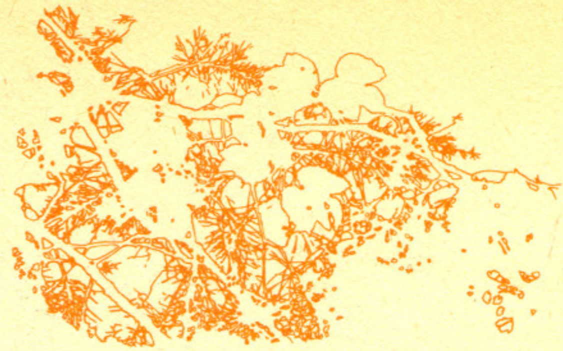
delta



SPIS TREŚCI

NUMERU 4 (100)

W następnym numerze:
Taternicy

Errata:
Środkowa część rysunku 9a na str. 3 „Delty” 2/1982 została powtórzona z rys. 9b. Oczywiście powinno być: $F^{-1}GFGPG^{-1}P^{-1}$.

„Delta”
matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego wydawany przy poparciu Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Adres Redakcji
ul. Hoża 69 pok. 151,
00-681 Warszawa

Zakład Narodowy im. Ossolińskich — Wydawnictwo Wrocław, Oddział w Warszawie
Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark. wyd.; 2,50 ark. druk.; papier offsetowy V kl. 61 cm.
Wydrukowano w Drukarni im. Rewolucji Październikowej Warszawa, ul. Mińska 65
Nr zam. 2413/82 Z-86

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

Czołówka ligi zadaniowej KLUB 44

(uwzględnione są oceny rozwiązań zadań z numerów 9, 10, 11, 12/1981)

Jerzy Janowicz - Bolesławiec (9,10,11,12)	22,12 pkt
Zbigniew Bartold - Gdynia (9,10,11,12)	20,04 pkt
Edward Orzechowski - W-wa (9,10,11,12)	17,84 pkt
Jacek Uryga - Bytom (9;10)	15,81 pkt
Andrzej Lenarcik - Kielce (10,11)	15,38 pkt
Jerzy Grzywocz - Ruda Śl. (9,10,11)	13,29 pkt
Artur Smolczyk - Tarnów Op. (9,10)	12,83 pkt

Liczby w nawiasie oznaczają numery Delty (1981) z których rozwiązania zadań zostały przysłane.

Jak widać, lider tabeli minął "półmetek". Gratulujemy ! Współczynniki trudności zadań 1 - 12 wyniosły kolejno : 2,47-3,34-3,42-2,33-2,44-2,39-3,82-2,25-2,64-2,80-3,14-2,80.

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTĘ”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.
Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.
Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Konto PKO I OM W-wa 1531-912
w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław
w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa
w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7 00-068 Warszawa, Poland or with
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland.
— Earlscourt Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain,
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia

Cena 1 egzemplarza zł 10— nr indeksu 35723/35550

Dlaczego wydajemy „Deltę"

TRZY ZNACZENIA SŁOWA „NAUKA"

Każdy się chętnie zgodzi, że nie każdy sposób ludzkiego działania to nauka. Skoro tak, to jak wygląda definicja tak nazywanego działania? Z pewnością uzyskalibyśmy powszechną akceptację dla opinii, że jest to uporządkowany opis otaczającego nas świata. Tyle że zdanie takie jest zbyt szerokie na definicję nauki — obejmuje bowiem również poezję i kinematografię. Nie rezygnując zatem z niego spróbujmy ograniczyć jego zakres przez podanie dodatkowych warunków.

Już pobieżny ogląd dyscyplin powszechnie za naukę uważanych pozwala na kilka ustaleń. Każda nauka ma określony *zasób* dobrze zdefiniowanych *pojęć*, ma określony sposób formułowania zdań, w określony sposób za ich pomocą formułuje *prawa* (często zwane *twierdzeniami*), dysponuje określonym *sposobem pomnażania* owych praw (zowie się to *wnioskowaniem*), ma wreszcie bardzo kategoryczny system *weryfikacji hipotez* (a więc odróżniania prawdy od fałszu — często nazywa się to *dowód*). Słowem — ma precyzyjnie określoną *metodologię*. Tak więc nauka byłby to opis świata za pomocą metodologii należącej do pewnej klasy (spośród wszystkich możliwych). Zostawiając to sformułowanie jako definicję nauki (i Czytelnika w przekonaniu, że zdefiniowaliśmy *ignotum per ignotum*, bo co to za klasa metodologii? — pewnie naukowych?), słowem odkładając jej doprecyzowanie, zauważmy, że nie jest to jedyny sens, jaki słowu „nauka" jest nadawany.

Bowiem nauka to również (a może przede wszystkim) *pozytywny epitet*. Mówiąc o czymś, że to nauka, że to naukowo stwierdzone, wyrażamy swój stosunek pozytywny do takiego działania, do takiej opinii. Chwała pokoleniom uczonych, którzy dla swojej działalności zdobyli takie uznanie, tak powszechny szacunek. Ale i na tym znaczeniu słowa „nauka" rzecz się nie kończy.

Trzecie znaczenie słowa „nauka" (obecnie może najpospolitsze) to *ogół czynności* wykonywanych przez ludzi, których stanowiska w odpowiednich taryfikatorach nazywane są naukowymi. I choć przewrotność tej opinii bije w oczy, choć się swobodnie żartuje na ten temat (np. Lem „Jak ocalał świat"), to jednak wszędzie dostrzegamy tendencje do powoływania „Instytutu Naukowo-Badawczego Tego i Owego", aby tym sposobem To i Owo mogło się nauką nazywać (bo jako się rzekło, warto).

Jeżeli jedno słowo ma trzy istotnie różne znaczenia, może to prowadzić do przezabawnych, albo i wcale nie zabawnych nieporozumień. I tak dochodzimy do głównego tematu, czyli

CO MA DO TEGO „DELTA"

Kiedy kilkanaście lat temu matematycy wszczynali działania mające na celu powołanie „Delty" do życia, społeczeństwo miało do dyspozycji „Problemy", „Młodego Technika", „Wiedzę i Życie", „Horyzonty Techniki" i inne czasopisma popularnonaukowe. Po co więc było mnożyć ilość czasopism, przecież można było popierać jedno bądź kilka spośród istniejących. Lokalny patriotyzm? — może, ale z całą pewnością nie tylko.

Chodziło o ochronę zawodu. Nie tę, typu trade-union, polegającą na dbałości o to, by nam i naszym kolegom powodziło się możliwie najlepiej, byśmy mieli jak najwięcej praw i przywilejów.

Była to troska o rozwój zawodu i jego obrona przed wynaturzeniami. Jakiego zawodu? Oczywiście nie chodziło o zawód matematyka — matematyka bez innych nauk istnieć nie może i nie powinna — chodziło o zawód uczonego (nie mylić z naukowcem). Dlatego też, gdy w 1973 roku powstawała „Delta", do matematyków przyłączyli się fizycy, w 1979 — astronomowie, pisują u nas biologowie, inżynierowie, chemicy, historycy, filologowie, słowem ci wszyscy, którzy widzą różnicę.

Jaką różnicę? Ano, właśnie różnicę w pojmowaniu słowa nauka. My uznajemy tylko pierwszy sens tego słowa, nasi wybitni konkurenci — wszystkie trzy (vide — cykl „Kosmos" w TV).

Tak (w pierwszy sposób) rozumiana nauka, to proces historyczny. W pewnym momencie obserwacje jakiegoś aspektu świata wzbogaca się o naukową metodologię i zaczyna się formować z nich nauka. Nie jest to początek zainteresowania tą klasą zjawisk, a tylko pewien, bardzo zaawansowany tego zainteresowania etap.

I tak geometria zaczyna się od pitagorejczyków, choć jej problemy nurtowały ludzi tysiące lat wcześniej. Fizyka — od Galileusza, astronomia — od Ptolemeusza, meteorologia zaś czy socjologia są właśnie na przełomie — lokalnie pojawiają się zaczątki metodologii naukowej, choć całość tonie jeszcze w chaosie nagromadzonych fenomenologicznie obserwacji. Medycyna czy historia są jeszcze na etapie sztuki — intuicja i rutyna więcej w nich znaczą od ostrego reżimu praw i dedukcji.

I tu bardzo istotna uwaga: powyższy tekst w żadnym razie nie może być odczytany jako niższa ocena dyscyplin będących na przednaukowym bądź przełomowym etapie. My nie wierzymy w inny sens słowa „nauka" niż pierwszy z przytoczonych. Dla nas „być" bądź „nie być" nauką nie jest oceną wartościującą. Jest to ocena, chciałoby się rzec, przyrodnicza.

„Delta" przystąpiła do swoich zadań w zakresie rozwoju nauki upowszechniając jej obraz możliwie szeroko, najszerzej jak umiemy. Zadanie zaś obrony przed wynaturzeniami realizujemy dbając, by obraz nauki był prawdziwy, stąd nasze wymaganie, aby nasi autorzy zajmowali się czynnie dyscypliną nauki, o której piszą.

I tak by się przedstawiała motywacja naszej pracy i zarazem kryteria, według których pragniemy być oceniani za nasze pierwsze sto numerów. Tak wyglądają też zasady, których nie odstępujemy w naszej współpracy z innymi czasopismami, wydawnictwami, radiem i telewizją (nie da się tak — to trudno). Do takiej pracy delegowało nas środowisko uczonych, do którego szczycimy się należeć.

No, a gdzie wyjaśnienie koła definicji z pierwszej części artykułu? — po to wydajemy „Deltę".

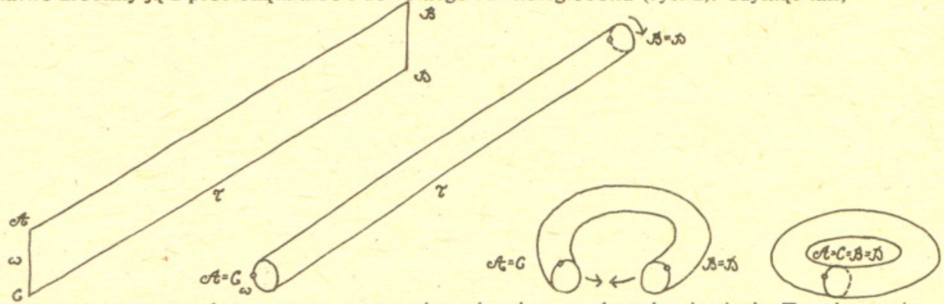
Kto z czego żyje czyli na przełaj przez torus

Dr Michał SZUREK

KOŃ, JAKI JEST, KAŻDY WIDZI

Rys. 1. Torus.

Każdy wie, co to torus. Charakterystyczny obwarzanek (rys. 1) jest jednym z ulubionych przez topologów przykładów powierzchni. Jest to powierzchnia obrotowa; starczy obracać jeden okrąg po drugim. Stąd i współrzędne „geograficzne" na torusie, lepsze niż na Ziemi, bo nie mają takich anomalii jak ziemskie wokół biegunów (glob ziemski jest niepraktycznie zbudowany, jak mawiał Hugo Steinhaus). Model torusa możemy otrzymać sklejając końcami elastyczną rurkę; łatwo zrobimy ją z prostokąta albo i dowolnego równoległoboku (rys. 2). Czyniąc tak,



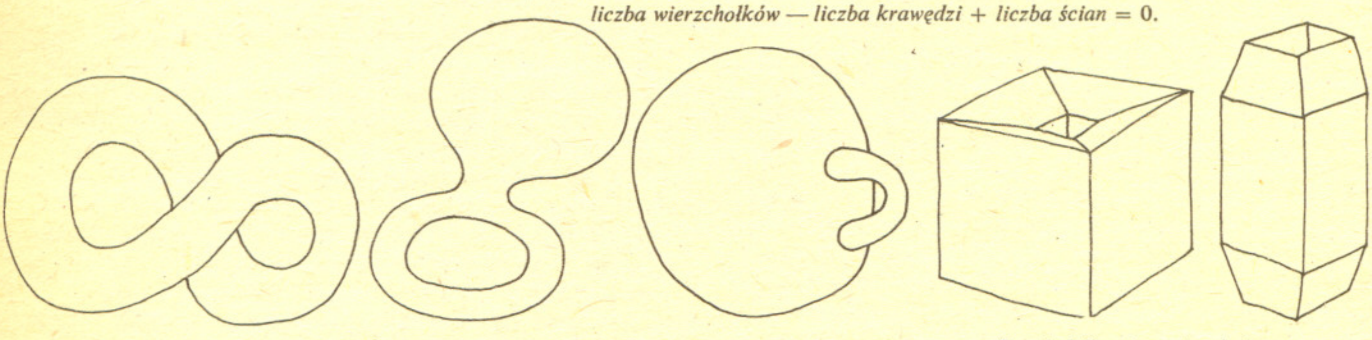
Rys. 2. Robimy torus z równoległoboku.

pozostajemy w ramach *topologii* — wykonujemy bowiem przekształcenia ciągłe. Topologia nie odróżnia figur powstających jedna z drugiej przez ściskanie, rozciąganie i dość dowolne wykręcanie. Możemy też „na chwilę" zbiór rozerwać — byle skleić go potem w tym samym miejscu. Zatem na rysunku 3 widzimy (topologicznym okiem) same torusy. Ostatnie z nich to wielościany; mają 16 wierzchołków, 32 krawędzie i 16 ścian, co nie zgadza się z wzorem Eulera:

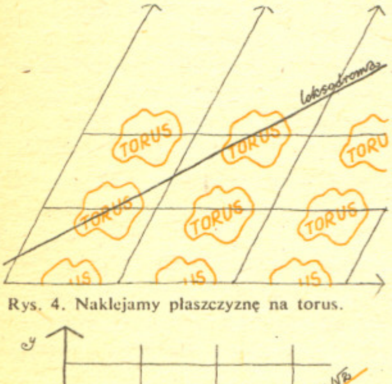
liczba wierzchołków — liczba krawędzi + liczba ścian = 2,

ale wszystko w porządku, bo wzór ten dotyczy tylko wielościanów *prostych*, takich bez dziur jaką ma torus „w środku". Dla wielościanów „z jedną dziurą", mamy jak dla torusa

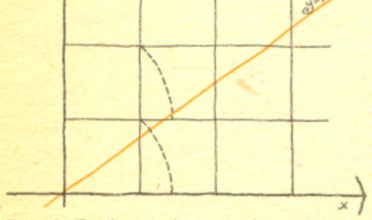
liczba wierzchołków — liczba krawędzi + liczba ścian = 0.



Rys. 3. Różne torusy topologiczne.



Rys. 4. Naklejamy płaszczyznę na torus.



Rys. 5. Z tej prostej powstanie gęsta owijka torusa.

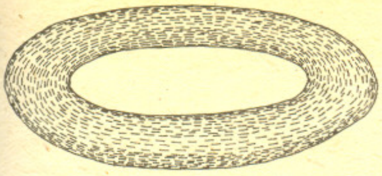
Do topologii należy też problem kolorowania map. W 1976 roku rozwiązano ponad stuletnie zagadnienie czterech barw: czterema kolorami *można* pomalować dowolną mapę polityczną na płaszczyźnie albo na sferze — powierzchni kuli. Wymagamy oczywiście, by sąsiednie państwa kolorować inaczej, zakładamy także, że w żadnym punkcie nie schodzą się więcej niż trzy granice Dla map na torusie potrzeba na ogół aż 7 kolorów a dowód tego twierdzenia jest prostszy niż dla sfery i płaszczyzny; tak często bywa.

TROCHĘ TEORII

Matematykom wygodnie patrzeć na całą płaszczyznę zamiast na jej fragment. Możemy zrobić sobie torus z całej płaszczyzny. Narysujmy na niej siatkę (będziemy ją nazywać kratą i oznaczać przez Γ) prostokątną albo i z dowolnymi równoległobokami jako oczkami. Nawińmy jedno oczko na torus tak, jak już umiemy, a pozostałe tak, jak to pierwsze (rys. 4). Taki sposób otrzymywania torusa nazwiemy *podzieleniem płaszczyzny przez kratę* i otrzymany torus oznaczymy przez C/Γ. Symbol C zapowiada, że później spojrzymy na dwuwymiarową płaszczyznę jako na zbiór liczb zespolonych. Podejście takie — jak każde nowe — pozwala jasno zobaczyć niektóre rzeczy do tej pory mało widoczne. Wspomnimy na przykład o zadaniu

Jak wygląda loksodroma na torusie?

(tj. krzywa przecinająca południki i równoleżniki pod stałymi kątami), o którym pisaliśmy w nr 1/1980. I tu tylko zwrócimy uwagę na *gęstą owijkę*: nitka nawijana na torus pod odpowiednim (jakim?) kątem nigdy nie dotknie sama siebie, chociaż przejdzie dowolnie blisko każdego punktu (rys. 5).



