

SPIS TREŚCI

NUMERU 2(98)

Poradnik dla cierpiących na <i>Cubitis magikia</i> Andrzej Pilitowski, Tomasz Weppo	str. 1
Katakлизmy we Wszechświecie (II) Doc. dr Bolesław Grabowski	str. 6
Długie ciągi Dr Zbigniew Sawoń	str. 8
Zadania, których nie umiemy rozwiązać	str. 11
Oddziaływanie promieniowania elektromagnetycznego z materią (I) Doc. dr Jerzy Ginter	str. 12
Zadania	str. 13
Patrz w niebo	str. 14
Klub 44	str. 14
Pierwsza teoria atomu Doc. dr Michał Świącki	str. 16

W następnym numerze:
Powierzchnia kryształu

„Delta”
matematyczno-fizyczno-astronomiczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny:
doc. dr Jerzy Bartke
doc. dr Andrzej Bączyński
doc. dr Bolesław Gleichgewicht
prof. dr Kazimierz Goebel
doc. dr Bolesław Iwaszkiewicz
doc. dr Tadeusz Iwiński
doc. dr Andrzej Januszajtis
doc. dr Tadeusz Jarzębowski
prof. dr Leon Jeśmanowicz
dr Henryk Kaczorek
prof. dr Marek Kuczma
mgr Andrzej Mąkowski
prof. dr Bohdan Paczyński
prof. dr Zdzisław Pawlak
prof. dr Arkadiusz Piekara
doc. dr Sławomir Ruciński
prof. dr Konrad Rudnicki
prof. dr Zbigniew Semadeni
doc. dr Grzegorz Sitarski
prof. dr Jan Stankowski

doc. dr Kazimierz Stepien
prof. dr Mieczysław Subotowicz
doc. dr Stefan Turnau
prof. dr Jerzy Wdowczyk
doc. dr Andrzej Woszczyk
prof. dr Janusz Zakrzewski —
wiceprzewodniczący
prof. dr Wojciech Żakowski —
przewodniczący

Redaguje Kolegium w składzie:
mgr Tomasz Chlebowski
mgr Maciej Jędrzejczak
dr Marek Kordos — red. nac.
dr Tomasz Kwast — z-ca red. nac.
dr inż. arch. Jacek Mazur — ilustracje
dr Krzysztof Piasota — red. techn. graf.
dr Michał Szurek
mgr Krystyna Szypcio — sekr. red.
doc. dr Michał Świącki — z-ca red. nac.

Adres Redakcji
ul. Hoża 69 pok. 151,
00-681 Warszawa

Zakład Narodowy im.
Ossolińskich — Wydawnictwo
Wrocław, Oddział w Warszawie
Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.
wyd.; 2,50 ark. druk.;
papier offsetowy V kl. 70 g. 61 cm
Wydrukowano w Drukarni im.
Rewolucji Październikowej
Warszawa, ul. Mińska 65
Nr zam. 997/12/81 Z-82

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

Institucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTA”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych P.A.N.
Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówkową, przelewem
lub za zaliczeniem pocztowym.
Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Konto PKO I OM W-wa 1531-912
w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław
w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa
w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7
00-068 Warszawa, Poland or with
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68,
Bundesrepublik Deutschland.
— Earls Court Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain,
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia

Autorzy artykułu są uczniami III klasy XIV Liceum imienia Klementa Gottwalda w Warszawie. W otrzymanym tekście poczyniliśmy, za wiedzą autorów, znaczne skróty.

Andrzej PILITOWSKI, Tomasz WEPP0

Kilka lat temu przywleczono z Węgier do Stanów Zjednoczonych wysoce zaraźliwą chorobę. Z szybkością epidemii opanowała ona kontynent amerykański, a jej zarazki rozniesiono samolotami, statkami i samochodami po całym świecie. Choroba nie wybiera: atakuje młodych i starych, biednych i bogatych, grubych i chudych, urzędników i robotników. Nie zwraca uwagi nawet na przynależność związkową delikwenta. Oto jak ją opisuje w *Scientific American* (marzec 1981) Douglas R. Hofstadter:

Cubitis magikia, n. Poważny rozstrój umysłowy, połączony z jednoczesnym swędzeniem końców palców. Ulgę przynosi jedynie dłuższy kontakt z wielokolorową kostką pochodzenia węgierskiego i japońskiego. Objawy utrzymują się nawet przez wiele miesięcy. Wysoce zaraźliwe!

Oto kilka przypadków (wg tygodnika *Time*). Kathleen Ollerenshaw z Manchester musiała poddać się operacji ścięgnięcia kciuka po zbyt długim wieczorze z kostką. Pewna Niemka podarowała kostkę swemu mężowi i po kilku miesiącach wystąpiła o rozwód, gdyż mąż przestał odzywać się do niej i do gości, a wieczorami był tak wyczerpany kręceniem sześciannikami, że na przytulenie żony nie miał już siły ani ochoty.

Zarazek wywołujący tak przedziwne dolegliwości ma kształt sześciannika, podzielonego na mniejsze, zwykle centymetrowe sześcianniki i pokolorowane na 6 jaskrawych kolorów tak, że każda ściana jest innego, jednolitego koloru. W tej fazie zarazek jest jeszcze niegroźny. Cała kostka jest jednak tak skonstruowana, że każda z jej warstwek może obracać się względem pozostałych (rys. 1). Przemysłne rozwiązanie techniczne widzimy obok.

Obróćmy kilka razy warstwami sześcianników tak, żeby nie pamiętać, jak to robiliśmy (to ostatnie jest zresztą bardzo łatwe). I oto zadanie, o które chodzi w całej tej zabawie:

Wrócić do położenia wyjściowego

Na podstawie takiego opisu chyba każdy zlekceważy i zadanie i niebezpieczeństwo wpadnięcia w groźny nałóg. Przyznaje to dziś wielu nieszczęśliwych. Czytelnika, który ma możliwości uniknięcia kontaktu z kostką, prosimy

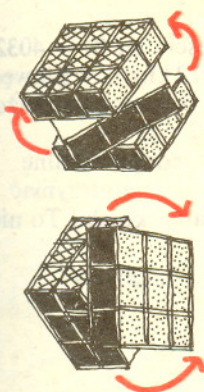
UWAŻAJ! NIE BIERZ TEGO NIGDY DO RĘKI!

Pozostałym chcemy choć trochę ulżyć w ich cierpieniach i podamy sposób układania kostki.

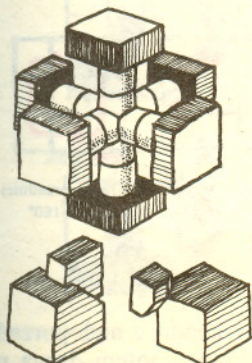
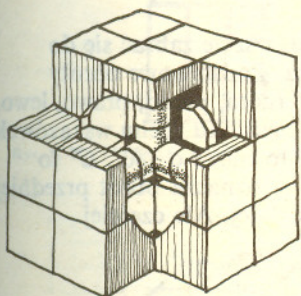
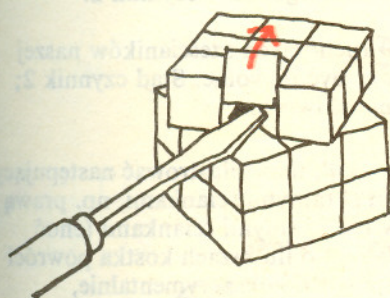
Idea magicznej kostki znana była już przed wojną, ale skonstruował kostkę dopiero **Ernö Rubik** w 1975 roku. W rok później niezależnie od Rubika skonstruował ją i opatentował w Japonii Terutoshi Ishige. Dlatego niektórzy, bardzo nieliczni zresztą, używają nazwy: kostka węgiersko-japońska. Początkowo dość droga (około 20 dolarów) staniała obecnie w USA do przyzwoitej ceny 5—6 dolarów i będzie z pewnością jeszcze tanieć. Z samej budowy kostki wynika kilka wniosków:

- 1) środki ścian będące po przeciwnych stronach kostki nigdy nie będą środkami sąsiednich ścian,
- 2) konfiguracja środków ścian jest niezmienna — tzn. jeśli umówimy się że np. środek biały ma leżeć na górze, niebieski na dole, żółty z prawej itd. — to nie zmieni się to w trakcie całej zabawy,
- 3) kolor ściany jest taki sam, jak kolor jej środkowego klocka (uwaga banalna, ale ważna, bo wynika z niej, że przyszłe ułożenie każdego klocka jest już wiadome od początku),
- 4) obroty środkowych plasterków kostki nie zmieniają położenia klocków narożnych. Łatwo ustawić 3, 4, 5 czy 6 jednobarwnych klocków na jednej ścianie. Od razu widzimy, na czym polega podstawowa trudność w naszej zabawie:

Jak wstawić kolejny klocek na swoje miejsce (określone, jak widzieliśmy, od samego początku) nie zmieniając położenia klocków już dobrze ustawionych.



Rys. 1. Kostka Rubika.



Rys. 2. Wewnętrzny mechanizm kostki.

Warto może zdać sobie sprawę z algebraicznego podkładu zabawy.

Przekształcenia naszej kostki tworzą grupę, każde przekształcenie jest złożeniem pewnej liczby elementarnych obrotów każdej z dziewięciu warstw. A zatem grupa przekształceń naszej kostki ma 9 generatorów: obroty warstw o 90° . Liczbę generatorów można zmniejszyć do 3: jeden obrót np. prawej ścianki i dwa obroty sztywne całej kostki. Do opisu wszystkich (pozycji) ruchów kostki wystarczyłyby więc tylko trzy symbole.

Ile jest tych pozycji? Obliczmy: 8 naroży można rozmieścić na $8! = 40320$ sposobów, każdy w jednej z trzech możliwych orientacji, 12 klocków krawędziowych w przeznaczonych na nie komórkach na $12! = 479001600$ sposobów, każdy znów zorientowany na dwa sposoby. Łącznie daje to $8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12} = 519024039293878272000$ ustawień. Zrobiliśmy jednak niedopuszczalne założenie, że każdy teoretycznie możliwy układ klocków da się otrzymać z wyjściowego monokolorowego bez potrzeby ... rozbierania kostki. To nieprawda.

Możliwych do zrealizowania układów jest 12 razy mniej, tj. „tylko”

43252003274489856000

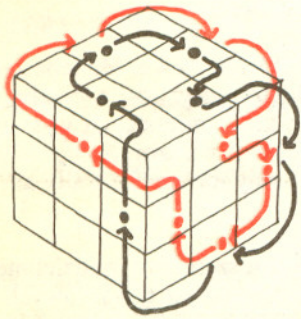
To i tak dość dużo. Gdyby cała ludzkość, od noworodków do starców bawiła się kostkami układając, powiedzmy 1 pozycję na sekundę, to wszystkie układy wyczerpano by po... no, dość długim czasie.

Czynnik 12, redukujący liczbę wszystkich teoretycznie możliwych ustawień bierze się z ograniczeń wiążących orientacje poszczególnych klocków: siedem klocków narożnych może być; będąc na swoich miejscach — zorientowanych dowolnie, orientacja ósmego jest już wyznaczona. Stąd czynnik 3. Podobnie orientacja 11 klocków krawędziowych wyznacza orientację dwunastego, stąd czynnik 2.

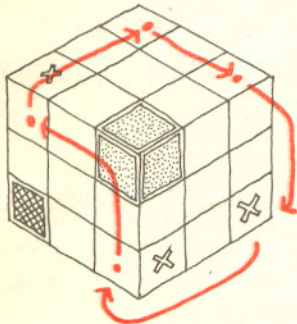
Wreszcie gdy ustawimy dowolnie 18 spośród 20 ruchomych sześcianików naszej kostki, położenie pozostałych dwóch już nie może być dowolne. Stąd czynnik 2; łącznie daje to $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ typów ustawień niemożliwych.

Jak bardzo skomplikowana jest nasza grupa „kostki”, może ilustrować następujący przykład. Wykonajmy dwa obroty prostopadłymi skrajnymi ściankami, np. prawą i górną. Wykonajmy następnie dwa obroty znów tymi samymi ściankami (choć rozkład kolorów już się zmienił na nich), i tak dalej. Po ilu razach kostka powróci do położenia wyjściowego? Cierpliwi mogą to sprawdzić eksperymentalnie, dociekliwi odczytać wynik z rysunku 3.

