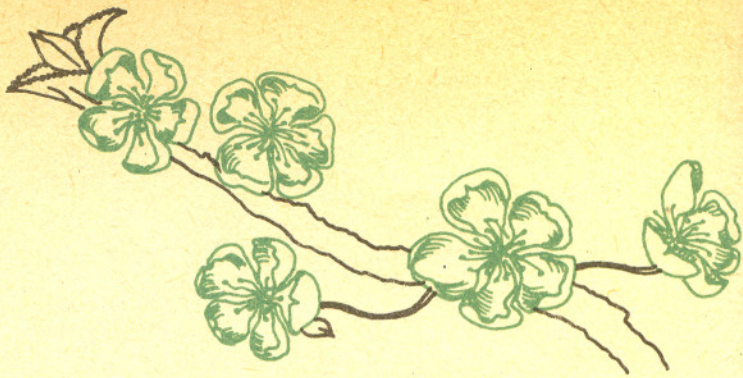


h-823-10-1-s II-3.44593

delta



SPIS TREŚCI

NUMERU 3(99)

Badanie powierzchni kryształów <i>Doc. dr Stefan Mróz</i>	str. 1
Oddziaływanie promieniowania elektromagnetycznego z materią (II) <i>Doc. dr Jerzy Ginter</i>	str. 6
Klub 44	str. 8
Katakлизmy we Wszchświecie (III) <i>Doc. dr Bolesław Grabowski</i>	str. 10
O kongruencjach wśród liczb algebraicznych całkowitych <i>Jarosław Wróblewski</i>	str. 13
Od odważnika i linijki do podstaw matematyki <i>Dr Andrzej Pelc</i>	str. 14
Zadania	str. 15
Wzory asymptotyczne na ciągi rekurencyjne <i>Robert Kowal</i>	str. 16
Zadania, których nie umiemy rozwiązać	str. 16
Patrz w niebo	str. 17

„Delta”
matematyczno-fizyczno-astronomiczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny:
doc. dr Jerzy Bartke
doc. dr Andrzej Bączyński
doc. dr Bolesław Gleichgewicht
prof. dr Kazimierz Goebel
doc. dr Bolesław Iwaszkiewicz
doc. dr Tadeusz Iwiński
doc. dr Andrzej Januszajtis
doc. dr Tadeusz Jarzębowski
prof. dr Leon Jeśmanowicz
dr Henryk Kaczorek
prof. dr Marek Kuczma
mgr Andrzej Mąkowski
prof. dr Bohdan Paczyński
prof. dr Zdzisław Pawlak
prof. dr Arkadiusz Piekara
doc. dr Sławomir Ruciński
prof. dr Konrad Rudnicki
prof. dr Zbigniew Semadeni
doc. dr Grzegorz SitarSKI
prof. dr Jan Stankowski

doc. dr Kazimierz Stępień
prof. dr Mieczysław Subotowicz
doc. dr Stefan Turnau
prof. dr Jerzy Wdowczyk
doc. dr Andrzej Woszczyk
prof. dr Janusz Zakrzewski —
wiceprzewodniczący
prof. dr Wojciech Żakowski —
przewodniczący

Redaguje Kolegium w składzie:
mgr Tomasz Chlebowski
mgr Maciej Jędrzejczak
dr Marek Kordos — red. nac.
dr Tomasz Kwast — z-ca red. nac.
dr inż. arch. Jacek Mazur — ilustracje
dr Krzysztof Plasota — red. techn. graf.
dr Michał Szurek
mgr Krystyna Szypcio — sekr. red.
doc. dr Michał Święcki — z-ca red. nac.

Adres Redakcji
ul. Hoża 69 pok. 151,
00-681 Warszawa

Zakład Narodowy im.
Ossolińskich — Wydawnictwo
Wrocław, Oddział w Warszawie
Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.
wyd.; 2,50 ark. druk.;
papier offsetowy III kl. 80 g. rola 61 cm.
Wydrukowano w Drukarni im.
Rewolucji Październikowej
Warszawa, ul. Mińska 65
Nr zam. 1067/12/81 Z-86

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

Institucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.
Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.
Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Konto PKO I OM W-wa 1531-912
w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław
w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa
w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7
00-068 Warszawa, Poland or with
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68,
Bundesrepublik Deutschland.
— EarlsCourt Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain,
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia

Cena 1 egzemplarza zł 10— nr indeksu 35723/35550

W następnym numerze:
Dlaczego wydajemy „Delta”

Dyfrakcja powolnych elektronów — metoda badania struktury powierzchni kryształów

Doc. dr Stefan MRÓZ

1. Falowe własności elektronu. Doświadczenie Davissona i Germera

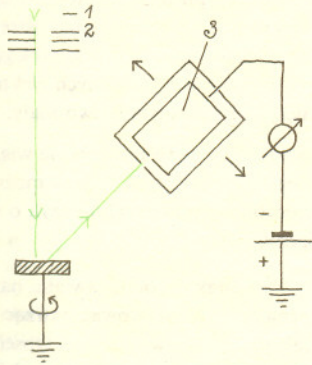
$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (1)$$

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

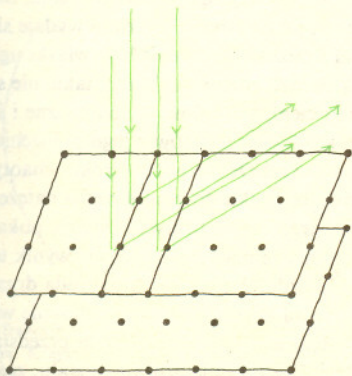
$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} \quad (2)$$

$$p = \sqrt{2mE}$$

$$\lambda = \frac{12,25 \times 10^{-10}}{\sqrt{E}} \quad (3)$$



Rys. 1. Schemat doświadczenia Davissona i Germera. Elektrony emitowane z termokatody 1 przechodziły przez układ diagraf 2 formując wiązkę pierwotną. Wiązka ta padała na powierzchnię kryształu niklu. Kryształ mógł być obracany wokół osi prostopadłej do „robotycznej” powierzchni. Wiązka ugięta mogła trafić do kolektora posiadającego podwójne, izolowane od siebie elektrycznie ścianki. Między ścianki kolektora przyłożono hamującą elektrony różnicę potencjałów, dzięki czemu do wnętrza kolektora nie dochodziły elektrony emisji wtórnej. Kolektor mógł być obracany wokół osi równoległej do „robotycznej” powierzchni kryształu i przechodzącej przez miejsce padania wiązki pierwotnej na tę powierzchnię. Dzięki skojarzeniu ruchów kryształu i kolektora można było kolejno wprowadzać do kolektora wszystkie wiązki ugięte „do tyłu”. Wiązki ugięte „do przodu” były pochłaniane wewnątrz kryształu. Całe urządzenie umieszczone było w wysokiej próżni, co było niezbędne dla zapewnienia czystości badanej powierzchni i dla uniknięcia zderzeń elektronów z cząsteczkami gazu.



Rys. 2. Ugięcie wiązki elektronów na jednej warstwie atomów. Obie wiązki, padająca i ugięta, są prostopadłe do zaznaczonej liniami rodziny rzędów atomów.

Zapewne Czytelnikom znana jest hipoteza de Broglie'a, że dualizm korpuskularno-falowy dotyczy nie tylko fotonów, ale w równej mierze cząstek materialnych. Jeśli zatem są doświadczalne podstawy dla przypisania fotonowi o energii $E = h\nu$ i pędu p danego zależnością (1), to należy, w myśl tej hipotezy, przypisać cząstce materialnej o pędzie p falę o długości λ związanej z pędem cząstki tą samą zależnością.

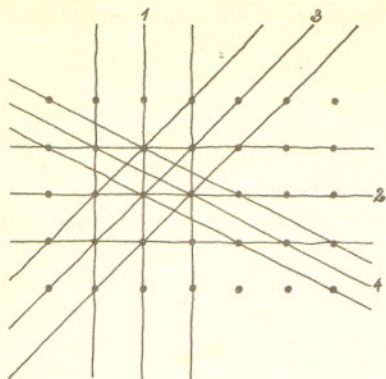
Hipoteza de Broglie'a nie zawierała wyjaśnienia natury fali związanej z materialną cząstką. Wyjaśnienie takie wynikło dopiero z rozwoju mechaniki kwantowej operującej pojęciem funkcji falowej. Funkcja ta jest miarą prawdopodobieństwa znalezienia opisywanej cząstki w danym elemencie przestrzeni. Korzystając z równania (2) wiążącego energię kinetyczną cząstki i jej pęd znajdziemy dla elektronu zależność (3) między jego energią i długością odpowiadającej mu fali de Broglie'a. Z zależności tej λ otrzymuje się w metrach, jeśli energia wyrażona jest w elektronowoltach. Widać, że dla energii wynoszącej od kilkudziesięciu do kilkuset elektronowoltów długość fali de Broglie'a jest porównywalna z odległością między atomami w kryształach, równą dziesiątym częściom nanometra. Wynika stąd, że kryształ powinien być dobrą siatką dyfrakcyjną dla fal de Broglie'a związanych z elektronami o takich energiach, czyli z powolnymi elektronami, jak je będziemy dalej nazywać.

Pierwsze doświadczenie z dyfrakcją powolnych elektronów wykonali w 1927 roku Davisson i Germer. Wykryli oni cały szereg wiązek ugiętych i pokazali, że ich obserwacje można zadowalająco wytłumaczyć na podstawie hipotezy de Broglie'a i zależności (3). Jedno z pierwszych w świecie doświadczeń z dyfrakcją powolnych elektronów wykonał w Polsce w 1928 roku Szczepan Szczeniowski, posługując się w tym celu kryształem bizmutu.

Celem pierwszych doświadczeń z dyfrakcją powolnych elektronów było sprawdzenie hipotezy de Broglie'a. Okazało się jednak, że doświadczenia takie mogą być źródłem cennych, unikalnych informacji o strukturze krystalicznej powierzchni kryształów i ta właśnie możliwość zadecydowała o znaczeniu dyfrakcji powolnych elektronów we współczesnej fizyce.

2. Co decyduje o kierunkach rozchodzenia się wiązek ugiętych?

Powolne elektrony silnie oddziałują z materią tracąc swą energię w niesprężystych zderzeniach. Atomy położone w głębi kryształu nie dają zatem wkładu do dyfrakcji powolnych elektronów, gdyż poddane na nich dyfrakcji elektrony o energii zmniejszonej wskutek niesprężystych zderzeń nie dają się wyodrębnić z tła tworzonego przez elektrony emisji wtórnej (patrz rys. 2). Przyjmijmy zatem dla uproszczenia rozważań, że dyfrakcja powolnych elektronów zachodzi tylko na pierwszej warstwie atomów kryształu i rozważmy przypadek, gdy wiązka pierwotna jest prostopadła do „robotycznej” powierzchni kryształu. Sytuacja taka jest pokazana na rys. 2, gdzie schematycznie narysowano dwie pierwsze warstwy atomów. Atomy pierwszej warstwy tworzą regularną, dwuwymiarową strukturę.

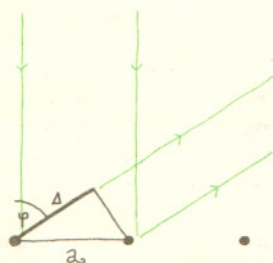


Rys. 3. Przykłady różnych rodzin rzędów atomów dla dwuwymiarowej struktury krystalicznej.

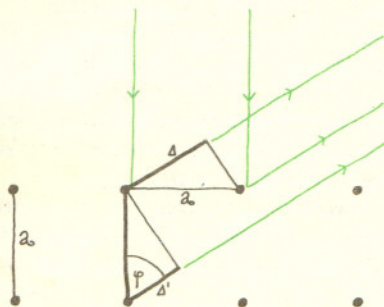
$$\Delta = a \sin \varphi$$

Wzmocnienie rozważanych wiązek nastąpi wtedy, gdy różnica ich dróg będzie całkowitą wielokrotnością długości fali.

$$\Delta = a \sin \varphi = n \lambda$$



Rys. 4. Ugięcie wiązki pierwotnej na pierwszej warstwie atomów pokazanej w przekroju. Różnica Δ dróg wiązek ugiętych na sąsiednich rzędach atomów zależy od kąta padania wiązki pierwotnej φ i od odległości a między tymi rzędami.



Rys. 5. Ugięcie wiązki pierwotnej na dwóch pierwszych warstwach atomów. Dla uproszczenia rachunków przyjęto, że odległość między rzędami atomów w warstwie jest taka sama, jak odległość między warstwami. Dla wzmocnienia zaznaczonych na rysunku wiązek muszą być spełnione warunki

$$\Delta = a \sin \varphi = n \lambda \quad (6a)$$

$$\Delta' = a + a \cos \varphi = m \lambda \quad (6b)$$

Po przekształceniach algebraicznych i trygonometrycznych równania (6) przyjmują postać

$$\sin^2 \varphi = \frac{n^2 \lambda^2}{a^2} \quad (7a)$$

$$\sin^2 \varphi = \frac{2m \lambda a - m^2 \lambda^2}{a^2} \quad (7b)$$

Przyrównując prawe strony równań (7) otrzymujemy zależność

$$\frac{2m \lambda a - m^2 \lambda^2}{a^2} = \frac{n^2 \lambda^2}{a^2} \quad (8)$$

skąd

$$\lambda = \frac{2ma}{m^2 + n^2} \quad \text{gdzie } n = 1, 2, 3, \dots \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

$$I = I_0 e^{-\sigma T} \quad (10)$$

Wszystkie te atomy układają się w rodzinę rzędów atomów i istnieje dowolnie wiele takich rodzin, co widać na rys. 3.

Zauważmy, że fale de Broglie'a ugięte na różnych atomach danego rzędu atomów w kierunku prostopadłym do tego rzędu mają zgodne fazy, jeśli tylko wiązka pierwotna jest również prostopadła do rozważanego rzędu atomów. W naszym przypadku fale ugięte na wszystkich atomach danego rzędu wzmocnią się w każdym kierunku prostopadłym do danego rzędu. Z wszystkich możliwych takich kierunków trzeba teraz wybrać te, dla których wzmocnią się fale ugięte na sąsiednich rzędach. Z rys. 4 i ze wzoru (5) widać, że kierunki, dla których wzmacniają się wiązki ugięte na sąsiednich, a zatem i na wszystkich rzędach danej rodziny, istnieją zawsze, jeśli tylko odległość między rzędami a jest większa od długości fali λ .