Rys. 6. Gładkie styczne pole wektorowe (czyli uczesanie) torusa.

W topologii można najwięcej. Założenia nakładane na funkcje (ciągłość) są stosunkowo słabe. Bardziej szczegółowa jest geometria różniczkowa; zajmuje się ona tymi własnościami figur, które nie zmieniają się przy wzajemnie jednoznacznych przekształceniach różniczkowalnych. Torusy z rys. 3 są nimi i z różniczkowego punktu widzenia (nietrudno znaleźć na to argumenty, o funkcje różniczkowalne prawie tak samo łatwo jak i o ciągłe) — z wyjątkiem ostatnich wielościanów. Wielościany nie należą do geometrii różniczkowej, nie da się ich otrzymać z gładkich powierzchni za pomocą funkcji mających wszędzie pochodną. Tracimy więc co najmniej jedną klasę modeli naszego torusa, zyskując w zamian pojęcia wektora stycznego i przestrzeni stycznej, ściśle związane z możliwością różniczkowania. To pozwala postawić i rozwiązać problem ,,zaczesania".

Owłosiony torus daje się gładko uczesać: wystarczy skierować wszystkie włosy np. na zachód. Dla innych powierzchni może tak nie być.

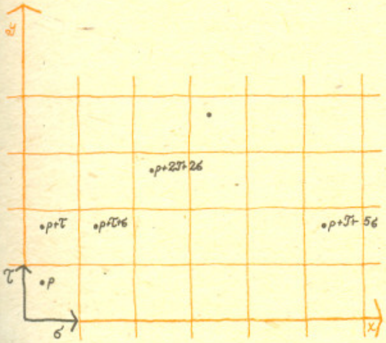
DYGRESJA

Kuli pokrytej włosami nie można nigdy całej gładko zaczesać; zawsze jest co najmniej jeden punkt, w którym włosy utworzą wir bez określonego kierunku. To zdanie (wyrażające twierdzenie Borsuka) jest cytatem z ,,Kalejdoskopu Matematycznego" Hugona Steinhausa. Należy tę książkę, jak i ,,Kubusia Puchatka", czytać przez całe życie. Miała kilkanaście wydań, w tym aż trzy polskie (1931, 1954 i 1956, to ostatnie było dodrukiem poprzedniego).

Dziś już nie wydaje się takich książek. Nie ma bowiem Autora, ani innego autora, a poza tym to dziś takich książek się nie pisze. Dziś się *publikuje*, najcenniejsze są publikacje zagraniczne, na szczęście faworyzuje to rozdrobnioną Europę.

Nie ma również takich poligrafów. W wydaniu z 1954 roku czcionka była duża i wyraźna, błędów korektorskich nie było. Był natomiast biały półkarton i 321 wyraźnych fotografii i rysunków, na których nie rozłaziły się kolory. Wysoką cenę książki (30 zł) rekompensowała nie tylko nadzwyczajna jakość tekstu, ale i piękne wydanie.

Dlaczego więc nie wznowić ,,Kalejdoskopu Matematycznego"? Braki papieru? Ogólne trudności? Nie bądź naiwny, Czytelniku. Kto bowiem mógłby na takiej książce dużo zarobić? Chyba tylko Wydawnictwo jako Instytucja (ale po co Wydawnictwu banknoty?), albo społeczeństwo (ale co komu po akordeonie?).



Rys. 7. Funkcje dwuokresowe muszą mieć te same wartości w odpowiednich punktach płaszczyzny.

POCZĄTKI SYSTEMATYKI

Matematycy XIX wieku nauczyli nas patrzeć na powierzchnie przez pryzmat własności funkcji na nich. Za słabo powiedziane: to właśnie zainteresowanie własnościami funkcji pchnęło dalej geometrię powierzchni. W XIX wieku powierzchnia żyła dla funkcji, w pierwszej połowie XX bytowała niezależnie, od pewnego zaś czasu ten apartheid ustępuje miejsca rozumnej koegzystencji. Spójrzmy i my na gromady funkcyj na torusie i jego podzbiorach: funkcyj ciągłych, różniczkowalnych raz, dwa, trzy, ..., dowolną liczbę razy. Skąd się one biorą? Skąd wziąć funkcje na torusie? Oczywiście — z funkcji na płaszczyźnie. Nie z byle jakich, rzecz jasna. Aby funkcja na płaszczyźnie C określała funkcję na torusie C/Γ, musi mieć te same wartości na każdym równoległoboku kraty Γ.

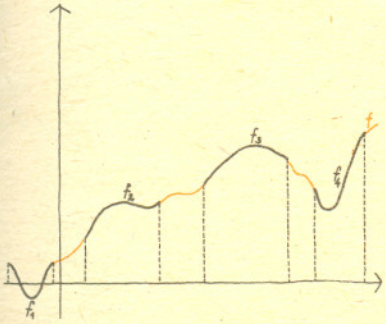
Można to nazwać dwuokresowością lub okresowością względem kraty i symbolicznie zapisać tak:

(1) $$f(p) = f(p+\omega) = f(p+\tau),$$

gdzie p jest dowolnym punktem płaszczyzny, a ω i τ — wektorami kraty (rys. 7). Tak właśnie torus dziedziczy po płaszczyźnie jej funkcje ciągłe, różniczkowalne i wszystkie inne. Użyliśmy terminu *gromada* funkcji na oznaczenie przyporządkowania

podzbiór $\mapsto$ zbiór funkcji na nim,

naprawdę nazywa się to *snopem*.



Rys. 8.

Funkcje ciągłe są giętkie, mamy tu na myśli mniej więcej tyle, że kawałki różnych funkcji ciągłych możemy złączyć w jeden (rys. 8). Niemal tak samo można wyginać funkcje różniczkowalne, chociaż złączenie dwóch odcinków funkcją nieskończenie wiele razy różniczkowalną bywa kłopotliwe (rys. 9). Nie nada się (dlaczego?) żaden wielomian.

Kraty na płaszczyznach możemy przekształcać, np. rzutując jedne na drugie (rys. 10). Takie rzutowanie jest wzajemnie jednoznaczne, a także i ciągłe, i różniczkowalne. Dlatego z punktu widzenia topologii czy geometrii różniczkowej jest tylko jeden torus. Tu Czytelnik zapyta: jak to, jakie są inne torusy i co to w ogóle znaczy?

Jak widzieliśmy, torus C/Γ dziedziczy po płaszczyźnie jej funkcje. Także *funkcje analityczne*. Są to funkcje zmiennej zespolonej z, lokalnie rozwijalne na szereg potęgowy; dokładna definicja na marginesie. Nie są one tak sztywne jak wielomiany (każdy wielomian jest wszak wyznaczony przez swoje wartości w skończonej liczbie punktów), ani tak giętkie jak funkcje różniczkowalne i w ogóle ich własności pochylają się raz w stronę wielomianów a raz w stronę ogólnych własności funkcji różniczkowalnych.

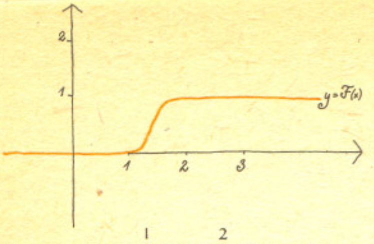
Przez funkcję analityczną zmiennej zespolonej z (w punkcie z_0) rozumiemy taką funkcję, która w pewnym otoczeniu tego punktu może być przedstawiona w postaci zbieżnego szeregu potęgowego:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Inne określenie znajduje się np. w artykule Włodzimierza Kuzaka. Iloraz funkcji analitycznych jest funkcją meromorficzną. Rozwinięcia funkcji meromorficznych na szeregi potęgowe mogą mieć składniki odpowiadające ujemnym potęgom:

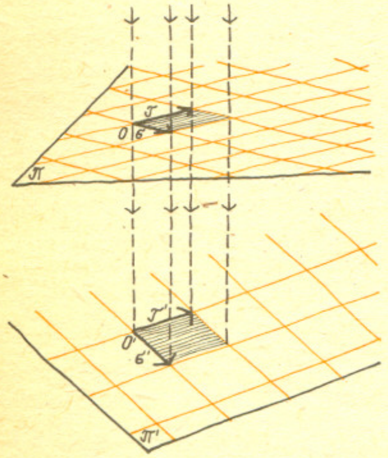
$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Punkt płaszczyzny i liczba zespolona to — z odpowiedniego punktu widzenia — jedno i to samo. Tak oto na torusie i jego podzbiorach mamy funkcje analityczne — te, które powstają z funkcji analitycznych na płaszczyźnie spełniających warunek (1). Funkcje analityczne jednej zmiennej dobrze znano, rozumiano i wykorzystywano już w XIX wieku. Najciekawsza i najbardziej pożyteczna jest w nich właśnie ta swoista ,,dualność": są dostatecznie ogólne a jednocześnie dość ,,sztywne", by można było czasami ich współczynniki wyznaczać ,,algebraicznie" z układów równań. Ciekawe, że funkcje analityczne więcej niż jednej zmiennej nachylają się znacznie bardziej w stronę wielomianów niż ogólnych funkcji różniczkowalnych.

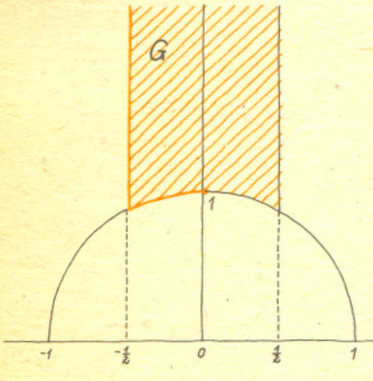


Rys. 9. $F(x) = \int_x^1 f(t)\,dt / \int_1^2 f(t)\,dt$, gdzie

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/(x-2)} - e^{1/(x-1)} & \text{dla } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$



Rys. 10. Każdą kratę można otrzymać z innej przez rzutowanie.



Rys. 11. Punkty zaznaczonego obszaru G wiernie parametryzują zbiór wszystkich struktur analitycznych na torusie.

TORUSY ANALITYCZNE

Tak czy owak na torusie (różnych torusach C/Γ) mamy różne „gromady" funkcji analitycznych. Co ciekawsze, rzeczywiście różne: jeżeli zmienimy kratę, możemy zmienić w sposób istotny gromadę funkcji analitycznych torusa; powiedzieliśmy już, że funkcje ciągłe czy różniczkowalne w gruncie rzeczy nie zmieniają się przy zmianie kraty. Ich „gromady" zmieniają się w sposób „nieistotny" ze zmianą Γ, formułuje się to tak: snopy funkcji ciągłych (różniczkowalnych) na różnych torusach C/Γ są izomorficzne.

Rozumowanie prowadzące do wyjaśnienia, kiedy owe struktury (czyli „gromady" funkcji) analityczne na torusach — teraz już możemy użyć liczby mnogiej — są takie same, stanowi piękny fragment XIX-wiecznej matematyki, solidnej, grubej i osadzonej mocno w konkretach, lecz trochę mistycznej i jak na dzisiejsze gusty nieco przyciężkiej. Żeby dojść do tej odpowiedzi przenieśmy się — bardziej ze względów historycznych niż jakichkolwiek innych — na *płaszczyznę Siegela*, czyli po prostu górną półpłaszczyznę. Nietrudno rozstrzygnąć prostą algebrą, kiedy dwie pary wektorów płaszczyzny Siegela H wyznaczają tę samą kratę. Mianowicie wtedy i tylko wtedy, gdy jedną z tych par można przekształcić na drugą za pomocą przekształcenia postaci $x \mapsto ax+by$, $y \mapsto cx+dy$, gdzie a, b, c, d są całkowite i układają się w macierz o wyznaczniku $ad-bc = \pm 1$. Takie macierze tworzą *grupę modularną*; dalecy jesteśmy od poznania wszystkich własności algebraicznych macierzy 2×2.

Łatwo uwierzyć, że struktura analityczna na torusie nie zmieni się przy jednokładnościach i obrotach kraty. Możemy wobec tego przyjąć, że jednym z wektorów kraty jest punkt $(1, 0)$, czyli liczba zespolona 1. Gdzie może być drugi? Odpowiedź nie jest oczywista: w zaznaczonym na rysunku 11 obszarze fundamentalnym G. Każdy wektor spoza obszaru fundamentalnego ma tam partnera, z którym pospołu z liczbą 1 daje kratę wyznaczającą ten sam torus. I oto kryterium, którego dowód tak się podobał autorowi artykułu: Jeżeli krata Γ jest wyznaczona przez wektory $(1, \omega)$, a krata Γ', przez $(1, \omega')$, gdzie $\omega, \omega' \in G$, to wyznaczają one taką samą (precyzyjnie: izomorficzną) strukturę analityczną na torusie wtedy i tylko wtedy, gdy $\omega = \omega'$. Ujmiemy to tak: obszar fundamentalny wiernie parametryzuje wszystkie struktury analityczne na torusie — każdej takiej strukturze odpowiada jeden określony punkt w obszarze fundamentalnym i odwrotnie. Że parametryzacja jest naturalna, a nie wydumana, nikt nie wątpi. Badanie takich przestrzeni parametrów dla różnego rodzaju struktur jest szalenie trudnym zadaniem geometrii algebraicznej, wyniki są najczęściej typu „zgadł i wyszło".

FUNKCJE ELIPTYCZNE

Spoglądamy teraz na funkcje analityczne i meromorficzne na torusie. Dwie najważniejsze takie funkcje to *funkcja Weierstrassa*

$$p(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Gamma} \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}$$

i jej pochodna $p'(z) = \sum_{\omega \in \Gamma} \frac{-2}{(z-\omega)^3}$; w napisanych szeregach nie bierze się pod uwagę ewentualnych wyrazów z zerem w mianowniku. Piękne i pomysłowe rachunki prowadzą do następującego wyniku: Każda funkcja meromorficzna na torusie wyraża się wymiernie przez funkcję Weierstrassa i jej pochodną. Funkcje te nie są niezależne, zachodzi między nimi związek

(2) $$p'^2 = 4p^3 - g_2 p - g_3, \quad \text{gdzie } g_2 = 60 \sum_{\omega \in \Gamma} \frac{1}{\omega^4}, \; g_3 = 140 \sum_{\omega \in \Gamma} \frac{1}{\omega^6},$$

sumowanie nie obejmuje $\omega = 0$. Piszmy x zamiast p a y zamiast p'. Wtedy równanie (2) ma postać $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$ i jest to *równanie charakterystyczne* naszego torusa, lepiej: jego struktury analitycznej.

Umiemy od kraty przejść do równania charakterystycznego torusa. Co z przejściem odwrotnym? Mamy zależność typu

(3) $$y^2 = 4x^3 - ax - b$$

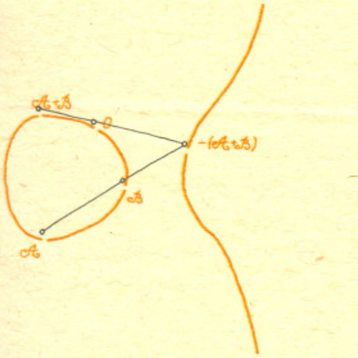
i pytamy: jak wyznaczyć kratę odpowiadającą temu torusowi? Odpowiedź znów zdumiewa swoimi powiązaniami z faktami „nie z tej opery". Oto dwa takie wektory (= liczby zespolone) otrzymujemy obliczając całki oznaczone $\int \frac{dz}{\sqrt{z^3 - az - b}}$ po dwóch niezależnych pętlach (okręgach) bazowych torusa. To *całki eliptyczne*; funkcje pierwotne wyrażeń podcałkowych nie wyrażają się przez funkcje elementarne. My doszliśmy do nich wychodząc z bardziej naturalnego dziś badania torusa i struktur analitycznych na nim, ale historycznie wyglądało to odwrotnie. Całki eliptyczne znane już były braciom Bernoullim w XVII wieku, wiele prac (w latach 1756—1781) poświęcił im Leonard Euler i Norweg Niels Henryk Abel (w latach 1827—9). Być może czytając odpowiednio ich prace doszlibyśmy do wniosku, że wiedzieli oni wszystko to, o czym tu pisaliśmy, tyle że nie interesowały ich struktury analityczne na torusie, tylko co zrobić z całkami eliptycznymi.