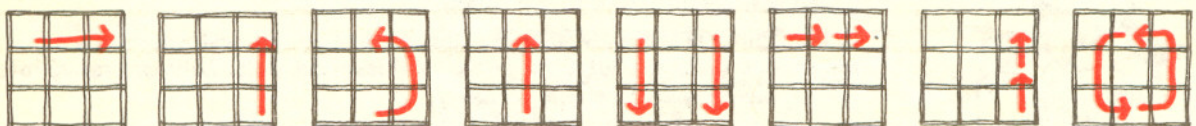
Po tych rozważaniach bardziej teoretycznych możemy nareszcie zabrać się do właściwej zabawy: wstawiania klocków na swoje miejsca. Podstawowe obroty naszej kostki będziemy oznaczać przez G, F, P, L, D i T (góra, przód, prawo, lewo, dół i tył). I tak G oznacza obrót górnej ściany o 90° w kierunku ruchu wskazówek zegara, G^{-1} to obrót tej ściany w przeciwną stronę, G^2 to obrót o 180° , G^4 to przekształcenie tożsamościowe, G^5 to G itd. Podobnie F oznacza obrót przedniej ściany o 90° zgodnie z ruchem wskazówek zegara i tak dalej. Ale częściej będziemy posługiwać się pismem obrazkowym:



Rys. 3a. Wędrowka klocka krawędziowego przy kolejnym wykonywaniu przekształcenia PG (obróć prawej ścianki a potem górnej).

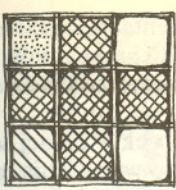


Rys. 3b. Wędrowka sześcianika narożnego przy kolejnych potęgach $PG, (PG)^2, (PG)^3$. Lewy dolny klocek nie zmienia położenia ani orientacji, prawy górny zostaje na miejscu, ale za każdym razem obraca się o $\frac{1}{3}$ obrotu, prawy dolny po 5 ruchach (tj. przy $(PG)^5$) wraca w położenie wyjściowe obrócony o $\frac{1}{3}$ obrotu.



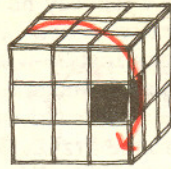
Rys. 4. Obrót górnej ściany o 90° (G^{-1}) Obrót prawej ściany o 90° do góry (P) Obrót przedniej ściany o 90° Obrót środkowej ściany Obrót środkowej ściany (lub dwóch skrajnych) Obrót górnej ściany o 180° Obrót prawej ściany o 180° Obrót przedniej ściany o 180°

Algorytm, który tu opiszemy, składa się z kilku faz, w każdej z nich porządkujemy co innego. Ułożymy najpierw dolną (np. niebieską) ścianę, potem drugą poziomą warstwę, wreszcie trzecią.

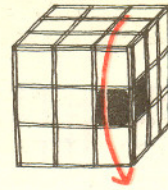


Faza I. Ułożenie klocków krawędziowych dolnej warstwy. Jej celem jest otrzymanie na dolnej ścianie krzyża jak na rysunku 5. Ściągnąć klocek na dolną ścianę ze środkowej warstwy jest bardzo łatwo, na przykład tak jak na rysunku 6.

Rys. 5.

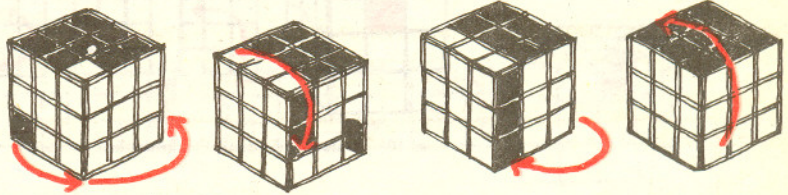


Rys. 6a.



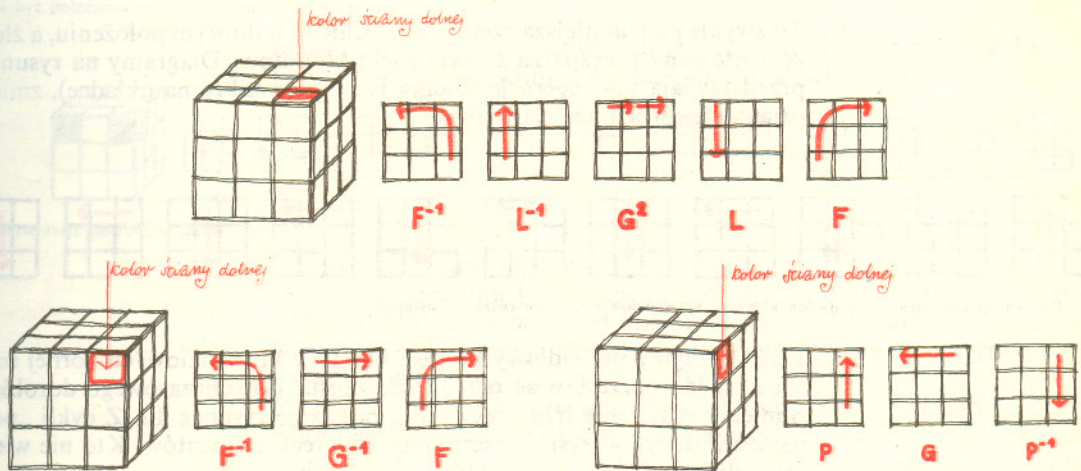
Rys. 6b.

Starajmy się to zrobić tak, by klocki od razu układały się w przypisanych im miejscach. Nie opiszemy też, jak ściągnąć sześciennik na dół z górnej warstwy. Zostawiamy to do samodzielnego przemyślenia. Na tym etapie mamy jeszcze dużo swobody.



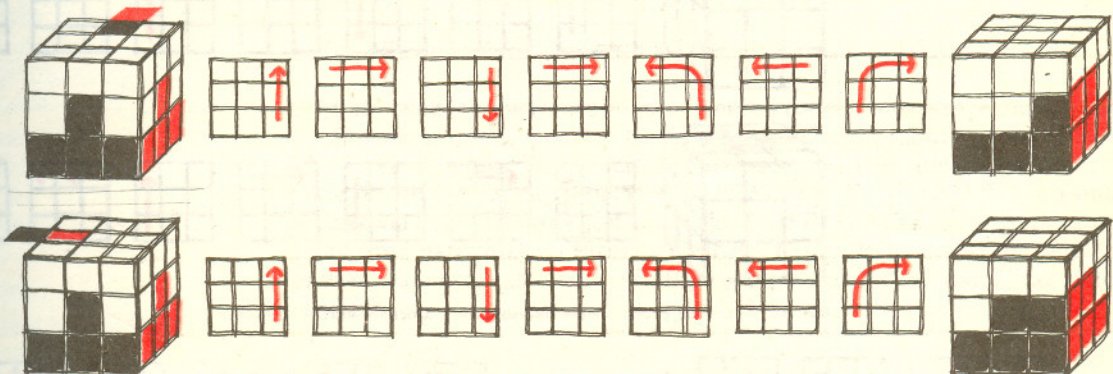
Rys. 7

Faza II. Ustawienie narożników dolnej warstwy. Dokonujemy tego, jak pokazuje rysunek 8, dobierając jeden z przedstawionych tam wariantów w zależności od orientacji wstawianego klocka. Najlepiej jednak po prostu opracować własny system ustawiania jednej ściany.



Rys. 8. $F^{-1}L^{-1}G^2LF$, $F^{-1}G^{-1}F$ oraz PGP^{-1} .

To nietrudne, a pozwala nabrać nieco obycia z kostką. Tak czy owak przed nami pierwszy sukces: gotowa pierwsza ściana. Po odpoczynku ruszamy dalej.

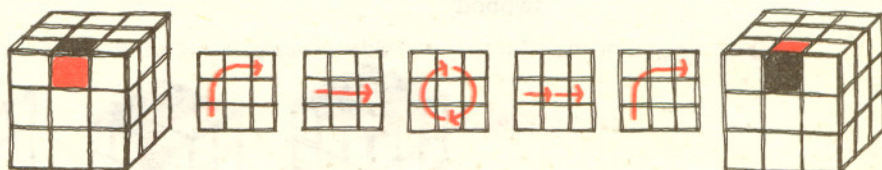


Rys. 9. Układanie drugiej warstwy kostki.

Faza III. Układanie środkowej warstwy klocków. Rysunek 9 pokazuje jak sprowadzić klocek z górnej warstwy na właściwe miejsce.

Jak i poprzednio, wybór jednego z wariantów zależy od orientacji sześcianika. Spuszczanie go z innych miejsc górnej ściany sprowadzamy do przypadków przed chwilą opisanych przez odpowiedni obrót górnej ściany. A jeżeli krawędziowy klocek drugiej warstwy jest w tej warstwie, ale na złym miejscu lub źle zorientowany, to należy na jego miejsce wstawić dowolny klocek z górnej ściany — wtedy ten zły wyskoczy na górę. Ta faza mija szybko, bo do wstawienia mieliśmy co najwyżej cztery klocki. Przed nami gotowe już dwa piętra kostki. Jeszcze tylko jedno, ale pracy zostało więcej niż trzecia część, bo teraz najtrudniej. Wykonywane przekształcenia nie mogą nam przecież zburzyć dotychczasowych wyników.

Faza IV. Ułożenie krzyża (z klocków krawędziowych) na górnej ścianie. Zaczynamy od obrócenia tych klocków „brzuszkem ku górze”, tj. tak, by ich górny kolor znalazł się na górnej ścianie. Aby tego dokonać, wystarczy znać dwa układy ruchów. Zmieniają one jednocześnie orientację dwóch klocków krawędziowych. Dokonują też innych zmian na górnej ścianie, ale to na razie nie szkodzi (rys. 10a i 10b).

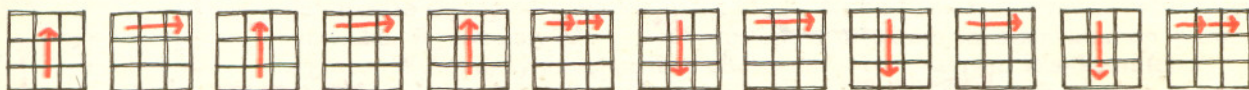


Rys. 10a. Zmiana orientacji klocków górnej ściany.



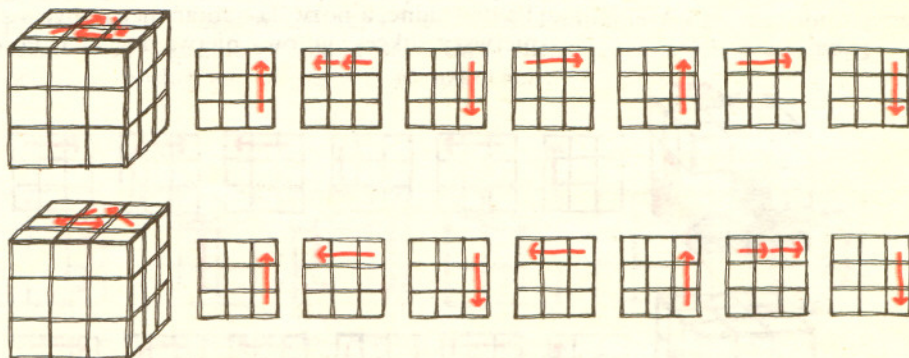
Rys. 10b. Zmiana orientacji klocków górnej ściany (wariant II).

To zwykle najtrudniejsza część pracy. Klocek w dobrym położeniu, a źle zorientowany przysparza zwykle wielu kłopotów. Diagramy na rysunku 11 przedstawiają tzw. **operację Rubika** (widoczną także na okładce), zmieniającą orientację dwóch sześcianików.



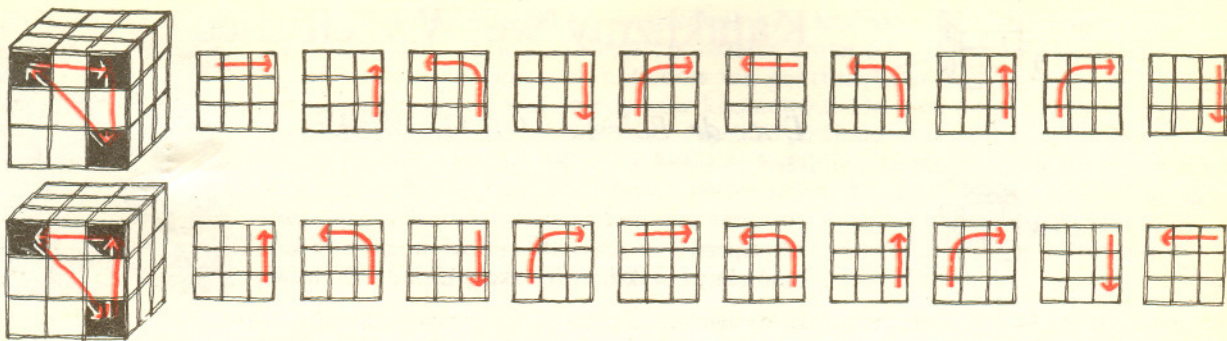
Rys. 11. Operacja Rubika zmienia orientację dwóch klocków krawędziowych, a nie rusza pozostałych.

