynowy
CN	cyjan
CO	tlenek węgla
CS	siarczek węgla
H ₂ O	woda
N ₂ H ⁺	jon dwuazotku wodoru
H ₂ S	siarkowodór
SO ₂	dwutlenek siarki
CCH	etynal
HCN	cyjanowodór
HNC	izocyjanowodór
HCO ⁺	jon formylu
HCO	formyl
OCS	siarczek karbonylu
NH ₃	amoniak
C ₂ H ₂	acetylen
C ₃ N	cyjanoetynyl
H ₂ CO	formaldehyd
HNCO	kwas izocyjanowy
H ₂ CS	tioaldehyd mrówkowy
H ₂ CNH	metylenoimina
H ₂ NCN	cyjanamid
HCOOH	kwas mrówkowy
HC ₃ N	cyjanoacetylen
CH ₃ OH	alkohol metylowy
CH ₃ CN	cyjanek metylu (acetonitryl)
HCONH ₂	formamid
CH ₃ NH ₂	metyloamina
CH ₃ C ₂ H	metyloacetylen
HCOCH ₃	aldehid octowy
H ₂ CCHCN	cyjanek winylu (akrylonitryl)
HC ₃ N	cyjanodwuacetylen
HCOOCH ₃	mrówczan metylu
(CH ₃) ₂ O	eter dwumetylowy
C ₂ H ₅ OH	alkohol etylowy
C ₄ H ₃ N	metylocyjanoacetylen



Patrz w niebo

Kiedy dwa miesiące temu pisałem o tym, „co widać między gwiazdami”, dokonałem dość istotnego uproszczenia, które polegało na założeniu, że przestrzeń międzygwiazdowa w Galaktyce jest praktycznie pusta. Jak dobrze wiadomo, założenie to jest nieprawdziwe, co łatwo zauważyć obserwując mgławice gazowe i pyłowe jasno świecące w niektórych okolicach nieba.

Analiza widmowa światła niektórych z takich mgławic napotkała niespodziewane trudności. Wielu linii nie udało się zinterpretować jako normalnej emisji (lub absorpcji) atomów. Trzeba było szukać innych niż atomy źródeł promieniowania monochromatycznego. I tu okazało się, że w zimniejszych mgławicach często świecą mniej lub bardziej skomplikowane cząsteczki, przeważnie organiczne. Tabelka obok podaje kilkadziesiąt najlepiej znanych związków odkrytych w przestrzeni międzygwiazdowej. Nie wszystkie one emitują (lub absorbują) promieniowanie w okolicach zakresu widzialnego. Często odkrywamy je dzięki obserwacjom radiowym, najczęściej mikrofalowym. Związane jest to z faktem, że emisja fotonu przez cząsteczkę może być nie tylko związana z przejściem elektronu na niższą orbitę; możliwe są trzy inne mechanizmy:

- zmiana kształtu chmury elektronów cząsteczki,
- zmiana częstości drgań atomów cząsteczki,
- zmiana prędkości rotacji cząsteczki.

Wszystkie te procesy powodują wysłanie fotonu o konkretnej, ale trudnej do obliczenia energii. Przyjrzenie się tabelce prowadzi do stwierdzenia, że nie jest prawdą, iż obserwujemy wszystkie najprostsze związki. Mimo wielu prób nie udało się dotychczas odkryć np. tlenku azotu — cząsteczki jedynie dwuatomowej. Nie stwierdzono także obecności ani jednego związku pierścieniowego. Jednak wiele niezidentyfikowanych linii widmowych pozwala sądzić, że mała gałąź astronomii — kosmochemia — rozwinie się w potężny konar wiedzy.

mgr Tomasz CHLEBOWSKI

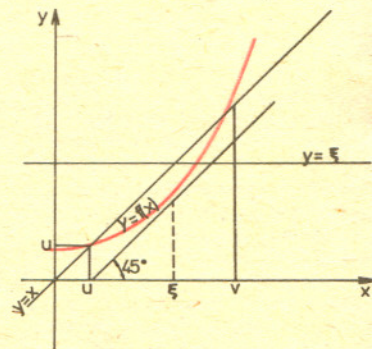
Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Deltę”

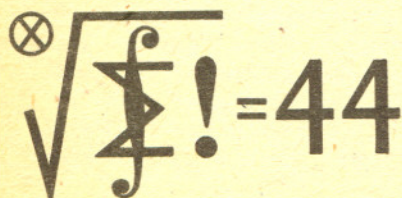
Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