Każdy analityczny torus jest *algebraiczny*, chcemy tu tylko wyrazić to, że jego struktura analityczna jest dobrze opisana przez jedno proste równanie algebraiczne — (2) czy (3). Możemy więc interesować się krzywymi stopnia 3 uważając je za torusy. Za chwilę rozwiniemy tę uwagę, bo

WKRACZAMY DO GEOMETRII RZUTOWEJ

Zapowiedzią apetytu jest niejaka omdlałość żołądka i lekkie zmęczenie (Anthelme Brillat-Savarin, Fizjologia smaku, PIW, 1980, s. 28). U nas też najciekawsze dopiero się zaczyna. Bo oto nasz torus jawi nam się jako rzutowa „krzywa" zespolona trzeciego stopnia, opisana w części „skończonej" jednym równaniem (3). Nazwaliśmy tu „krzywą" zbiór, który składa się z punktów o dwóch współrzędnych związanych jednym równaniem. Współrzędne te są zespolone, a co ma wymiar zespolony n, to zwykły $2n$, dlatego „krzywe zespolone" to zwykłe powierzchnie. Ale możemy je właśnie badać jako krzywe.

Gdy zrobimy wykres równania (3), dopuszczając z natury rzeczy tylko rzeczywiste wartości zmiennych (innych wykresów wszak zrobić niesposób) to tak, jakbyśmy przecięli ten zanurzony w przestrzeni czterowymiarowej torus płaszczyzną. Zgadza się — w przecięciu dostaniemy dwa okręgi (prawa gałąź na rysunkach też jest okręgiem, bo zamyka ją punkt w nieskończoności — kierunek osi y). Zrobiliśmy tu typowy zabieg geometrii rzutowej: mieliśmy równanie (3) opisujące krzywą na płaszczyźnie i żeby nam było wygodniej, dołączyliśmy do tej krzywej jej punkty w nieskończoności. Otrzymaliśmy krzywą rzutową, słowo *krzywa* można wziąć w w cudzysłów albo i nie. Krzywa ta jest trzeciego stopnia i każda krzywa rzutowa trzeciego stopnia da się w skończonej części opisać równaniem (3), w razie czego trzeba tylko zmienić układ współrzędnych.



Rys. 12. Dodawanie punktów na gładkiej krzywej trzeciego stopnia.

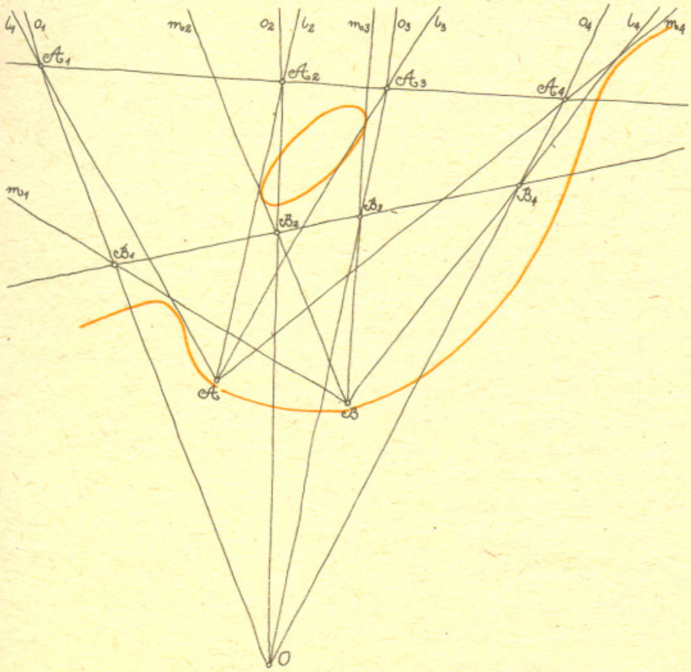
Już Faniano i Bernoulli w XVII wieku zauważyli pewną osobliwą własność krzywych (zespolonych albo i nie) trzeciego stopnia: można na nich w całkiem naturalny geometryczny sposób określić „dodawanie" punktów tak by — mówiąc współczesnym językiem — otrzymać grupę. Oto i ten sposób (rys. 12). Czy Czytelnik może pokusić się o ładny dowód łączności?

O własnościach tej grupy i co z niej wynika dla geometrii pisaliśmy w numerze 12/1980.

Na krzywych stopnia trzeciego żyje sobie zatem, w dobrej zgodzie z wszystkimi innymi strukturami, grupa. Czy to nas dziwi, jeśli przypomnimy sobie, że cały czas chodzi nam o torus? Nie powinno; na torusie takim, jakim widzieliśmy go na początku artykułu też jest naturalna struktura grupy: aby dodać dwa punkty, dodajemy ich odpowiednie współrzędne „geograficzne": długość do długości, szerokość do szerokości. Na Ziemi to nie przejdzie (dlaczego?). Samodzielne przekonanie się, że to dodawanie pokrywa się z opisanym na rysunku 12 (jeżeli już krzywą zespoloną utożsamimy sobie z torusem) wymaga może sporej dozy wyobraźni — lub odpowiedniej maszynki do dowodzenia twierdzeń. Ciekawe, że na innych powierzchniach zamkniętych takiego „geometrycznego" działania nie ma.

I znów siedzimy mocno w konkrecie i tradycji: krzywym stopnia 3 poświęcił traktat sam Newton; byłoby interesujące prześledzić co on naprawdę o tym wiedział.

CZY JESZCZE COŚ ŻYJE NA TORUSIE?



Rys. 13. Styczne wyprowadzone z punktu A krzywej trzeciego stopnia mają ten sam stosunek anharmoniczny, co styczne wyprowadzone z innego punktu B.

O, tak, oczywiście. Widzieliśmy już, że mieści się tam jedna struktura topologiczna, jedna różniczkowa, a nieskończenie wiele analitycznych, uporządkowanych w obszar fundamentalny. Jest i grupa. Co jeszcze? Trzeba spojrzeć na inne funkcje. Węższą klasę niż wszystkie tu rozpatrywane stanowią *funkcje wymierne*, ilorazy wielomianów.

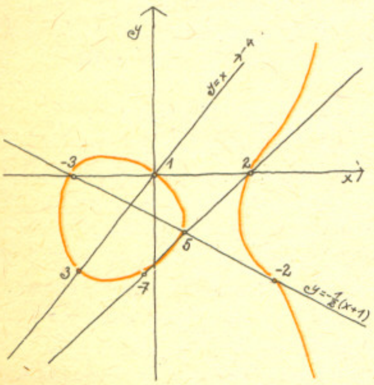
Na nasz obwarzanek patrzymy więc jeszcze inaczej. I znów to samo pytanie: kiedy (dla jakich krat) dwa torusy mają te same „gromady" funkcji wymiernych? I jeszcze raz odpowiedź przychodzi z nieoczekiwanej strony. Popatrzymy na torus jako na krzywą zespoloną i będziemy stosować geometrię płaszczyzny. Płaszczyzny zespolonej (czyli czterowymiarowej przestrzeni rzeczywistej), ale posłużymy się geometrią analityczną i to będzie prawie wszystko jedno.

Z dowolnego punktu A naszej krzywej poprowadźmy cztery styczne do niej: l_1, l_2, l_3, i l_4. Przetnijmy je prostą a — odpowiednie punkty przecięcia oznaczone są na rysunku 13 symbolami A_1, A_2, A_3 i A_4. Okazuje się, że wartość stosunku anharmonicznego tych czterech punktów nie zależy od wyboru początkowego punktu A (na rys. 13 widzimy, że czwórka B_1, B_2, B_3, B_4 da się otrzymać z A_1, A_2, A_3, A_4 przez rzutowanie). Dowód wspomnianego twierdzenia nie jest prosty; stosunkowo łatwo wysnuć tylko wniosek: dwie krzywe stopnia trzeciego (pamiętamy, że w gruncie rzeczy chodzi o torusy) mają te same funkcje wymierne wtedy i tylko wtedy, kiedy dają ten sam stosunek anharmoniczny punktów A_1, A_2, A_3, A_4. Możemy bowiem jedną krzywą przekształcić na drugą tak, by pierwsza z tych czwórek przeszła na drugą. Tak się da zrobić nawet za pomocą

przekształcenia rzutowego, opisanego wielomianami pierwszego stopnia.
Stosunek anharmoniczny punktów nie jest wyznaczony jednoznacznie: jeżeli wynosi on λ, to ,,równie dobrze" $1/\lambda$, $1-\lambda$, $1/(1-\lambda)$, $\lambda/(\lambda-1)$, $1-1/\lambda$; wszystko zależy od kolejności punktów. Wygodnie byłoby zastąpić λ przez takie wyrażenie, które nie zmieni się, jeżeli λ zastąpimy przez jedną z pięciu podanych wartości. Oto takie wyrażenie, można sprawdzić, że się zgadza:

$$j = 256\,\frac{(\lambda^2-\lambda+1)^3}{\lambda^2(\lambda-1)^2}, \tag{4}$$

czynnik 256 gra oczywiście rolę kosmetyczną.
Do niezmiennika j doszliśmy poprzez geometrię. Nie byłby on może taki interesujący, gdyby nie było innych dróg. Jedna z nich jest algebraiczną interpretacją geometrycznej: jeśli równaniem krzywej jest $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$, to λ jest akurat wartością stosunku anharmonicznego 0, 1, λ i ∞, wtedy j dostajemy wprost ze wzoru (4). Możemy to wykorzystać do obliczeń. Dla $y^2 = x^3-x$ mamy $\lambda = -1$, więc $j = 1728$. Taka krzywa jest najbardziej naturalnym torusem, bo odpowiadającym kwadratowej siatce płaszczyzny. Możemy to sprawdzić, wychodząc od kwadratowej kraty i szukając równania. Taka krata jest niezmiennicza ze względu na mnożenie przez liczbę zespoloną i, a skoro tak, to $g_3 = 140\sum\omega^{-6} = 140\sum i^{-6}\omega^{-6} = -g_3$, tj. $g_3 = 0$. Równanie musi mieć postać $y^2 = x^3-Ax$. Przecinając krzywą prostą $y = 0$ i obliczając stosunek λ dostajemy szybko właśnie $\lambda = -1$, czyli $j = 1728$. Krzywa $y^2 = x^3-x$ jest rzeczywiście najważniejsza, można to by jeszcze ,,uzasadnić" na kilka innych sposobów.
Dla ,,krzywej Fermata" $x^3+y^3 = z^3$ wyjdzie $j = 0$, trzeba się trochę narachować, aby dało się tę krzywą w części ,,skończonej" opisać równaniem $Y^2 = X^2(X-1)$.
Można dostać j wprost z kraty, oto formuła: $j = 1728\,g_2^3/(g_2^3-27\,g_3^2)$, gdzie o g_2 i g_3 już mówiliśmy. To jest jeszcze jedna, analityczna, interpretacja j.



Rys. 14. Poszukiwanie pierwiastków równania $y^2+y = x^3-x$. $P = (0,0)$, $2P = (1,0)$, $3P = (-1,-1)$, $4P = (2,-3)$, $5P = (1/4,-5/8)$, $6P = (6,14)$, $7P = (-5/9, 8/27)$, $8P = (21/25, -69/125)$, ...

TORUSY SĄ WSZĘDZIE

Ci z matematyków, którzy uprawiają teorię liczb, żyją z rozwiązywania równań w liczbach całkowitych lub wymiernych. I oni też wtrącają się do torusów, prześledźmy to na skromnym przykładzie. Próbujmy rozwiązać w liczbach wymiernych równanie $y^2+y = x^3-x$; kilka rozwiązań zgadujemy: (0, 0), (1, 0), (−1, −1), może jeszcze (2, 2). Zauważmy jednak, że jeżeli współrzędne punktów P i Q stanowią wymierne rozwiązanie naszego równania, to współrzędne punktu $P+Q$ też, gdzie — uwaga! — dodawanie punktów rozumiemy w sensie działania grupowego, opisanego wyżej (np. rys. 12). Nasza geometryczna metoda daje więc całą serię rozwiązań: $P = (0,0)$,

$$P+P = (1,0),\ P+P+P = (-1,-1),\ P+P+P+P = (2,-3),\ P+P+P+P+P = \left(\frac{1}{4}, -\frac{5}{8}\right),$$

$P+P+P+P+P+P = (6, 14)$ i tak dalej: można też brać $-P-P$, $-P-P-P$ itd. Są to już **wszystkie** rozwiązania wymierne tego równania, dowód nie jest łatwy.
Torusy są wszędzie. Charakterystyczne równanie (2) można spotkać w wielu książkach o całkiem odległej treści: ,,Kurs arytmetyki", ,,Teoria funkcji", ,,Funkcje analityczne wielu zmiennych", ,,Krzywe algebraiczne", ,,$SL_2(R)$", ,,Wstęp do geometrii algebraicznej", ,,Teoria ciał", ,,Rozmaitości abelowe"; listę można by znacznie przedłużyć.

CO Z TEGO MAMY?

Geometria rzutowa to cała geometria. Te słowa Artura Cayley'a (1841 r.) sprawdziły się i u nas. Dopiero po związaniu z torusem płaskiej krzywej rzutowej dostaliśmy harmonijną, prostą i bardzo geometryczną teorię.
Geometria to badanie niezmienników grup przekształceń — brzmi teza Kleina. Wykładając to inaczej mówimy, że w topologii powierzchnię możemy przekształcać w sposób wzajemnie jednoznaczny i ciągły (i będzie to ta sama, no, taka sama, powierzchnia), w geometrii różniczkowej — w sposób różniczkowalny, w analitycznej — w analityczny, w geometrii klasy β — za pomocą funkcji klasy β, cokolwiek by to znaczyło. O wszystkim decydują klasy funkcji dopuszczonych do głosu. Nic więc dziwnego, że patrząc stale na ten sam ,,przedmiot" — torus, widzieliśmy go za każdym razem inaczej. I tu autor wypowie wreszcie o co chodziło mu w całym artykule. O to mianowicie, by artykuł dostarczył argumentów do jakiegoś porównania matematyków do astronomów, którzy badając Wszechświat inaczej widzą go w promieniach widzialnych, rentgenowskich, podczerwonych, X, γ i Bóg jeszcze raczy wiedzieć w jakich.

Rozwiązanie zadania M 294. Zauważmy, że

$$S_{n+1}-S_n = \sum_{\substack{1\le p\le n\\(p,n+1)=1}}' \frac{1}{p(n+1)} - \sum_{\substack{p<q\\p+q=n+1\\(p,q)=1}} \frac{1}{pq} = \sum_{\substack{1\le p\le n\\(p,n+1)=1}}' \frac{1}{p(n+1)} - \sum_{\substack{1\le p<\frac{n+1}{2}\\(p,n+1)=1}} \frac{1}{p(n+1-p)}.$$

Ale

$$\sum_{\substack{1\le p<\frac{n+1}{2}\\(p,n+1)=1}} \frac{1}{p(n+1-p)} = \sum_{\substack{1\le p<\frac{n+1}{2}\\(p,n+1)=1}} \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{n+1-p}\right) = \frac{1}{n+1}\sum_{\substack{1\le p\le n\\(p,n+1)=1}} \frac{1}{p}$$

i wobec tego $S_{n+1} = S_n$ dla każdego $n \geq 2$, a więc $S_n = S_2 = \frac{1}{2}$.

O różniczkowalności zespolonej oraz pewnych jej konsekwencjach w hydrodynamice

Funkcje różniczkowalne w sensie podanym obok są częściej nazywane analitycznymi lub holomorficznymi. Stanowią one szerszą klasę niż wielomiany, a węższą niż wszystkie w ogóle funkcje ciągłe zmiennej zespolonej z. Jednym z warunków równoważnych na to, żeby funkcja $f(z)$ była analityczna w punkcie z^0 jest, by rozwijała się w tym punkcie na szereg potęgowy postaci

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z^0)^n.$$

Mgr Włodzimierz KUZAK

W naszych rozważaniach będziemy się posługiwać funkcjami zespolonymi jednej zmiennej z. Nietrudno zauważyć, że określenie funkcji zespolonej $f\colon A \to C$ jest równoważne określeniu dwóch funkcji rzeczywistych $f_1\colon A \to R$ i $f_2\colon A \to R$ (przyjmujemy $z = x+iy$; $f(z) = f_1(z)+if_2(z)$). Załóżmy, że funkcja $f = f_1+if_2$ jest skończona na pewnym otoczeniu punktu $z^0 = x^0+iy^0 \in C$. Mamy wówczas następującą definicję:

Definicja 1. Funkcję $f = f_1+if_2$ nazywamy *różniczkowalną* w punkcie z^0 *w sensie zespolonym*, jeśli funkcje f_1 i f_2 są różniczkowalne jako funkcje (x, y) w punkcie (x^0, y^0) oraz spełniony jest w punkcie z^0 następujący warunek:

(1) $$\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0, \text{ gdzie } \bar z = x-iy \text{ oraz } \frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}-\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\right).$$

Nietrudno zauważyć, że warunek (1) jest równoważny następującym równościom:

(1a) $$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}; \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}$$

Są to tzw. *związki Cauchy-Riemanna.*

Zauważmy, że jeżeli funkcje f_1 i f_2 są różniczkowalne w punkcie (x^0, y^0), to przekształcenie $\omega = f(z)$ można przybliżyć z dokładnością do wyrażeń małych wyższego rzędu względem $z-z^0$ przekształceniem: $f_1-f_1^0 = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x-x^0)+\frac{\partial f_1}{\partial y}(y-y^0)$, $f_2-f_2^0 = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x-x^0)+\frac{\partial f_2}{\partial y}(y-y^0)$,

co można zapisać w postaci:

(2) $$\omega-\omega^0 = \frac{\partial f}{\partial z}(z-z^0)+\frac{\partial f}{\partial \bar z}(\bar z-\bar z^0).$$

Jeżeli ponadto funkcja f jest różniczkowalna w sensie zespolonym, to $\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0$ oraz istnieje pochodna $f'(z^0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z^0)$. Wówczas przekształcenie (2) przybiera postać:

(2a) $$\omega-\omega^0 = f'(z^0)\cdot(z-z^0).$$

Zauważmy, że gdy $f'(z^0) \neq 0$, jest to wydłużenie wektora $z-z^0$ przez skalar $|f'(z^0)|$ wraz z obrotem o kąt $\arg f'(z^0)$. Odwzorowanie (2a) ma następujące geometryczne własności:
a) zachowuje kąty, b) kwadraty przekształca na kwadraty, c) okręgi przekształca na okręgi, d) zachowuje orientację dowolnego trójkąta.