Teraz ułożymy prawidłowy krzyż z klocków krawędziowych górnej ściany. Musimy je poprzestawiać tak, by nie zepsuć dotychczasowego dorobku. Jak zamienić cyklicznie trzy sześcianiki, pokazuje rysunek 12. Z cykli „po trzy” możemy złożyć wszystkie permutacje czterech elementów. Kto nie wierzy, niech sprawdzi.



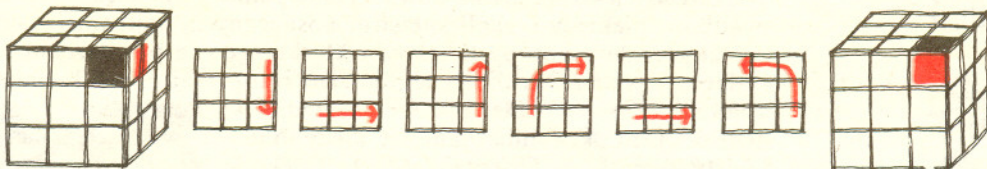
Rys. 12. Cykliczne przestawienie narysowanych klocków krawędziowych.

Trzeba więc obrócić górną ścianę tak, aby dokładnie jeden klocek był na swoim miejscu i następnie cyklicznie zamienić trzy pozostałe. Jeżeli przy obrotach górnej ściany zawsze ustawiają się nam dwa klocki na swoich miejscach (albo żaden), należy przestawić dowolne trzy i próbować jeszcze raz.



Rys. 13. Cykliczna zmiana narożników.

Uff! Już blisko. Teraz tylko ustawiamy narożniki, znów cyrkulując po trzy (rys. 13) i orientujemy je. Przekształcenie $P^{-1}DPFDF^{-1}$ (rys. 14) przekręca narożnik, ale dokonuje też wielu innych zmian. Dlatego trzeba zmieniać jednocześnie orientację 2 klocków: (rys. 14a i 14b).

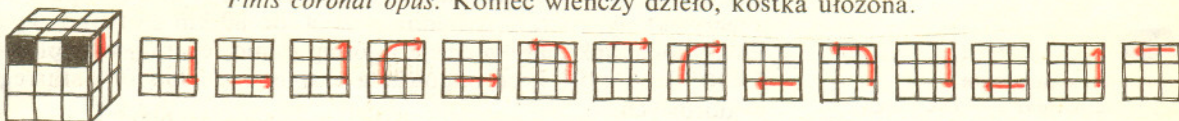


Rys. 14a. Zmiana orientacji narożnika...



Rys. 14b. ... musi być połączona ze zmianą orientacji innego.

Jednoczesny obrót sąsiednich narożników przedstawia rysunek 15. *Finis coronat opus*. Koniec wieńczy dzieło, kostka ułożona.



Rys. 15. Zmiana orientacji sąsiednich narożników.

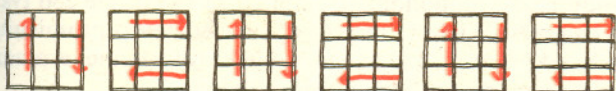
Czy są jeszcze inne algorytmy?

Oczywiście, bez liku (patrz np. „Przekrój” nr 1897 (1981) lub „Młody Technik” 1 (1982)). Można zaczynać od układania narożników albo od środkowych klocków. Osoby, które już umieją ułożyć całą kostkę, mają prawo do tytułu Kubisty, a jeżeli wyślą 2 dolary (+opłata na przesyłkę) do firmy produkującej kostki (*Ideal Toy Corporation, 184—10 Jamaica Avenue, Hollis, NY 11423, USA*), otrzymają śliczną kolorową broszurkę, na kredowym papierze, z ciekawymi informacjami, a w załączeniu formularz do świadectwa Kubisty. Po wypełnieniu formularza firma przyśle im bardzo piękny certyfikat.

Czy na ułożeniu kostki kończy się zabawa? Zdecydowanie nie. Nauczcie się układać inne wzory. A oto poważniejsze pytania:

1. Jak udowodnić, że algorytm zawsze skutecznie zadziała?

2. W ilu ruchach gwarantuje on ułożenie kostki? Najszybsze znane dziś dochodzą do 50, wiadomo, że poniżej 17 zejść się nie da, a przewiduje się istnienie 22—23-ruchowego. Wymyślcie własne operacje, przyspieszające algorytm, albo takie, które łatwiej zapamiętać (np. $FPFPPF^{-1}F^{-1}P^{-1}F^{-1}P^{-1}$, co ona przestawia?). Pożyteczna jest operacja $F^2PFP^{-1}FPF^2P^{-1}$, przyspieszająca ustawienie narożników. Prościutkie $LP^{-1}F^2L^{-1}PG^2$ i odwrotne $G^2P^{-1}LF^2PL^{-1}$ przestawiają trzy sześciangi środkowego plasterka i tak dalej i tak dalej. Miłego kręcenia.



Rys. 16. Ładny wzorek.



Rys. 17. Co otrzymamy wykonując tę operację na ułożonej kostce?

Kataklizmy we Wszechświecie (II)

Doc. dr Bolesław GRABOWSKI

W poprzednim artykule omówione zostały kataklizmy na skalę ziemską — tu omówimy kataklizmy na skalę Układu Słonecznego.

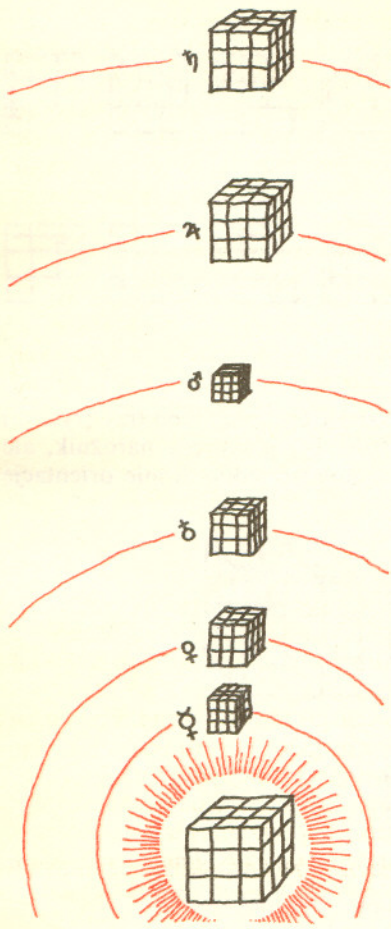
4. Wielkie bombardowanie meteorytowe. Miało ono miejsce we wczesnych fazach formowania się Układu Słonecznego, gdy ilość „nieorganizowanej” materii i jej wychwyty polami grawitacyjnymi rozwijających się globów planetarnych były jeszcze znaczne. Co potężniejsze bryły — a mamy podstawy sądzić, iż zdarzały się między nimi prawdziwe masywy skalne — zostały w zasadzie wymiecione z przestrzeni międzyplanetarnej w ciągu pierwszych kilkuset milionów lat istnienia Układu. Większość z nich spadła na powierzchnie planet i ich księżyców. Ślady takich upadków, niekiedy o skali katastrof kosmicznych, najtrwalej zachowały „niezwiązane” skorupy Księżyca i Merkurego; na powierzchniach Wenus, Ziemi i Marsa najstarsze struktury tektoniczne o urozmaiconych kształtach zatarła erozja atmosferyczna. Ostatnie „wielkie uderzenie” w skorupę Srebrnego Globu miało miejsce przed ok. 4 miliardami lat, kiedy to impet spadającego meteorytu uformował kolisty basen Mare Orientale (Morza Wschodniego) o średnicy 620 km i wypiętrzył dookólne wały górskie o średnicy 900 km. Wybite wówczas rumowisko skalne rozpięchło się balistycznym lotem w promieniu 3000 km, a niekłą krateru wypełniła magma skał stopionych przez uderzenie. Objętość tego płynnego stopu — jak się ocenia — była ogromna: od 75 000 do 225 000 km³! (Mutch i inni). Największa jednak katastrofa (z „zarejestrowanych” w skorupie Księżyca) wydarzyła się 50 do 80 mln lat wcześniej. W jej wyniku powstało morze stopionych skał i gruzu, otoczone kolistym łańcuchem górskim o promieniu 1000 km — *Mare Imbrum* (Morze Deszczów). Krater uderzeniowy miał średnicę 680 km. Przypuszczamy, iż w Księżyc uderzył wtedy asteroid o średnicy od 30 do 80 km z prędkością 15—30 km/s. Prosty rachunek daje na dolną i górną granicę energii wyzwolonej w zderzeniu: 5×10^{25} J i 5×10^{27} J, co odpowiada eksplozji 10^8 lub 10^{10} stumegatonowych bomb wodorowych.

Podobnych rozmiarów, a nawet większe niecki uderzeniowe znajdujemy w skorupach Merkurego (Równina Żaru) i Marsa (Hellas). Wstępne dane radiolokacyjne wskazują na istnienie co najmniej jednego tak wielkiego tworu na Wenus (Basen Północny); w zestawieniu z wyjątkowo gęstą, a więc i wyjątkowo silnie hamującą a przy tym erozyjną tutejszą atmosferą, jego rozmiary $\sim 1500 \times 1000$ km², są imponujące i zgoła trudne do wytłumaczenia.

Na Ziemi nie ma śladów najcięższego, a więc najdawniejszego obstrzału meteorytowego — wymazała je erozja atmosferyczna, ruchy górotwórcze, itp. Widoczne są jedynie nieliczne i stosunkowo niewielkie kraterki wybite w skorupie ziemskiej „współcześnie” — przed tysiącami, co najwyżej milionami lat.

Atmosfera ziemska jest przeszkodą trudną do sforsowania przez małe i pośrednie bryły meteorytowe — w wyniku tarcia zostają one w całości lub w większości stopione, wyparowane i wyhamowane. „Danina”, jaką płacą bryły bardziej masywne, jest w ich budźecie energii procentowo mniejsza i przed ich bombardowaniem nie mamy skutecznej tarczy ochronnej. Np. średniomasywny, tysięc-tonowy asteroid, który wchodzi do atmosfery z drugą prędkością kosmiczną, u jej podstawy ma masę ~ 300 t i prędkość ~ 5 km/s; w starciu z atmosferą wytraci więc $\sim 95\%$ swej pierwotnej energii kinetycznej. Rozproszyła się ona w formie ciepła, fal uderzeniowych i podmuchu, jednak utrzymany do końca ładunek energii jest nadal zatrzważający, bowiem jest równoważny ładunkowi 1000 t trotylu.

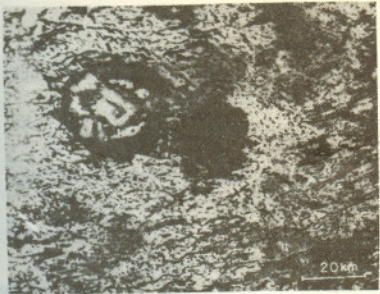
Ocenia się, że słynny arizoński krater meteorytowy w pobliżu Flagstaff (Diabelski Kanion, średnica 1300 m, głębokość 170 m) powstał około 22 tys. lat temu w wyniku uderzenia żelaznej bryły asteroidu o prawdopodobnej średnicy 73 m i masie 250 tys. ton, z prędkością końcową ~ 16 km/s. Większy meteoryt, powiedzmy o promieniu 0,7 km i masie $1,5 \times 10^{12}$ kg, taki jak asteroid Ikarus, nasz bliski (orbitalnie) a przez to niebezpieczny „sąsiad”, dokonałby nieporównywalnie groźniejszych spustoszeń (górne wartości poudzeniowego szoku — w ciśnieniu ~ 5 mln atmosfer,



Rozwiązanie zadania F 108.

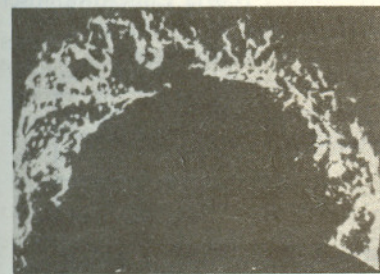
Gdy czysto oporowy odbiornik energii elektrycznej zostaje podłączony do sieci, wtedy w stanie ustalonym (o ile taki może mieć miejsce) moc elektryczna jest równa mocy strat ciepłych do otoczenia na drodze: przewodnictwa, konwekcji oraz promieniowania. Temperatura odbiornika ustala się tak, by czynnik zadoczeł temu bilansowi energetycznemu. Przy zadanej mocy odbiornika temperatura ta może być różna w zależności od stosunków ilościowych pomiędzy poszczególnymi pozycjami bilansowymi po stronie strat. Emisja promieniowania zdeterminowana jest przede wszystkim przez temperaturę emitującej powierzchni. Skierowanie na rozżarzoną spiralę grzejną strumienia powietrza może do tego stopnia zwiększyć straty konwekcyjne, że spirala przestanie świecić. W warunkach zadania przewodnictwo cieplne nie odgrywa istotnej roli. Konwekcyjne zaś straty ciepła dla spirali są znacznie mniejsze niż dla powstającego zeń przewodnika prostoliniowego. Zakrzywienia powierzchni oraz obecność sąsiednich zwojów powodują wzrost hydrodynamicznych oporów, jakie napotyka unoszący się strumień powietrza. Maleje więc jego prędkość względem znacznej części powierzchni przewodnika.