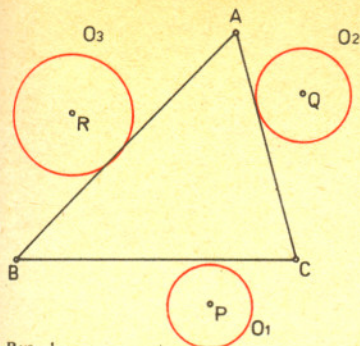
Rozwiązania zadań z numeru 1/82

13. Badany ciąg wyraża się wzorem rekurencyjnym $x_{n+1} = f(x_n)$, gdzie $x_1 = a$, $f(x) = a^x$. Jeżeli istnieje granica $\lim x_n$, to musi ona być punktem stałym funkcji f , tzn. musi spełniać równanie $f(x) = x$. Na odwrót, jeśli punkty stałe istnieją — oznaczmy je przez u, v (patrz rysunek; punktów stałych nie może być więcej niż dwa; przyjmujemy, że $u \leq v$) — to dla x z przedziału $0 \leq x < u$ mamy $x < f(x) < u$, zatem ciąg $\{x_n\}$ jest rosnący i ograniczony, więc zbieżny. Niech teraz ξ oznacza rozwiązanie równania $f'(x) = 1$ (istnieje ono dla każdej wartości a i jest jedyne, równé $\xi = -\ln \ln a / \ln a$; przy tym $f(\xi) = 1 / \ln a$). Pozostaje zauważyć, że funkcja f ma punkty stałe wtedy i tylko wtedy, gdy $f(\xi) \leq \xi$ (rysunek), czyli gdy $1 \leq -\ln \ln a$, lub równoważnie, gdy $a \leq e^{1/e}$. Jest to warunek konieczny, i dostateczny zbieżności ciągu $\{x_n\}$.

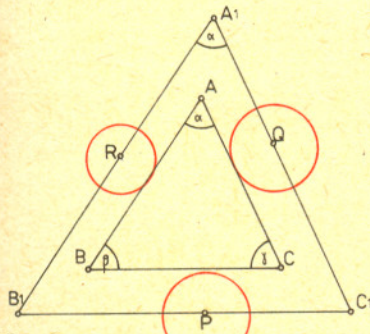


14. We wzorze Herona, wyrażającym pole S trójkąta przez długości jego boków a_1, a_2, a_3 podstawiamy $a_1 = 2S/h_1$ (gdzie h_1 jest długością wysokości opuszczonej na bok a_1). Po prostych przekształceniach dostajemy $S = h_1^2 h_2^2 h_3^2 ((h_1 h_2 + h_2 h_3 + h_3 h_1) (-h_1 h_2 + h_2 h_3 + h_3 h_1) (h_1 h_2 - h_2 h_3 + h_3 h_1) (h_1 h_2 + h_2 h_3 - h_3 h_1))^{-1/2}$.

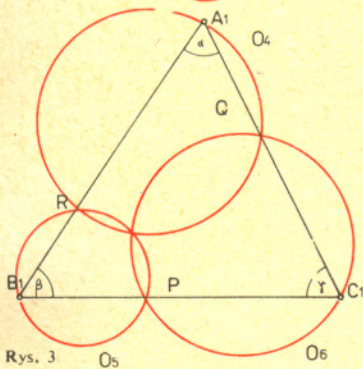




Rys. 1.



Rys. 2.

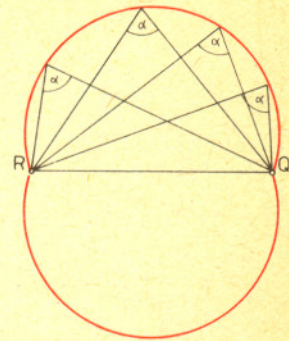


Rys. 3.

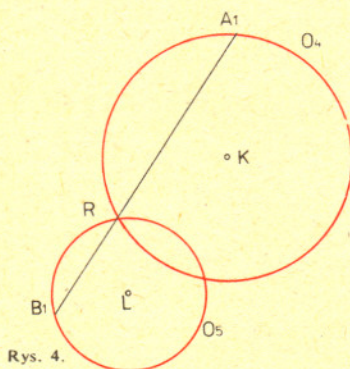
Spośród dwóch zadań zamieszczonych w naszym kąciку umiemy rozwiązać pierwsze. Drugiego nie umiemy i nie wiemy, czy konstrukcja jest w ogóle wykonalna. Przypuśćmy więc, że skonstruowaliśmy poszukiwany trójkąt $\triangle ABC$ o bokach stycznych do danych okręgów o_1, o_2, o_3 (rys. 1). Poprowadźmy przez środki tych okręgów proste równoległe do odpowiednich boków trójkąta. Otrzymamy w ten sposób trójkąt $\triangle A_1B_1C_1$, też o znanych długościach boków (rys. 2). Znamy oczywiście i kąty tego trójkąta. Wobec tego punkt A_1 leży na łuku Talesa o_4 dla punktów R i Q oraz kąta α . Analogicznie położone są punkty B_1 i C_1 (rys. 3). Rozwiązanie naszego zadania sprowadza się w takim razie do rozwiązania zadania następującego: przez punkt R przecięcia dwóch okręgów o_4 i o_5 poprowadzić taką prostą, by suma cięciw wyznaczonych przez nią na tych okręgach miała daną długość. W tym przypadku będzie to długość odcinka A_1B_1 (rys. 4). Niech punkty S i T będą środkami odpowiednio odcinków A_1R i B_1R , natomiast punkt M niech uzupełnia trójkąt LTS do prostokąta $LTSM$ (rys. 5). W trójkącie prostokątnym $\triangle LMK$ daną mamy długość przeciwprostokątnej LK i długość przyprostokątnej LM . Możemy go więc skonstruować. Całą resztę również.