Definicja 2. Przekształcenie f nazywamy *konforemnym w punkcie* $z^0 \in C$, jeśli jest przekształceniem różniczkowalnym w sensie zespolonym w punkcie z^0 oraz $f'(z^0) \neq 0$. Przekształcenie $f\colon A \to C$ nazywamy *konforemnym na obszarze A*, jeśli jest różnowartościowe i konforemne w każdym punkcie obszaru A.

Rozpatrzmy obecnie przepływ jednorodnej cieczy nielepkiej taki, że wektory prędkości $\boldsymbol{v}$ tego przepływu nie zależą od czasu i nie zmieniają się wzdłuż żadnej z prostych prostopadłych do ustalonej płaszczyzny.

Takie przepływy nazywamy ustalonymi *przepływami płaskimi.* Są one opisane przez wektorowe pole prędkości

(3) $$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1(x, y)+i\boldsymbol{v}_2(x, y).$$

Załóżmy, że w pewnym otoczeniu punktu z^0 funkcje $\boldsymbol{v}_1$ i $\boldsymbol{v}_2$ mają ciągłe pochodne cząstkowe oraz, że w tym otoczeniu pole (3) jest *solenoidalne* (*bezźródłowe*), tzn.

(4) $$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{v}_1}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{v}_2}{\partial y} = 0$$

oraz *bezwirowe*, tzn.

(5) $$\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{v}_2}{\partial x}-\frac{\partial \boldsymbol{v}_1}{\partial y} = 0.$$

Wprowadźmy pewną funkcję φ taką, że

(6) $$\boldsymbol{v}_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \boldsymbol{v}_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Spełnimy wtedy warunek (5) tożsamościowo. Funkcję nazywamy *potencjałem* pola wektorowego $\boldsymbol{v}$.
Jeżeli wprowadzimy ponadto taką funkcję ψ, że

(7) $$\boldsymbol{v}_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \boldsymbol{v}_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

to spełnimy również warunek (4). Jest to tak zwana funkcja prądu. Jej wykres to krzywa styczna do pola wektorowego $\boldsymbol{v}$.

Zauważmy, że na mocy (6) i (7) zachodzi następująca zależność:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

Z tego wzoru wynika, że każda krzywa $\varphi = \text{const}$ przecina się pod kątem prostym z dowolną krzywą $\psi = \text{const}$. Możemy zatem zbudować funkcję zespoloną

$$f = \varphi + i\psi \tag{8}$$

zwaną *zespolonym potencjałem* pola $\boldsymbol{v}$. Na mocy związków (6) i (7) mamy:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

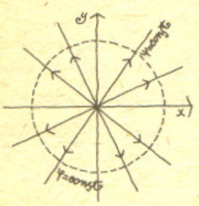
Na mocy (1a) widać, że są to warunki Cauchy-Riemanna zespolonej różniczkowalności funkcji $f = \varphi + i\psi$ w punkcie z^0. Tak więc na każdą różniczkowalną w sensie zespolonym funkcję f można patrzeć jak na zespolony potencjał ustalonego, potencjalnego i solenoidalnego przepływu płaskiego nielepkiej cieczy. Ponadto ponieważ pochodna $f'(z)$ nie zależy od kierunku, więc można ją obliczać na przykład w kierunku osi Ox. Otrzymamy stąd:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = v_1 - iv_2 = \bar{v}.$$

Rozpatrzmy obecnie kilka przykładowych przepływów, jakie możemy opisać za pomocą potencjałów zespolonych.

I Płaski Przepływ Równoległy:

Nietrudno zauważyć, że potencjał $f(z) = Uz$ opisuje przepływ równoległy do osi Ox ze stałą prędkością U.



Rys. 1.

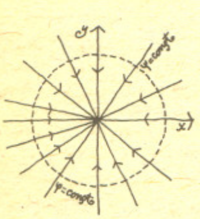
II Źródło i Upust

Rozpatrzmy zespolony potencjał prędkości $f(z) = \dfrac{Q}{2\pi}\ln z$, gdzie $Q = \text{const}$.

Z drugiej strony, zapisując $z = re^{i\theta}$ otrzymamy: $f(z) = \dfrac{Q}{2\pi}(\ln r + i\theta) = \varphi + i\psi$.

Zatem $\psi = \dfrac{Q\theta}{2\pi}$; $\varphi = \dfrac{Q}{2\pi}\ln r$. Ponadto $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \dfrac{Q}{2\pi z} = \dfrac{Q(x-iy)}{2\pi(x^2+y^2)} = v_1 - iv_2$.

Stąd $v_1 = \dfrac{Q}{2\pi}\cdot\dfrac{x}{x^2+y^2}$; $v_2 = \dfrac{Q}{2\pi}\cdot\dfrac{y}{x^2+y^2}$.



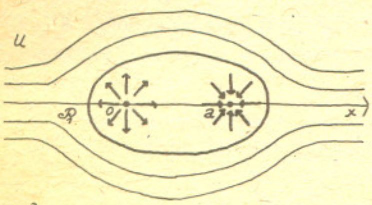
Rys. 2.

Stała Q określa wydatek cieczy. Dla $Q > 0$ mamy do czynienia z wypływem cieczy ze źródła punktowego (rys. 1), a dla $Q < 0$ powyższy potencjał opisuje upust cieczy (rys. 2).

III Opływ Elipsy

Rozpatrzmy przepływ płaski o stałej prędkości U w kierunku osi Ox w superpozycji ze źródłem w punkcie $(0, 0)$ o wydatku $Q > 0$ oraz z upustem o intensywności $-Q$ położonym w punkcie $(a, 0)$, $a > 0$ (rys 3). Zatem naszemu przepływowi odpowiada potencjał

$$f(z) = Uz + \frac{Q}{2\pi}\ln\frac{z}{z-a}. \tag{9}$$



Rys. 3.

Spróbujmy wyznaczyć pole prędkości cieczy:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = v_1 - iv_2 = U + \frac{Q}{2\pi}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z-a}\right) = U + \frac{Q}{2\pi}\left(\frac{1}{x+iy} - \frac{1}{x-a+iy}\right) \tag{10}$$

Okazuje się, że na osi Ox istnieją 2 punkty, w których składowa v_1 pola prędkości znika. Są to tak zwane *punkty spiętrzenia* p_1, p_2 (rys. 3). Aby wyznaczyć ich położenie, należy we wzorze (10) położyć $v_1 = 0$, $y = 0$. Otrzymamy stąd następujące zależności:

$$x_{p_1} = \frac{a}{2}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{2Q}{\pi a U}}\right), \quad x_{p_2} = \frac{a}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2Q}{\pi a U}}\right).$$

Opisaliśmy w ten sposób opływ elipsy o ogniskach w punktach $(0,0)$ i $(a, 0)$. Jeżeli teraz we wzorze (9) na potencjał będziemy przechodzić do granicy $(a \to 0)$ oraz będziemy zwiększać Q $(Q \to \infty)$ tak, by razem $aQ = m = \text{const}$, to na mocy (9) otrzymamy

$$f(z) = Uz + \lim_{a\to 0}\frac{Q}{2\pi}\ln\frac{1}{1-\frac{a}{z}} = Uz + \lim_{a\to 0}\frac{Q}{2\pi}\left(\frac{a}{z} + \frac{a^2}{z^2} + \ldots\right).$$

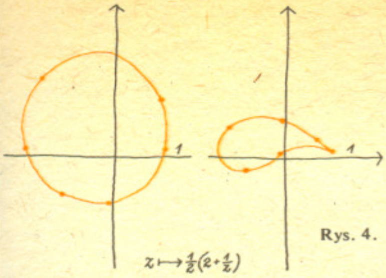
Ponieważ ma być $aQ = m$, to

$$f(z) = Uz + \frac{m}{2\pi z} = \varphi + i\psi. \tag{11}$$

Stąd mamy następujące równości: $\varphi = \dfrac{mx}{2\pi(x^2+y^2)} + Ux$; $\psi = \dfrac{my}{2\pi(x^2+y^2)} + Uy$.

Potencjał (11) opisuje opływ cieczą okręgu (co w przestrzeni trójwymiarowej odpowiada opływowi walca). W tym miejscu można już wykorzystać własności odwzorowań konforemnych. Wiadomo, że zachowują one kąty, a więc w szczególności zachowają prostopadłość linii prądu $\psi = \text{const}$ z liniami potencjału $\varphi = \text{const}$. Zatem jeżeli chcemy opisać opływ pewnego profilu płaskiego ustalonym strumieniem nielepkiej cieczy, to wystarczy znaleźć (o ile to możliwe) odwzorowanie konforemne zewnętrza koła na zewnętrze rozpatrywanego profilu.

Znalezione odwzorowanie w złożeniu z potencjałem opływu koła (11) da nam w efekcie potencjał opisujący opływ naszego profilu. Fakt ten ma niezmiernie szerokie znaczenie praktyczne. Przykładowo można w ten sposób opisać opływ profilu skrzydła lotniczego (w tym przypadku powietrze traktujemy jako ciecz nielepką, co z punktu widzenia jego podstawowych własności hydrodynamicznych jest dopuszczalne). Do tego celu wykorzystuje się fakt, że *funkcja Żukowskiego* $F(z) = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ przekształca konforemnie zewnętrze koła przechodzącego przez punkt $(1, 0)$ i zawierającego wewnątrz punkt $(-1, 0)$ na zewnętrze profilu lotniczego (rys. 4). Widać więc, że w wielu przypadkach trudność znalezienia potencjału zespolonego dla opływu dowolnego profilu można zastąpić problemem poszukiwania odpowiedniego odwzorowania konforemnego.



Rys. 4.

Ta pierwsza i ta nasza

Dla uzmysłowienia sobie istnienia wielu metodologii najlepiej zwrócić uwagę na dwie najpopularniejsze: empiryczną i dedukcyjną (od razu zastrzeżenie: nie należy uważać, że metodologia dedukcyjna nie stosuje doświadczeń, a empiryczna rozumowań).

TA PIERWSZA

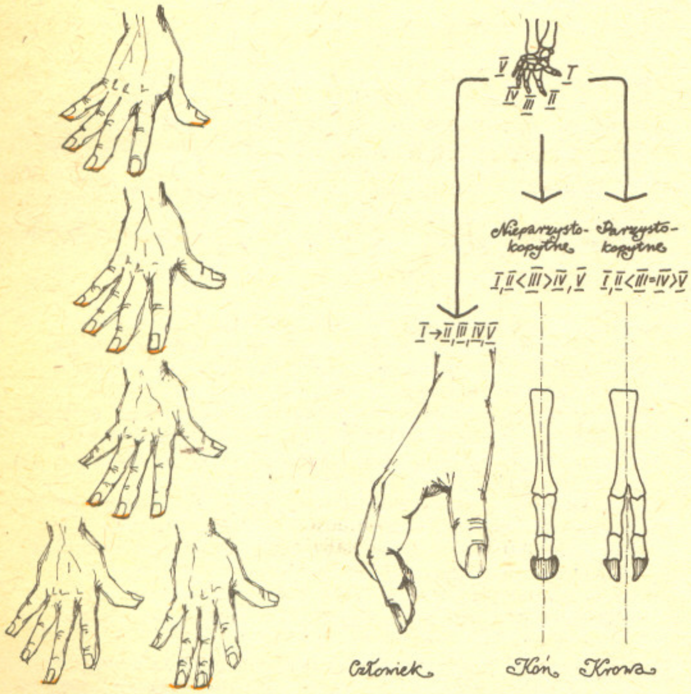
Metodologia empiryczna jest tak stara jak wyodrębniony gatunek *Homo sapiens* — jest to broń, którą nasi przodkowie pokonali silniejszych, a nawet mających większe mózgi neandertalczyków. Aby tę metodologię zobaczyć „w działaniu", weźmy do ręki typowe dzieło naukowe sformułowane w myśl jej zasad i stosowane do chwili obecnej — książkę kucharską. Znajdujemy w niej przepisy na uzyskanie określonych efektów na polu gastronomicznym. Każdy z nich można by nazwać (w naszym, z innej metodologii wziętym języku) twierdzeniem o konstrukcji typu: jeżeli wykonasz to i tamto, uzyskasz taki to a taki efekt. Oczywiście nie ma możliwości i nie wyczuwa się potrzeby dowodzenia prawdziwości takich twierdzeń. Wierzymy, że są one prawdziwe i przeważnie tak jest, gdyż ich lista uformowała się przez eliminację (spośród wielu proponowanych) złych, czyli nie sprawdzających się w praktyce przepisów — stąd nazwa tej metodologii.
Użyte wyżej słowo *wiara* jest szczególnie znaczące. Wobec braku możliwości wielokrotnego (w sensie statystyki, a nie potocznym) sprawdzenia przepisu (bo ile w końcu pieczemy np. pierników bakaliowych przez całe życie) głównym motywem podjęcia ryzyka (zmarnowania kilku jajek, kostki masła etc.) jest zaufanie, że głosiciele takich przepisów „wiedzą". I stąd o uczonych z czasów, gdy metodologia empiryczna nie miała konkurencji, mówimy: kapłani egipscy, kapłani chaldejscy itd. Owo zaś związane z z nazwami „kapłan", „religia" pojęcie mitu też nie jest przypadkiem — przepis, na to by mógł być utrwalony w świadomości dość prymitywnych wówczas i złożonych kompletnie z analfabetów mas, musiał być obudowany ułatwiającą zapamiętanie fabułą, częstokroć był wierszowany, wyposażony w melodię itp. (np. mit o Ozyrysie, którego obrzędy zmuszały do należytej uprawy roli; potem już bez tego praktycznego znaczenia powtarzany w greckiej historii Persefony).
I ta właśnie metodologia królowała niepodzielnie na Ziemi do ok. 1000 r. p.n.e. Później dzieląc swe władanie z metodologią dedukcyjną wycofywała się na tereny o młodszej cywilizacji (np. umieszczony w „Kalevali" przepis na produkcję piwa), ale nigdy nie została całkowicie usunięta, o czym świadczy przytoczona książka kucharska, a o wiele dobitniej rozmaite instrukcje obsługi, gdzie mamy do dyspozycji przepis dla nas niesprawdzalny, choć łatwy do uzasadnienia dla jego autorów (co w przypadku książki kucharskiej nie ma miejsca).
Wiek XX przez poszerzenie obszarów ludzkiej penetracji spowodował szczególnie korzystne warunki dla renesansu pierwszej ludzkiej metodologii. Zaczęliśmy nie nadążać, mamy trudności z ogarnięciem całości odsłoniętego obszaru rzeczywistości. A więc coraz częściej częstujemy (i jesteśmy częstowani) przepisami dotyczącymi nie opanowanych przez innych (czy przez nas) dziedzin.
Nowoczesna maszyna — komputer — oferuje nam rozumowania, których powtórzyć nie bylibyśmy w stanie (np. rozwiązanie problemu czterech barw) wieńcząc ostatecznie restaurację odsuwanej w obszar magii przez 3 tysiące lat metodologii empirycznej. Mechanika kwantowa jest dlatego dobra, że jej przepisy dają przewidywania zgodne z doświadczeniem. Tak jak przepis na piernik bakaliowy. Przestajemy pytać „dlaczego?", mówimy „tak jest, i już".
A nasze „stare" przyzwyczajenia do dedukcji odżywają w najróżnorodniejszych redukcjonizmach, tj. tendencji, by owo kompromitujące „i już" odsunąć i by go użyć tylko raz: a więc zjawiska socjologiczne wyjaśnić można psychologicznymi, te — biologią, ją znów — biochemią, tę — chemią, ją z kolei — fizyką, w całości sprowadzalną do teorii cząsteczek elementarnych, którą wyjaśnia hipoteza kwarków, w której trzeba powiedzieć „i już" (patrz np. G. Białkowski, „Delta" 4/1981).
To tłumaczenie się z powrotu do metodologii empirycznej, niepokój wywołany supremacją algorytmu i oszacowania, często probabilistycznego, skąd się to bierze? Czego właściwie żałujemy?