W świetle powyższego jasne jest, że rozprostowywanie spirali może być przyczyną zmniejszenia intensywności, bądź nawet całkowitego zaniku świecenia. Wzrost mocy czerpanej, spowodowany temperaturowym zmniejszeniem oporu nie wprowadza istotnych zmian, tym bardziej, że spirale grzejne wykonywane są ze stopów, których opór mało zmienia się z temperaturą (dlaczego?).



w temperaturze $\sim 25\,000\text{ K}$): wyparowałoby 4 km^3 skał; uległoby stopieniu dalszych 14 km^3 podłoża skalnego; powstałby krater o średnicy $\sim 23\text{ km}$ i głębokości $\sim 2,5\text{ km}$; rumowisko setek milionów ton pokruszonego granitu zostałoby rozrzucone w promieniu dziesiątków kilometrów. Do tego dołączyłoby druzgocące działanie fal uderzeniowych wzbudzonych w powietrzu i podłożu skalnym, a także potężnych podmuchów. W sumie byłby to kataklizm porównywalny (energetycznie) z eksplozją 200 największych bomb wodorowych. Satelitarne zdjęcie przedstawia dwa tego rzędu wielkości krateru uderzeniowe, tworzące dziś jeziora Clearwater (Przejrzysta Woda) w kanadyjskiej prowincji Quebec. Zostały one wybite ok. 285 mln lat temu odłamkami rozsadanego w locie wielkiego asteroidu.

Więszymi i starszymi, a więc i bardziej strawionymi przez erozję strukturami ziemskimi, podejrzany o genetyczne związki z bombardowaniem meteorytowym, są: niecka Sudbury $60 \times 30\text{ km}^2$ w Kanadzie (jej „sprawcą” był zapewne asteroid o średnicy $2,5\text{ km}$), 350-kilometrowej średnicy niecka w części zalana przez syberyjskie jezioro Tengiz i największy domniemany relikw poudzeniowy — łukowata struktura tektoniczna o średnicy 440 km w pobliżu kanadyjskiego miasta Hudson Bay. Wszystkie one sięgają swoją historią prekambriu, a więc są nie młodsze, niż 600 mln lat (Mutch i inni).



5. Protuberancje. Prawdopodobnie najbardziej okazała w ostatnich dziesięcioleciach erupcyjna raca protuberancji wystrzeliła z powierzchni Słońca w dniu 4 czerwca 1946 r.; w ciągu kilku godzin uniosła ona masę rzędu $m \approx 10\text{ mln}$ ton na rekordową z zaobserwowanych wysokości, $h \approx 1\,700\,000\text{ km}$ ponad powierzchnię. Spróbujmy ocenić rząd wielkości jej energii mechanicznej. Przyjmijmy dla ułatwienia, że wznoszenie się protuberancji przebiegało w warunkach na tyle „czystych”, iż można je wtłoczyć do schematu prostej translacji w polu grawitacyjnym (oczywiście, zmiennym przestrzennie; lojalnie trzeba podnieść, iż założenie nasze nie jest bezdyskusyjne wobec faktu „współrzędzenia” zachowaniem się protuberancji przez dwa pola: grawitacyjne i magnetyczne). Mamy więc (sumując elementarne przyczynki pracy i przechodząc w granicy do całki):

$$GM_{\odot}m \int_{R_{\odot}}^{R_{\odot}+h} r^{-2}dr = GM_{\odot}mh/R_{\odot}(R_{\odot}+h) \approx 10^{21}\text{ J}$$

(G , M_{\odot} i R_{\odot} — stała grawitacyjna, masa i promień Słońca). Jest to ładunek energii równoważny temu, jaki drzemie w $\sim 10^{12}$ tonach trotylu! W dniu 5 września 1975 r. porównywalna mocą eksplozja na Słońcu nadała „rozpęd” innej olbrzymiej protuberancji. Warto przy okazji wspomnieć, że mniejsze fontanny należą do dość powszechnego „urozmaicenia” tarczy słonecznej.



6. Rozbłyski — najgwałtowniejsza forma wyładowań na powierzchni Słońca. Z reguły występują one w pobliżu dużych grup plam słonecznych o skomplikowanej geometrii pola magnetycznego, niemal dokładnie na granicy rozdzielającej jego przeciwne biegunowości (nasze informacje dotyczą raczej topografii, a nie mechanizmu, o którym ciągle niewiele pewnego możemy powiedzieć). Silnemu, kilku- lub kilkunastominutowemu błyskowi, głównie w widmie krótkofalowym, towarzyszy prawdziwy sztorm korpuskuł (tzw. słonecznego promieniowania kosmicznego) o energiach $100\,000$ a nawet miliony razy większych, niż energia korpuskuł wyrzuconych przez protuberancje. Wyładowania wymiatają w tej formie miliardy ton materii. Straszliwe strugi „biczują na oślep” cały Układ Słoneczny, w tym Ziemię; na szczęście ich natarcie załamuje się w atmosferze i przestaje być dla nas groźne.

W warunkach wzmózonej aktywności słonecznej (obecnie „schodzimy” właśnie z kolejnego jego maksimum) aktywna grupa plam rozbłyskuje codziennie w około stu „niewielkich” wyładowaniach — każdy z nich unosi energię rzędu 10^{23} — 10^{25} J . Większe rozbłyski, zdarzające się przeciętnie raz w miesiącu, mają „osiągi” $\sim 10^{26}\text{ J}$. W ich przypadku konstatujemy z szacunkiem, że kilkunastominutowa produkcja niewielkiego w końcu tworzy, jakim jest obszar rozbłysku ($\sim 0,1\%$ tarczy słonecznej), może stać się porównywalna liczbowo z mocą promieniowania całego Słońca ($\sim 3,8 \times 10^{26}\text{ W}$). Energia zupełnie „podrzednego” rozbłysku, $\sim 10^{23}\text{ J}$ (odpowiada to eksplozji 10^{12} — 10^{13} t trotylu) mogłaby całkowicie zaspokoić ziemskie potrzeby energetyczne, na ich obecnym poziomie, przez tysiące najbliższych lat.

Dr Zbigniew SAWOŃ

Nie trzeba uzasadniać znaczenia pojęcia *granicy ciągu* w Analizie Matematycznej. Pobieźny nawet przegląd definicji występujących w tej dziedzinie matematyki prowadzi do wniosku, że u ich podstaw leży pojęcie granicy. W artykule tym przedstawimy pewne uogólnienia tego pojęcia. Mogą one iść w dwu kierunkach. Pierwszy z nich — to rozszerzenie pojęcia zbieżności na znacznie szerszą klasę ciągów liczbowych. Można np. uznać, że ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny w „szerszym sensie” lub, że ma uogólnioną granicę $\text{Lim} a_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje granica średnich arytmetycznych

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = \text{Lim} a_n$$

i łatwo wówczas zauważyć, że:

- 1) każdy ciąg zbieżny jest zbieżny w „szerszym sensie”,
- 2) istnieją ciągi rozbieżne, ale zbieżne w „szerszym sensie” np. ciąg $(0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$.

Tego typu uogólnienia są przedmiotem badań teorii zwanej Teorią Limesowości i nie będą rozważane w tym artykule. Warto jednak zaznaczyć, że piękną kartę w Teorii Limesowości zapisali polscy matematycy, w szczególności profesorowie Stanisław Mazur, Władysław Orlicz i ich uczniowie. Drugi kierunek, w jakim mogą iść uogólnienia, to przyporządkowanie granicy szerszym klasom funkcji. Ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest, jak Czytelnikom dobrze wiadomo, funkcją

$$f: N \rightarrow R,$$

gdzie N jest zbiorem liczb naturalnych i $f(n) = a_n, n = 1, 2, \dots$. Niech T będzie dowolnym zbiorem i niech $f: T \rightarrow R$ będzie funkcją określoną na T (T nazywać będziemy zbiorem indeksów). Spróbujemy zdefiniować symbol

$$\lim_T f(t).$$

Jeżeli np. $T = N$ lub $T = [0, 1)$ to symbole $\lim f(t)$ mamy już określone w następujący sposób:

Gdy $T = N$ to

$$a = \lim_N f(n) \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{n_0 \in N} \bigwedge_{n \in N} n \geq n_0 \Rightarrow |f(n) - a| < \varepsilon$$

(zwykła zbieżność ciągu liczbowego).

Gdy $T = [0, 1)$ to

$$a = \lim_{[0, 1)} f(t) \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{t_0 \in [0, 1)} \bigwedge_{t \in [0, 1)} t \geq t_0 \Rightarrow |f(t) - a| < \varepsilon.$$

Oczywiście w tym przypadku a jest granicą lewostronną

$$a = \lim_{t \rightarrow 1-0} f(t)$$

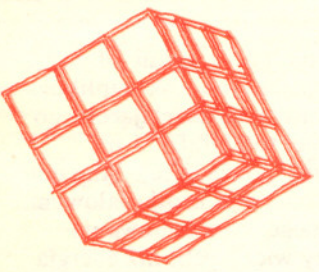
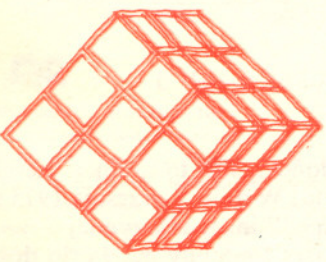
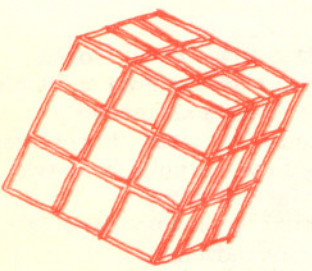
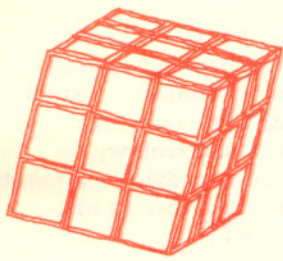
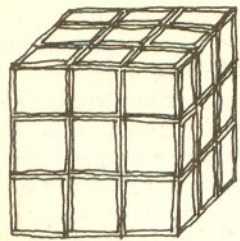
Przyglądając się tym obu definicjom stwierdzamy z łatwością, że ich wprowadzenie było możliwe dzięki temu, iż w zbiorze $T = N$, jak i w zbiorze $T = [0, 1)$ jest relacja porządku \leq .

Niech T będzie zbiorem indeksów wyposażonym w relację porządku \leq , tj. w relację dwuargumentową $x \leq y$ spełniającą następujący układ aksjomatów:

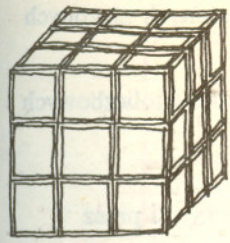
- 1) Dla każdego $x, y \in T$ albo $x \leq y$ albo $y \leq x$,
- 2) jeżeli $x \leq y$ i $y \leq x$, to $y = x$,
- 3) dla każdego $x \in T$ zachodzi $x \leq x$,
- 4) jeżeli $x \leq y$ i $y \leq z$, to $x \leq z$.