Z doświadczenia Davissona i Germera wynikało jednak, że poszczególne wiązki ugięte były najintensywniejsze dla pewnych energii elektronów, czyli dla pewnych λ . Nasze dotychczasowe rozważania nie przewidują takiego wyniku, ponieważ nie uwzględniliśmy udziału w dyfrakcji atomów z warstwy drugiej i warstw głębszych. Z zależności (9) widać, że wzmocnienie fal ugiętych na dwóch sąsiednich warstwach atomów, a tym samym i ugiętych na całym kryształ, możliwe jest tylko dla pewnych długości fal. Maksymalne natężenia wiązki ugiętej występujące przy spełnieniu warunków takiego typu jak warunek (9) są w przypadku dyfrakcji powolnych elektronów znacznie mniej ostre, niż w przypadku dyfrakcji promieniowania rentgenowskiego. Znaczący to, że udział warstw głębszych w dyfrakcji powolnych elektronów nie może być wprawdzie pominięty, ale jest stosunkowo mały.

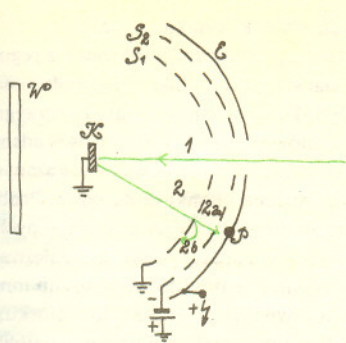
Każda rodzina rzędów atomów wytwarza własne wiązki ugięte. Z symetrii przestrzennego rozkładu tych wiązek można wnosić o sposobie ułożenia atomów na powierzchni, czyli o strukturze krystalicznej tej powierzchni.

Wiązki ugięte otrzymywane przy dyfrakcji światła na dwuwymiarowej siatce dyfrakcyjnej można łatwo obserwować patrząc wieczorem przez tkaninę parasola na odległe, punktowe światło. Obserwujemy wtedy wiązki ugięte „do przodu”, a nie „do tyłu”, jak to jest przy dyfrakcji powolnych elektronów. Nie powoduje to jednak istotnej zmiany w opisie zjawiska.

3. Czy drgania cieplne atomów nie przeszkadzają dyfrakcji?

W rozważaniach prowadzonych w poprzednim rozdziale przyjęliśmy, że dyfrakcja zachodzi na atomach tworzących regularną strukturę.

W rzeczywistości atomy tworzące kryształ wykonują drgania cieplne i w temperaturze pokojowej typowa amplituda tych drgań stanowi kilka procent odległości między sąsiednimi atomami. Siatka dyfrakcyjna utworzona przez atomy kryształu wydaje się zatem bardzo niedoskonała i można się obawiać, że wiązki ugięte otrzymane przy jej użyciu będą bardzo rozmyte. Obawy takie nie są jednak uzasadnione. Drgania cieplne atomów są chaotyczne i średnie w czasie wychylenie każdego z atomów z jego położenia równowagi równa się zeru. Jak pokazał Debye w 1914 roku, chaotyczne drgania cieplne atomów prowadzą tylko do zmniejszenia natężenia wiązek ugiętych, bez ich przestrzennego rozmycia (Debye pokazał to dla dyfrakcji promieniowania rentgenowskiego, ale wynik ten jest oczywiście ważny dla każdej dyfrakcji). Amplituda drgań cieplnych rośnie wraz z temperaturą kryształu, zatem natężenie wiązek ugiętych maleje przy wzroście temperatury. Zależność ta przedstawiona jest równaniem (10), gdzie T jest temperaturą kryształu, zaś a — stałą, zależną od tak zwanej temperatury Debye'a (charakterystycznej dla każdego materiału wielkości, związanej z jego własnościami cieplnymi).



Rys. 6. Zasada działania współczesnego dyfraktografu. Wiązka elektronów pierwotnych wytworzona w specjalnej wyrzutni elektronów pada na powierzchnię kryształu umieszczonego w środku krzywizny układu dwóch koncentrycznych, sferycznych, metalowych siatek S_1 i S_2 i sferycznego ekranu luminescencyjnego E . Elektrony emisji wtórnej i wiązki ugięte 2 trafiają między siatkami na hamujące pole elektryczne dobrane w taki sposób, aby przed siatką S_2 elektrony emisji wtórnej (2b) zostały zawrócone. Elektrony z wiązki ugiętych (2a) przechodzą przez siatkę S_2 i są przyspieszane wysokim dodatnim napięciem w kierunku ekranu luminescencyjnego E . Na ekranie tym każda wiązka tworzy jasną plamkę P , a plamki te układają się w obraz dyfrakcyjny. Obraz ten jest oglądany przez wziernik W dyfraktografu.

4. Jak jest zbudowany współczesny dyfraktograf dla powolnych elektronów?

Urządzenie Davissona i Germera ma już dzisiaj tylko wartość historyczną. Jego podstawową wadą był brak możliwości obserwacji wszystkich wiązek ugiętych. Od ponad dwudziestu lat używane są dyfraktografy wykorzystujące w swej konstrukcji ideę sformułowaną przez Ehrenberga w 1934 roku. Zasada działania takiego dyfraktografu przedstawiona jest na rys. 6. Obraz dyfrakcyjny może tu być obserwowany i fotografowany, można także, przy użyciu odpowiedniego fotometru, dokonywać pomiaru jasności poszczególnych plamek i badać zależność tej jasności od energii elektronów, od kąta ich padania na powierzchnię kryształu i od temperatury kryształu.

5. Co dotąd odkryto przy pomocy dyfrakcji powolnych elektronów?

W ciągu ostatnich dwudziestu kilku lat na całym świecie wykonano i opublikowano tysiące prac wykorzystujących dyfrakcję powolnych elektronów do badania powierzchni kryształów. Ich szczegółowe przedstawienie, a nawet w miarę pełne wyliczenie poruszanych w nich problemów nie jest możliwe w krótkim artykule. Dlatego poniższe omówienie nie będzie oczywiście pełne, powinno ono jedynie dać czytelnikowi pewne wyobrażenie o kierunkach prowadzonych badań.

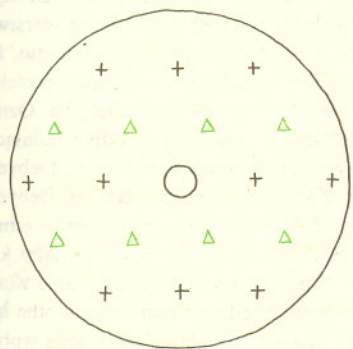
a) Struktura czystych powierzchni kryształów.

Metody badania struktury wnętrza kryształów oparte na wykorzystaniu dyfrakcji promieniowania rentgenowskiego są dziś bardzo rozwinięte i wiedza o tej strukturze jest dość pełna. Metody te, ze względu na słabe oddziaływanie promieniowania rentgenowskiego z materią, nie pozwalają badać struktury powierzchni kryształu. Dyfrakcja powolnych elektronów pozwoliła stwierdzić, że dla szeregu kryształów, zwłaszcza kryształów metali, atomy na powierzchni ułożone są tak samo, jak na płaszczyźnie równoległej do tej powierzchni i znajdującej się wewnątrz kryształu. Wynik ten nie był oczywisty, gdyż liczba najbliższych sąsiadów atomu na powierzchni jest mniejsza od takiej liczby dla atomu wewnątrz i rozmieszczenie tych sąsiadów jest asymetryczne (nie ma ich na zewnątrz kryształu). Siły wiązania atomu na powierzchni są zatem inne, co powinno prowadzić do utworzenia na powierzchni struktury odmiennej niż wewnątrz. Tymczasem w wielu wypadkach obserwuje się jedynie kilkuprocentową zmianę odległości między atomami w kierunku prostopadłym do powierzchni.

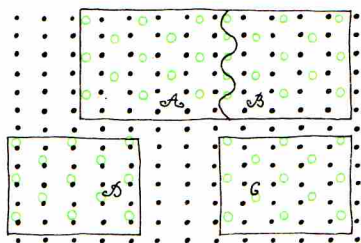
Dla wielu innych kryształów (zwłaszcza dla półprzewodników, ale także i dla pewnych metali) stwierdzono rekonstrukcję powierzchni, polegającą na skomplikowanym przemieszczeniu atomów powierzchniowych zarówno w płaszczyźnie powierzchni jak i w kierunku do niej prostopadłym. W wielu przypadkach (na przykład dla kryształu krzemu) brakuje dotąd w naukowej literaturze zgodności co do struktury zrekonstruowanej powierzchni. Badania rekonstrukcji powierzchni są bardzo przydatne dla rozwoju teorii wiązań krystalicznych.

b) Struktura warstw adsorpcyjnych.

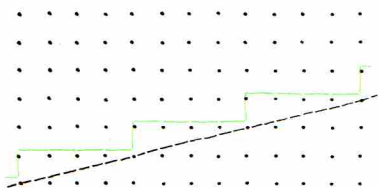
Adsorpcja obcych atomów na czystej i dobrze uporządkowanej powierzchni kryształu prowadzi bardzo często do utworzenia uporządkowanej struktury atomów adsorbentu. W obrazie dyfrakcyjnym pojawiają się wtedy nowe plamki oraz zmienia się natężenie plamek „starych”. Na przykład, przy adsorpcji siarki na jednej ze ścian kryształu niklu, na której atomy tworzą prostokątną sieć krystaliczną, w obrazie dyfrakcyjnym już przy małych pokryciach powierzchni adsorbentem pojawiają się dodatkowe plamki, zaznaczone na rys. 7 trójkątami.



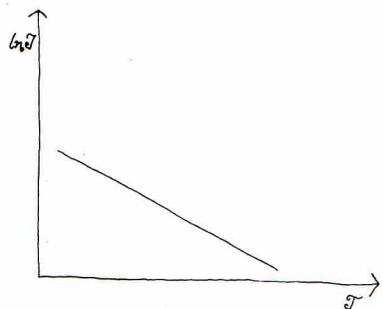
Rys. 7. Obraz dyfrakcyjny dla ściany kryształu niklu z atomami ułożonymi w sieć prostokątną. Krzyżykami zaznaczono plamki obserwowane przy dyfrakcji powolnych elektronów na czystej powierzchni, a trójkątami — plamki dodatkowe, pojawiające się przy adsorpcji siarki. Rozmiary obrazu ograniczone są wymiarami ekranu luminescencyjnego, małe kółko w środku obrazu przedstawia otwór w ekranie, przez który przechodzi pierwotna wiązka elektronów.



Rys. 8. Struktura atomów niklu (czarne kropki) dająca obraz dyfrakcyjny pokazany na rys. 7 i wyspy utworzone przez zaadsorbowane atomy siarki. W wyspach A i B atom siarki ma czterech najbliższych „niklowych” sąsiadów, w wyspie C — dwóch, a w wyspie D — jednego. W rzeczywistości rosną tylko wyspy typu A i B (patrz tekst). Granica zrostu wysp A i B tworzy defekt struktury.



Rys. 9. Przekrój kryształu z zaznaczoną linią cięcia wykonanego dla otrzymania ściany wycinalnej (linia przerywana) i ścianą wycinalną złożoną z tarasów i stopni (linia ciągła). Czarnymi kropkami zaznaczono widoczne w płaszczyźnie rysunku atomy tworzące kryształ.



Rys. 10. Zależność natężenia wiązki ugiętej od temperatury kryształu, wykreślona w skali półlogarytmicznej

$$\ln I = \ln I_0 - aT$$

(11)

Z nachylenia doświadczalnie znalezionej prostej można wyznaczyć stałą a , a stąd — efektywną temperaturę Debye'a.

Z rozmieszczenia tych plamek wynika, że na niklowym podłożu tworzą się wyspy zbudowane z regularnie ułożonych atomów siarki (rys. 8). Znajomość położenia dodatkowych plamek w obrazie dyfrakcyjnym nie pozwala rozstrzygnąć, jaką pozycję względem atomów podłoża (jakie miejsce adsorpcyjne) zajmują atomy siarki, każda bowiem z wysp pokazanych na rys. 8 powinna dawać obserwowane plamki dodatkowe. Problem ten można rozstrzygnąć mierząc zależność jasności poszczególnych plamek od energii elektronów i porównując tę zależność z zależnością obliczoną teoretycznie przy założeniu, że obsadzone są te lub inne miejsca adsorpcyjne. Takie porównania prowadzą do wniosku, że w omawianym przypadku atom siarki ma czterech najbliższych „niklowych” sąsiadów, czyli, że powstają wyspy typu „A” i „B”. Wzrost takich wysp prowadzi do ich zrastania się, przy czym linia zrostu jest defektem struktury warstwy adsorpcyjnej, jak to widać na rys. 8. Istnienie takich defektów powinno prowadzić, jak to można pokazać przy pomocy odpowiednich obliczeń, do rozdwojenia plamek dodatkowych w obrazie dyfrakcyjnym i rozdwojenie takie jest obserwowane przy całkowitym pokryciu siarką.

e) Struktura ścian wycinalnych.

Ścianą wycinalną kryształu nazywamy jego powierzchnię wyciętą w taki sposób, że tworzy ona mały kąt z płaszczyznami gęsto obsadzonymi przez atomy (rys. 9). Stwierdzono doświadczalnie, że kryształy różnych metali (np. platyny) ograniczone takimi ścianami mają interesujące własności katalityczne (na ścianach takich mogą przebiegać pewne wybrane i bardzo pożądane w praktycznych zastosowaniach reakcje chemiczne). Dla zrozumienia tych własności katalitycznych trzeba poznać strukturę ścian wycinalnych. Jak widać z rys. 9, ściana taka jest systemem tarasów oddzielonych stopniami. Stopnie te są defektami struktury powierzchni i ich istnienie prowadzi do rozszczepienia pewnych plamek w obrazie dyfrakcyjnym. Z wielkości tego rozszczepienia i z wartości energii elektronów, przy której ono występuje, można oszacować szerokość tarasów i wysokość stopni. Okazuje się, że wysokość stopni równa jest zwykle najbliższej odległości między atomami.

d) Badanie drgań cieplnych atomów powierzchniowych.