TA NASZA

Jest pewien warunek społeczny umożliwiający konsekwentne stosowanie metodologii empirycznej, a więc warunek, którego niespełnienie praktycznie ją wyklucza. Mianowicie możliwość nagromadzenia wielkiej ilości rezultatów powtarzalnych eksperymentów. Dlatego też bujnie rozwinęła się nauka empiryczna w wielkich państwach rolniczych zamierzchłej Starożytności. I dlatego nigdy nie mogła być wchłonięta przez sąsiadujące z nimi plemiona koczownicze. Tym potrzebny był inny rodzaj doświadczenia — taki, który pozwoliłby poradzić sobie w różnych okolicznościach, rozwiązać problemy w coraz to innych warunkach. Pasterz — koczownik musiał np. znaleźć wodę tam, gdzie się przypadkowo znalazł, musiał mieć zatem sposób uniwersalny, niezależny od okoliczności — w przeciwnym razie ginął. Odkrywał więc takie prawa jak: „woda płynie zawsze z góry na dół".
Szczególnie ważne jest tu słowo „zawsze". Jest to pierwszy krok na drodze abstrakcyjnego myślenia. „Zawsze" oznacza „niezależnie od wszelkich innych czynników". Innych od czego? — ano od „góry" i „dołu". A więc dostrzegalne aspekty rzeczywistości dzielono na mające znaczenie i pomijalne. Te mające znaczenie były pojęciami, o których wypowiadało się ogólne prawo. O innych — nie mówiło nic. Samo zaś prawo było egzemplifikacją kreującej metodologię dedukcyjną zasady: „ta sama przyczyna daje zawsze te same skutki". Tylko uwaga: przyczyna znów dotyczyła wyłącznie wyróżnionych pojęć, a nie całokształtu rzeczywistości. Konsekwentne wdrożenie zasady przyczynowo-skutkowej pozwalało na ustawianie zjawisk w ciągi: przyczyna — skutek, będący przyczyną następnego skutku itd, itd., który to ciąg rychło zyskał sobie miano dowodu — sposobu uzyskiwania ze znanych już praw praw nowych, dotąd nie znanych. Zwrot „matematyka, królowa nauk" jest konstatacją, iż ona pierwsza potrafiła tego typu metodologię sformułować i rygorystycznie jej przestrzegać. Wszystkie zastane „przepisy na piernik bakaliowy" zostały ostro zweryfikowane przez nową (historycznie rzecz biorąc dorycką) koncepcję poznawania rzeczywistości. Dla kolejno „poddawanych obróbce" fragmentów świata kompletowano zestaw pojęć (w rodzaju siła, przyspieszenie, pierwiastek, oddychanie itp.) zawsze abstrakcyjnych, a więc mających w rzeczywistości różne desygnaty. Wykrywano pierwsze rządzące tymi pojęciami prawa, z nich wyprowadzano następne. Doskonalono umiejętność dowodzenia, zestawiano prawa rządzące danym aspektem świata w teorie, te zaś w nauki. Poprzednią metodologię i jej rezultaty tam, gdzie nie zmieściły się w obrębie tak rozumianych nauk, chrzczono imionami magii i szamaństwa. Aż wreszcie w XVIII wieku postanowiono siecią nauk opleść cały Wszechświat.
Uczyniono więc to, czego w żadnym razie czynić nie należało. Bowiem już z samej konstrukcji nauka może zajmować się jedynie aspektami rzeczywistości. Nieszczęściem udało się ten plan zrealizować i pod koniec ubiegłego stulecia uczeni orzekli — wiemy wszystko, pozostały tylko drobne szczegóły. Ciąg dalszy opisany jest w Piśmie Świętym pod hasłem „wieża Babel", my nazywamy to obecnie specjalizacją. Nic więc dziwnego, że poprzednia metodologia podniosła głowę i połykać jęła podzieloną, rozdrobnioną naukę w dedukcyjnym sensie tej nazwy, o czym napisaliśmy w poprzedniej części artykułu.
Czytelnik zechce wybaczyć, że nie napiszemy, co będzie dalej.

Dlaczego setny?

Dlaczego uważamy akurat setny numer naszego pisma za niezwykły, jubileuszowy — ważniejszy od innych? Oczywiście dlatego, że na co dzień posługujemy się systemem dziesiętnym. Czemu właśnie takim? Najpewniej wzięło się to stąd, że mamy w sumie 10 palców u obu rąk. No dobrze, ale dlaczego nasza ręka jest kończyną pięciopalczastą?
To stara historia — tak dawna, jak cała ewolucja kręgowców lądowych. Kończyna taka pojawiła się w zaraniu dziejów tej grupy zwierząt (dlaczego akurat pięciopalczasta? — nie wiadomo, może to dzieło przypadku ...). Już przed 300 milionami lat występowała ona u pierwszych — nieruchawych, pełzających — lądowców. Kończyna owa była wówczas jeszcze bardzo pierwotna — tzn. słabo wyspecjalizowana. A czym została spowodowana późniejsza specjalizacja kończyn czworonogów lądowych? — Ruchem! Musiały one zapewnić jak najszybszy i najsprawniejszy marsz, bieg czy skok. To zaś oznaczało:
1) pojawienie się wyraźnej osi w kończynie i orientację jej elementów składowych wzdłuż owej osi (przy czym oś ta może przebiegać bądź pomiędzy palcem III a IV, bądź przez palec III),
2) zmniejszenie powierzchni styku kończyny z podłożem (przechodzenie od stopochodności do palcochodności).
W efekcie tych procesów kontakt z podłożem zachowują jedynie palce osiowe — tzn. III u nieparzystokopytnych (np. koniowate) albo III i IV u parzystokopytnych (np. bydło); palce owe obejmują dominację — następuje ich wyraźny rozrost, natomiast palce pozostałe (poboczne) tracąc kontakt z podłożem ulegają stopniowemu zanikowi.
Zatem opisana specjalizacja kończyny lądowca to utrata jej pierwotnej pięciopalczastości, prowadząca w ostatecznym rezultacie do jedno — bądź dwupalczastości form kopytnych. Gdyby więc zwierzęta te mogły (chciały?) rachować — koń posługiwałby się najpewniej systemem dwójkowym, krowa zaś — czwórkowym.
Zupełnie inaczej wyglądała ewolucja pierwotnej kończyny pięciopalczastej w przypadku, gdy zwolniona była ona z omówionej funkcji nośnej i ze związanego z nią kierunku specjalizacji. Sytuację taką stwarzał na przykład nadrzewny tryb życia — a od takich właśnie drobnych form nadrzewnych wzięła początek linia ssaków naczelnych i w efekcie też człowiek. Spójrzmy na naszą rękę (kończynę chwytną) — przecież to prawie nic innego, jak starodawny, pierwotny, niewyspecjalizowany typ kończyny o zachowanych wszystkich pięciu palcach. Gdyby nie jeden szczegół anatomiczny — drobny lecz o kapitalnym znaczeniu! Szczegół zapewniający jej niespotykaną w świecie zwierząt precyzję działania, czyniący z niej prawdziwe „przedłużenie umysłu i serca". „Drobiazgiem" tym jest możliwość przeciwstawiania I palca (kciuka) palcom pozostałym (tak, tak — to ta niewielka strzałka na schemacie ...). Taka ręka stworzyła cywilizację.
A więc nie tylko jubileusz ale i poniekąd samo istnienie „Delty" wiązałyby się jakoś z brakiem nadmiernej specjalizacji (zaraz, zaraz, czy to właśnie należało udowodnić?! — bo a nuż co złośliwsi wtrącą tu coś o pierwotności ...).



$100 =_4 1210$

$100 =_2 1100100$

dr Krzysztof PLASOTA

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delty"

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr. $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4-3\cdot\frac{\text{suma ocen za rozwiązanie danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów w dowolnym czasie zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł weterana. Ligę organizuje Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, oraz nasza Redakcja.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr. 9/1981.

Klub 44

Zadania nr 22, 23, 24

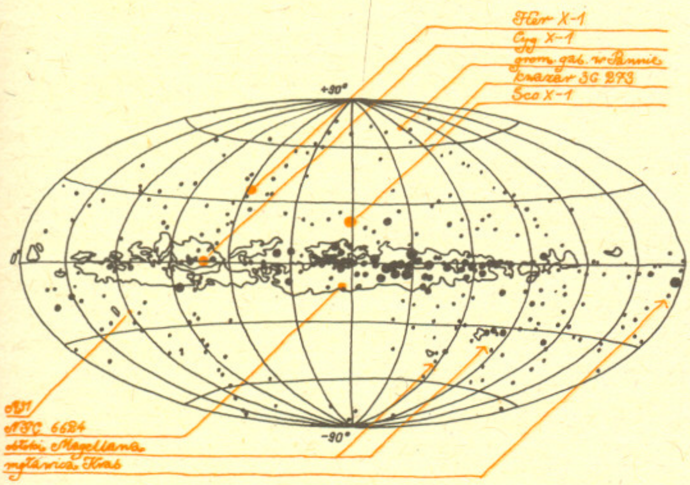
Termin nadsyłania rozwiązań: do 30.IX.1982

22. Z jaką częstością występują w ciągu 2, 4, 8, 16, 32, 64,... liczby zaczynające się od jedynki? Sformułowanie bardziej precyzyjne: Wśród liczb postaci 2^i, gdzie $1 \leqslant i \leqslant n$, jest $j(n)$ liczb, których zapis dziesiętny zaczyna się cyfrą 1. Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{j(n)}{n}$.

23. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ trójkąty ABC, BCD, CDE, DEA, EAB mają pola równe 1. Czy pole całego pięciokąta jest przez ten warunek wyznaczone jednoznacznie? Czy pięciokąt ten musi być foremny?

24. Przedstawić liczbę 100 w postaci sumy różnych liczb naturalnych, tak by ich iloczyn był możliwie największy.

Rys. 1. Obraz Słońca w promieniach Roentgena



Rys. 2. Mapa (we współrzędnych galaktycznych) najjaśniejszych źródeł rentgenowskich. Wielkość kropek oznaczających źródła jest proporcjonalna do ich jasności. Żadne — oprócz Obłoków Magellana — nie jest widoczne ludzkim gołym okiem.

Patrz w niebo

Kiedy miesiąc temu pisałem marcowe ,,Patrz w niebo", przyszło mi na myśl, aby krótko opisać jak wyglądałoby niebo, gdyby nasze oczy były czułe na inne długości fal, np. w dziedzinie fal rentgenowskich (np 1—10 Å). Zagadnienie jest oczywiście typowo akademickie, nie tylko ze względu na trudności w wyobrażeniu sobie budowy takiego oka, ale chociażby na sam fakt, że np. od najbliższej gwiazdy — *Proxima Centauri* (wcale nie takiego słabego źródła promieni X) — padają na 1 cm² zaledwie 3 rentgenowskie fotony na dobę. Załóżmy jednak, że mamy duuuże oczy, dostatecznie czułe, aby rejestrować obiekty ok. 400 razy słabsze niż najjaśniejsze poza Układem Słonecznym źródła, podobnie jak w przypadku naszej prawdziwej czułości w zakresie optycznym. Wybierzmy się teraz na orbitę okołoziemską (bo z Ziemi nic byśmy nie zobaczyli) i rozpocznijmy obserwacje. Oczywiście najjaśniejszym obiektem jest oślepiające Słońce, ale — o dziwo — nie jest ono ani jednorodnie jasne, ani ,,ograniczone" swą tarczą — liczne wąsy wystają daleko w przestrzeń. Jasny jest również Księżyc odbijający słoneczne promienie X, ale niewiele mu ustępują najjaśniejsze źródła poza Układem Słonecznym. Zadziwiający jest fakt niewielkiej liczby widocznych źródeł. Jest to poniekąd spowodowane założoną granicą czułości naszych oczu oraz faktem, że najjaśniejszy obiekt poza Układem Słonecznym, *Sco* X-1, jest kilka razy jaśniejszy niż wszystkie inne źródła razem wzięte. Zwyczajnych, pojedynczych gwiazd w ogóle nie widać, jednak płaszczyzna Galaktyki wraz z jej centrum są wyraźnie zaznaczone. Prawie wszystkie źródła są, podobnie jak w zakresie widzialnym, praktycznie punktowe, jednak po zanalizowaniu przyczyn ich jasnego świecenia w promieniach X stwierdzilibyśmy, że duża ich część to układy podwójne gwiazd zawierające gwiazdę neutronową (np. *Sco* X−1, *Her* X−1) lub czarną dziurę (*Cyg* X−1); jasno świecą źródła zanurzone w centrach gromad kulistych i w samym centrum Galaktyki. Dużo jest źródeł pozagalaktycznych, przy czym większość to gromady galaktyk, zupełnie niewidoczne gołym okiem w zakresie widzialnym. Po przyłożeniu rentgenowskiego teleskopu do rentgenowskiego oka ujrzymy nowy świat milionów słabszych źródeł (w szczególności pojedynczych gwiazd późnych typów widmowych), ale to już temat na kiedy indziej ...

mgr Tomasz CHLEBOWSKI

Rozwiązania zadań z numeru 12/81

10. Nietrudno stwierdzić, że powstały ciąg liczb $\{x_n\}$ spełnia zależność rekurencyjną

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad \text{gdzie } f(x) = \frac{x+c}{x+1}, \quad x_0 = \frac{a}{b} > 0.$$

Jeśli więc granica $\lim x_n$ istnieje, to jest ona dodatnim pierwiastkiem równania $x = f(x)$, czyli jest równa $\sqrt{c}$. Gdy $c < 1$, wykres funkcji f jest zawarty pomiędzy prostymi $y = x$ i $y = \sqrt{c}$, skąd łatwo wynika monotoniczność i ograniczoność ciągu $\{x_n\}$, więc i jego zbieżność. Gdy $c > 1$, w podobny sposób dowodzimy zbieżności ciągów $\{x_{2k}\}$ i $\{x_{2k+1}\}$; analizując wykres funkcji $g(x) = f(f(x))$; granica każdego z nich musi spełniać równanie $x = g(x)$, a jedynym dodatnim pierwiastkiem tego równania jest liczba $\sqrt{c}$.

Tak więc przedstawiony program oblicza przybliżenia pierwiastka kwadratowego z danej liczby c. Biorąc za punkt wyjścia inne formuły rekurencyjne można tworzyć np. programy obliczające pierwiastki wyższych stopni.

11. Niech $p_1, p_2, p_3, \ldots$ będzie ciągiem wszystkich liczb pierwszych. Przypuśćmy, że istnieje wskaźnik n taki, że dla liczb pierwszych $p > p_n$ równanie $W(x) = py$ nie ma rozwiązań całkowitych x, y. Oznaczmy przez c wyraz wolny wielomianu W, tzn. napiszmy $W(x) = c + xV(x)$. Można założyć, że $c \neq 0$ (gdy $W(0) = 0$, teza jest oczywista).

Niech $x_0 = cp_1p_2 \ldots p_n$. Z założenia $V \neq 0$, więc istnieje k naturalne takie, że $V(kx_0) \neq 0$. Wówczas

$$W(kx_0) = cq, \text{ gdzie } q = 1 + kp_1p_2 \ldots p_nV(kx_0) \neq 1.$$

Liczba q musi mieć dzielnik pierwszy $p > p_n$. Para liczb $x = kx_0$, $y = cq/p$ jest rozwiązaniem równania $W(x) = py$, wbrew naszemu przypuszczeniu.

12. Oznaczmy symbolem abc trójkąt, którego kwadraty boków są równe a, b, c. Jeśli dany sześcian ma krawędź długości 2, to liczby a, b, c mogą przyjmować wartości 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12. Istnieje osiem różnych trójkątów leżących w płaszczyźnie jednej ściany. Oto one:

(*) 112 125 145 158 224 255 448 455.

Niech abc będzie jednym z trójkątów (*). Umieśćmy go w płaszczyźnie ,,parteru", a następnie windujmy jego wierzchołki na ,,pierwsze i drugie piętro". Otrzymamy dziewięć nowych trójkątów: trzy trójkąty

(**) $a+1, b+1, c$ $a+4, b+4, c$ $a+1, b+1, c+4$

oraz sześć trójkątów powstałych z (**) przez cykliczną zamianę ról a, b, c. Wypisując wszystkie osiemdziesiąt trójkątów otrzymanych tą metodą z trójkątów (*) oraz wykreślając powtórzenia, dostajemy czterdzieści różnych trójkątów o wierzchołkach w punktach zbioru Z.