Teraz już z łatwością można zdefiniować

$$(*) \quad a = \lim_{(T; \leq)} f(t) \equiv \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{t_0 \in T} \bigwedge_{t \in T} t_0 \leq t \Rightarrow |f(t) - a| < \varepsilon.$$



Rozwiązanie zadania M 287. Oznaczając $x_1 = \cos t_1, x_2 = \cos t_2$ mamy ze wzorów Viete'a
 $x_1 + x_2 = -b/a, x_1 x_2 = c/a,$
 $y_1 = \cos 2t_1 = 2x_1^2 - 1, y_2 = \cos 2t_2 = 2x_2^2 - 1,$
 a ponieważ $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2,$
 więc
 $y_1 + y_2 = 2((b/a)^2 - 2c/a - 1),$
 $y_1 y_2 = 4(c/a)^2 - 2((b/a)^2 - 2c/a) + 1$
 i możemy przyjąć
 $A = a^2, B = 2(a^2 + 2ac - b^2),$
 $C = 4(c^2 + ac) - 2b^2 + a^2 = (2c + a)^2 - 2b^2.$



Praktyka Analizy Matematycznej wymaga określenia pojęcia $\lim_{T} f(t)$ dla zbioru indeksów T , w którym nie ma struktury porządku. W szczególności rozpatruje się zbiory T wyposażone w relację dwuargumentową \leq spełniające tylko aksjomaty 2, 3, 4. Taką relację nazywamy relacją częściowego porządku. Spróbujmy powtórzyć definicję (*) dla zbioru T z częściowym porządkiem. Okazuje się, że definicja taka nie będzie poprawna. Najlepiej wyjaśni to następujący przykład:

Niech $T = [0, 1)$. Podzielmy ten przedział na dwie części $T_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right)$

i $T_2 = \left[\frac{1}{2}, 1\right)$. Punkty przedziałów T_1 i T_2 są uporządkowane w sposób naturalny, natomiast uznajmy, że żaden punkt przedziału T_2 nie jest porównywalny z żadnym punktem przedziału T_1 i na odwrót. Oznaczmy taką relację przez $<$. Oczywiście zbiór $(T; <)$ jest częściowo uporządkowany. Ale biorąc np. funkcję $f(t) = t$ stwierdzamy, że zgodnie z definicją (*) mamy

$$\lim_{(T, <)} f(t) = \frac{1}{2} \quad \text{ale także} \quad \lim_{(T, <)} f(t) = 1.$$

Struktura częściowego porządku nie zapewnia więc nam jednoznaczności granicy, potrzebny jest jakiś warunek dodatkowy. Można tego dokonać żądając:

5) dla każdego $x, y \in T$ istnieje takie $z \in T$, że $x \leq z$ i $y \leq z$. Zbiór (T, \leq) z częściowym porządkiem \leq spełniającym aksjomat (5) nazywamy zbiorem skierowanym i (o czym może się Czytelnik z łatwością przekonać) w tym przypadku granica $\lim_{(T, \leq)} f(t)$ jest wyznaczona jednoznacznie.

Reasumując: Definicję (*) można stosować w przypadku, gdy (T, \leq) jest zbiorem skierowanym. Przykłady:

I) Niech T będzie zbiorem par liczb naturalnych, tj. $T = N \times N$. Relację częściowego porządku w T zdefiniujemy w następujący sposób

$$(m_1, n_1) \leq (m_2, n_2) \Leftrightarrow m_1 \leq m_2 \quad \text{i} \quad n_1 \leq n_2.$$

Oczywiście (T, \leq) jest zbiorem skierowanym. Funkcje $f: N \times N \rightarrow R$ to inaczej mówiąc ciągi podwójne $a_{m,n}$, $m, n = 1, 2, \dots$. Od razu stwierdzamy, że

$$a = \lim_{(T, \leq)} a_{m,n} \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{(m_0, n_0)} \bigwedge_{(m,n)} m \geq m_0 \quad \text{i} \quad n \geq n_0 \Rightarrow |a_{m,n} - a| < \varepsilon.$$

W ten sposób definiujemy zbieżność ciągów podwójnych $(a_{m,n})_{m,n=1}^{\infty}$. W zbiorze $T = N \times N$ możliwy jest też inny częściowy porządek, a mianowicie

$$(m_1, n_1) \leq_1 (m_2, n_2) \Leftrightarrow m_2 = n_2 \quad \text{i} \quad m_2 \geq \frac{m_1 + n_1}{2}.$$

(T, \leq_1) jest także zbiorem skierowanym oraz

$$a = \lim_{(T, \leq_1)} a_{m,n} \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{n_0} \bigwedge_n n \geq n_0 \Rightarrow |a_{n,n} - a| < \varepsilon.$$

Zatem w tym przypadku „zbieżność” ciągu podwójnego $(a_{m,n})_{m,n=1}^{\infty}$ oznacza po prostu zwykłą zbieżność ciągu przekątniowego $(a_{n,n})_{n=1}^{\infty}$. Widać dalej, że jeżeli ciąg podwójny $(a_{m,n})_{m,n=1}^{\infty}$ jest zbieżny w sensie (T, \leq) , to jest zbieżny w sensie (T, \leq_1) oraz obie granice są równe

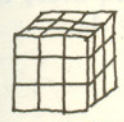
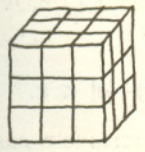
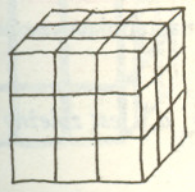
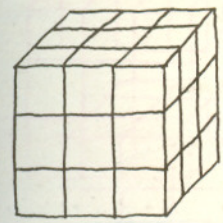
$$\lim_{(T, \leq)} a_{m,n} = \lim_{(T, \leq_1)} a_{m,n}.$$

Twierdzenie odwrotne jest fałszywe. Świadczy o tym następujący przykład:

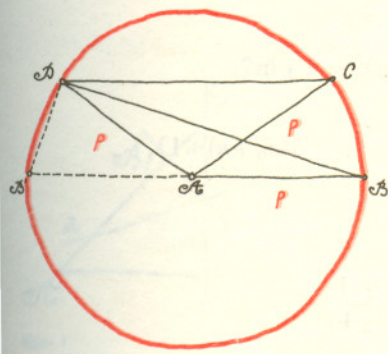
Niech
$$a_{m,n} = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \leq m \\ (-1)^n & \text{dla } n > m. \end{cases} \quad m, n = 1, 2, \dots$$

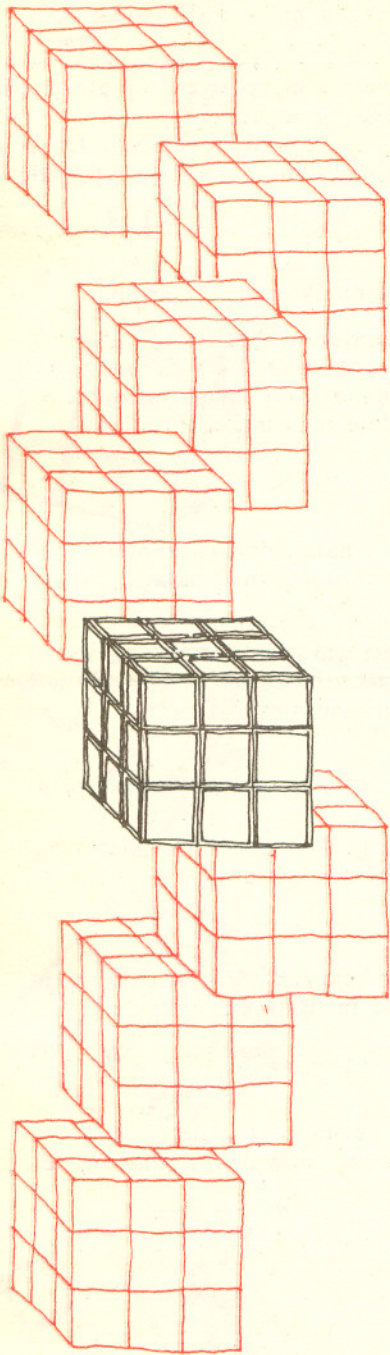
Oczywiście $\lim_{(T, \leq_1)} a_{m,n} = 0$, zaś $\lim_{(T, \leq)} a_{m,n}$ nie istnieje (dlaczego?).

Z powyższego przykładu wynika, że na tym samym zbiorze T można otrzymać różne rodzaje zbieżności różnie go „kierując”. Podstawowe znaczenie ma w związku z tym pytanie: kiedy takie dwa porządki skierowane wyznaczają tę samą zbieżność? Odpowiedź na to pytanie wykracza poza ramy tego artykułu.



Rozwiązanie zadania M 288. Punkty B, C, D leżą na okręgu o środku w A i promieniu p , którego średnicą jest $BB' = 2q$. Mamy $B'D = BC = q$ i $\sphericalangle BDB' = \pi/2$, stąd $BD = \sqrt{4p^2 - q^2}$.





II) Oznaczmy przez Ω_0 rodzinę wszystkich podzbiorów skończonych złożonych z liczb naturalnych:

$\Omega_0 = \{\Delta \subset N; \Delta \text{ jest zbiorem skończonym}\}$.

Będziemy też rozpatrywać zbiór Ω_1 wszystkich przedziałów całkowitoliczbowych $[1, 2, 3, \dots, n]$, tj.

$\Omega_1 = \{\Delta = \Delta_n \subset N; \Delta_n = [1, n], n = 1, 2, \dots\}$,

gdzie $[1, n] = \{k \in N; 1 \leq k \leq n\}$, $n = 1, 2, \dots$.

Oczywiście zbiory Ω_0 i Ω_1 są zbiorami częściowo uporządkowanymi przez relację zawierania \subset . Są także zbiorami skierowanymi.

Niech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ustalonym ciągiem liczbowym. Dla każdego $\Delta \in \Omega_0$ lub $\Delta' \in \Omega_1$ oznaczmy

$$f(\Delta) = \sum_{i \in \Delta} a_i \quad (\text{jest to suma skończona}).$$

Określiliśmy więc funkcje $f: \Omega_0 \rightarrow R$ i $f: \Omega_1 \rightarrow R$.

Postawmy pytanie: kiedy istnieją granice uogólnione

$$\lim_{(\Omega_0, \subset)} f(\Delta); \quad \lim_{(\Omega_1, \subset)} f(\Delta').$$

Rozpatrzmy najpierw zbiór Ω_1 . Jeżeli $\Delta' = \Delta'_n$, to $f(\Delta'_n) = \sum_{i=1}^n a_i$, a więc $f(\Delta'_n)$

jest n -tą sumą częściową szeregu $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)$ i odpowiedź brzmi następująco:

Granica $\lim_{(\Omega_1, \subset)} f(\Delta')$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)$ jest zbieżny

i wówczas $\lim_{(\Omega_1, \subset)} f(\Delta') = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Dla Ω_0 mamy

$$a = \lim_{(\Omega_0, \subset)} f(\Delta) \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\Delta_0 \subset \Omega_0} \bigwedge_{\Delta \in \Omega_0} \Delta_0 \subset \Delta \Rightarrow |f(\Delta) - a| < \varepsilon.$$

Δ_0 jest zbiorem skończonym. Oznaczmy przez n_0 największą liczbę naturalną należącą do Δ_0 . Wówczas dla każdego $n \geq n_0$ mamy $\Delta'_n \supset \Delta_0$.

A więc otrzymaliśmy, że

1) $\lim_{(\Omega_1, \subset)} f(\Delta')$ istnieje,

2) $a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Weźmy teraz pod uwagę szereg zbieżny o wyrazach $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Oczywiście w tym przypadku

$$\lim_{(\Omega_1, \subset)} f(\Delta') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$$

Przypuśćmy, że istnieje granica $\lim_{(\Omega_0, \subset)} f(\Delta)$. Musi być ona równa $\ln 2$.

Istnieje więc takie $\Delta_0 \in \Omega_0$, że dla każdego $\Delta \supset \Delta_0$

$$|f(\Delta) - \ln 2| < 1 \text{ lub } |f(\Delta)| < 1 + \ln 2.$$

Niech

$$\Delta_n = \Delta_0 \cup \{2n_0 + 1; 2(n_0 + 1) + 1; \dots; 2(n_0 + n) + 1\},$$

oczywiście $\Delta_n \supset \Delta_0$, więc $|f(\Delta_n)| < 1 + \ln 2$.

Ale

$$f(\Delta_n) = f(\Delta_0) + \sum_{i=0}^n \frac{1}{2(n_0 + i) + 1}.$$



Rozwiązanie zadania M 286.

Jeżeli dwa hetmany stoją w tym samym rzędzie poziomym albo pionowym, to nie może w nim stać trzeci hetman. Jeżeli dwa hetmany stoją na tej samej linii ukośnej, to w żadnym z czterech odpowiadających rzędów nie może być trzeciego hetmana. Rzędów jest 16, więc hetmanów spełniających warunki zadania może być co najwyżej 16/3 par, czyli 10. Przykładowe ustawienie: a5, b2, c5, d1, d3, e6, e8, f4, g5, h4.

Zatem dla każdego $n = 1, 2, \dots$ mielibyśmy

$$\sum_{i=0}^n \frac{1}{2(n_0+i)+1} \leq 1 + \ln 2 + |f(\Delta_0)|,$$

a to jest niemożliwe, czyli $\lim_{(\Delta_0, \subset)} f(\Delta)$ nie istnieje!

Można wykazać i nie jest to trudne, że

$$\lim_{(\Delta_0, \subset)} f(\Delta) \text{ istnieje} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób bardzo ciekawą charakteryzację szeregów bezwzględnie zbieżnych.