Rozwiązanie zadania z kąciку „zadań, których nie umiemy rozwiązać”

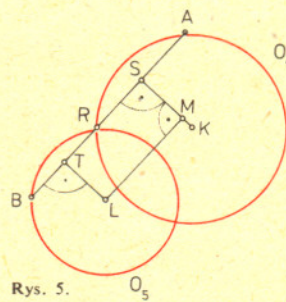
Jeśli dane są dwa punkty R i Q oraz kąt α , to zbiorem punktów, z których odcinek \overline{RQ} „widać” pod kątem α , jest suma dwóch łuków okręgów. Łuki te są położone symetrycznie względem prostej RQ (rys. 6). Nazywane są one łukami Talesa wyznaczonymi przez punkty R i Q oraz kąt α .



Rys. 6.



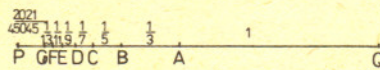
Rys. 4.



Rys. 5.

W „Regulaminie ligi” Delta 9/1981 zapowiadaliśmy przerwę wakacyjną na numery 6 i 7. W związku z przesunięciem cyklu produkcyjnego w stosunku do kalendarza przenosimy przerwę na numery 5 i 6. Zadania 25, 26, 27 ukażą się w numerze 7. Za zmianę przepraszamy.

15. Przypomnijmy treść. W baku samochodu mieści się 1 baryłka paliwa, co wystarcza na przebycie połowy pustyni. Więcej paliwa zabierać nie można. Jaka jest najmniejsza ilość paliwa potrzebna do przebycia całej pustyni? Zakładamy, że można po drodze odlewać (a potem w stosownej chwili zabierać) dowolną ilość z baku. Zauważmy, że aby przy powyższych danych przebyć pustynię, musimy w jej połowie dysponować 1 baryłką. Dostarczyć ją tam można odlewając część paliwa z każdego kursu. Załóżmy, że w pewnym punkcie $B < A$ zmagazynowaliśmy już trochę paliwa. Dostarczamy je do A kursując kilkakrotnie między A i B . Najlepiej startować z B z pełnym bakiem, można więc założyć, że kursujemy tylko na trasie AB . Będziemy mierzyć odległości w baryłkach, potrzebnych do przejechania danego dystansu. Niech $AB = x$. Kursując n razy z B do A zostawiamy za każdym razem $1 - 2x$ paliwa w A , używając pozostałe x na powrót.



Ostatni kurs robimy tylko w jedną stronę; wtedy w A musi już być zmagazynowana 1 baryłka. Stąd równanie $n(1 - 2x) + (1 - x) = 1$, zatem $x = n/(2n + 1)$. Wybierzmy punkt B tak, by startując z niego można było przejechać pustynię mając 2 baryłki, tzn. by na drodze AB spalić jedną, a jedną dostarczyć do A . Prowadzi to do równania $(2n + 1)x = 1$; zestawiając je z poprzednim mamy $n = 1$, $x = 1/3$. Taki punkt B jest punktem położonym najbliżej początku pustyni P , z którego można przebyć pustynię z dwiema baryłkami. Szukamy następnego punktu przeladunkowego C tak, by kursując m razy na drodze BC (+ ostatni kurs bez powrotu) zostawić w B 2 baryłki, a by na drodze BC zużyć tylko 1. Podobny jak powyżej rachunek daje $m = 2$, $BC = 1/5$. Taki punkt C jest najbliższym od P punktem, skąd można startować przez pustynię z 3 baryłkami.

Postępując tak dalej, otrzymamy taką oto marszrutę (p. rysunek):
 Startujemy 7 razy z pełną baryłką z P i zostawiamy w G $1 - 2 \cdot 2021/45045 = 41003/45045$ baryłki, ósmy kurs odbywamy tylko w jedną stronę. Znajdujemy się więc w G mając $7 \cdot 41003/45045 + 14 \cdot 2021/45045 = 7$ baryłek paliwa. Wyruszamy teraz 7 razy z G , zostawiając za każdym razem w F po $11/13$ baryłki, ostatni (siódmy) kurs robimy bez powrotu. W ten sposób przybywamy do F i mamy 6 baryłek. Dalej odbywamy 5 kursów powrotnych i jeden „tam” na trasie FE i tak dalej. W końcu znajdziemy się w B z dwiema, a następnie w A z jedną baryłką. Łącznie odcinek PG przejeździemy 15 razy, GF — 13 razy, FE — 11 razy, ..., CB — 5, BA — 3 i AQ — jeden raz. Zużyjemy więc $1 + 3 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{1}{5} + 7 \cdot \frac{1}{7} + 9 \cdot \frac{1}{9} + 11 \cdot \frac{1}{11} + 13 \cdot \frac{1}{13} + 15 \cdot \frac{2021}{45045} = 7 \cdot \frac{2021}{45045}$ baryłek paliwa.