Czy każda pomyślana gwiazda istnieje w przyrodzie?

Dr Tomasz KWAST

Chyba każda młoda gałąź nauk przyrodniczych przeżywała we wczesnej fazie rozwoju okres „porządkowania" swoich obiektów badań. Tak było z botaniką i zoologią, kiedy powstawała klasyfikacja organizmów żywych, tak było z chemią, gdy powstawał okresowy układ pierwiastków, w pewnym stopniu jest obecnie w podobnej sytuacji fizyka cząstek elementarnych. Okres ten nie ominął i astronomii. Pod koniec ubiegłego wieku nagromadziło się już tyle obserwacji widm gwiazd, że pojawiła się potrzeba zrobienia z tym porządku, co doprowadziło do powstania tzw. harvardzkiej klasyfikacji gwiazd. Jej podstawą jest wygląd widma (tzn. względne natężenia poszczególnych linii widmowych), który w pierwszym przybliżeniu można określić jednym symbolem. Wkrótce stwierdzono, że ten wygląd widma, czyli tzw. typ widmowy gwiazdy, dość ściśle zależy od jej temperatury powierzchniowej. Fakt ten dowodzi, że temperatura powierzchniowa jest czynnikiem decydującym o wyglądzie widma gwiazdy i powinien naturalnie wynikać z teorii budowy gwiazd.

Zanim jednak powstała jakakolwiek teoria budowy gwiazd doszło do odkrycia jednej z najważniejszych zależności pomiędzy parametrami gwiazd, której ilustracją jest słynny diagram Hertzsprunga-Russella (H-R), przedstawiony na okładce. Tradycyjnie na jego osi poziomej odkłada się typ widmowy (równoważny temperaturze powierzchniowej), a na pionowej jasność absolutną gwiazdy (równoważną jej mocy — jasność absolutna jest liczbowo proporcjonalna do logarytmu mocy). Obejrzenie dowolnego diagramu H-R (oczywiście, sporządzonego dla rozsądnie licznej grupy gwiazd) prowadzi do pozornie banalnego wniosku, że punkty, z których każdy reprezentuje jakąś gwiazdę, układają się na nim nierównomiernie — ogromna większość układa się w dość wąskie pasmo biegnące wzdłuż przekątnej wykresu (jest to tzw. ciąg główny). Ale z tego wynika, że gwiazdy nie są byle jakie, co dokładniej oznacza, że gwiazda o konkretnej temperaturze ma konkretną moc, a przynajmniej tak jest dla gwiazd ciągu głównego.

Znalezienie uzasadnienia diagramu H-R było wspaniałym polem do popisu dla teoretyków. Obecnie teoria budowy gwiazd jest już dość dobrze ugruntowana i diagram H-R jest jej piękną ilustracją. Wiemy już np., że gwiazda nie może być lżejsza, niż ok. 0,08 masy Słońca, gdyż nie byłaby wtedy w stanie wytworzyć w swoim centrum warunków niezbędnych dla produkcji energii jądrowej, czyli po prostu nie byłaby gwiazdą. A czy istnieje górna granica masy gwiazd? Otóż zauważmy, że każda gwiazda może żyć spokojnie tak długo, jak długo równoważą się siły działające na każdy element jej masy. Siły te są trzy: grawitacja działająca ku środkowi gwiazdy oraz ciśnienie gazu i ciśnienie promieniowania działające na zewnątrz. W gwiazdach typu Słońca to ostatnie jest nawet zaniedbywalne i po prostu ciężar warstw gazu równoważony jest przez jego ciśnienie. Wyobraźmy sobie teraz, że na taką gwiazdę nakładamy po trochu dodatkową masę. Za każdym razem gwiazda zostaje lekko ściśnięta przez dodatkowy ciężar, zatem lekko wzrasta gęstość i temperatura wnętrza, jako dalszy skutek wzrasta tempo produkcji energii i ustala się nowa równowaga przy lekko podwyższonych ciśnieniach gazu i promieniowania. Ale tak nie można w nieskończoność, czego oczywiście nie można stwierdzić bez przeprowadzenia stosownych rachunków. Chodzi jednak o to, że w miarę wzrostu masy gwiazdy ciśnienie promieniowania rosłoby dużo szybciej, niż pozostałe dwie siły, wskutek czego gwiazda o masie przekraczającej tysiąc mas Słońca swoim strumieniem promieniowania oderwałaby swoje zewnętrzne warstwy. Przedstawiony tu eksperyment z gotową gwiazdą jest czysto myślowy, a naprawdę górna granica masy jest dużo niższa, gdyż formująca się z rozproszonej materii gwiazda już przy masie rzędu 100 mas Słońca może swoim strumieniem promieniowania „rozpędzić na cztery wiatry" swój macierzysty obłok i do skupienia masy większej nie dojdzie.

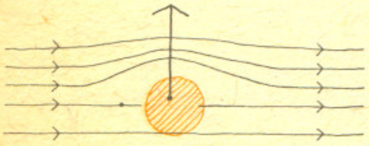
Na początku swojego życia normalna gwiazda jest zatem obiektem o masie pomiędzy 0,08 a ok. 100 mas słonecznych, temperaturze powierzchniowej od 3000 do 50 000 K, średniej gęstości od 0,01 do 100 g/cm^3 (czyli od 10 do 100 000 kg/m^3), jednorodnym chemicznie (głównym składnikiem jest wodór) i świecącym na koszt energii termojądrowej produkowanej w jądrze przy przemianie wodoru w hel. W ten sposób gwiazda żyje jako gwiazda ciągu głównego nawet miliardy lat — jest to najdłuższy, spokojny etap jej życia. Ale wcześniej czy później dochodzi do zużycia wodoru w centrum. Kolejne etapy ewolucji zaczynają teraz następować szybciej po sobie. Energia termojądrowa jest teraz produkowana poza centrum w nieco zwiększonym tempie, a w samym środku gwiazdy tworzy się helowe jądro, które jako nieaktywne (jest tam zbyt chłodno, aby hel mógł przejąć rolę paliwa jądrowego) będzie w miarę powiększania się ulegać zgniataniu przez ciężar wyższych warstw. Zjawisku temu towarzyszy pęcznienie otoczki gwiazdy, a więc spadek temperatury powierzchniowej. Nasza gwiazda opuszcza więc ciąg główny i przesuwa się na diagramie H—R w prawo w górę stając się tzw. czerwonym olbrzymem — bardzo ładna, obrazowa nazwa.

Jest to przejściowe, dosyć krótkotrwałe stadium życia gwiazdy, ale ważne, gdyż teraz właśnie w jej centrum dzieją się jakościowo nowe rzeczy. Mianowicie materia jądra wskutek dużej gęstości przestaje zachowywać się jak znany z klasycznej fizyki gaz doskonały. Dzieje się tak, gdyż elektronom, dającym największy wkład do ciśnienia gazu, zaczyna być w tej gęstości „za ciasno" w tym sensie, jak za ciasno jest im w normalnym atomie. W atomie elektrony nie spadają na najniższą orbitę (czyli do stanu o najmniejszej energii), gdyż z przyczyn wyjaśnionych przez mechanikę kwantową nie ma tam dla nich miejsca i dlatego muszą obsadzić kilka wyższych orbit odpowiadających większym energiom. Podobnie w gęstym gazie nie ma miejsca dla elektronów o małej energii, muszą one zachowywać energie odpowiednio większe i taki gaz, zwany zdegenerowanym, wywiera ciśnienie większe, niż wywierałby gaz doskonały o takiej samej gęstości. Ale najważniejsze, że dla takiej kuli zdegenerowanego gazu, gdy się dostatecznie rozrośnie, staje się obojętne, czy zewnętrzne warstwy gwiazdy są jeszcze na swoim miejscu, czy nie. Może dojść wręcz do odrzucenia otoczki gwiazdy i kula zdegenerowanego helu „wyjrzy na światło dzienne" utrzymując już tylko własnymi siłami swą równowagę. Będzie to nowy typ

Rozwiązanie zadania F 112

Prędkość cieczy w punktach symetrycznych względem środka przekroju walca jest taka sama, bo przepływ ma dwie prostopadłe osie symetrii l i k. Ponieważ ciśnienie w cieczy idealnej zależy od kwadratu prędkości, siły działające w tych punktach równoważą się.

Po zsumowaniu przepływów prędkość ponad walcem będzie większa niż pod walcem. Odpowiadająca temu różnica ciśnień da działającą na walec wypadkową siłę skierowaną do góry (siła nośna). Tak więc, dopóki ciecz nie „krąży" wokół walca, siła nośna jest równa zeru. Wynik ten jest słuszny również dla profilu lotniczego. Pojawienie się takiego „krążenia" wokół skrzydła startującego samolotu pozornie narusza zasadę zachowania momentu pędu (moment pędu względem środka walca w opływie (a) jest równy zeru). Pozornie — bowiem tarcie o powierzchnię skrzydła powoduje, że prędkość cieczy płynącej wzdłuż górnej (dłuższej) powierzchni skrzydła jest na krawędzi A skrzydła mniejsza niż prędkość cieczy wypływającej spod skrzydła.



W efekcie powstaje wir, którego moment pędu kompensuje moment pędu cieczy krążącej wokół skrzydła. Wir ten po pewnym czasie dzięki odpowiedniemu ukształtowaniu krawędzi, odrywa się. Lepkość ma więc podstawowe znaczenie jedynie w chwili powstawania „krążenia". Później, analizując problem, ciecz możemy traktować jak idealną.

stabilnej gwiazdy, tzw. biały (lub zdegenerowany) karzeł. Znowu jest to bardzo obrazowa nazwa. Gwiazda taka jest rzeczywiście niewielka, rozmiarów większej planety, a więc słaba i biaława wskutek bardzo wysokiej temperatury powierzchniowej (jest to wszak odsłonięte jądro dawnego czerwonego olbrzyma), natomiast jej masa jest rzędu masy Słońca. Łatwo obliczyć, że jej gęstość jest wobec tego rzędu 10^9 kg/m^3, a więc milion razy większa od gęstości wody. Białe karły, jako gwiazdy słabe i gorące, leżą w lewym dolnym rogu diagramu H—R. Znając ich pochodzenie wiemy, że reakcje termojądrowe w nich nie zachodzą (co najwyżej w cienkiej warstewce wodoru przy powierzchni), a więc świecą właściwie tylko dzięki zwyczajnemu stygnięciu. Tak wygląda końcowy etap życia gwiazd stosunkowo mało masywnych.

Jeżeli bowiem początkowa masa gwiazdy jest odpowiednio większa, to jej ewolucja przebiega w sposób bardziej skomplikowany. Wskutek potężnego ściśnięcia helowego jądra może się ono tak dalece ogrzać, że zacznie zachodzić produkcja energii kosztem przemiany helu w cięższe pierwiastki, z kolei one się „zapalają" i taki ciąg coraz cięższych paliw może sięgnąć węgla, a najcięższym produktem reakcji termojądrowych może być nawet żelazo. Te etapy życia gwiazd masywniejszych nie są jeszcze dostatecznie dobrze poznane, ale najprawdopodobniej np. jądro węglowe ma w pewnym momencie ochotę detonować, a żelazne zapaść się. W obu przypadkach dzieją się straszne rzeczy — wydzielają się w krótkim czasie tak kolosalne ilości energii, że przez jakiś czas gwiazda świeci z mocą taką, jak wszystkie gwiazdy Galaktyki razem wzięte, a jest ich bądź co bądź w przybliżeniu 10^{11}. Krótko mówiąc, mamy wtedy wybuch supernowej, tzw. supernowej II typu.

Czy coś z takiego kataklizmu pozostaje, rzecz jasna poza rozprężającą się chmurą gazów? Wszystko wskazuje na to, że tak, nawet w przypadku detonacji jądra węglowego, która, jak się wydaje, jest przez pewne procesy tłumiona i nie rozrywa gwiazdy doszczętnie. Okazuje się, że wskutek nieuchronnego wtedy ściśnięcia i tak już gęstego jądra elektrony nie mogą istnieć niezależnie od protonów, łączą się parami i następuje tzw. neutronizacja materii. W centrum wybuchu powstaje kula niezwykle zgęszczonej neutronowej materii o masie również rzędu masy Słońca, lecz o promieniu stu czy nawet zaledwie dziesięciu kilometrów. Daje to gęstość zbliżoną do gęstości materii jądrowej (10^{17} kg/m^3), co jak na obiekt makroskopowy jest dość fantastyczne. Jest to tzw. gwiazda neutronowa, obiekt „odkryty" wpierw teoretycznie na papierze, ale dziś znany już i na niebie i to w wielu egzemplarzach. Świeci ona — jak biały karzeł — poprzez stygnięcie, ale również ściągając na siebie rozproszoną materię z otoczenia wywołuje w niej charakterystyczne świecenie, które może być widziane z wielkich odległości. W sumie jest to drugi typ stabilnego obiektu, będącego końcowym stadium życia gwiazdy, tym razem początkowo bardziej masywnej.

Zarówno białe karły, jak i gwiazdy neutronowe są, jak widzimy, obiektami o potężnej grawitacji i to ona powoduje, że ich masy nie mogą być dowolne, a dokładniej — nie mogą przekraczać pewnych wartości krytycznych (wspomnieliśmy już, że dla obu tych typów gwiazd masa krytyczna jest zbliżona do masy słonecznej). Powyżej masy krytycznej gwiazdy te nie byłyby w stanie zachować równowagi sił ciężkości i ciśnienia i musiałyby się „zawalić" pod własnym ciężarem. Zresztą prawdopodobnie i tak do tego może dojść, przynajmniej w przypadku białych karłów. Mianowicie, gdy masa białego karła jest prawie krytyczna, a tym samym gęstość wyjątkowo duża, następuje coś w rodzaju powolnej neutronizacji materii. W wyniku tego elektronów ubywa, ciśnienie wewnętrzne spada i wreszcie gwiazda zapada się, niewykluczone, że do stadium gwiazdy neutronowej. W każdym razie wyzwolona zostaje wielka ilość energii dając zjawisko supernowej I typu — mniej okazałe niż supernowej II typu, ale też lepiej oglądać je z daleka.

Nie wiemy, czy w podobny sposób może zapaść się po jakimś czasie gwiazda neutronowa. Można natomiast przewidzieć, że np. wyjątkowo masywne żelazne jądro czerwonego nadolbrzyma zapadając się może od razu mieć ochotę utworzyć gwiazdę neutronową o masie większej od krytycznej. Wtedy do powstania gwiazdy neutronowej w ogóle nie dojdzie, stadium to w ułamku sekundy zostanie przeskoczone i ... Właśnie, co wtedy?

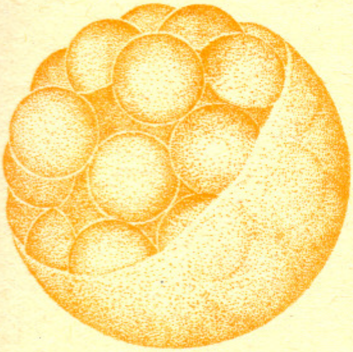
Współczesna astronomia, fizyka cząstek elementarnych i teoria grawitacji razem wzięte skłaniają się tu do twierdzenia, że obiektów stabilnych gęstszych od gwiazd neutronowych nie ma. Nie znamy praw przyrody pozwalających na zrównoważenie własnego ciężaru takich hipotetycznych nadgęstych obiektów. Uważa się, że taki obiekt może już tylko zapadać się. Być może, będzie zapadać się „do punktu", ale tego akademickiego problemu i tak nie ma co dyskutować, gdyż przed osiągnięciem rozmiarów punktowych przestanie być obserwowalny. Mianowicie ogólna teoria względności przewiduje, że po skurczeniu się do kuli o promieniu $r_g = 2GM/c^2$ (jest to tzw. promień grawitacyjny, M oznacza tu masę obiektu, G stałą grawitacji, c prędkość światła) obiekt zniknie z pola widzenia. Upraszczając zagadnienie można powiedzieć, że stanie się to dlatego, iż z obszaru o tak potężnej grawitacji nie może wydostać się nawet światło — do obszaru tego wszystko może tylko wpadać i to w dowolnych ilościach. Obiekt taki, tzw. czarna dziura, będzie swą obecność przejawiać tylko za pośrednictwem pola grawitacyjnego swej (punktowej?) masy oraz poprzez świecenie otaczającej go, a chwytanej przezeń materii międzygwiazdowej.