Modyfikując nieco metodę zastosowaną powyżej Czytelnik z łatwością udowodni powyższe twierdzenie, tym bardziej że Autor na zakończenie podpowie mu następujący fakt:

Niech $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)$ będzie szeregiem liczbowym. Oznaczmy

$$\Delta' = \{n: a_n \geq 0\}, \quad \Delta'' = \{n: a_n < 0\}.$$

Wówczas $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)$ jest zbieżny, ale nie bezwzględnie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sum_{n \in \Delta'} a_n = +\infty, \quad \sum_{n \in \Delta''} a_n = -\infty$$

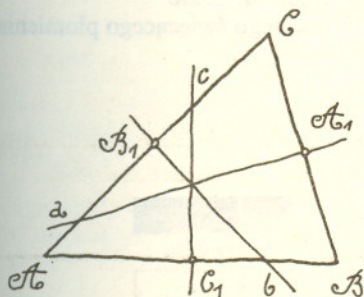
Zadania, których nie umiemy rozwiązać (II)

Przypominamy, że w tym kąciuku zamieszczamy zadania z geometrii, których nie umiemy rozwiązać, oraz nadesłane przez Czytelników rozwiązania. Zamieszczamy także nadsyłane przez Czytelników zadania z geometrii, których Czytelnicy nasi nie umieją rozwiązać, o ile i my nie umiemy sobie z nimi poradzić.

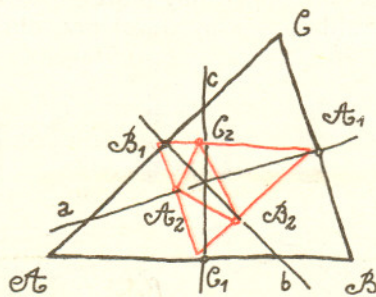
Proponowanego dzisiaj zadania nie tylko nie umiemy rozwiązać, ale nawet nie umiemy dokładnie sprecyzować.

Weźmy na początek dowolny, ostrokątny trójkąt ΔABC . Niech a, b, c będą symetralnymi jego boków, a punkty A_1, B_1, C_1 środkami tych boków (rys. 1). Wtedy proste a, b, c są wysokościami w trójkącie $\Delta A_1 B_1 C_1$. Jest to wystarczająco oczywiste, by nie przytaczać tu dowodu. Niech punkty A_2, B_2, C_2 będą spodkami wysokości w trójkącie $\Delta A_1 B_1 C_1$. Wtedy z kolei proste a, b, c są dwusiecznymi kątów wewnętrznych w trójkącie $\Delta A_2 B_2 C_2$ (rys. 2). Nietrudny dowód tego faktu opiera się na tym, że na każdym z czworokątów $C_1 A_2 C_2 A_1$ i $C_1 B_2 C_2 B_1$ można opisać okrąg. W podobny sposób tworzymy trójkąty $\Delta A_n B_n C_n$ dla $n = 3, \dots$ (rys. 3). I tu chcieliśmy postawić to niezbyt precyzyjne pytanie: czy można coś ciekawego powiedzieć o roli prostych a, b, c w trójkątach $\Delta A_n B_n C_n$? Niekoniecznie zresztą wszystkich. Czekamy na propozycje.

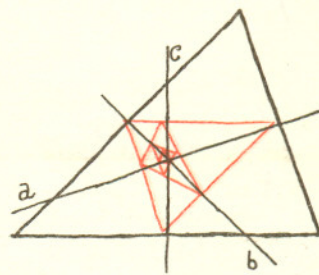
PROOF



Rys. 1



Rys. 2

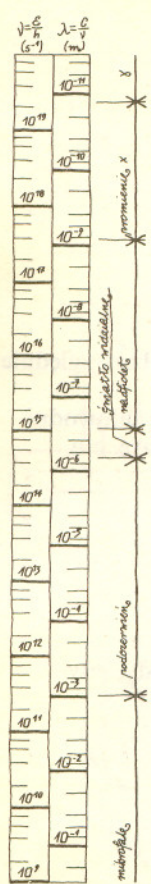


Rys. 3

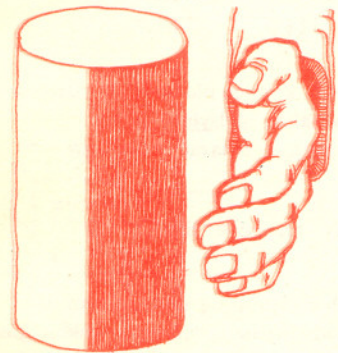
Oddziaływanie promieniowania elektromagnetycznego z materią (I)

Część I. Podstawowe fakty doświadczalne

Doc. dr Jerzy GINTER



Rys. 1 Widmo promieniowania elektromagnetycznego



Rys. 2

1. Wstęp. Przez ostatnie dwa wieki jednym z najbardziej fascynujących problemów fizyki jest oddziaływanie promieniowania elektromagnetycznego z materią. Bez przesady można powiedzieć, że zagadnienie to leży u podstaw co najmniej dwóch wielkich teorii fizycznych: maxwellowskiej elektrodynamiki klasycznej i mechaniki kwantowej — zespolonych obecnie w elektrodynamice kwantowej. W ciągu wieloletnich badań udało się uzyskać bardzo piękny i jednolity obraz omawianych problemów. Serce po prostu się kraje, kiedy uzmysłwić sobie, jak niesłychanie mało z tego wszystkiego przedostało się do programu szkolnego.

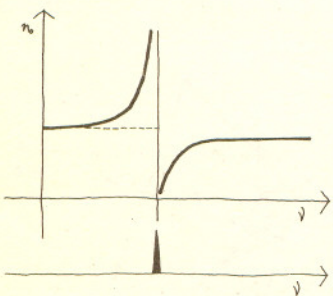
W krótkim cyklu artykułów ograniczymy się niemal wyłącznie do omówienia związków, łączących trzy zjawiska: *pochłanianie*, *emisję* i *załamanie promieniowania elektromagnetycznego* (w tym jako przypadek szczególny — światła widzialnego). Dla przypomnienia i ułatwienia na rys. 1 przedstawione jest widmo promieniowania elektromagnetycznego w szerokim zakresie częstotliwości. Rozpoczniemy od przypadku, kiedy mamy do czynienia ze stosunkowo wąskimi liniami absorpcyjnymi.

2. Absorpcja i emisja. Istnieje bezpośredni związek między absorpcją i emisją światła. Jeśli dla jakiejś częstotliwości (długości fali) ciało silnie absorbuje promieniowanie elektromagnetyczne, to — w odpowiednich warunkach — będzie je dla tej samej częstotliwości silnie emitować. Jeżeli zdolność absorpcyjna jest niewielka, niewielka jest i zdolność emisyjna.

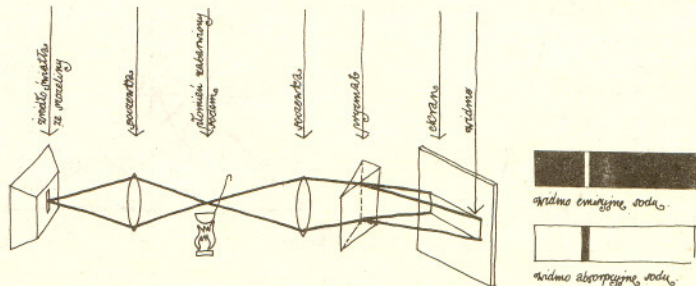
To sformułowanie może się wydawać paradoksalne. Niemniej nawet w programie szkolnym omawia się wiele zjawisk, które je potwierdzają. Oto dwa ogólnie znane przykłady:

a. Powszechnie wiadomo, że ciała czarne silnie pochłaniają promieniowanie elektromagnetyczne podczerwone (które, nie wiadomo dlaczego, stale nazywa się ciepłym), natomiast ciała białe lub srebrne pochłaniają promieniowanie słabo. Dlatego na przykład wagony chłodnie malowane są na biało, a nowoczesne kombinezony strażackie mają powierzchnię metalizowaną. Wiadomo także, że ciała czarne lepiej emitują promieniowanie podczerwone niż ciała srebrne. Demonstruje się to na przykład za pomocą puszki metalowej, mającej jedną część powierzchni metaliczną, a drugą poczerzoną. Puszki taką wypełnia się gorącą wodą lub gorącym olejem. Wystarczy zbliżyć rękę (rys. 2), aby przekonać się, że strona czarna silniej „grzeje” niż srebrna. Dlatego też srebrzy się termosy: cienka warstewka metalu słabo emituje i absorbuje promieniowanie elektromagnetyczne, a przez to wymiana energii (przepływ ciepła) jest mała.

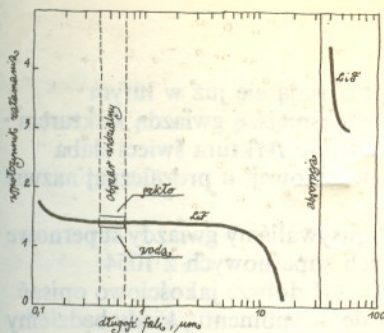
b. Odpowiednio pobudzone pary sodu wysyłają intensywne żółto-pomarańczowe promieniowanie widzialne. Każdy wie to doskonale — wystarczy posypać solą kuchenną (chlorkiem sodu) palnik gazowy, a natychmiast pojawia się charakterystyczne zabarwienie płomienia. Ten sam typ świecenia występuje w powszechnie stosowanych ulicznych lampach sodowych. Z drugiej strony wiadomo, że pary sodu silnie pochłaniają promieniowanie o tej samej częstotliwości. Rys. 3 przedstawia schemat doświadczenia, w którym można to zademonstrować. Wystarczy przepuścić światło białe przez dostatecznie grubą warstwę płomienia palącego się sodu. W widmie, zaobserwowanym w spektrometrze, pojawia się na tle widma ciągłego ciemny prążek dokładnie w tym miejscu, gdzie obserwowalibyśmy jasny prążek przy obserwacji tylko samego świecącego płomienia.



Rys. 4 Schematycznie przedstawiony przebieg współczynnika załamania i absorpcji jako funkcji częstotliwości



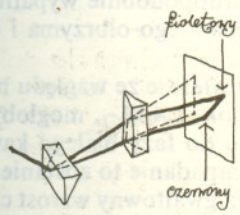
Rys. 3.



Rys. 5 Zależność współczynnika załamania od długości fali dla kryształu fluorku litu (LiF). Dla porównania dorysowano zależność tego współczynnika od długości fali dla szkła i wody w zakresie widzialnym



Rys. 6



Rys. 7

Tego samego rodzaju linie absorpcyjne pojawiają się w widmie Słońca. Białe promieniowanie pochodzące z wnętrza Słońca przechodzi przez rozrzedzone warstwy atmosfery Słońca. Występujące tam pary sodu absorbują charakterystyczne promieniowanie — w widmie słonecznym pojawia się ciemna linia, zwana linią D Fraunhofera (inne linie Fraunhofera pochodzą od innych pierwiastków atmosfery Słońca). Oprócz dwóch omówionych przykładów można byłoby przytaczać dziesiątki podobnych. Wszystkie one świadczą o tym, że pomiędzy zjawiskami emisji i pochłaniania promieniowania elektromagnetycznego zachodzi istotny, „wewnętrzny” związek.

3. Absorpcja i załamanie. Rzadko zwraca się uwagę na związek pomiędzy zjawiskami pochłaniania i załamania promieniowania elektromagnetycznego. Tymczasem taki związek istnieje! Ograniczymy się tylko do przypadku, kiedy występują wyraźne i oddzielone od siebie linie absorpcyjne (jak dla wspomnianych powyżej par sodu). W okolicy takiej linii współczynnik załamania zmienia się w charakterystyczny sposób, schematycznie przedstawiony na rys. 4. Ze wzrostem częstotliwości współczynnik załamania rośnie, przy przekroczeniu częstotliwości odpowiadającej absorpcji gwałtownie spada, a potem znowu rośnie. Przebieg taki obserwujemy, niezależnie od tego, czy mamy do czynienia z gazem, cieczą czy ciałem stałym — oczywiście jeżeli dla badanej substancji obserwuje się wyraźną linię absorpcyjną. Rysunki 5 i 6 przedstawiają wyniki doświadczeń dla dwóch różnych przypadków.

a. Rys. 5 przedstawia zależność współczynnika załamania od częstotliwości dla kryształu fluorku litu (LiF). Pomiary prowadzono w podczerwieni, obszarze widzialnym i nadfiolecie. Linie absorpcyjne występują w miejscach, wskazanych strzałkami. Obserwowano zmiany wartości współczynnika załamania od 0,2 do 4,5! Warto zwrócić uwagę, że w obszarze widzialnym nic specjalnego się nie dzieje. Dla porównania — w tym właśnie obszarze — zostały dorysowane przebiegi współczynnika załamania dla wody i szkła.

b. Rys. 6 przedstawia zdjęcie uzyskane metodą „skrzyżowanych pryzmatów”, schematycznie przedstawioną na rys. 7. Światło widzialne na rys. 6 odchylone było poziomo przez zwykły pryzmat szklany, a pionowo przez płomień palnika sodowego w kształcie pryzmatu. Charakter odchylenia w okolicy linii absorpcyjnej wskazuje, że współczynnik załamania par sodu bardzo silnie się zmienia właśnie w tym obszarze (mamy tu wyraźne załamanie dla gazu!).