Drgania cieplne atomów znajdujących się na powierzchni kryształu powinny mieć większą amplitudę niż drgania atomów w jego objętości. Wynika to z braku sąsiadów od zewnątrz kryształu, a więc i braku części wiązań utrzymujących atom w położeniu równowagi. Pomiar zależności natężenia poszczególnych wiązek ugiętych od temperatury kryształu pozwala na wyznaczenie przy pomocy równania (11) stałej a występującej w tym równaniu, a więc i temperatury Debye'a wyznaczającej tę stałą. Nie będzie to temperatura Debye'a charakterystyczna dla wnętrza kryształu, lecz pewna średnia ważona temperatur Debye'a odpowiadających poszczególnym przypowierzchniowym warstwom atomów, nazywana efektywną temperaturą Debye'a. Największy wkład do tej średniej wnoszą pierwsza warstwa atomów, ale wpływ kolejnych warstw zwykle też nie może być zaniedbany. Z doświadczenia wiadomo, że efektywna temperatura Debye'a jest o kilkadziesiąt procent mniejsza od objętościowej (wewnętrznej) temperatury Debye'a. Oznacza to w każdym razie, że temperatura Debye'a odpowiadająca pierwszej warstwie atomów (powierzchniowa temperatura Debye'a) jest znacznie mniejsza od objętościowej temperatury Debye'a. Wynika stąd, że amplituda drgań cieplnych atomów powierzchniowych jest dużo większa od amplitudy drgań atomów wewnątrz kryształów. Wynik powyższy jest raczej jakościowy. Uzyskanie wiarygodnych danych ilościowych w tej dziedzinie napotyka istotne trudności, m. in. ze względu na brak łatwego sposobu oszacowania wpływu warstw głębszych na efektywną temperaturę Debye'a. Występują tu również inne trudności, których omawianie wykracza poza ramy niniejszego artykułu. Można, być może, tak dobrać warunki doświadczenia, że wkład warstw głębszych do dyfrakcji stanie się pomijalny i że inne, nie omówione tutaj trudności staną się mało istotne. Sprawdzenie tej możliwości jest jednak sprawą przyszłości.



Rozwiązanie zadania M 289.

Oznaczając przez a' i b' odległości wierzchołków A , B od dwusiecznej d_c kąta

C otrzymamy $\frac{a'}{b} = \frac{b'}{a}$, czyli $a'a = b'b$,

skąd wynika, że środek ciężkości opisanego w zadaniu układu mas leży na d_c (można się o tym przekonać rozpatrując taki układ współrzędnych, że d_c leży na jednej z osi).

Powtarzając powyższe rozumowanie otrzymamy, że poszukiwany środek ciężkości jest środkiem okręgu wpisanego w $\triangle ABC$.

Uwaga: Można stąd łatwo wywnioskować, że środkiem ciężkości obwodu $\triangle ABC$ jest obraz środka okręgu wpisanego

w jednokładności o współczynniku $-\frac{1}{3}$

o środku w środku ciężkości trójkąta ABC .

6. Uwagi końcowe

Wszystkie powyższe rozważania prowadzono posługując się skrajnie uproszczonymi modelami. Rozważano mianowicie tylko przypadek prostopadłego padania wiązki pierwotnej i bardzo mało i pobieżnie zajmowano się wkładem warstw głębszych do dyfrakcji. Zakładano również milcząco, że fala de Broglie'a jest uginana w kryształach tylko jeden raz, co znakomicie uprościło opis dyfrakcji. W rzeczywistości wielokrotne rozproszenie elektronów w kryształach jest bardzo istotne w dyfrakcji powolnych elektronów i musi być brane pod uwagę przy jej opisie. Dlatego współczesna teoria dyfrakcji powolnych elektronów jest bardzo skomplikowana, a interpretacja wyników otrzymywanych przy stosowaniu tej dyfrakcji do badania powierzchni kryształów rzadko bywa tak prosta, jak w przytoczonych wyżej przykładach. Dlatego niniejszy artykuł jest tylko bardzo elementarnym wstępem do tematu sformułowanego w jego tytule.

Poradnik dla Fibaka

czyli Matematyczna Teoria Tenisa

Matematyka jest dobra na wszystko. Oto wiadomo, że po pierwszym nieudanym serwie (po polsku: podaniu) wolno w tenisie serwować powtórnie. Wszyscy tenisisci biją więc pierwszy serwis silnie, bardziej ryzykownie. Drugi jest bardziej ścięty, spokojniejszy i już nie powinien wyjść na aut.

Może to nie jest najlepsza strategia? Może opłaciłoby się obydwu serwisy wykonywać mocno, ryzykownie, albo przeciwnie, obydwu słabsze? Stwórzmy matematyczny model sytuacji! Gracz ma do dyspozycji zbiór S sposobów serwowania: mocny i płaski, liftowany, z narożnika kortu, bliżej środka, itd... Z każdym podaniem s związane są dwa prawdopodobieństwa $p(s)$ i $q(s)$:
 $p(s)$ = prawdopodobieństwo, że serw jest udany,
 $q(s)$ = prawdopodobieństwo warunkowe: jeśli jest udany, to przyniesie punkt (lub choćby rozstrzygający atak).

Zatem $w(s) = p(s)q(s)$ jest prawdopodobieństwem wygrania punktu po podaniu s . Na ogół podania z większym p mają mniejsze q (im bardziej ryzykowny, tym trudniej go odebrać, jeśli wyjdzie).

Strategia składa się zatem z uporządkowanej pary $(s_1, s_2) \in S \times S$. „Sukces” to wygranie punktu. Jego prawdopodobieństwo wynosi

$$(1) \quad p(s_1, s_2) = w(s_1) + (1 - p(s_1))w(s_2).$$

Optymalna strategia powinna maksymalizować (1). Ponieważ nie ma trzeciego podania, więc s_2 musi przy tym maksymalizować $w(s)$. Oznaczmy to maksimum przez \bar{w} ; wtedy s_1 winno maksymalizować

$$(2) \quad w(s) - \bar{w}p(s).$$

Odlóżmy na dwu prostopadłych osiach p i w . Wyobraźmy sobie, że nasz gracz zna bardzo wiele sposobów serwowania i że układają się one w krzywą jak na rysunku obok. Każdy tenisista potwierdzi, że jest ona wypukła. Ponieważ s_2 maksymalizuje w , więc jest najwyższym punktem wykresu. Natomiast s_1 maksymalizuje $w(s) - \bar{w}p(s)$. Geometrycznie znaczy to, że s_1 jest punktem styczności krzywej z prostą L o współczynniku kierunkowym \bar{w} . Na rysunku obok mamy więc strategię: bij najpierw s_1 , potem s_2 . Proste? Proste!

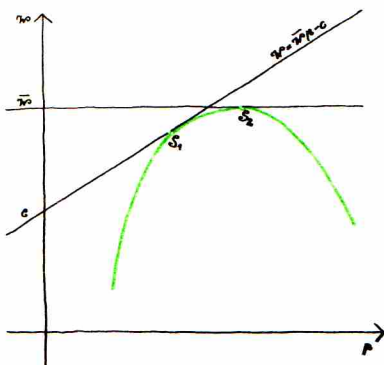
Udowodniliśmy matematycznie, że opłaca się bić pierwszy serwis ryzykownie a drugi spokojnie. Wiedzieliśmy to już przedtem, ale teraz to już ho-ho!

Dla mniej wprawnych graczy nasza teoria też jest dobra. Wyobraźmy sobie, że ma on do dyspozycji tylko dwa sposoby serwowania: s_1 i s_2 o współrzędnych (p_1, w_1) i (p_2, w_2) . Wówczas (łatwe obliczenia pomijamy): (s_1, s_2) jest optymalną strategią wtedy i tylko wtedy, gdy

$$w_2 \geq w_1 \geq w_2(1 - (p_2 - p_1)).$$

Gdy pierwsza nierówność nie zachodzi, należy serwować dwa razy s_1 , gdy druga — dwa razy s_2 . Co z tego wszystkiego wynika dla poziomu naszych umiejętności w białym sporcie? Dokładnie nic. Czy wobec tego te rozważania były całkiem bezużyteczne? Być może, natomiast autorowi tej notatki nieodparcie przypominały matematyczne podstawy ekonomii politycznej.

(M. Sz.)



Tak należy serwować.

Oddziaływanie promieniowania elektromagnetycznego z materią

Część II. Model oscylatorowy

Doc. dr Jerzy GINTER

W poprzednim artykule z tego cyklu omówiliśmy podstawowe doświadczalne zależności pomiędzy zjawiskami absorpcji, emisji i załamania promieniowania elektromagnetycznego. Aby chociaż jakościowo zrozumieć omawiane zagadnienia, musimy dokonać teraz dłuższej dygresji — przypomnieć i rozszerzyć wiadomości, dotyczące układów poruszających się harmonicznym ruchem drgającym, czyli tzw. „oscylatorów harmonicznym”.

1. Oscylator swobodny.

Dobrze znanym przykładem oscylatora harmonicznego jest wahadło. (Innym przykładem może być kulka zawieszona na sprężynie). Wiadomo, że dla małych wychyleń pozioma siła F działająca na kulkę wahadła jest proporcjonalna do wychYLENIA z położenia równowagi x :

$$F = -kx. \quad (1)$$

Jeżeli na kulkę wahadła nie działa w kierunku poziomym żadna inna siła, II zasada dynamiki prowadzi do równania

$$ma = -kx. \quad (2)$$

Przypomnijmy, że przyspieszenie jest drugą pochodną wychYLENIA względem czasu

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Ruch oscylatora określa więc równanie

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \quad (3)$$

Wiadomo, że rozwiązania tego równania odpowiadają zależnościom periodycznym

$$x = A \sin \omega_0 t. \quad (4)$$

Łatwo to sprawdzić przez podstawienie, pamiętając, że $\frac{d^2}{dx^2}(\sin ax) = -a^2 \sin ax$. A jest wielkością dowolną, zwaną amplitudą ruchu. Częstość kołowa ω_0 jest określona wzorem (T oznacza okres drgań):

$$\omega_0 = m \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (5)$$

Przypadek ruchu bez żadnych sił dodatkowych nazywamy przypadkiem oscylatora swobodnego.

2. Oscylator wymuszony.

Nas jednak będzie interesować przypadek bardziej złożony: kiedy na oscylator działa jeszcze siła „zewnętrzna”, periodycznie zależna od czasu

$$F = F_0 \sin \omega t. \quad (6)$$

Częstość kołowa ω tej siły jest na ogół różna od częstości drgań własnych ω_0 . Przykładem realizacji takiego układu może być wahadło z kulką stalową, pobudzane do drgań elektromagnesem, zasilanym prądem przemiennym (rys. 1).

II zasada dynamiki prowadzi teraz do równania

$$ma = m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F_0 \sin \omega t. \quad (7)$$

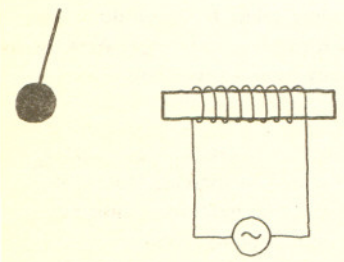
Można przypuszczać, że ruch pod wpływem siły periodycznie zmiennej o częstości ω będzie ruchem periodycznym z tą właśnie częstością (różną od częstości własnej ω_0).

Zależność x od t ma więc postać

$$x = A \sin \omega t. \quad (8)$$



Rozwiązanie zadania M 290.
Oznaczmy przez $m_k m_{k-1} \dots m_1 m_0$ zapis dziesiętny m a przez $S(m)$ sumę cyfr m . Ponieważ $S(10^k \cdot m) = S(m)$, możemy założyć, że $m_0 \neq 0$. Dla $l > k$ i $n = 10^l - 1 = \underbrace{99 \dots 9}_l \text{ dziewiątek}$ mamy
 $m \cdot n = 10^l m - m = \underbrace{m_k \dots m_0 \underbrace{0 \dots 0}_l}_{l \text{ zer}}$
 $\frac{-m_k \dots m_0}{m_k \dots (m_0 - 1) \underbrace{9 \dots 9}_{l-k \text{ dziewiątek}} \dots 9(9 - m_k) \dots (9 - m_1)}_{(10 - m_0)}$
i $S(mn) = 9l = S(n)$.



rys. 1

Sprawdźmy, że wyrażenie (8) jest rozwiązaniem równania (7). Podstawiając (8) do (7) uzyskujemy

$$m(-\omega^2)A \sin \omega t = -kA \sin \omega t + F_0 \sin \omega t. \quad (9)$$

Przenosząc wyrazy zawierające A na lewą stronę i dzieląc obie strony przez $m \sin \omega t$ (która to wielkość na ogół różna jest od zera), dostajemy

$$\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) A = \frac{F_0}{m}. \quad (10)$$

Możemy teraz już wyznaczyć A , które nie jest dowolne, ale jednoznacznie wyznaczone przez częstość i stałe występujące w równaniu. Zauważmy przy tym, że $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, zgodnie z wyrażeniem (5). Mamy więc (dla $\omega \neq \omega_0$)

$$A = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (11)$$

i ostatecznie zależność wychylenia od czasu

$$x = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \omega t. \quad (12)$$

Musimy teraz przedyskutować uzyskany wynik. Wykres zależności A od ω przedstawia rysunek 2.

Widać, że dla bardzo małych częstości ($\omega \rightarrow 0$) amplituda A dąży do wartości $A = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$.

W zakresie pomiędzy zerem a ω_0 amplituda jako funkcja częstości rośnie. Ważne jest jednak, że dla określonego ω jej wartość jest ustalona. Ponieważ w naszych rozważaniach nie uwzględniliśmy zjawiska rozpraszania energii, oznacza to, że po ustaleniu się drgań (czyli poza krótkim okresem początkowym) energia średnio nie jest do układu dostarczana ani od niego odbierana.

Dla częstości kołowej ω równej częstości własnej układu ω_0 wzór (11) nie daje określonej wartości A , bo mianownik znika. Jest to przypadek ścisłego rezonansu. Rozwiązanie (8) nie opisuje prawidłowo zachodzących procesów. Naprawdę dla ścisłego rezonansu mielibyśmy do czynienia z ruchem z amplitudą rosnącą, a nie ustaloną (jak przy rozhuśtywaniu huśtawki). Mamy więc do czynienia z pobieraniem energii przez oscylator od źródła siły periodycznej (absorbpcją energii).