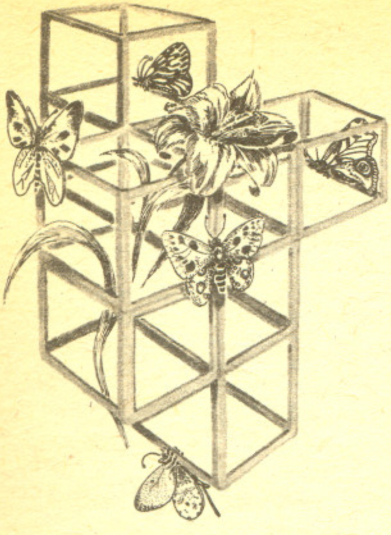
Co dzieje się z materią, z cząstkami elementarnymi wewnątrz czarnej dziury — nie wiemy. Współczesna fizyka tam nie sięga. Stwierdzenie, że pod dostatecznie wielkim naciskiem nawet neutrony okazują się „miękkie", oczywiście niczego nie wyjaśnia. Wizja błąkających się w przestrzeni dowolnie masywnych czarnych dziur wsysających, co tylko napotkają na swej drodze, wydaje się dość upiorna. A może ich w ogóle nie ma? Sęk w tym, że chyba są, aczkolwiek nie ma dotychczas przekonującego dowodu, że obiekt taki w konkretnym miejscu istnieje. Najsilniejsze podejrzenia dotyczą obiektu znanego pod nazwą Cygnus X—1, co oznacza, że jest to pierwsze źródło rentgenowskie wykryte w gwiazdozbiorze Łabędzia. Emisja rentgenowska świadczy właśnie o tym, że musi tam być obiekt z bardzo silną grawitacją, wywołujący to świecenie w otaczającym go gazie. Natomiast obserwacje optyczne dowodzą, że jest to gwiazda podwójna, w której nawet składnik lżejszy ma masę większą od krytycznej dla białych karłów czy gwiazd neutronowych. Chyba zatem musi to być czarna dziura. Jest ona wprawdzie dość daleko, co najmniej 2500 parseków, ale sama jej obecność może chyba być odrobinę denerwująca ...

Rozwiązanie zadania **M 292.** Przenosząc wszystkie wyrazy z niewiadomymi na jedną stronę i mnożąc przez 2 otrzymujemy układ, w którym $a_{ii} (i = 1, 2, 3, 4)$ są nieparzyste (a więc różne od 0), a pozostałe współczynniki są parzyste. Odejmując pierwsze równanie pomnożone przez odpowiednie stałe od pozostałych możemy otrzymać układ, w którym niewiadoma x_1 występuje tylko w pierwszym równaniu, przy czym współczynniki na przekątnej są nadal nieparzyste, a pozostałe parzyste. Postępując tak dalej otrzymujemy układ postaci

$$\begin{aligned} b_{11}x_1+b_{12}x_2+b_{13}x_3+b_{14}x_4 &= 0\\ b_{22}x_2+b_{23}x_3+b_{24}x_4 &= 0\\ b_{33}x_3+b_{34}x_4 &= 0\\ b_{44}x_4 &= 0 \end{aligned}$$

gdzie b_{ii} są nieparzyste, a więc $x_4 = 0$ i kolejno $x_3 = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 = 0$.





Jak najprościej

Doc. dr Michał ŚWIĘCKI

Fizyka wzięła się z obserwacji świata, obserwacji jednak dość szczególnej. Interesujące są w niej jedynie najprostsze, choć możliwie ogólne aspekty przyrody. Najprostsze tzn. dające się opisać za pomocą minimalnej ilości pojęć (parametrów), jednoznacznie zdefiniowanych poprzez podanie operacyjnego (doświadczalnego) sposobu ich ustalania (pomiaru parametrów). Nic nie stoi na przeszkodzie, by pojęcia te przyjąć następnie za własności przyrody (np. masa, ładunek, przyspieszenie ciał). Na każdym etapie rozwoju fizyki podstawowym problemem było więc znalezienie możliwie niewielu, możliwie powszechnych własności przyrody. Każde też istotne uproszczenie na tej drodze prowadziło do powstania zupełnie nowej gałęzi fizyki (mechanika klasyczna, elektrodynamika, teoria względności, mechanika kwantowa).

Wbudowana raz na zawsze do fizyki możliwość obiektywnego (za pomocą przyrządów) pomiaru wartości pojęć podstawowych umożliwiła znalezienie liczbowych związków między nimi — praw przyrody. Oczywiście im prostsza i ogólniejsza była myśl pierwotna, tym lepsze i bardziej powszechne odpowiednie prawo. Tak powstałe prawa nie mogą więc być znikąd wyprowadzone ani w żaden sposób udowodnione. Przykładem są tu zasady dynamiki Newtona. Warto jednak zwrócić uwagę, że przy tak ustalonej metodologii zawsze odkryjemy jakieś prawo, choć przeważnie bardzo szczegółowe i mało interesujące. Budowana w ten sposób teoria zawsze zgadza się z doświadczeniem. Pod warunkiem, że nie opuścimy terenu operacyjnie zdefiniowanych wybranych pojęć pierwotnych. Przy okazji uzyskujemy jednak możność wykonywania wszelkich dozwolonych operacji rachunkowych na uzyskanych zależnościach liczbowych. Ta dodatkowa, dedukcyjna już działalność jest nadprogramową zaletą fizyki. W wyniku takiej właśnie działalności powstała np. zasada zachowania energii, którą można wyprowadzić z zasad dynamiki.

Po tym co powiedzieliśmy mogłoby się wydawać, że kryterium prostoty teorii nie musi prócz aspektu estetycznego, mieć zbyt istotnego znaczenia. Wystarczy przecież ogólność, którą uzyskać można znacznie mniejszym wysiłkiem. A jednak, prostota dobrych teorii fizycznych jest ważniejszą chyba ich własnością niż powszechność. Jedną z przyczyn tego jest wspomniany, wcale nie bagatelny, dedukcyjny aspekt fizyki. Tylko proste funkcje i proste równania są wszechstronnie i elegancko zbadane przez matematyków. W rezultacie eleganckie i nietrywialne prawa dedukcyjne możemy uzyskać jedynie w prostych teoriach fizycznych. Prócz różnych zasad zachowania do tej kategorii należą też prawa elektrodynamiki Maxwella wyprowadzone z prostych praw indukcji Faradaya. Bez tego wyprowadzenia „nie mielibyśmy" fal radiowych — obiektów nieco absurdalnych z punktu widzenia mechaniki newtonowskiej.

W fizyce konieczna jest jednak również działalność dedukcyjna innego rodzaju. Działalność, która już w sposób rzeczywisty i nietrywialny podlega weryfikacji doświadczalnej. Z owych wybranych, nielicznych własności przyrody chcemy przecież wyprowadzić jak najwięcej własności dodatkowych. Z punktów materialnych musimy złożyć bryły sztywne i niesztywne, ciecze i gazy, zaś z zasad dynamiki wyprowadzić prawa rządzące tymi wszystkimi formami materii. To się daje zrobić jedynie dla bardzo prostych i bardzo ogólnych teorii. Inaczej, znów z powodów natury matematycznej, jest to po prostu praca niewykonalna. I tak trzeba uciekać się do wielu przybliżeń i bardzo często zadowalać się dowodami niesprzeczności teorii podstawowych z wtórnymi dla nich własnościami przyrody. Nikt przecież nie jest w stanie wyprowadzić własności wody w stawie z własności kwarków i elektronów. Chociaż twierdzimy, że woda rzeczywiście składa się z tych cząstek.

I tu dochodzimy do jeszcze jednego przeważnie przemilczanego kryterium prostoty teorii. Podstawowe równania (prawa) dobrej teorii fizycznej muszą mieć fizycznie realizowalne ścisłe rozwiązania. Bez dokładnych rozwiązań nie moglibyśmy nawet zacząć żadnych rozsądnych rachunków przybliżonych, koniecznych do pokazania rzeczywistej niesprzeczności teorii i jej powszechnej zgodności z doświadczeniem.

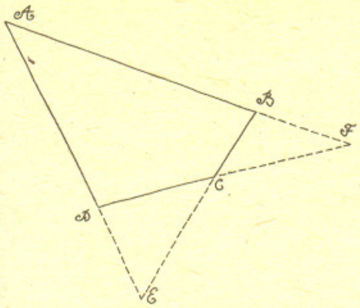
Spróbujmy teraz opisać kilka ogólnych cech tak budowanych teorii fizycznych.

Rozwiązanie zadania **M 293.** Narysujmy krzywe zamknięte otaczające każdy z podejrzanych kłębków A, B, C, D i policzmy, ile razy sznurek przecina każdą z krzywych: a — 9 razy, b — 15 razy, c — 12 razy i d — 16 razy. Wynika stąd, że każda z krzywych a i b rozcina płaszczyznę na dwa obszary tak, że w każdym z tych obszarów leży jeden koniec sznurka. Tak więc końców należy szukać w kłębkach A i B.

TROCHĘ HISTORII

Pierwsza rzucająca się w oczy ogólna własność przyrody to ruch. Przynajmniej tak uznali fizycy przed wiekami. Najprostszy ruch to taki, w którym wszystkie fragmenty ciała poruszają się po torach równoległych. Wtedy do opisu wystarczy wybrać jeden punkt ciała. Dochodzimy do pojęcia punktu materialnego. Decydujemy się w ten sposób na wyróżnienie u wszystkich ciał cech bycia gdzieś i kiedyś i abstrahowanie od wszystkich innych. Przy okazji wprowadziliśmy continuum czasoprzestrzenne — zbiór wszystkich *gdzieś* i *kiedyś*. Najprostsze i oczywiste o nim założenie sprowadza się do przyjęcia wspólnego continuum dla wszystkich zjawisk. Oraz do

Zadania, których nie umiemy rozwiązać IV



Niech czworokąt wypukły $ABCD$ nie będzie trapezem (rysunek). Wówczas każdy z odcinków AC, BD, EF nazywać będziemy przekątną tego czworokąta. Tym razem nie umiemy wpisać w dany okrąg czworokąta, mając dane długości wszystkich trzech jego przekątnych.

PROOF

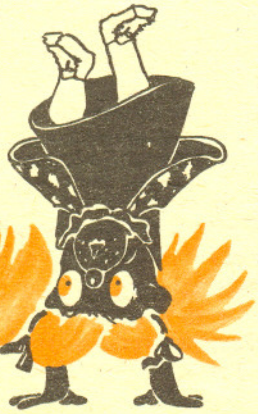
przyj [illegible] jest płaskie. To, plus zasada względności (wyprowadzalna z zasad Newtona) nieuchronnie i bezlitośnie prowadzi nas do teorii względności Einsteina pod warunkiem, że zapomnimy o grawitacji. Jej dodanie zmusza nas do pokrzywienia czasoprzestrzeni.
Tyle o kinematyce. A co z siłami — przyczyną pojawiania się ruchów. Najprostsza, to siła odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości od źródła siły (siła grawitacji, siła Coulomba). Dlaczego taka dziwna? Dlatego, że strumień takiej właśnie siły przez powierzchnię zamkniętą nie zależy od kształtu tej powierzchni. Prócz kierunku siły (od lub do jednego punktu) ważny tu jest fakt, że powierzchnia kuli ($4\pi r^2$) rośnie ze wzrostem promienia tak samo szybko, jak maleje siła ($1/r^2$). Tak jest oczywiście tylko w przestrzeni euklidesowej. W tym też przypadku równania dynamiki Newtona mają dla sił typu $1/r^2$ ścisłe rozwiązania. Geometryczna prostota takich sił rozciąga się zresztą na całą fizykę i dlatego nawet przy opisie oddziaływań cząstek elementarnych cały wysiłek skierowany jest na budowę teorii posługujących się tylko siłami $1/r^2$. Wierzymy przecież, że przyroda rzeczywiście jest prosta. Wracając do mechaniki zwróćmy uwagę na to, że prócz koniecznej operacji wyjaśniania własności materii przez złożenie jej z punktów materialnych (wydaje się cudem, że to tak pięknie działa), oczywisty jest też kierunek działań odwrotny. A mianowicie „doświadczalna konstrukcja" samego punktu. Czyli drobienie materii na kawałki. W ten sposób, wciąż pod sztandarem prostoty, pojawiają się cząsteczki chemiczne, atomy, elektrony, protony, neutrony i kwarki. Konieczne przy tym dzielenie fal elektromagnetycznych (z coraz mniejszym obiektem oddziałuje coraz mniejszy fragment fali) prowadzi prostą drogą do fotonów. To kierunek nieuchronny, jeśli na każdym szczeblu poznania chcemy działać prosto i powszechnie. Nie dziwmy się więc, że dostaliśmy wreszcie obiekty zbyt subtelne dla naszych aparatów pomiarowych. Teoria (mechanika kwantowa) stale jest prosta. Tylko strasznie dużo pojawiło się cząstek.

ANALOGIE

Niewiele równań ma ścisłe rozwiązania. Dlatego też tak dużo zjawisk fizycznych na wszystkich szczeblach poznania opisuje się przy pomocy takich samych modeli. Jak coś się porusza, to albo cząstka (zbiór cząstek) albo fala. Fala akustyczna, fala na wodzie, fala elektromagnetyczna, plazmowa, spinowa a nawet prawdopodobieństwa. Z ich drobienia powstają zresztą odpowiednie cząstki: fonony, fotony, plazmony, magnony, wreszcie 300 cząstek elementarnych.
Wahadło drga tak samo jak sprężyna, a także jak prąd w obwodzie złożonym z cewki i kondensatora, jak cząsteczki w ciele stałym i tak dalej. Zresztą, zbiór takich oscylatorków to nic innego, jak ciało sprężyste. Ciało konieczne do tego, by rozchodziła się fala. Kółko się zamknęło. Wynika z tego, że próżnia jest ośrodkiem sprężystym i składa się z oscylatorków (niedrgających!). W próżni bowiem rozchodzą się fale elektromagnetyczne. I rzeczywiście, próżnia zachowuje się w zjawiskach elektrycznych, jak zwykły dielektryk.

JEDNOLITE TEORIE

Z tego samego powodu (mało prostych równań) w fizyce występuje dość automatyczna tendencja do tworzenia teorii jednolitych, do zlepiania kilku teorii w jedną, ogólniejszą. Wspólne równanie nie znaczy, że zjawisko jest takie samo (powszechny błąd wielu popularyzatorów fizyki). Zawsze jednak jakieś wspólne własności fizyczne występują. I tak działanie proporcjonalne do przyczyny (np. siła proporcjonalna do wychylenia — znów prosta siła) to nic innego tylko małe odstępstwo od położenia równowagi, siła $1/r^2$ to zawsze działanie poprzez próżnię wywołane pewnym polem itd. Pożądana ze względów natury estetycznej tendencja do budowania ogólnych teorii jest więc niejako ułatwiana przez to, że teorie są proste, czyli podobne, a więc o pewnych wspólnych cechach fizycznych. Trzeba tylko umieć tę istotną wspólnotę zauważyć.
Oddziaływanie magnesów jest zupełnie niepodobne do oddziaływania ładunków. Odpowiednie pola są jednak bardzo podobne geometrycznie. Zwrócenie uwagi na coś tak nieuchwytnego jak pola, doprowadziło Faradaya do praw indukcji elektromagnetycznej.
Na zakończenie pytanie. Dlaczego budowana zgodnie z regułami gry współczesna teoria cząstek oparta na kwantowej teorii pola nie jest zbyt elegancka choćby z racji operowania tak dużą liczbą cząstek. Otóż chyba dlatego, że kwantowa teoria pola jako jedyna i pierwsza teoria fizyczna nie ma w ogóle rozwiązań ścisłych. Można z niej uzyskać pewne ogólne ścisłe stwierdzenia w rodzaju istnienia antycząstek, ale żadnej dokładnej liczby. Jest to ważna wada teorii. Przecież zarówno praktyczne (techniczne), jak i cywilizacyjne (poznawcze) sukcesy fizyki były oparte na wyjątkowej prostocie świata proponowanego przez fizyków.
Każdy widzi różnicę między znaczeniem stwierdzenia, że prawo grawitacji Newtona opisuje ruchy wszystkich ciał niebieskich, a stwierdzenia, że elektrodynamika kwantowa zgadza się z danymi doświadczalnymi z dokładnością do ośmiu cyfr znaczących. Różnicę być może nawet cywilizacyjną...