Przykłady takie, jak dwa powyżej przedstawione można byłoby dowolnie mnożyć. Wynika z nich jedno: musi istnieć jakiś istotny związek pomiędzy zjawiskami pochłaniania i załamania światła.

Aby zrozumieć związek pomiędzy pochłanianiem, emisją i załamaniem światła musielibyśmy wiedzieć, jaki jest mikroskopowy mechanizm omawianych zjawisk. Innymi słowy — „co się dzieje w środku” substancji oddziałującej z promieniowaniem. O tym opowiemy już w następnym artykule.



Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 286. Jaka jest największa liczba hetmanów, które można ustawić na szachownicy tak, by każdy szachował dokładnie jednego z pozostałych?
Rozwiązanie na str. 10

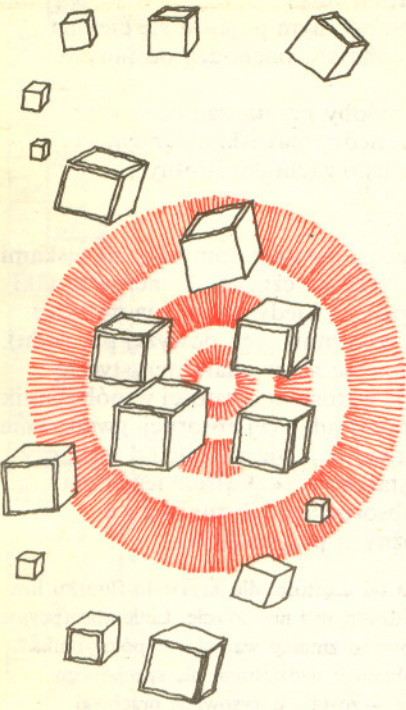
M 287. Pierwiastkami równania $ax^2 + bx + c = 0$ są $\cos t_1$ i $\cos t_2$. Wyznaczyć w zależności od a , b i c współczynniki równania $Ax^2 + Bx + C = 0$, którego pierwiastkami są $\cos 2t_1$ i $\cos 2t_2$.
Rozwiązanie na str. 8

M 288. W trapezie o podstawach \overline{AB} i \overline{CD} mamy $AB = AC = AD = p$, $BC = q$. Znaleźć długość drugiej przekątnej \overline{BD} .
Rozwiązanie na str. 9

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

F 108. Spirala grzejna podłączona jest do sieci o stałym napięciu, zapewniającym słabe świecenie zwojów. Gdy drut został rozprostowany, świecenie zanikło, mimo iż pobór mocy ze źródła nie dość że nie zmalał, lecz wręcz przeciwnie — nieco wzrósł. Wyjaśnić zaobserwowany efekt.
Rozwiązanie na str. 6

F 109. Do źródła siły elektromotorycznej o stałym napięciu podłączono drut żelazny, który wskutek tego lekko rozżarzył się. Gdy część drutu zanurzono w zimnej wodzie, reszta rozżarzyła się mocniej. Dlaczego?
Rozwiązanie na str. 16



Późnym wieczorem nad wschodnim horyzontem pojawiają się już w lutym wiosenne gwiazdozbiory, m.in. Wolarz (*Bootes*) z najjaśniejszą gwiazdą Arkturem (opisaliśmy ją w majowym numerze z 1980 r.). Niedaleko Arktura świeci słaba gwiazdka, niewidoczna gołym okiem, 8 wielkości gwiazdowej, o prozaicznej nazwie HD 128220. Zajmiemy się dzisiaj nią bliżej.

W poprzednich odcinkach „Patrz w niebo” często opisywaliśmy gwiazdy supernowe i pozostałości po nich. Wspominaliśmy o wybuchach supernowych z 1054 i 1572 roku, mówiąc, że wybuch taki potrafimy już dość dobrze jakościowo opisać teoretycznie. Ale skoro tak, to powinniśmy zbliżyć się do momentu, kiedy będziemy potrafili prognozować zachowanie się gwiazd i przewidywać ich ewentualne wybuchy. Jesteśmy tu chyba bliżej celu niż geofizycy, którzy ciągle mają kłopoty z przewidywaniem trzęsień ziemi i wybuchów wulkanów (jest to zrozumiałe, bo praktycznie jest to trudniejsze). A więc postawmy pytanie: czy potrafimy wskazać gwiazdę, która będzie następną obserwowaną supernową w naszej Galaktyce? Odpowiedź właściwie powinna brzmieć: nie, nie potrafimy, ponieważ nie zbadaliśmy dostatecznie wielu słabych gwiazd. Jasność gwiazdy w momencie wybuchu rośnie miliony razy, a więc powinniśmy co najmniej pobieżnie przejrzeć wszystkie gwiazdy do 16 a nawet do 20 wielkości gwiazdowej. Takich gwiazd są w naszej Galaktyce miliardy. W naszych katalogach jest mniej niż pół miliona najjaśniejszych z nich. Postawmy więc nieco inne pytanie: która z gwiazd przebadanych przez nas ma największe szanse rychłego wybuchu? Takich kandydatów podano już wiele, m.in. czerwone olbrzymy: zimowy *Betelgeuse* z Oriona i letnia gwiazda *Deneb* z Łabędzia. Chyba jednak największe szanse z dobrze znanych gwiazd ma właśnie wspomniana na wstępie HD 128220.

Jest to układ podwójny (o okresie orbitalnym 870 dni) składający się z zimnego (typu G) olbrzyma i z bardzo gorącego podkarła typu O. Składnik typu O ma ok. 2—3 masy Słońca i jest właśnie tym kandydatem. Prawdopodobnie wypalił on już cały wodór w swoim wnętrzu, przeszedł przez fazę czerwonego olbrzyma i obecnie powoli zapada się, będąc już mniejszym niż Słońce.

To zapadanie musi skończyć się wybuchem supernowej właśnie ze względu na dość dużą masę gwiazdy. Gdyby jej masa była mniejsza niż ok. $1.4 M_{\odot}$, mogłoby się skończyć na niczym, to znaczy na spokojnym przejściu do fazy białego karła. W tej sytuacji jednak siły grawitacyjne są tak duże, że zapadanie to zostanie bardzo gwałtownie zatrzymane (prawdopodobnie) dopiero przez gwałtowny wzrost ciśnienia gazu neutronowego. W momencie zrównoważenia się tych sił powierzchnia gwiazdy będzie zapadać się już z prędkością porównywalną z prędkością światła. To musi się zakończyć potężnym wybuchem.

A więc obserwujcie Wolarza, w ciągu najbliższego miliona lat HD 128220 może zajaśnieje bardziej niż Księżyc w pełni.

(na podstawie *Mercury*, Vol. X, No 2, 1981)

mgr Tomasz CHLEBOWSKI

Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delta”

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Zadania nr 16, 17, 18

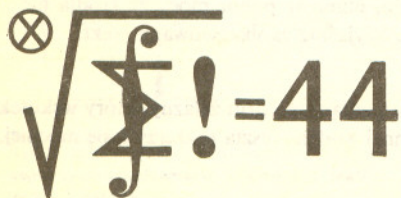
Termin nadsyłania rozwiązań: do 30. VI. 1982 r.

16. Czy ciąg $\{x_n\}$ liczb całkowitych nieujemnych spełniający warunek $x_{mn} = x_m + x_n$ ($m, n = 1, 2, 3, \dots$) może być ściśle rosnący?

17. Udowodnić, że na brzegu dowolnego wielokąta wypukłego można znaleźć cztery punkty będące wierzchołkami kwadratu.

18. Spośród wierzchołków sześcianu o krawędzi jednostkowej wybrano losowo trzy (każdy wybór jednakowo prawdopodobny). Pole trójkąta wyznaczonego przez te wierzchołki jest zmienną losową. Obliczyć jej wartość oczekiwaną.

(Zadanie 16 przysłał nasz Czytelnik Jarosław CEL, uczeń klasy trzeciej Liceum Ogólnokształcącego w Końskich).



Skrót regulaminu ligi zadaniowej

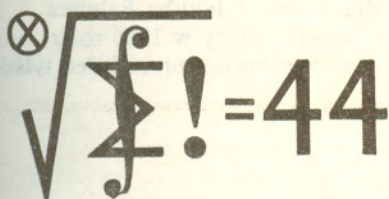
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szki c rozwiązań zamieszczamy w nr. $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4-3 \cdot \frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.

Ligę organizuje Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, oraz nasza Redakcja.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr 9/1981.



Rozwiązania zadań z numeru 10/1981

4. Proste go dowodu dostarcza teoria wielomianów w dziedzinie zespolonej. Rozłóżmy wielomian W na czynniki liniowe i zgrupujmy oddzielnie czynniki odpowiadające pierwiastkom leżącym w górnej półpłaszczyźnie, w dolnej półpłaszczyźnie i na osi rzeczywistej. Otrzymamy rozkład $W(z) = W_1(z)W_2(z)W_3(z)$. Pierwiastki nierzeczywiste można poustawiać w pary liczb wzajemnie sprzężonych (jeśli z_0 jest pierwiastkiem to \bar{z}_0 też, i to tej samej krotności). Zatem dla x rzeczywistych $W_2(x) = \overline{W_1(x)}$. Wobec założenia $W(x) \geq 0$ wszystkie pierwiastki rzeczywiste są parzystej krotności, a więc wielomian W_3 jest kwadratem pewnego wielomianu W_4 (o współczynnikach rzeczywistych). Mamy zatem (dla x rzeczywistych) przedstawienie

$$W(x) = W_1(x)W_2(x)W_4(x)^2 = W_1(x)W_4(x) \cdot \overline{W_1(x)W_4(x)},$$

a stąd, pisząc $W_1(x)W_4(x) = P(x) + iQ(x)$, dostajemy

$$W(x) = (P(x) + iQ(x))(P(x) - iQ(x)) = P(x)^2 + Q(x)^2.$$

5. Wyrazy ciągów a_n i b_n spełniają układ równań:

$a_{n+1}^2 = b_n^2, a_n^2 + b_n^2 = b_{n+1}^2$. Dzieliąc pierwsze z nich przez b_{n+1}^2 a drugie przez b_n^2 , a następnie mnożąc stronami otrzymane równania, dostajemy dla stosunku $x_n = a_n^2/b_n^2$ wzór rekurencyjny $x_{n+1}(1+x_n) = 1$. Stąd widać, że jeśli granica $\lim x_n$ istnieje, to jest ona pierwiastkiem dodatnim równania $x(1+x) = 1$, czyli jest równa liczbie $\xi = (\sqrt{5}-1)/2$ (nie zależy więc od wartości a_1, b_1). Stosując otrzymaną formułę rekurencyjną dwukrotnie, znajdujemy wzór na przejście od x_n

do x_{n+2} : $x_{n+2} = f(x_n)$, gdzie $f(x) = \frac{1+x}{2+x}$. Dla dowolnego dodatniego x wartość $f(x)$ leży między

x a ξ (sprawdzamy to łatwym rachunkiem, bądź też analizując wykres funkcji f). Wynika stąd, że ciągi $\{x_{2k}\}$ i $\{x_{2k+1}\}$ są monotoniczne i ograniczone, więc zbieżne. Granica każdego z nich spełnia równanie $x = f(x)$. Ponieważ liczba ξ jest jedynym dodatnim pierwiastkiem tego równania, zatem jest ona wspólną granicą obu wymienionych ciągów, a więc i granicą ciągu $\{x_n\}$.

6. Liczba wszystkich możliwych ustawień na szachownicy $n \times n$ pary hetmanów (rozdzielnych — najpierw stawiamy białego, potem czarnego) równa się $M_n = n^2(n^2-1)$. Niech L_n oznacza liczbę wszystkich takich ustawień, przy których hetmany atakują się. Szukane prawdopodobieństwo

$$P_n = 1 - \frac{L_n}{M_n}.$$

Znajdziemy wzór indukcyjny na L_n . Ustalmy n i podzielmy szachownicę $(n+1) \times (n+1)$ na obszary A, B, C, D , jak na rysunku (obszar D to pojedyncze pole). Liczymy ustawienia szachujące: Suma liczb napisanych w okienkach tabelki wynosi L_{n+1} . Zatem $L_{n+1} = L_n + 10n^2 + 2n$.