Dla $\omega > \omega_0$ obserwujemy wynik dość dziwny — drganie zmienia fazę. Ponieważ A jest mniejsze od zera, wychylenie ma zwrot przeciwny w stosunku do działającej siły. Łatwo stwierdzić, że jest to prawda. Trzeba mieć tylko piłeczkę (albo dowolny inny ciężarek) na gumce (rys. 3). Przy poruszaniu ręką z częstością mniejszą od częstości własnej piłeczka wychyla się zgodnie ze zwrotem ruchów ręki. Dla pobudzenia z częstością większą od rezonansowej jest odwrotnie. Dla $\omega \rightarrow \infty$ amplituda dąży do zera.

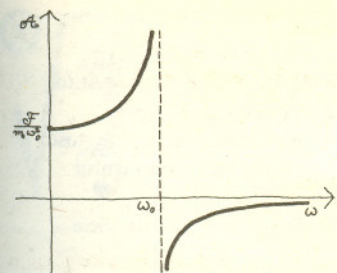
3. Oscylatorowy model absorpcji, emisji i załamania promieniowania elektromagnetycznego.

Rys. 4 przedstawia schematyczną zależność współczynnika załamania substancji materialnej od częstości promieniowania elektromagnetycznego. Jest to po prostu przedrukowany rysunek 4 z pierwszej części artykułu. Porównanie z rysunkiem 2, przedstawiającym zależność amplitudy oscylatora harmonicznego od częstości siły pobudzającej wskazuje na uderzające podobieństwo obu tych wykresów. Nasuwa się więc następująca hipoteza: być może w ciałach materialnych istnieją jakieś „mikrooscylatory” harmoniczne. Muszą one występować w gazie atomowym — np. w parach sodu. W tym przypadku najprawdopodobniej są nimi same atomy. Muszą także występować w cieczech i w ciałach stałych — takich jak na przykład omawiany poprzednio fluorek litu. Ponadto „poszczególne części” tych oscylatorów muszą mieć ładunek elektryczny, bo może je pobudzać do drgań fala elektromagnetyczna. Spróbujmy naszkicować teraz, jak w tym modelu „mikrooscylatorów” można byloby opisać absorpcję, emisję i załamanie promieniowania.

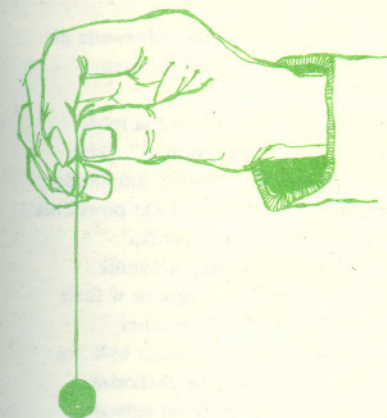
4. Pochłanianie.

Zgodnie z naszym założeniem w ośrodku materialnym istnieją „mikrooscylatory” o określonych częstościach własnych — pewnych wartościach ω_0 . Fala elektromagnetyczna może pobudzać je do drgań. Jeżeli $\omega \neq \omega_0$, to nie zachodzi absorpcja energii (por. rozważania w punkcie 2 tego artykułu). Absorbpcja energii zachodzi natomiast dla ścisłego rezonansu, czyli $\omega = \omega_0$. W rzeczywistości bardzo często mamy do czynienia z oddziaływaniem pola elektrycznego fali na naładowane „części mikrooscylatorów” zgodnie ze wzorem $\vec{F} = q\vec{E}$. Możliwe jest jednak także oddziaływanie z polem magnetycznym fali.

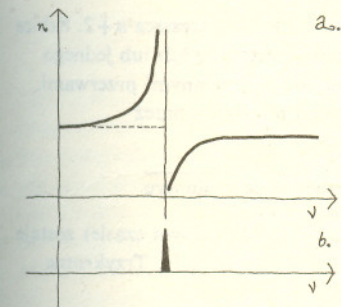
Warto przy tym zwrócić uwagę, że na ogół temperatura ciała absorbującego wzrasta. Musi więc istnieć jakiś sposób zamiany energii drgań „mikrooscylatorów” ciała na energię termiczną. Procesów tych jednak nie będziemy dokładnie omawiać.



rys. 2. Przebieg zależności wychylenia od czasu zgodnie z wzorem (12)



rys. 3



rys. 4. Schematycznie przedstawiony przebieg współczynnika załamania (a) i absorpcji (b) jako funkcji częstości.

Rozwiązanie zadania M 291.

Oznaczając $p = \frac{a+b+c}{2}$ mamy

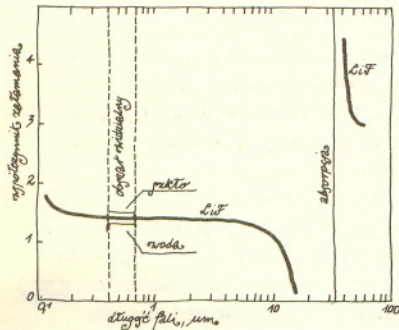
$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

$$= \sqrt{p(p-a)} \sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{a^2}} =$$

$$= \sqrt{p(p-a)} \sqrt{\frac{a^2 - (b-c)^2}{a^2}} \leq \sqrt{p(p-a)}$$

i analogicznie $h_b \leq \sqrt{p(p-b)}$, $h_c \leq \sqrt{p(p-c)}$, przy czym równości zachodzą gdy odpowiednio $b = c$, $a = c$, $a = b$.

Mamy stąd $h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \leq p(p-a) + p(p-b) + p(p-c) = p^2$, przy czym równość zachodzi tylko dla trójkąta równobocznego.



rys. 5. Zależność współczynnika załamania od długości fali dla kryształu fluorku litu (LiF). Dla porównania dorysowano zależność współczynnika załamania od długości fali dla szkła i wody w zakresie widzialnym.

5. Emisja.

Jeżeli w naszych mikrooscylatorach ładunek ujemny może się przesuwać ruchem drgającym względem dodatniego, to taki układ może wysyłać promieniowanie elektromagnetyczne. Jest to zjawisko podobne do wysyłania fali elektromagnetycznej przez antenę radiową, w której poruszają się ujemne elektrony względem dodatnich jonów metalu. Emitowana fala ma częstość równą częstości drgań własnych „mikrooscylatorów”. Dlatego zjawisko pochłaniania i emisji zachodzi dla tych samych częstości.

Aby „mikrooscylatory” zaczęły drgać, trzeba im dostarczyć energię. Jest to możliwe na wiele sposobów. Oto niektóre przykłady:

- Zderzenia „mikrooscylatorów” ze sobą. Na tej zasadzie pobudzone są do drgań atomy sodu w palniku.
- Zderzenia „mikrooscylatorów” z elektronami. Tak powstaje świecenie atomów gazu w wyładowaniu jarzeniowym (w neonówce, w lampie sodowej).
- Pobudzenie do świecenia przez falę elektromagnetyczną. Zjawisko takiego świecenia — równoczesne z procesem absorpcji — pojawia się np. przy oświetleniu chłodnych (nieświejących) par sodu światłem o odpowiedniej częstości. Nazywamy je „fluorescencją rezonansową”.

6. Załamanie.

Przypadek załamania omówić najtrudniej, bo wymagałoby to rozwiązania równań Maxwella dla fali rozchodzącej się w ośrodku materialnym. Pozostaniemy więc przy kilku najprostszych uwagach:

Ośrodek materialny tym różni się od próżni, że przychodząca fala elektromagnetyczna może w nim wywołać prądy elektryczne, polegające na ruchu ładunków „mikrooscylatorów”. Jeżeli częstość fali różni się od częstości własnej, czyli nie są spełnione warunki rezonansu, amplituda drgań po krótkim okresie wstępnym ustala się — nie ma więc zjawiska absorpcji. Fakt powstania drgań ładunków przejawia się jednak jako istnienie różnego od jedności współczynnika załamania ośrodka materialnego. Wtedy, kiedy wzbudzone drgania są słabe, współczynnik załamania jest stosunkowo niewiele różny od jedności. Kiedy drgania są duże i zgodne w fazie z polem elektrycznym fali — czyli na przykład dla częstości niewiele niższej od częstości rezonansowej — współczynnik załamania staje się bardzo duży (dla LiF obserwowana była np. wartość $n = 4,5$ — mówiliśmy już o tym poprzednio). Kiedy drgania są silne, ale zachodzą w przeciwfazie z polem współczynnik załamania może stać się znacznie mniejszy od jedności (dla LiF obserwowano wartość $n = 0,2$).

Stosunkowo proste pojęciowo rachunki pokazują na bardzo dobrą zgodność „oscylatorowego modelu” substancji z eksperymentem. Polegają one po prostu na obliczeniu, jak rozchodzi się fala elektromagnetyczna w ośrodku, w którym istnieją „mikrooscylatory”, których ruch opisuje wzór (12). Przeprowadzenie ich wymaga jednak wiadomości — zarówno z fizyki, jak i z matematyki — znacznie przekraczających zakres szkolny.

7. Podsumowanie.

Z tego co powiedzieliśmy powyżej widać, że „oscylatorowy model” zadziwiająco dobrze opisuje oddziaływanie promieniowania elektromagnetycznego z materią. Powstaje jednak natychmiast pytanie: co to są te „mikrooscylatory”? Jaka jest ich fizyczna natura? Do tych spraw przejdziemy w następnej części cyklu.

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delfy”

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr. $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

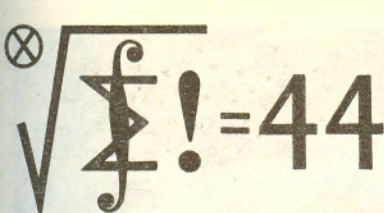
$$4-3 \cdot \frac{\text{suma ocen za rozwiązanie danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.

Ligę organizuje Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, oraz nasza Redakcja.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 9/1981.





Zadania nr 19, 20, 21

Termin nadsyłania rozwiązań: do 31.VII.1982

19. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste x , dla których jest spełniona nierówność

$$\sin(\cos x) < \cos(\sin x).$$

20. Ściany $2n$ -ścianu wypukłego opisanego na kuli pomalowano na czerwono i zielono tak, by sąsiednie ściany były różnych kolorów. Czy czerwonych ścian musi być tyle samo, co zielonych? Czy pola powierzchni: czerwonej i zielonej muszą być równe?

21. Każda funkcja różniczkowalna ma pochodną ciągłą (!) Wskazać błąd w poniższym rozumowaniu: Niech f będzie funkcją różniczkowalną. Pisząc

$$\varepsilon = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)$$

widzimy, że $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h\varepsilon$, gdzie $\varepsilon \rightarrow 0$ przy $h \rightarrow 0$. Podstawiając tu kolejno:

(1) $x = 0, h = 2t$, (2) $x = 0, h = t$, (3) $x = h = t$, otrzymujemy układ równości

$$f(2t) = f(0) + 2tf'(0) + 2t\varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 \rightarrow 0 \text{ przy } t \rightarrow 0,$$

$$f(t) = f(0) + tf'(0) + t\varepsilon_2, \quad \varepsilon_2 \rightarrow 0 \text{ przy } t \rightarrow 0,$$

$$f(2t) = f(t) + tf'(t) + t\varepsilon_3, \quad \varepsilon_3 \rightarrow 0 \text{ przy } t \rightarrow 0,$$

z którego możemy wyznaczyć $f'(t)$:

$$f'(t) = \frac{f(2t) - f(t)}{t} - \varepsilon_3 = f'(0) + 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3.$$

Ostatnie wyrażenie dąży do $f'(0)$, gdy $t \rightarrow 0$, a więc funkcja f' jest ciągła w punkcie 0.

Rozwiązania zadań z numeru 11/81

7. Odpowiedź jest twierdząca: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$. **Dowód:** Przypuśćmy, że tak nie jest. Wówczas,

z uwagi na ciągłość f , w dowolnie małym prawostronnym otoczeniu zera leży przedział, na którym $|f| > \varepsilon > 0$. Określmy ciąg takich przedziałów

$I_0, I_1, I_2, \dots, I_k = \langle a_k, b_k \rangle$, wybierając I_0 dowolnie, a dalej żądając, by

$$I_k \subset \left(0, \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2}\right) \text{ oraz } \frac{a_k}{b_k} > \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2b_{k-1}}.$$

Prosty rachunek pokazuje, że wówczas różnica liczb b_{k-1}/b_k i a_{k-1}/a_k jest większa od 1; można zatem między te liczby wstawić liczbę naturalną m_k . Mamy więc $a_{k-1} < m_k a_k$, $b_{k-1} > m_k b_k$ ($k = 1, 2, \dots$). Oznaczmy: $n_k = m_1 m_2 \dots m_k$, $J_k = \langle n_k a_k, n_k b_k \rangle$. Z uzyskanych nierówności wynika, że $J_0 \supset J_1 \supset J_2 \supset \dots$. Istnieje więc punkt $x \in \bigcap J_k$, czyli taki, że $x/n_k \in I_k$ ($k = 1, 2, \dots$). Zatem $|f(x/n_k)| \geq \varepsilon$, wbrew warunkowi zadania.

8. Niech K, L, M, N, P, Q oznaczają odpowiednio środki krawędzi AB, CD, AC, BD, AD, BC

danego czworokąta $ABCD$. Z relacji $KM \parallel BC \parallel LN$, $KM = \frac{1}{2} BC = LN$, $KN \parallel AD \parallel LM$,

$KN = \frac{1}{2} AD = LM$ i z założenia $AD = BC$ wynika, że czworokąt $KMLN$ jest rombem, a więc

jego przekątne KL i MN są prostopadłe i połowią się. Takie same stwierdzenie dotyczy — analogicznie — par odcinków MN i PQ oraz PQ i KL . Stąd teza.

9. Ponieważ $OWCA \geq 1023$, a $STADO \leq 98765$, więc $n \leq 96$. Będziemy szukać rozwiązań z $n \geq 50$. Jeśli takie rozwiązanie istnieje, to literze O musi odpowiadać cyfra 1. Wówczas iloczyn $n \cdot OWCA = STADO$ kończy się cyfrą 1, zatem ostatnimi cyframi czynników muszą być 1 i 1 albo 9 i 9 albo 3 i 7. Ale $A \neq 1$, skoro $O = 1$. Pozostają możliwości: $A = 3, n = 10k + 7$, lub $A = 7, n = 10k + 3$, lub $A = 9, n = 10k + 9$. Bierzemy teraz największą możliwą wartość $n = 93$; wtedy $A = 7$, $STADO \leq 98761$, stąd $OWCA = STADO : n \leq 1061$, więc $W = 0$ i $OWCA = 10C7$; podstawiając za C kolejne niezajęte cyfry sprawdzamy, czy któraś z nich daje rozwiązanie zagadki. Okazuje się, że nie — bierzemy więc $n = 89$ i postępujemy podobnie, i dalej, dla $n = 87, 83, 79, 77, \dots$ Pozostawiamy sprytowi Czytelników znalezienie takiej metody liczenia, aby przebadanie wszystkich wartości $n > 50$ zajęło nie więcej, niż kwadrans zabawy z kalkulatorem.