Martin Gardner i matematyka popularna

W styczniu 1982 roku, po 25 latach pracy w redakcji *Scientific American*, przeszedł na emeryturę Martin Gardner, redaktor kolumny „Gry matematyczne" tego miesięcznika. Kolumna nie była poświęcona dosłownie grom, a była po prostu popularnym kącikiem matematycznym w czasopiśmie. Warto zwrócić uwagę na postać Gardnera i jego działalność, która przyniosła mu sławę jednego z najbardziej popularnych matematyków na świecie.
Matematyków? Ze zdumieniem się dowiedziałem dopiero teraz, że Martin Gardner nie jest matematykiem — w każdym razie w sensie administracyjno-biurokratycznym. Nie skończył żadnych studiów matematycznych (nawet, o zgrozo, zaocznych) ani kursów kwalifikacyjnych. Jest absolwentem wydziału filozoficznego uniwersytetu w Chicago. Pracował najpierw jako dziennikarz w jednej z lokalnych gazet w stanie Oklahoma, następnie w w *Humpty Dumpty Magazine* — rozrywkowym tygodniku o poziomie, oględnie mówiąc, niskim. Zajmował się tam głównie działem zagadek, którego znaczną część stanowiły geometryczne problemy składania kartki papieru. Jeden z przyjaciół pokazał mu kiedyś ciekawy sposób otrzymywania sześciokątów przez składanie taśmy papierowej. Zainteresowała się tym redakcja *Scientific American* i skłoniła Gardnera do krótkiego artykuliku o tym.
Ktoś w redakcji wpadł na pomysł: „Załóżmy sobie stały kącik matematyczny", Gardner był pod ręką i jemu to zaproponowano prowadzenie działu. W ten prawdziwie amerykański sposób Gardner dostał do ręki szansę, której nie zmarnował. Sprzyjała mu także sytuacja ogólna: szok, wywołany radzieckim sputnikiem spowodował znaczne zwiększenie nakładów na naukę w krajach zachodnich i na fali ogólnego zainteresowania trochę wypłynął i sam Gardner.
Jego pierwsze artykuły były niezwykle proste. „Gdy zaczynałem redagować swoją kolumnę, nie miałem w domu ani jednej książki matematycznej" — wspomina, „ale na szczęście słyszałem o kilku". Pisywał później i o rzeczach bardziej skomplikowanych, nigdy nie wykraczając wiele poza poziom drugiego roku college'u, gdyż — jak przyznaje — właściwie tylko tyle zna matematyki. Ale to właśnie uważał za swoją zaletę. „Nad każdym artykułem muszę się bardzo napracować, abym sam jasno rozumiał jego treść". Matematykę przedstawiał trochę jako grę, trochę jak sztukę, trochę jak naukę.
Rzadko zdarza się, aby wybitny uczony nie potrafił przystępnie opowiedzieć o swojej dyscyplinie naukowej. Po prostu nie stałby się wybitnym, gdyby tego nie umiał. Czy można jednak popularyzować tak hermetyczną naukę, jaką jest matematyka, nie będąc samemu matematykiem?
Tylko skąd pomysł, że Gardner nie jest matematykiem? Czy tylko dlatego, że brak mu odpowiedniego papierka — dyplomu? Miał dużo kontaktów z czytelnikami, to pomaga. No cóż, Ameryka jest rozległym krajem, *Scientific American* pięknie wydawanym czasopismem, a amerykański kult dobrej roboty powoduje, że artykuły są prawdziwe, ciekawie napisane i starannie opracowane. W wielu kręgach społeczeństwa amerykańskiego jest „dobrze widziane" prenumerowanie tego miesięcznika. Nie wiem, czy Czytelnicy mi uwierzą, ale w Europie Środkowej jest taki kraj, w którym zaprenumerowanie gazety jest niemożliwe — jako zbyt skomplikowane organizacyjnie, nieopłacalne i dezorganizujące pracę ofiarnych urzędników. Słowo daję, że jest taki kraj. To nie dowcip na prima aprilis!
Scientific American ma kredowy papier, efektowne zdjęcia, wyraźną czcionkę, ale i znakomitych autorów. Powtórnie opracowane artykuły Gardnera, po weryfikacji i przemyśleniach autora i uwagach czytelników ukazują się w starannie wydanych książkach. W iście amerykańskim stylu *Scientific American* sprzedaje dobry towar w efektownym opakowaniu.
Nie wszyscy sądzą, że matematykę można i warto popularyzować. Na pewno trzeba to robić umiejętnie. To prawda, że wszystko trzeba tak robić. Matematyka jest jednak szczególnie wrażliwa na (posłużmy się Szwejkowym określeniem) bałwanienie do kwadratu. Łatwo wpaść w tandetne ciekawostki lub górnolotne brednie. A te luźne uwagi o popularyzacji zakończę cytatem z *Newsweek'a* (23.XI.1981): „Cierpi on (Gardner) widząc ludzi zafascynowanych rozmaitymi bzdurami, a cierpi dlatego, że wie jak wiele zdumiewających prawdziwych faktów jest na świecie".

Andrzej SAWICKI

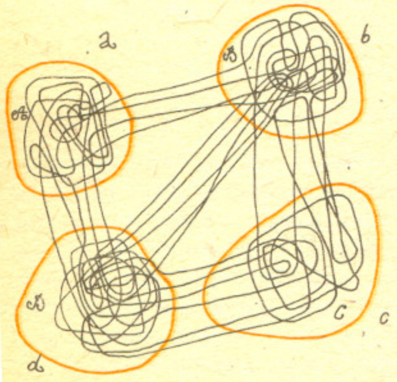
Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 292. Wykazać, że układ równań

$$\frac{1}{2}x_1 = a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{2}x_4 = a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3+a_{44}x_4,$$

gdzie współczynniki $a_{11}, \ldots, a_{44}$ są całkowite, ma jedyne rozwiązanie $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.
Rozwiązanie na str. 13

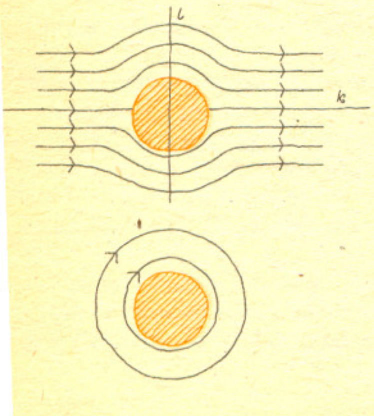


M 293. Gdzie należy szukać końców tego splątanego sznurka?
Rozwiązanie na str. 14

M 294. Niech n będzie liczbą całkowitą większą od 1. Wykazać, że $S_n = \sum \frac{1}{pq} = \frac{1}{2}$, gdzie sumujemy po wszystkich parach liczb całkowitych p, q takich, że $0 < p < q \leqslant n, p+q > n$, p i q są względnie pierwsze.

$$\left(S_2 = \frac{1}{1\cdot 2}, S_3 = \frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3}, S_4 = \frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4} \text{ itd.}\right)$$

Rozwiązanie na str. 6



Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

F 112. Idealna (tj. nieściśliwa i nielepka) ciecz opływa nieskończony walec. Na rysunkach przedstawione są linie prądu w dwóch przypadkach: (a) gdy w dużej odległości od walca ciecz ma prędkość niezależną od położenia oraz (b), gdy w dużej odległości ciecz porusza się po okręgach. Pokazać, korzystając z symetrii problemu, że w obu przypadkach siła działająca na walec ze strony cieczy jest równa zeru. Jaka jest ta siła dla prędkości cieczy będącej sumą prędkości dla (a) i dla (b)?
Rozwiązanie na str. 12

Dyskusja o popularyzacji matematyki (sen redaktora)

Gdy zastanawialiśmy się, jak uczcić własny jubileusz (setny numer) padały różne pomysły. I oto po zakończeniu długiej dyskusji przyszło mi na myśl, że nikt nie wpadł na prosty, naturalny i pierwszorzędny pomysł: Zorganizować Dyskusję o Popularyzacji Matematyki. Tak się robi zawsze: zaprasza się odpowiednich ludzi, rzuca temat, włącza magnetofon i artykuł sam się pisze!

Własny pomysł bardzo mi się spodobał i wieczorem, w łóżku długo obmyślałem szczegóły. Wreszcie przyszedł Morfeusz i zacząłem śnić o Dyskusji o Popularyzacji Matematyki. *Delta* jest bowiem miesięcznikiem popularnym. Co to właściwie znaczy? Dla kogo robimy tę popularyzację? Kogo zaprosić na dyskusję? Na pewno ludzi z różnych środowisk. Więc najpierw „człowieka z ulicy", którego kontakt z matematyką urwał się po odłożeniu kredy po egzaminie maturalnym. Mój sąsiad będzie tu pasował, pomyślałem. Rozgarnięty urzędnik średniego szczebla. Od razu chwyciłem za telefon.

— Cześć, Kaziu. Wiesz, że pracuję w *Delcie*, prawda? Z okazji 100 numeru chcemy zorganizować w redakcji dyskusję o popularyzacji matematyki. Czy mógłbyś wziąć w niej udział? *Delta* jest między innymi i dla Ciebie przeznaczona ...

— Dla mnie? Nie, mój drogi, z matematyki byłem dobry (z wyjątkiem logarytmów) ale teraz już nie pamiętam nawet twierdzenia Pitagorasa. Co tam za popularyzacja u Was, skoro nad każdym artykułem muszę porządnie myśleć, a niektórych to w ogóle nie rozumiem. Według mnie najlepsze są Zabawy Logiczne w *Trybunie Ludu* albo Łamanie Głowy w *Życiu Warszawy*; takie coś powinniście naśladować. To by ludzi zachęciło, a tak to kto was rozumie? Chyba tylko wy sami. Dziękuję za zaproszenie na dyskusję, ale nie przyjdę.

— Trudno, odrzekłem i postanowiłem dzwonić dalej. Następnym rozmówcą był nauczyciel z warszawskiego liceum.

— Dzień dobry, mówię z miesięcznika *Delta*. Z okazji 100 numeru chcemy zorganizować w redakcji dyskusję o popularyzacji matematyki. Czy mógłby Pan wziąć w niej udział? *Delta* jest między innymi i dla pana przeznaczona ...

— Dla mnie? Nie, proszę pana, piszecie o rzeczach, których nie ma w programie szkolnym. To jaki ja mogę mieć z tego pożytek? Niektórych waszych artykułów pół klasy by mi nie zrozumiało. Poza tym stosujecie oznaczenia niezgodne z uzgodnionymi na zeszłorocznej konferencji w P. Nie mogę mącić moim uczniom w głowach. Dziękuję za zaproszenie, ale nie przyjdę. Może jednak porozmawia pan z którymś z uczniów. *Delta* ma być przecież dla uczniów, niech któryś z nich pójdzie na tę dyskusję.

— Tak, oczywiście, chętnie zaprosimy i uczniów ... Dzień dobry, tu miesięcznik *Delta*. W której klasie jesteś? Czwartej licealnej? Dobrze, a czy wybierasz się na jakieś studia? Na Politechnikę, rozumiem. Co mówisz? Że taka matematyka jak w *Delcie* ci się nie przyda? A co byś chciał widzieć w *Delcie*? Zadania? Takie repetytoryjne, przed egzaminami, rozumiem. Hm, wiesz, chcemy pisać o prawdziwej matematyce ... Nie, zadania egzaminacyjne to też prawdziwa matematyka, ale nie taka znów wielka jej część ... No tak, rzeczywiście, jeżeli chcesz wyjechać z kraju, to musisz się tu jak najwięcej nauczyć. Nie przyjdziesz na dyskusję, szkoda.

— Dzień, dobry, czy zastałem inżyniera A.? Tak, poczekam .... Dzień dobry, ja mówię z miesięcznika *Delta*. Z okazji 100 numeru chcemy zorganizować w redakcji dyskusję o popularyzacji matematyki. Czy mógłby Pan wziąć w niej udział? *Delta* jest między innymi i dla pana przeznaczona ...

— Proszę pana, ja jestem inżynierem i na matematyce znam się dobrze. Na studiach przerobiliśmy ją prawie całą. Więc uważam, że jeżeli ja czegoś nie rozumiem z artykułu, to to nie jest na pewno popularne. Wasze bzdurne czasopismo ględzi czasem stronicami o bańkach mydlanych a od czasu do czasu zasuniecie taką bombę, że hej. Większość artykułów jakie czytałem, była na zupełnie bezsensowne tematy. Panie, ładnie ja bym wyglądał gdybym w obliczeniach st‹sował te wasze, jak im tam, topologie. W jednej topologii most wytrzyma, a w drugiej się rozleci, tak? Może na Marsie, ale tu na Ziemi takich cudów nie ma. *Delta* mogłaby być naprawdę popularna, gdyby pisała o jakichś ciekawych rzeczach, na przykład o komputerach. Nie, nie, nie przyjdę do Was na dyskusję ...

— Dzień dobry, kłania się *Delta*. Z okazji 100 numeru chcemy zorganizować w redakcji dyskusję o popularyzacji matematyki. Czy mógłby Pan wziąć w niej udział? Jest Pan przecież znanym z prasy i telewizji publicystą popularnonaukowym i *Delta* jest między innymi przeznaczona dla Pana ...

— Dziękuję za zaproszenie, jestem potwornie zalatany, nie przyjdę. A tak na marginesie, to wy tego nie umiecie robić. Wam się tylko zdaje, że jesteście „popularni". *Populus* to znaczy lud, a dla zwykłych ludzi trzeba pisać inaczej. Więcej ciekawych historyjek, mniej nudziarstwa, kochani. Napiszcie na przykład, że Hilbert lubił zalecać się do kobiet a, ja wiem, Banach ze Steinhausem rozwiązywali problemy po pijanemu, albo zróbcie wywiad z dziekanem, zamieśćcie parę dowcipów i dobra. Robicie waszą pracę niefachowo i tylko psujecie robotę dobrym, zawodowym popularyzatorom. Po prostu fachmanom. No cześć, lecę. Pozdrowienia dla Starego, kiedyś dobrze się zapowiadał.

Ha cóż, ha trudno, pomyślałem, dyskusja odbędzie się w gronie kolegów — matematyków; może to i lepiej. Łatwiej będzie można się dogadać. Od razu zatelefonowałem do znanego dr D., specjalisty z teorii algebr.

— Dzień dobry panie doktorze, jestem redaktorem *Delty* i chcieliśmy zorganizować ...

— Redaktorem czego, Pan powiedział?

— *Delty*.

— Co za delty?

— Miesięcznik popularny *Delta*, poświęcony matematyce, fizyce i astronomii.

— A, popularyzacja. Tak, tak, to bardzo ważne. Mam dla Was nawet dobry kawałek, napisałem kiedyś prackę do *Journal of the Mathematical Society of Sri Lanka*, tam ją odrzucili, mówią że za słaba, ale dla Was by się nadała, prawda? Można by ją puścić w trzech częściach. Nie, nie skrócę, mam pilną robotę, za tydzień muszę oddać do redakcji *Biuletynu* swoje cztery prace ... No, na jeden temat ... Tak, mogłaby być jedna, ale wie pan, oni nie przyjmują prac dłuższych niż 12 stron a poza tym wtedy będę miał od razu 4 publikacje a nie jedną. Wie pan, *publish or perish*. Razem będę miał już 14 publikacji a na docenta potrzeba 16, o wiem, wam na pewno brakuje autorów, więc dobrze, skrócę tamtą pracę do dwóch odcinków i wyślę wam. Przyślijcie mi zaświadczenie, że prace są przyjęte. Że co? No tak, podstawowe definicje napiszecie na marginesie. Algebry Lindenstraussa i tak dalej ... A czego pan oczekuje? Przecież „popularnie" to znaczy „w sposób uproszczony". No więc ograniczę się do algebr nad przeliczalnymi ciałami quasimetazwartymi. Niżej już zejść nie mogę, tam wszystko się trywializuje ... Jak to nie pasuje do profilu czasopisma? Topologia i podstawy matematyki to klasyczne dyscypliny polskiej szkoły matematycznej. O czym wy chcecie pisać? Uczniom trzeba pokazywać prawdziwą matematykę, ... Nie, nie, nie przyjdę na dyskusję, mówiłem już, że mam pilną pracę.

— Dzień dobry, czy zastałem profesora B.? Tak, oczywiście, zaczekam ... Dzień dobry, panie profesorze. Z okazji 100 numeru naszego pisma chcemy zorganizować w redakcji dyskusję o popularyzacji matematyki ... Na przykład we czwartek ... Ach, posiedzenie w Akademii; to może w przyszłym tygodniu ... Kiedy pan odlatuje? W sobotę; tak, tak oczywiście wiemy, że to pan ma główny referat na kongresie ... Nie, nie, to my się dostosujemy ... Oczywiście, możemy w piątek ... To my będziemy zaszczyceni ... Nie, stanowczo przecenia pan naszą działalność. Co to byłby za pilot, który umie wykonać beczkę i korkociąg, ale ma kłopoty ze startem i lądowaniem? Taki długo nie pożyje, choć zdąży zyskać aplauz tłumów. My oczywiście też uważamy, że popularyzacja jest po prostu częścią prawdziwej działalności naukowej. Tak, pamiętamy, że pisał Pan u nas, że matematyka jest ciekawsza niż w szkole, łatwiejsza niż na studiach i rozleglejsza niż w podręcznikach ... Zatem jesteśmy umówieni na piątek? Dziękuję i do zobaczenia.