W przedziale $50 \leq n \leq 96$ zagadka ma dwa rozwiązania: $63 \cdot 1567 = 98721$ i $53 \cdot 1297 = 68741$.

Odpowiedź: $n_{\max} = 63$.

Klub 44

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Katakлизmy we Wszechświecie (III)

Doc. dr Bolesław GRABOWSKI

Po omówieniu katakлизmów na skalę ziemską i na skalę Układu Słonecznego, tym razem zajmiemy się gwiazdami i galaktykami.

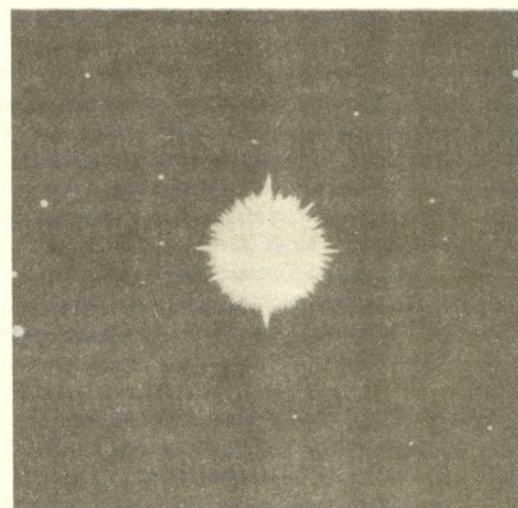
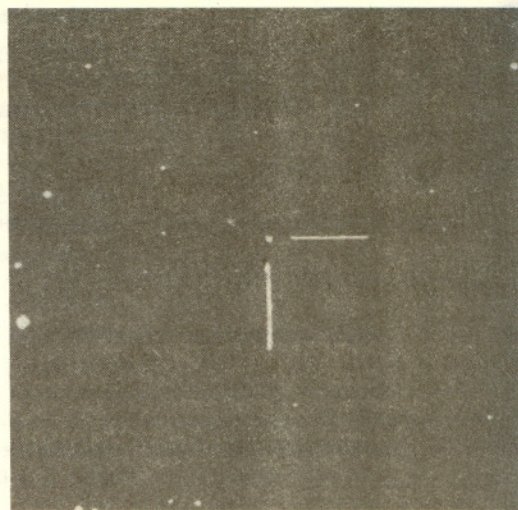
7. Gwiazdy aktywne. Nazwijmy aktywnymi gwiazdy zmieniające jasność w sposób ostry, choć niekoniecznie gruboskalowy; prawdopodobnie we wszystkich z nich dochodzą do głosu — choć w różnej skali — procesy wybuchowe. Sformułujmy „konkurencję” pod nazwą gwałtowność zmian, rozumiejąc ją jako przyrost jasności w jednostce czasu. Dobrymi „zawodnikami” w tej konkurencji są gwiazdy zmienne wybuchowe typu *Tauri* i *U Geminorum*; znacznie lepsze są tzw. gwiazdy rozblyskowe, prawdopodobnie zasilane tym samym mechanizmem, co rozblyski naszego Słońca. Miara tamtejszych rozblysków jest jednak bez porównania większa: w skrajnych przypadkach jasność gwiazdy w ciągu 5—100 sekund rośnie o 5—7 tzw. wielkości gwiazdowych, co odpowiada wzrostowi mocy promieniowania, co najmniej o czynnik 100! Jest to wynik niezwykle, zwłaszcza jeśli się zważy, iż w rozblysk wprzęgnięte jest — jak się ocenia — zaledwie około 1% powierzchni gwiazdy ... A poza wszelkim współzawodnictwem są gwiazdy nowe i supernowe.

W wielu typach zmiennych wybuchowych spotykamy odrzucone otoczki, ekspandujące z prędkościami setek kilometrów na sekundę (wnioskujemy o tym z przesunięcia dopplerowskiego linii widmowych); energia nowej jest uwalniana tak gwałtownie i jest jej tak duży ładunek, że materia jest odrzucana od gwiazdy z prędkością rzędu 2000 km/s. Za tą wybuchową ekspansją podąża dramatyczny wzrost jasności: o 10—15 wielkości gwiazdowych, tzn. o czynnik od 10^4 do 10^6 w czasie od kilku godzin do kilku dni. Masa „zdmuchniętej” otoczki stanowi zaledwie około 10^{-5} masy gwiazdowej; w każdym razie są to jednak tryliony ton. Przyjmując orientacyjnie jej masę około 10^{25} — 10^{26} kg, otrzymujemy energię kinetyczną około 10^{37} — 10^{38} J. W czasie całego „popisu” trwającego około jednego roku wypromieniowuje ona w otoczenie drugie tyle energii, to znaczy taką ilość, na której wytworzenie Słońce potrzebowałoby sto tysięcy lat! Fotografia przedstawia nową w gwiazdozbiornie Herkulesa przed i wkrótce po wybuchu w 1934 r. Słynnym współczesnym ewenementem jest nowa w gwiazdozbiornie Łabędzia, która w nocy 29/30 sierpnia 1975 r. zwiększyła swą pierwotną jasność w sposób niezwykle — co najmniej 10 milionów razy i z nikłego światełka, którego nie zdołały ujawnić nawet największe teleskopy, stała się gwiazdą łatwo zauważalną gołym okiem.

Supernowa w swoim maksimum blasku może „zaćmić” blask całej galaktyki (a więc 10^{10} — 10^{11} słońc!), do której jest przynależna. Widma supernowych dają niepodważalne dowody szaleńczej ekspansji „zdmuchniętej” materii. Otrzymuje się: masę około $0,5 M_{\odot}$ i prędkość około 10 000 km/s (typ I supernowych), lub masę $5 M_{\odot}$ i prędkość około 5000 km/s (typ II). W obu typach większość energii strasznego wybuchu, około 10^{44} J, unoszona jest przez rozpędzone zwaly materii; porcję o jeden do dwu rzędów wielkości mniejszą supernowa wydatkuje w szybkim tempie w formie promieniowania. Chodzi tu w sumie o ilości kolosalne. Dla porównania: nominalna energia nuklearna, jaką można wyzwolić przez „spalenie” jednej masy słonecznej czystego wodoru („popiołem” będzie czysty hel)

$$0,0072 \times M_{\odot} c^2 = 1,3 \times 10^{45} \text{ J}, \quad (4)$$

jest tylko niewiele większa. Przekonuje to nas dowodnie, iż w „narodzinach” supernowej, w tym pełnym dramacie choć



migawkowo krótkim doświadczeniu, eksplodująca gwiazda traci znaczną część swego nuklearnego paliwa; w tym momencie z reguły kończy ona swoje „normalne życie”.

Najsłynniejszą pozostałością po eksplozji supernowej jest Mgławica Krab (por. „Patrz w niebo”, *Delta* 12/1980). Katastrofę, której skutki obserwujemy, można przyrównać do jednoczesnej eksplozji 10^{25} stumegatonowych bomb wodorowych; dziś sprawę tego gigantycznego fajerwerku kosmicznego trudno odszukać nawet przez duże teleskopy — jest on 10 tysięcy razy słabszy od najsłabszych gwiazd widzianych gołym okiem. W pobliskich galaktykach zaobserwowano dotychczas ponad 300 supernowych, średnio dwie w danej galaktyce w ciągu stulecia. W naszej Drodze Mlecznej odkryto około dwu tuzinów pozostałości po supernowych, najświeższy — z 1604 r. i żadnej dalszej supernowej od prawie czterech wieków. „Zlekceważona” statystyka pilnie domaga się więc zadośćuczynienia. Kto wie, może już wkrótce ujrzemy olśniewający błysk na firmamencie, może nawet już w tych dniach? ...

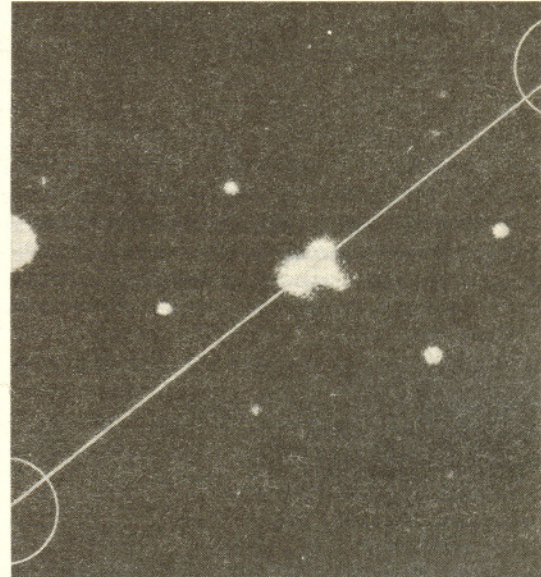
8. Galaktyki aktywne. W przeglądzie obiektów „podejrzanych” o gwałtowne akcje, galaktyki wydają się być jednostkami najbardziej zrównoważonymi. A jednak ... Już dość proste obserwacje sąsiednich galaktyk dowodzą, iż gwałtowne i odpowiednio gruboskalowe formy aktywności nie są tam bynajmniej obce, przy czym terenem wyjściowym takiej akcji jest z reguły jądro galaktyczne. Wnętrze naszej własnej Galaktyki obserwujemy ze znacznie większym trudem (jakby na potwierdzenie przypowieści o źdźble w cudzym i belce we własnym oku). Jednak nawet wyrwykwe i nie do końca jeszcze pewne obserwacje dowodzą istnienia radialnego wypływu materii

z wnętrza Drogi Mlecznej, z prędkością ok. 100 km/s. W formie ekspandującego pierścienia o promieniu ok. 800 lat świetlnych rozbiega się 100 milionów mas słonecznych gazu i pyłu międzygwiazdowego. Łatwo możemy ocenić, iż gigantycznej skali eksplozja, która rozpędziła te masy, miała miejsce przed kilku milionami lat i uwolniła energię (gdy za jej miarę przyjąć samą tylko „zaobserwowaną” energię kinetyczną) nie mniejszą niż 10^{48} J; w rzeczywistości jest ona znacznie większa. Odpowiada ona całkowitej energii spoczynkowej ($E = mc^2$) masy co najmniej $5 M_{\odot}$, lub nominalnej energii nuklearnej (por. (4)) co najmniej $1000 M_{\odot}$. Stuprocentową sprawność zamiany masy spoczynkowej w energię wybuchu mogłaby zapewnić tylko (hipotetyczna) anihilacja materia-antymateria; mamy jednak zasadnicze powody aby (co najmniej) w odniesieniu do naszej Galaktyki ten mechanizm odrzucić. Na obecnym etapie referowania sprawy pozostaje więc nam wniosek: w jednym wybuchu uczestniczyła materia co najmniej tysiąca mas słonecznych ... A jeszcze tak niedawno astrofizycy uważali, że wybuchy supernowych są najpotężniejszymi tego rodzaju zjawiskami we Wszechświecie. Droga Mleczna, jak sądzimy, należy do „normalnych” galaktyk (spiralnych). „Anomalne” galaktyki ujawniają aktywność wybuchową o znacznie wyższym stopniu gwałtowności. Zdjęcie wykonane w jednobarwnym świetle wodorowej linii H_{α} , przedstawia (w negatywie, który jest bardziej „czytelny” niż pozytyw) najbliższą z galaktyk o symptomach choleryka — galaktykę nieregularną M82, odległą o 10 mln lat świetlnych.



W jej środkowym rejonie widzimy gigantyczny pióropusz gazów wyrzucenych eksplozyjnie wzdłuż osi obrotu; rozciąga się on na odległość 13 000 lat świetlnych. Prędkość masy w każdym jego punkcie jest proporcjonalna do odległości punktu od jądra galaktyki. W najbardziej oddalonych częściach pióropusza gaz ekspanduje z prędkością 2700 km/s. Z prostego przeliczenia otrzymujemy, że eksplozja w galaktyce nastąpiła półtora miliona lat przed tym stanem, który dziś obserwujemy. Masę gazu wymiecionego eksplozją oceniamy na około 5 milionów mas słonecznych, a niesioną przezeń energię kinetyczną na około 2×10^{48} J. Dla porównania: równoważne (masowo) 5 milionów Słońc przez owe półtora miliona lat zdołałoby wypromieniować zaledwie około 4% tej gigantycznej porcji energii. Całkowitą ilość energii uwolnionej w eksplozji galaktyki M82 oceniamy z grubszą na 10^{49} do 10^{51} dżuli (A. Unsöld: *The New Cosmos*). Nieco dalej położona wielka galaktyka eliptyczna M87 imponuje powybuchowym „dżetem” — świetlistą strugą materii, jak z palnika acetylenowego, tyle tylko, że rozciąglą na sto tysięcy lat świetlnych. Cała klasa galaktyk, nazywanych seyfertowskimi, w swoich widmach uwidacznia ruchy gazów o prędkościach 500—4000 km/s, które trudno wytłumaczyć inaczej, jak tylko gwałtowną eksplozją.

Galaktyki aktywne są z reguły znacznie „jaśniejsze” w zakresie radiowym, podczerwieni, ultrafiolecie lub w promieniach X, niż w widmie optycznym. Szczególnie „skromnie” w tym rejonie widma wyglądają radiogalaktyki. Zwykle po nałożeniu na siebie obrazu optycznego i radiowego radiogalaktyki otrzymuje się swoiste monstrum — słabe centrum optyczne i daleko odeń odsunięte na boki (symetrycznie, wzdłuż osi rotacji) dwa centra niewiarygodnie wprost spotęgowanej aktywności radiowej. Prawdziwym rekordzistą w tym względzie, a „przy okazji” największym odkrytym dotąd pojedynczym obiektem we Wszechświecie, jest radiogalaktyka 3C 236, której oba źródła emisji radiowej są oddalone od siebie o 18 milionów lat świetlnych!



Fotografia przedstawia optyczny obraz innej radiogalaktyki, znanej pod nazwą *Cygnus* (Łabędź) A. Widzimy tu tylko jasne jądro galaktyki (środek zdjęcia); niewidoczne centra radiowe zaznaczono schematycznie. Każde z centrów oddalone jest od macierzystej galaktyki o około 200 tys. lat świetlnych, a ona sama oddalona jest od nas o ponad pół miliarda lat świetlnych. Łabędź A wydaje się być najpotężniejszym „nadajnikiem” radiowym wśród radiogalaktyk w całej zbadanej dotąd części Wszechświata. Jego pełna moc radiowa wynosi aż 5×10^{37} W (około 10^5 razy większa, niż M82, $5,1 \times 10^{37}$ W wobec $4,2 \times 10^{32}$ W). Tak więc w samym tylko zakresie radiowym w ciągu każdej sekundy emituje on przeszło sto miliardów razy więcej energii, niż nasze Słońce łącznie we wszystkich długościach fali. Setki tysięcy lat wcześniej, niż widzimy to na zdjęciu, galaktyka doświadczyła w swym wnętrzu gigantycznej eksplozji; wyrzucone zostały w przeciwnych kierunkach olbrzymie „bryzgi” plazmy — każdy o średnicy 60 tys. lat świetlnych — które obecnie obserwujemy jako radioźródło. W rzeczy samej eksplozja miała miejsce o ponad pół miliarda lat wcześniej, takie bowiem jest opóźnienie informacji, jakie dziś otrzymujemy z tego odległego rejonu Wszechświata. Łączna energia wyzwolona podczas katastrofy galaktyki w Łabędziu jest o 3—4 rzędy większa, niż w eksplozji galaktyki M82 i sięga 10^{55} J!

9. Tajemniczy rekordzista — kwazar. Główną cechą widm kwazarów jest — jak wiemy — duże przesunięcie ku czerwieni. Najbardziej naturalnym (ale niekoniecznie prawdziwym) wyjaśnieniem jest tzw. wyjaśnienie kosmologiczne — iż kwazary uczestniczą w ekspansji Wszechświata. Jeśli tak jest istotnie, obserwowane przesunięcie wiąże się — poprzez prawo Dopplera — z prędkością radialną źródła światła. Dalsze „obserwable” szeptane są teraz nawzajem w łańcuchu implikacji: duże przesunięcie widma ku czerwieni → duża prędkość ucieczki źródła → źródło jest bardzo daleko od nas → źródło jest bardzo

„młode” (tzn. obserwujemy jego obraz z głębokiej prehistorii, ze stosunkowo niewielkim opóźnieniem względem „daty jego narodzin”).

Jednym z najbliższych kwazarów jest 3C 273. W modelu rozszerzającego się Wszechświata otrzymujemy dlań odległość około 3 mld lat świetlnych i integralną moc promieniowania przewyższającą ok. 10 tysięcy razy jasność galaktyki podobnej do naszej Drogi Mlecznej: 4×10^{40} W. Innymi słowy, kwazar 3C 273 w przeciągu jednej sekundy emituje tyle energii w formie fal elektromagnetycznych, ile nasze Słońce w ciągu 3,5 milionów lat. Maksymalne „osiągni” kwazarów są jeszcze o dwa rzędy większe.

Globalną ilość wyzwolonej w straszliwym kataklizmie energii, która w tym tempie jest wyświecana przez przeciętny kwazar w przeciągu jego domniemanego „czasu życia”, rzędu miliona lat, ocenia się na 10^{56} dżuli. Oszałamiające ... Aby zdać sobie sprawę z ogromu tej energii zauważmy, że jest ona równoważna energii nuklearnej ($0,007 mc^2$) około 10^{11} mas słonecznych, a więc odpowiada całkowitemu „spopieleniu” na hel tak potężnej galaktyki, jak nasza Droga Mleczna. Można się obawiać, że nie tędy droga do wytłumaczenia nieprzebranej obfitości energii kwazarów; prawdę mówiąc, problem ten odnosi się — choć nie aż tak drastycznie — również do eksplodujących galaktyk.

W tym miejscu kłania się nam starorzyski bożek o dwu twarzach, Janus. Nie bez powodu. Skonstatowaliśmy właśnie fakt uderzający: obok dobrze znanego wizerunku „kosmosu (Wszechświata) dżentelmeńskiego”, quasi-stabilnego, powoli ewoluującego, jaki został zaszczipiony w naszej wyobraźni przez nadchodzące zewsząd spokojne „programy” emisji termicznej, ujrzeliśmy budzącą grozę drugą twarz — Wszechświata wybuchowego, gwałtownego w swych działaniach impetyka, przemawiającego do nas z furją — burzą wysokoenergetycznych korpuskuł i różnorodnych promieniowań nietermicznych.

W razie eksplozyjnego uwolnienia całkowitej energii spoczynkowej (mc^2) w powyższej ilości potrzeby „paliwowe” są skromniejsze: ok. 10^{39} kg $\approx 5 \times 10^8 M_{\odot}$, co jest już „rozsądnym” ułamkiem (około 1%) masy przeciętnej galaktyki. Gwałtowny kolaps grawitacyjny (zapaść) niewiele tylko większej ilości masy ku ekstremalnym gęstościom zdaje się gwarantować wydajną, jak trzeba, produkcję energii elektromagnetycznej. Jeszcze bardziej atrakcyjnym „generatorem” fal elektromagnetycznych jest materia orbitująca w tzw. dysku akrecyjnym wokół osobliwego tworu, czarnej dziury, stopniowo wyhamowana (lepkością) i zwalająca się nań z prędkościami przyświełnymi. W skrajnych przypadkach sprawność takiego generatora energii może sięgać aż 40% całkowitej energii spoczynkowej, a więc może być kilkadziesiąt razy większa od najbardziej wydajnych procesów termojądrowych. Ów generator „spala” przy tym, z jednakową sprawnością energetyczną, wszelką materię — bez względu na jej skład chemiczny. Niesamowite ... W tej niezwykłej sprawie Czytelnik powinien sięgnąć do artykułu „Gwiazdy kuliste, gwiazdy płaskie, gwiazdy z dziurą” Bohdana Paczyńskiego w numerze 2/1980 *Delty*.

Podsumujmy na koniec, według domniemanego „stanu na dziś” hierarchię energetyczną aktywności, czasy elektromagnetycznego brylowania (czasy życia) jej kosztem i równoważną utratę masy spoczynkowej „obiektów nie z tego świata” (M. Zeilik: *The Evolving Universe*).

Obiekt	Moc promieniowania (waty)	Zakres widma	Czas życia (lata)	Produkcja energii globalnie (dżule)	Równoważna utrata masy spoczynkowej (kilogramy)
Supernowa	$10^{35} - 10^{37}$	optyczny	0,2	10^{43}	10^{26}
Jądro Drogi Mlecznej	10^{30} 10^{34}	X podczerwień	10^4 10^8	10^{41} 10^{51}	10^{34}
Galaktyki aktywne	10^{33} 10^{38} 10^{38}	γ optyczny podczerwień	10^8	10^{54}	10^{37}
Kwazary	10^{39} 10^{42} 10^{40}	optyczny podczerwień radiowy	10^6	10^{56}	10^{39}

Przypomnijmy, że $1 M_{\odot} = 2 \times 10^{30}$ kg.

Dzień dobry, kłania się Wam magister Pirożyński. Nareszcie. Tak, tak, i matematycy zączynają dbać o swoje interesy. Dostałem niedawno nowy numer *Journal of Recreational Mathematics* i znalazłem coś, co mnie bardzo ucieszyło: drobny artykuł (autor nazywa się D. R. Kaprekar) o liczbach Harshad. *Harshad* znaczy w sanskrycie *dający radość*. Autor artykułiku zajmuje się tymi liczbami od co najmniej kilkunastu lat. Są to liczby podzielne przez sumę swoich cyfr. Niektóre z nich widzimy w tabelce poniżej

suma cyfr	7	11	12	13	15	16	17	19	41
	7	209	48	247	195	448	476	874	177899
	70	308	84	364	285	484	629	1729	
	133	407	156	481		592	782		

Zauważamy wśród nich „liczbę Ramanujana” 1729, liczbą Harshad jest też 6174, o której pisaliśmy w nr 9/1980, a także palindromiczna 8009003009008.

Artykuł w JRM jest krótki i dobrze. Bo nie o to chodzi, żeby był długi. Kończy się bowiem tak: Serię swoich prac na temat liczb dających radość wyśle ci D. R. Kaprekar. Tamże inne interesujące odkrycia autora. Wyślij zamówienie i \$ 10,00.

W nadziei, że kolega odpali trochę zielonych za reklamę w poczytnej *Delcie*, podaję Wam, drodzy Czytelnicy, adres: D. R. Kaprekar, 311 Devlali Camp, India 422401.

Nareszcie!

Zamieszczony obok artykuł jest fragmentem pracy maturalnej autora, wykonanej w 1981 roku w XIV LO we Wrocławiu pod kierunkiem mgr Cecylii TERLIKOWSKIEJ. Praca ta została wyróżniona złotym medalem w dorocznym konkursie prac maturalnych z matematyki, organizowanym przez Polskie Towarzystwo Matematyczne i miesięcznik „Delta”. Autor wprowadza w niej pojęcie przystawania (kongruencji) liczby algebraicznej do układu innych liczb i stosuje je w różnych zagadnieniach teorii liczb, z których w artykule omówiono tylko jedno.

O kongruencjach wśród liczb algebraicznych całkowitych

Jarosław WRÓBLEWSKI

Oznaczmy przez A zbiór liczb algebraicznych całkowitych nad Z , tj. zbiór wszystkich pierwiastków równań

$$x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1x + c_0 = 0,$$

gdzie n jest liczbą naturalną, a współczynniki c_0, c_1, \dots, c_{n-1} są liczbami całkowitymi. Dla ustalonej liczby pierwszej p przez Q oznaczmy zbiór liczb postaci $a_1p + a_2\sqrt{p} + a_3\sqrt[3]{p} + \dots + a_n\sqrt[n]{p}$, $n \in N$, a_i — całkowite. Wprowadźmy następujące pojęcie przystawania liczby algebraicznej do układu innych liczb.

Definicja: Jeśli $a \in A$ oraz dla pewnych b_1, b_2, \dots, b_n jest $(a - b_1) \cdot (a - b_2) \cdot \dots \cdot (a - b_n) \in Q$, to zapiszemy $a \in (b_1, b_2, \dots, b_n) \pmod p$. O liczbach b_1, b_2, \dots, b_n w najogólniejszym przypadku można założyć, że są algebraiczne całkowite, ale my dla uproszczenia przyjmiemy, że są one liczbami całkowitymi. Układ liczb (b_1, b_2, \dots, b_n) nazwiemy układem reszt liczby a modulo p .

Nie każda liczba z A ma układ reszt, np. liczba $\sqrt{2}$ nie posiada układu reszt modulo 3. Niech więc S będzie zbiorem takich $a \in A$, że $a \in (b_1, b_2, \dots, b_n) \pmod p$ dla pewnych b_1, b_2, \dots, b_n całkowitych. O liczbach b_1, b_2, \dots, b_n można bez szkody założyć, że są wybrane ze zbioru $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$, gdyż

$$a \in (b_1, b_2, \dots, b_n) \pmod p \Leftrightarrow a \in (b'_1, b'_2, \dots, b'_n) \pmod p, \text{ gdzie } b'_i \text{ jest resztą z dzielenia liczby } b_i \text{ przez } p.$$

Wtedy każdy element $a \in S$ ma podstawowy układ reszt modulo p , tj. taki układ reszt, że każdy układ reszt liczby a modulo p jest nadukładem tego układu. Układ podstawowy jest wyznaczony jednoznacznie. W układzie podstawowym (b_1, b_2, \dots, b_n) liczby b_1, b_2, \dots, b_n są różne.

Twierdzenie: Jeśli $a_1, a_2 \in S$ oraz $a_1 \in (b_1, b_2, \dots, b_n) \pmod p$ i $a_2 \in (d_1, d_2, \dots, d_k) \pmod p$, to:

- (1) $a_1 + a_2 \in (b_i + d_j) \pmod p$, gdzie przez $b_i + d_j$ rozumiemy układ złożony ze wszystkich sum $b_i + d_j$, gdzie $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k$,
- (2) $a_1 \cdot a_2 \in (b_i \cdot d_j) \pmod p$,
- lub ogólniej:
- (3) dla dowolnego wielomianu $W(x, y)$ o współczynnikach całkowitych mamy: $W(a_1, a_2) \in (W(b_i, d_j)) \pmod p$.

Wszystkie powyższe warunki mają uogólnienie na przypadek nie dwóch, a $m \geq 2$ liczb $a_1, a_2, \dots, a_m \in S$.

Jeśli a jest liczbą całkowitą i b jest resztą z dzielenia a przez p , to (b) jest podstawowym układem reszt liczby a modulo p .

A oto kilka przykładów kongruencji:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &\in (3, 4) \pmod 7, \text{ bo } (\sqrt{2}-3)(\sqrt{2}-4) = 7(2-\sqrt{2}) \\ \sqrt{2} &\in (5, 18) \pmod{23}, \\ \sqrt{3} &\in (7, 16) \pmod{23}, \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \sqrt{2} &\in (3, 4) \pmod 7, \\ \sqrt{2} &\in (5, 18) \pmod{23}, \\ \sqrt{3} &\in (7, 16) \pmod{23}, \end{aligned}} \right\} \text{stąd } \sqrt{2} + \sqrt{3} \in (2, 11, 12, 21) \pmod{23},$$

$$\begin{aligned} \sqrt{5} &\in (0) \pmod 5, \\ \sqrt{23} + \sqrt{2} &\in (0, 1, 6) \pmod 7. \end{aligned}$$

I na zakończenie przykład zastosowania wprowadzonych kongruencji:

Przykład: Liczba $a = (\sqrt{6} + \sqrt{19})^{1980} + (\sqrt{6} - \sqrt{19})^{1980}$ jest liczbą całkowitą. Znaleźć jej ostatnią cyfrę.

Rozwiązanie: $\sqrt{6} + \sqrt{19} \in (1) \pmod 2$, podobnie $\sqrt{6} - \sqrt{19} \in (1) \pmod 2$. Zatem $(\sqrt{6} + \sqrt{19})^{1980} \in (1^{1980}) \pmod 2$, czyli $(\sqrt{6} + \sqrt{19})^{1980} \in (1) \pmod 2$, a także $(\sqrt{6} - \sqrt{19})^{1980} \in (1) \pmod 2$. Stąd $a \in (0) \pmod 2$ tj. a jest parzysta. Ponadto $\sqrt{6} \in (1, 4) \pmod 5$, $\sqrt{19} \in (2, 3) \pmod 5$, $\sqrt{6} + \sqrt{19} \in (1, 2, 3, 4) \pmod 5$, skąd $(\sqrt{6} + \sqrt{19})^{1980} \in (1, 1, 1, 1) \pmod 5$, więc $(\sqrt{6} + \sqrt{19})^{1980} \in (1) \pmod 5$.

Podobnie $(\sqrt{6} - \sqrt{19})^{1980} \in (1) \pmod 5$ i $a \in (2) \pmod 5$. Na podstawie powyższych kongruencji otrzymujemy, że $10|a-2$, czyli a jest zakończona cyfrą 2.

Liczba $b = ((\sqrt{6} + \sqrt{19})^{1980} - (\sqrt{6} - \sqrt{19})^{1980}) \cdot \sqrt{6 \cdot 19}$ jest całkowita. Proponuję Czytelnikowi znaleźć jej ostatnią cyfrę.

Rozwiązanie zadania F 110.
Pływająca świeca z gwoździkiem jest ciałem niejednorodnym. W miarę wypalania się stearyny, średnia gęstość bryły wzrasta i zwiększać się musi jej zanurzenie. Nie oznacza to bynajmniej, że świeca wkrótce po zapaleniu zatoni. Wręcz przeciwnie, pływając, spala się prawie do końca. Zauważmy bowiem, iż „większe zanurzenie” oznacza wzrost stosunku objętości: części zanurzonej oraz całkowitej. Obie te wielkości w trakcie spalania maleją, a ich różnica, będąca miarą długości wynurzonej części świecy, zmienia się znacznie wolniej. Jeśli Czytelnik nie czuje się usatysfakcjonowany powyższymi jakościowymi wywodami, proponujemy aby przeprowadził odpowiednie rachunki. Po podstawieniu tablicowej wartości gęstości stearyny 0,9 g/cm³ okaże się, że świeca pogrąża się ok. dziesięciokrotnie wolniej niż skraca. Jeśli nawet teraz wyobraźnia odmawia posłuszeństwa, pozostaje ostateczny „sędzia” — eksperyment. W powyższych rozważaniach pominęliśmy efekt tworzenia się w podstawy płomienia nieckowatego wgłębienia. Jest to istotny czynnik przedłużający czas palenia się świecy.

Od odważnika i linijki do podstaw matematyki

Dr Andrzej PELC

Można bez przesady powiedzieć, że rozmaite pomiary towarzyszyły ludziom od początku istnienia cywilizacji. Mierzono zawsze długość sztuk płótna, pole powierzchni upraw, objętość płynów, wagę kruszców, kąty przy nawigacji i mnóstwo innych wielkości. Wiele jednak upłynęło czasu zanim dostrzeżono wspólne cechy przysługujące różnym typom miar. Najpierw zostały zauważone pewne rachunkowe zależności pomiędzy np. długością i polem: zdano sobie sprawę z tego, że kwadrat o długości boku 2 jednostki ma zawsze pole równe czterem jednostkom kwadratowym. Nie tędy jednak wiodła droga do zrozumienia, co takiego łączy powiedzmy długość, pole i objętość, co upoważnia do nazwania pierwszej *miarą wielkości liniowych*, drugiego *miarą wielkości płaskich* a trzeciej *miarą wielkości przestrzennych*.

Dopiero na przełomie XIX i XX wieku pojawiły się pierwsze sformułowania pojęcia miary. Zanim jednak podamy definicje spróbujmy zastanowić się nad owymi wspólnymi cechami długości, pola i objętości, które dały początek matematycznemu pojęciu miary.

Każdy bez trudu zauważy, że pomiar długości polega na przypisaniu pewnej liczby nieujemnej (z mianem) danemu zbiorowi punktów na prostej, np. odcinkowi lub sumie trzech odcinków. Tak właśnie postępujemy, gdy mówimy, że jakaś wstęga ma długość 2 metrów, a trzy inne wstęgi razem długość 11 metrów. Oczywiście fakt, że rozważamy prostą zamiast wstęgi jest już wynikiem pewnej idealizacji matematycznej, ale jakże daleka stąd jeszcze droga do prawdziwie „dojrzałego”, abstrakcyjnego pojęcia miary.

Zupełnie tak samo ma się rzecz z mierzaniem pola i objętości.

Tak więc można się zgodzić, że cechą wspólną rozważanych trzech pojęć jest to, iż są one funkcjami z pewnej rodziny podzbiorów przestrzeni odpowiednio jedno-, dwu- i trójwymiarowej w zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych. O jakich rodzinach podzbiorów mowa, o tym za chwilę.

Następna nietrudna obserwacja pozwala stwierdzić, że zbiorowi pustemu przypisana jest zawsze miara zero. Oto, gdy nie ma materiału, to jest go 0 metrów (centymetrów, kilometrów ...), gdy wypito piwo, to jest go 0 litrów (hektolitrow, metrów sześciennych ...). Tak więc umówmy się: miara przypisuje zbiorowi pustemu liczbę 0.

Kolejne spostrzeżenie stanowi z pewnością kluczowy krok przy definiowaniu miary. Otóż, gdy ja mam metr materiału na garnitur, a ktoś ma dwa metry, to razem mamy 3 metry pod warunkiem, że ani skrawek nie jest wspólny. Nie śmieście się Czytelnicy, że autor przypomina Wam reguły dodawania. W tym prostym przykładzie ukryta jest najważniejsza cecha miary: miara sumy dwóch zbiorów rozłącznych równa jest sumie ich miar.

Trzeba się jeszcze umówić, ile wynosi miara pewnego wzorcowego zbioru: odcinka $[0, 1]$ w przypadku prostej, kwadratu jednostkowego w przypadku płaszczyzny czy kostki jednostkowej w przestrzeni trójwymiarowej. Niech miara ta będzie równa np. 1. Przed podaniem pełnej definicji miary warto się zastanowić, dla jakich rodzin zbiorów będziemy ją określać. Z pewnością zarówno zbiór pusty, jak i cała przestrzeń musi do takiej rodziny należeć. Ponadto chcielibyśmy jeszcze móc dodawać miary, a więc suma dwóch zbiorów z przypisaną miarą powinna także znaleźć się w naszej rodzinie zbiorów mierzalnych. Wreszcie, gdy jakiś zbiór A ma określoną miarę, to jego uzupełnienie do całej

przestrzeni również „powinno” mieć określoną miarę, więc uzupełnienie A też musi być elementem rodziny zbiorów mierzalnych.

Rodziny o wymienionych przed chwilą własnościach nazywamy ciałami zbiorów.

Definicja 1. Ciałem zbiorów w n -wymiarowej przestrzeni euklidesowej E^n nazywamy rodzinę S jej podzbiorów o następujących własnościach:

1. $\emptyset, E^n \in S$; zbiór pusty i cała przestrzeń należą do S ,
2. Jeżeli $A, B \in S$, to $A \cup B \in S$,
3. Jeżeli $A \in S$, to $E^n - A \in S$.

Teraz możemy już podać definicję miary.

Definicja 2. Miarą (skończenie addytywną) w przestrzeni euklidesowej E^n nazywamy funkcję m określoną na ciele S podzbiorów tej przestrzeni, o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych nieujemnych rozszerzonym o ∞ (nieskończoność) i mającą następujące własności

- a) $m(\emptyset) = 0$; miara zbioru pustego wynosi 0,
- b) $m(K^n) = 1$; miara n -wymiarowej kostki K^n o boku 1 wynosi 1,
- c) jeżeli $A \cap B = \emptyset$, to $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$; miara sumy dwóch zbiorów rozłącznych jest równa sumie ich miar.

Dołączenie do wartości miary wielkości ∞ jest zabiegiem naturalnym; wszak „prawdziwa” długość prostej czy „prawdziwe” pole płaszczyzny to właśnie ∞ . Należy jednak wyjaśnić, jak będziemy rozumieć symbole $a + \infty$ i $\infty + \infty$. Otóż umawiamy się, że $a + \infty = \infty$ i $\infty + \infty = \infty$, a innych działań na symbolu ∞ nie wykonujemy.

Niektóre miary (a wśród nich długość, pole i objętość) mają ważną dodatkową cechę: miara zbioru równa jest mierze każdego zbioru z nim izometrycznego. Takie miary nazywają się *niezmiennicze*.

Przy badaniu własności miar istotne jest rozstrzygnięcie, na jakim ciele zbiorów mają być określone. Najmniejsze ciało składa się tylko z dwóch zbiorów: pustego i całej przestrzeni. Czujemy jednak, że to za mało. Rozważając np. miary na prostej chcielibyśmy umieć zmierzyć wszystkie odcinki. Miara niezmiennicza określona na najmniejszym ciele zbiorów zawierającym wszystkie odcinki nazywa się *miarą Jordana*. Taka miara istnieje i jest tylko jedna.

Naturalne wydaje się dążenie do definiowania miar na możliwie bogatych ciałach zbiorów, najlepiej na ciele wszystkich podzbiorów przestrzeni. W latach dwudziestych postawiono problem, czy można określić miarę niezmienniczą na wszystkich podzbiórach prostej (a także płaszczyzny, przestrzeni 3-wymiarowej itd.). Odpowiedź na to pytanie wynika z twierdzeń Hausdorffa i Banacha i jest twierdząca w przypadku prostej i płaszczyzny, a przecząca w przypadku przestrzeni trójwymiarowej i w większej liczbie wymiarów.

Inny zupełnie obraz otrzymamy, gdy wzmocnimy warunek c w definicji miary zastępując go warunkiem

c') dla dowolnego ciągu $A_n: n \in N$ parami rozłącznych zbiorów z rodziny S , $m(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$.

Napis $A_1 \cup A_2 \cup \dots$ oznacza sumę *ciągu zbiorów*, czyli zbiór składający się ze wszystkich elementów należących do któregośkolwiek ze zbiorów A_n ; $n \in N$. Równość oznacza, że albo wartość miary po lewej stronie jest skończona, a szereg po prawej stronie jest zbieżny i ma sumę równą tej wartości, albo obie strony równe są ∞ .

Oczywiście należy również zmienić warunek drugi w definicji ciała zbiorów zastępując go mocniejszym warunkiem

$2'$. jeśli $A_n \in S$ dla $n \in N$, to $A_1 \cup A_2 \cup \dots \in S$

Miary spełniające warunek c') nazywamy σ -addytywnymi, a ciała spełniające warunek $2'$ σ -ciałami. Najmniejsze σ -ciało zawierające wszystkie odcinki nazywa się σ -ciałem zbiorów

borelowskich. Istnieje jedyna miara σ -addytywna rozszerzająca miarę Jordana i określona na σ -ciele zbiorów borelowskich. Zwana jest ona miarą Lebesgue'a. Podobnie jak miara Jordana jest to miara niezmiennicza. Przy tym σ -ciało zbiorów borelowskich jest istotnym rozszerzeniem najmniejszego ciała zbiorów zawierającego odcinki. Można wykazać, że np. zbiór liczb wymiernych należy do pierwszego z nich, ale nie do drugiego. Jest on mierzalny w sensie Lebesgue'a, a niemierzalny w sensie miary Jordana; p. także artykuł W. Wojtyńskiego w *Delcie* 9/1979. W przypadku miar σ -addytywnych można wykazać, że nie istnieje taka miara *niezmiennicza*, określona na wszystkich podzbiorach prostej, płaszczyzny, przestrzeni, itd. bez względu na wymiar. Fakt ten był znany już na początku XX wieku. Wynika z niego w szczególności istnienie zbioru niemierzalnego w sensie Lebesgue'a.

Dążenie do zmierzenia jak najbogatszej rodziny zbiorów doprowadziło do sformułowania w latach trzydziestych następującego problemu, którego autorem jest wielki polski matematyk, Wacław Sierpiński: Czy istnieje maksymalne rozszerzenie niezmienniczej miary Lebesgue'a? Innymi słowy, czy istnieje niezmiennicza miara σ -addytywna, która na zbiorach borelowskich pokrywa się z miarą Lebesgue'a, ale której już nie można rozszerzyć do miary niezmienniczej mierzącej więcej zbiorów. Negatywna odpowiedź na to pytanie została uzyskana całkiem niedawno. Tak więc jeśli jakoś niezmienniczej miary σ -addytywnej określać na podstawie wielkości σ -ciała zbiorów, które można zmierzyć przy jej pomocy, to okazuje się, że nigdy nie dojdziemy do perfekcji w tym zakresie.

Porzucmy w tym miejscu rozważanie miar niezmienniczych i zajmijmy się zagadnieniem możliwości zdefiniowania jakiegokolwiek miary na ciele wszystkich podzbiorów przestrzeni euklidesowej. Jeśli nie uczynimy żadnych dodatkowych założeń, to taką miarę skonstruować niezwykle łatwo. Wybierzmy mianowicie jeden punkt przestrzeni i przypiszmy miarę 1 każdemu zbiorowi, do którego on należy, a miarę 0 pozostałym zbiorom.

Czytelnik sprawdzi bez trudu, że tak określona funkcja jest rzeczywiście miarą, a, nawet σ -addytywną. Analiza powyższego przykładu pokazuje, że aby problem miał większy sens, należy przynajmniej żądać, by miara każdego zbioru jednopunktowego była równa zeru (w naszym przykładzie tak oczywiście nie było). W ten sposób uściślony problem ma w dalszym ciągu odpowiedź twierdzącą dla przestrzeni euklidesowej o dowolnej ilości wymiarów (a więc w szczególności dla prostej, płaszczyzny i „zwykłej” przestrzeni).

Okazuje się natomiast, że to samo zagadnienie w przypadku miar σ -addytywnych jest bardzo trudne, tak trudne, że do dziś nie doczekało się jeszcze rozwiązania. Co więcej okazuje się, że sięga ono głęboko podstaw matematyki, mianowicie kwestii wyboru aksjomatyki. Wiadomo, że przy tej, którą matematycy powszechnie dziś stosują, nie można istnienia takiej miary σ -addytywnej udowodnić, niewykluczone natomiast, że uda się jej istnienie obalić. Byłoby to z pewnością bardzo doniosłe twierdzenie, a sformułowanie pytania wydaje się tak łatwe, że nic tylko sięgnąć po papier i długopis ... Ejże!

Problematyka, która została tu naszkicowana w najgrubszym zarysie wydaje się interesująca z szerszego, filozoficznego punktu widzenia. Zagadnienie miary, jak żadne chyba inne, pozwala prześledzić długą drogę, którą przebyła myśl ludzka od ściśle praktycznej działalności, jaką jest mierzenie, poprzez najprostsze ale już abstrakcyjne intuicje geometryczne, do stworzenia pojęć na wysokim stopniu abstrakcji i wreszcie w wyniku stawiania kolejnych pytań z nimi związanych — do badania fundamentów systemu dedukcyjnego. Droga ta wiedzie od miernictwa przez geometrię, teorię miary aż do podstaw teorii mnogości. Mógłby ktoś powiedzieć, że doszukiwanie się tego typu powiązań jest zabiegiem sztucznym, jednak rzut oka zarówno na historię rozwoju omawianej problematyki jak i wzajemne przenikanie się zagadnień leżących na styku kolejnych wymienionych dyscyplin upewnić może o istnieniu wspólnej, łączącej je nici.



Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 289. W wierzchołkach trójkąta ABC umieszczono masy równe długościom przeciwległych boków. Znaleźć środek ciężkości tego układu mas.

Rozwiązanie na str. 5.

M 290. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej m istnieje nieskończenie wiele niepodzielnych przez 10 liczb naturalnych n takich, że suma cyfr liczby n jest równa sumie cyfr liczby $m \cdot n$.

Rozwiązanie na str. 6.

M 291. Wykazać, że w dowolnym trójkącie ABC jest

$$h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \leq \frac{(a+b+c)^2}{4}$$

Rozwiązanie na str. 8.

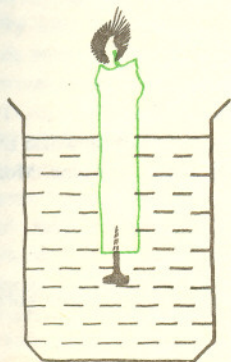
Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

F 110. W naczyniu z wodą pływa, obciążona u dołu gwoździem, świeca (patrz rysunek). Czy taka konstrukcja świecznika zapewnia długotrwałe palenie się świecy?

Rozwiązanie na str. 13.

F 111. Szczelną skrzynkę drewnianą napelniono wodą i następnie przestrzelono kulą karabinową. Skrzynka rozerwała się na drzazgi. Dlaczego?

Rozwiązanie na str. 3.



W wielu problemach spotykamy się z ciągami określonymi rekurencyjnie. Wyprowadzenie wzoru na n -ty kolejny wyraz takiego ciągu bywa często trudne. Dla niektórych takich ciągów możemy znaleźć formuły asymptotyczne, przybliżone. Wyprowadzimy pewne wzory dla ciągów danych rekurencyjnie w postaci

$$(1) \quad x_{n+1} = x_n + f(x_n);$$

gdzie o funkcji rzeczywistej f założymy, że $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ (granica istnieje i jest równa zero).

Posłużymy się znanym z analizy twierdzeniem Lagrange'a: jeżeli funkcja f ciągła w przedziale $[a, b]$ ma pochodną w przedziale (a, b) , to $f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(c)$, gdzie c jest pewnym punktem przedziału (a, b) .

Ciągi rekurencyjne mają wiele wspólnego z równaniami różnicowymi. Nasze zadanie rozwiążemy układając pewne równanie różnicowe i zastępując je równaniem różniczkowym.

Jeżeli zamiast x_n napiszemy $F(n)$, to wzór (1) przepisze się jako

$$(2) \quad F(n+1) = F(n) + f(F(n)).$$

Funkcja F jest określona dla liczb naturalnych, możemy ją jednak z dużą dowolnością przedłużyć na liczby rzeczywiste; w szczególności możemy ją tak dobrać, by była różniczkowalna. Wtedy z (2) i z twierdzenia Lagrange'a mamy

$$(3) \quad F'(n+\Theta) = f(F(n)), \text{ gdzie } 0 < \Theta < 1.$$

Z naszego założenia o funkcji f wynika, że różnice $f(b) - f(a)$ są małe dla dużych a i b . Jeśli zadbamy o to, by funkcja F między punktami całkowitymi miała „łagodny” przebieg, to będziemy mogli napisać przybliżoną równość

$$(4) \quad F'(n+\Theta) = F'(n),$$

a to prowadzi nas do jednorodnego równania różniczkowego

$$(5) \quad F'(x) = f(F(x)).$$

Rozwiążemy je łatwo metodą rozdzielania zmiennych. Przyjmując $y = F(x)$ otrzymujemy $dy/f(y) = dx$, skąd, całkując:

$$(6) \quad \int_{y_0}^y \frac{dy}{f(y)} = x - x_0.$$

Wartości x_0 i y_0 to nasze warunki początkowe; w oznaczeniach „ciągowych” x_0 jest numerem początkowego wyrazu ciągu, y_0 to wartość tego wyrazu. Przypominając sobie stare oznaczenia, pisząc $G(y)$ zamiast którejkolwiek funkcji pierwotnej funkcji $1/f(y)$ i przyjmując dla uproszczenia $n_0 = 0$ (tj. wyraz początkowy ma numer 0), mamy po bardzo łatwych rachunkach

$$(7) \quad x_n = G^{-1}(n + G(x_0)).$$

Oto i nasz przybliżony wzór na n -ty wyraz ciągu (1). Dokładność wzoru zależy od dokładności przybliżenia (3), tym lepszej im szybciej zmierza do zera funkcja f .

Przykład 1. Niech $x_0 = 25$, natomiast dla $n \geq 1$ $x_{n+1} = x_n + 1/x_n$. Równanie (4) dla tego ciągu

ma postać $\int_{y_0}^y \frac{dy}{1/y} = x - x_0$, skąd $G(y) = y^2/2$, tj. $x_n = \sqrt{2n + 625}$.

Przykład 2. Ciąg dany jest formułą rekurencyjną $x_{n+1} = x_n + 2/x_n^2$ z warunkiem początkowym $x_0 = 2$. Po krótkich obliczeniach dostajemy wzór asymptotyczny $x_n = \sqrt[3]{6n+8}$.

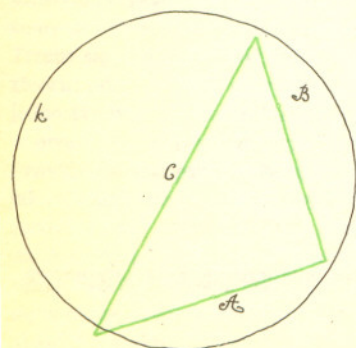
Dokładność przybliżenia obrazuje tabelka.

(po skrótach redakcji)



wyraz	wartość obliczona z formuły rekurencyjnej	wartość obliczona ze wzoru przybliżonego
x_0	2	
x_1	2,5	
x_5	3,469	3,362
x_{10}	4,177	4,082
x_{20}	5,119	5,040
x_{50}	6,810	6,753
x_{100}	8,514	8,472

Robert KOWAL



Zadania, których nie umiemy rozwiązać (III)

Dzisiaj chcieliśmy zaproponować Czytelnikom kolejne zadanie z geometrii. Wprawdzie znamy jego rozwiązanie, ale nie satysfakcjonuje nas ono w pełni, jako dość skomplikowane. Może Czytelnicy będą umieli podać rozwiązanie prostsze?

A oto zadanie.

Niech punkty A, B, C należą do koła k . Skonstruować trójkąt wpisany w okrąg tego koła, taki by jego boki przechodziły odpowiednio przez dane punkty A, B, C .

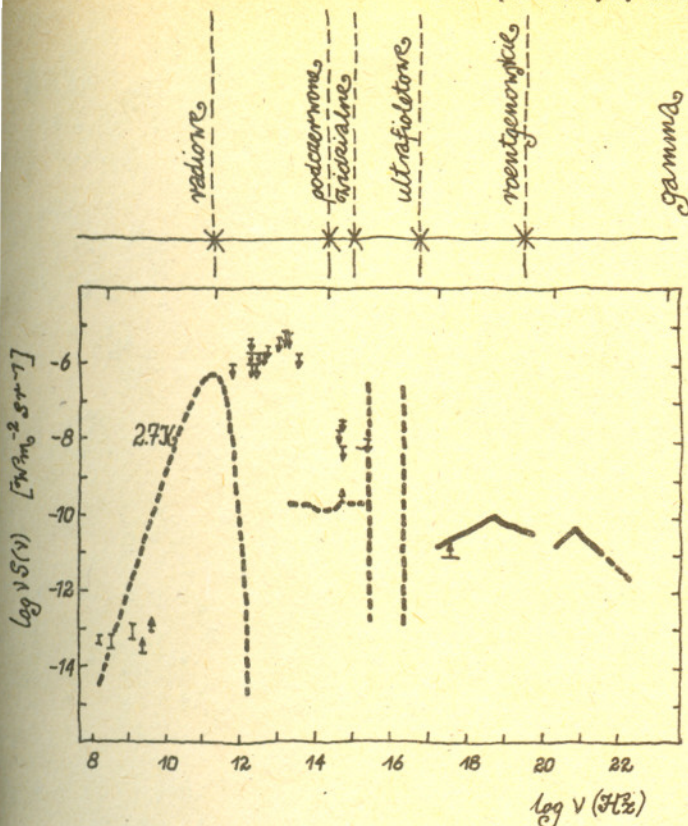
PROOF

Kiedy zdałem sobie sprawę, że tym odcinkiem rozpoczynam czwarty rok pisania „Patrz w niebo”, przemknęło mi przez myśl, że chyba opisałem już cały Wszechświat: „chyba nic już nie pozostało”. I ta myśl podsunęła mi kolejny temat: napisać o niczym — co zobaczymy, gdy spojrzymy w takim kierunku, w którym nie widać żadnej gwiazdy. Oczywiście, używając dużego teleskopu zobaczymy mnóstwo słabszych gwiazd, ale co między nimi?

Obserwując niebo z Ziemi stwierdzimy słabe świecenie tła. Dokładniejsza analiza tej emisji pozwoli nam stwierdzić, że jest to światło Słońca (ewentualnie odbite od Księżyca i planet) i gwiazd rozproszone w atmosferze ziemskiej i w pyłe międzyplanetarnym. Zapytajmy jednak, czy stwierdzimy jakiegokolwiek świecenie nieba „samo z siebie” po uwzględnieniu tych efektów. W promieniach widzialnych nie prowadzono dotychczas obserwacji spoza atmosfery ziemskiej (z satelitów). Może więc ucieknijmy się do porównania z zakresami fal już dostępnymi badaniami. Chodzi o promieniowanie radiowe (atmosfera przepuszcza, Słońce niewiele przeszkadza) i rentgenowskie (obserwacje satelitarne). Obserwacje w obu tych zakresach dają jakościowo inne wyniki. W dziedzinie fal radiowych (od ok. 1 mm do ok. 1 m) obserwujemy autentyczne promieniowanie tła — promieniowanie Plancka (o temperaturze 2,7 K) będące pozostałością (i dowodem?) Wielkiego Wybuchu (zobacz *Delta* 4/1981).

Zanim przeprowadzono pierwsze obserwacje rentgenowskie, uważano, że jeśli zaobserwuje się jakiegokolwiek promieniowanie tła w tym zakresie, będzie to albo emisja pochodząca od rozgrzanego gazu międzygalaktycznego (o ile taki istnieje) albo promieniowanie spowodowane przez zderzenia fotonów radiowego promieniowania relikтового (wspomnianego wyżej) z bardzo szybkimi elektronami wyrzucanymi z jąder niektórych galaktyk. Rzeczywiście zaobserwowano promieniowanie rentgenowskie, ale już w 1979 roku okazało się, że bardzo ważnym składnikiem takiego rozmytego promieniowania (a może jedynym?) jest promieniowanie wielu indywidualnych kwazarów, aktywnych jąder galaktyk, obiektów typu BL Lac itp, będących poniżej progu detekcji, ale razem sumujących się w mniej więcej jednolite tło. Analiza ich liczebności potwierdza tę hipotezę oraz pozwala ocenić, że w zakresie fal widzialnych promieniowanie miliardów niewidocznych obiektów pozagalaktycznych, m.in. z tzw. aktywnymi jądrami, będzie najistotniejszym składnikiem „tła optycznego”.

mgr Tomasz CHLEBOWSKI



Widmo elektromagnetyczne tła pozagalaktycznego. Symbol 2,7 K oznacza promieniowanie reliktowe, dwie pionowe kreski wyznaczają zakresy częstotliwości niedostępnych obserwacjom ze względu na bardzo silne pochłanianie w Galaktyce

Taki sobie magiczny trójkąt

Ustawmy liczby naturalne po kolei, jak leci, w trójkąt. Co tu ciekawego? Popatrzmy. W dolnej ukośnej linii stoją, jak widać, kolejne kwadraty liczb naturalnych (i oto mamy dowód, że $1+3+5+...+2n-1=n^2$). Iloczyn dwu (a także i kilku) następujących po sobie liczb z każdego z rzędów zaznaczonych, poziomych bądź ukośnych, też jest w tym rzędzie (dlaczego?). Iloczyn skrajnych liczb z każdej z pionowych kolumn znajduje się w poziomym rzędzie odpowiadającym liczbie dolnej (a to czemu?). Ostatnie cyfry liczb ze środkowego poziomego rzędu to 1 3 7 3 1 i potem to się powtarza według tego samego wzoru (typ *ABCBA*). W wierszu wyżej mamy 2 6 2 0 0 (typ *ABACC*), w wierszu zaczynającym się od 4 obowiązuje ta sama zasada. Ile jest takich wzorków? W jakich wierszach się powtarzają? W środkowym rzędzie co trzecia liczba (począwszy od 3) jest podzielna przez 3, co siódma (zaczynając od 7) przez 7, co trzynasta przez 13 i tak dalej. A estetyczne desenie otrzymamy np. wymazując z naszego diagramu liczby podzielne przez, dajmy na to 3, 5, 8 lub w gruncie rzeczy dowolną inną liczbę. Zapewne jest jeszcze bardzo dużo interesujących własności tego trójkąta, utworzonego z kolejnych liczb naturalnych.