Będziemy szukać przedstawienia L_n jako funkcji wielomianowej zmiennej n ; musi to być wielomian trzeciego stopnia. Z wzoru rekurencyjnego i z równości $L_2 = 12$ dostajemy układ równań na współczynniki, który po rozwiązaniu daje $L_n = \frac{10}{3}n^3 - 4n^2 + \frac{2}{3}n$. Stąd po krótkich

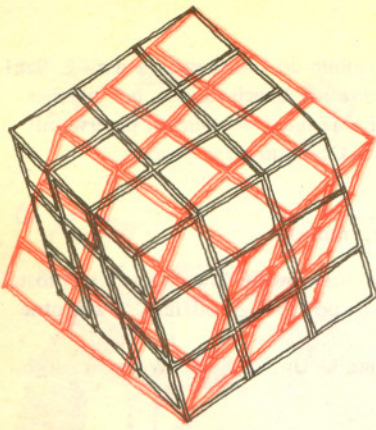
$$\text{rachunkach } P_n = \frac{(n-2)(3n-1)}{3n(n+1)}.$$

A	B
(n, n)	
C	D

Liczba ustawień szachujących	położenia hetmana białego			
	A	B	C	D
położenia hetmana czarnego	A	L_n	$2n(n-1)$	n
	B	$2n(n-1)$	$2n^2$	$2n$
	D	n	$2n$	0

Pierwsza teoria atomu

Doc. dr Michał ŚWIĘCKI



Sto lat temu powstała pierwsza teoria budowy atomu, która czterdzieści lat później zaowocowała falową teorią struktury materii. A było to tak ...

W latach 1860—70 dzięki pracom Kirchhoffa, Bunsena i Lockyera przekonano się, że każdy pierwiastek chemiczny — co więcej, każdy atom pierwiastka — jest jednoznacznie określony przez liniowe widmo swego promieniowania.

Charakterystyczne widmo promieniowania elektromagnetycznego (Maxwell, 1868) powstaje więc wewnątrz atomów, skąd natychmiast wynika, że atomy zawierają naładowane elektrycznie poruszające się elementy składowe. Elementy te (elektrony i jądra atomowe) wydzielono z atomów wiele lat później, ale nawet dzisiaj podstawowym źródłem naszej wiedzy o rozmieszczeniu i własnościach składników *wewnątrz* atomów pozostaje badanie widma promieniowania atomowego. Jakże więc są te widma?

Niestety, liniowe widma atomowe są bardzo złożone i nie sposób w nich dostrzec żadnych regularności. Tym większa więc chwała dla Johanna Jakuba Balmera (1825—1898); gimnazjalnego nauczyciela fizyki w Bazylei, który w 1885 roku ogłosił prostą prawidłowość wiążącą długości fal linii wysyłanych przez jeden tylko spośród wielu pierwiastków — przez wodór:

$$\lambda = b \frac{k^2}{k^2 - n^2}$$

$$k > n = 1, 2, \dots; b = 3645,6 \text{ \AA}$$

A oto obliczone przez Balmera długości fal czterech linii ($n = 2, k = 3, 4, 5, 6$) w widzialnej części widma wodoru wraz z wynikami pomiarów przeprowadzonych uprzednio przez Ångströma:

Balmer	Ångström	k
6562,08	6562,1	3
4860,80	4860,74	4
4340,0	4340,1	5
4101,3	4101,2	6

Taka zbieżność liczb nie może być przypadkowa, tym bardziej, że zachodzi ona (jak przekonano się później) aż do $k = 31$, a także dla $n = 1, 3$ i 4 w niewidzialnej części widma wodoru.

Odkrycie Balmera zapoczątkowało nową erę w teorii budowy atomu. Wzór jego był przecież pierwszą taką teorią. Wzór ten zapisany nie dla długości, ale dla częstości fali przyjmuje postać jeszcze prostszą:

$$\nu = cR \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right),$$

$$R = 109677 \text{ cm}^{-1}, c — \text{prędkość światła.}$$

Przez kilkadziesiąt następnych lat wzór Balmera stanowił nieosiągalną dla nikogo granicę teorii budowy atomu. W tym czasie odkryto elektron (Thomson, 1897) i jądro atomowe (Rutherford, 1911), stwierdzono, że światło wysyłane jest z atomów porcjami o energii $\Delta E = h\nu$ (Planck, 1900, Einstein, 1905) — stąd charakterystyczne linie widmowe — a wzór Balmera ciągle pozostawał niewyjaśniony.

Po doświadczeniach Rutherforda utarło się przekonanie, że atom wodoru składa się z ciężkiego dodatnio naładowanego jądra i lekkiego elektronu utrzymywanego w okolicy jądra przez siłę przyciągania kulombowskiego. Twór taki nie tylko, że nie mógł być trwały, ale na domiar złego powinien wysyłać promieniowanie o widmie ciągłym, zupełnie niepodobnym do obserwowanego liniowego widma wodoru.

Jeżeli dla prostoty przyjmijmy, że elektron porusza się w atomie po okręgu, to zapominając na chwilę o promieniowaniu wywołanym przez taki ruch, otrzymujemy z II zasady dynamiki Newtona następujący związek pomiędzy pędem (p) i promieniem (r) orbity elektronu:

$$\frac{p^2}{mr} = \frac{e^2}{r^2},$$

gdzie m — masa, zaś e — ładunek elektronu (i jądra).

Rozwiązanie zadania F 109.
Przypuśćmy, że chłodzenie wodą jest tak intensywne, iż zanurzony w niej element przewodu skokowo zmienia swoją temperaturę i że osiągnięta w ten sposób wartość temperatury nie ulega dalszym zmianom. Opór danego elementu maleje, co przy niezmiennym oporze reszty drutu i stałym napięciu źródła oznacza skokowy wzrost prądu w obwodzie. Oznacza to również zmniejszenie poboru mocy przez element przewodnika pozostający w powietrzu, wzrost jego temperatury i narastanie intensywności świecenia.

Dokładne przesledzenie zmian czasowych powyższych wielkości jest bardzo kłopotliwe rachunkowo. Ograniczymy się do rozważenia stanu ustalonego. Niech I_0 oznacza prąd płynący w obwodzie przed rozpoczęciem chłodzenia, I_k — w stanie ustalonym. Odpowiadające tym stanom opory części zanurzonej w wodzie wynoszą: R_1, R_{1k} , zaś pozostającej w powietrzu: R_2, R_{2k} .

Przyjmijmy robocze założenie $I_k < I_0$. Wynika z niego, że $R_{2k} < R_2$ (zmniejszenie temperatury części niezanurzonej). Na pewno spełniona jest nierówność $R_{1k} < R_1$. Przyjmując, że U_s jest napięciem źródła, mamy

$$I_0 = \frac{U_s}{R_1 + R_2}; \quad I_k = \frac{U_s}{R_{1k} + R_{2k}}$$

Wobec powyższych nierówności słuszna jest relacja

$$I_k > J,$$

co jest w sprzeczności z założeniem roboczym. Musi więc być $I_k > I_0$ oraz $R_{2k} > R_2$, co wystarcza, aby twierdzić, że przewodnik znajdujący się w powietrzu wydziela w stanie ustalonym większą ilość ciepła niż w stanie początkowym.

Zauważmy na koniec, iż wniosek, do którego doszliśmy, nie wymaga tak mocnych założeń jak te, które sformułowano na wstępie rozwiązania.

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r} = -\frac{p^2}{2m} = -\frac{e^2}{2r}$$

Szanowny Panie Redaktorze, otrzymałem przesłany pocztą nr 11(95) „Deltę” z artykułem na stronie 12 podpisanym moim nazwiskiem i zatytułowanym „Oddziaływanie międzycząsteczkowe”. W artykule tym nie rozpoznałem zdań z mojego tekstu, który złożyłem na ręce jednego z redaktorów. Tekst wydrukowany zawiera kilka niezwykle rażących nieścisłości i samowolnie wprowadzonych zdań.

W związku z tym proszę stanowczo o opublikowanie mojego listu oraz o wydrukowanie mojego artykułu.

Doc. dr hab. Lucjan PIELA

Pomimo braku wewnętrznej spójności w modelu Rutherforda, Bohr (1913) uwierzył w ten wzór i dodał do niego hipotezę przeskoków elektronu z jednej orbity na drugą — wzbroniony przez elektrodynamikę Maxwella sposób promieniowania w atomie. To łatwo już było pogodzić z kwantami Plancka-Einsteina:

$$\Delta E = \frac{e^2}{2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = h\nu$$

Do wzoru Balmera już bardzo blisko. Pod warunkiem, że spełniony jest związek $r \sim n^2$, czyli po skorzystaniu z zależności między pędem i promieniem orbity, $p \cdot r \sim n$ ($n = 1, 2, \dots$). Zgodność liczbowa uzyskuje się przyjmując stałą proporcjonalności równą stałej Plancka:

$$p \cdot r = n \cdot \frac{h}{2\pi}$$

Wyjaśnienie tej dziwnej relacji kwantowej (zwróćmy uwagę, że $p \cdot r$ to moment pędu elektronu) byłoby więc równoważne zrozumieniu wzoru Balmera.

Krok ten uczynił Louis de Broglie w 1923 roku, przyjmując, że nie tylko fotony, ale i wszystkie inne cząstki mają naturę falową. Elektron na orbicie atomowej to nic innego, jak stojąca fala na zamkniętej w okrąg strunie. Tylko bowiem fala stojąca jest stacjonarna, niezmienna. Z warunku na taką właśnie falę, $2\pi r = n \cdot \lambda$, oraz z powyższego wzoru Bohra uzyskujemy związek między pędem elektronu i długością związanej z nim fali:

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

taki sam, jak dla fotonu!

O Balmerze wiemy bardzo niewiele. Nie doczekał też on najwspanialszej nagrody, jaka była udziałem de Broglie'a: w 1925 roku Davisson i Germer stwierdzili, że strumień elektronów rzeczywiście zachowuje się jak fala.

Wyniki Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki, 1981 r.

Jury Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki, w składzie: Przewodniczący — prof. dr Leon Jeśmanowicz, przedstawiciel MOiW — prof. dr Włodzimierz Waliszewski, dr Jerzy Bednarczuk, dr Alicja Derkowska, dr Agnieszka Wojciechowska-Waszkiwicz, dr Marek Kordos, prof. dr Wojciech Żakowski

biorąc pod uwagę wybór tematu, treść pracy i przebieg obrony, postanowiło:

I. Wyróżnić wszystkich uczestników finału dyplomami.

II. Przyznać:

1. złoty medal i nagrodę w wysokości zł 4000,—

Jarosławowi WRÓBLEWSKIEMU z XIV LO we Wrocławiu za pracę pt. „Wokół kongruencji w pierścieniu liczb algebraicznych całkowitych”;

2. srebrny medal i nagrodę w wysokości zł 2000,—

Jackowi RZEŹNIKOWSKIEMU z II LO w Bydgoszczy za pracę pt. „Elementy geometrii metrycznej”;

3. brązowy medal i nagrodę w wysokości zł 2000,—

Elżbiecie ZIARKO z Liceum Ekonomicznego w Wieliczce za pracę pt. „Metryka miejska i jej konsekwencje w planimetrii”;

4. dwa równorzędne wyróżnienia i nagrody po zł 2000,—

Adamowi NOWAKOWI z II LO w Bydgoszczy i *Markowi ŚREDNIAWIE* z I LO w Gdańsku.

5. dwie nagrody po zł 1000,—

Wojciechowi KRYNICKIEMU z V LO w Gliwicach i *Maciejowi ZWORSKIEMU* z LO przy ambasadzie PRL w Trypolisie.

III. Przyznać nagrody pieniężne wszystkim opiekunom prac:

mgr *Cecylii TERLIKOWSKIEJ*, mgr *Kazimierzowi BANNACHOWI*, mgr *Bronisławowi PABICHOWI*, mgr *Zdzisławowi KAMROWSKIEMU*, mgr *Adelajdzie ADAMEK*, mgr *Krystynie HNATKÓW*, mgr *Elżbiecie DEDERKO*.

Skrót zwycięskiej pracy opublikujemy w nr 3/1982.

Dziękujemy naszym Czytelnikom za liczny udział w konkursie ligowym. Dotyczy to zwłaszcza dwóch pierwszych serii zadań /nrnr 1,2,3 i 4,5,6/. Rozwiązań dalszych zadań otrzymaliśmy bardzo niewiele. Nie dziwny się temu wcale, nie mamy też do nikogo żalu. Wyjaśniamy tylko, że z powodu zbyt skąpego materiału — ograniczonego praktycznie do wspomnianych dwóch serii rozwiązań — wstrzymujemy się na razie z ogłaszaniem „tabeli ligowej” — za co naszym Czytelników przepraszamy.

Dziękujemy też Autorom propozycji zadań. Zamierzamy wykorzystać większość z nich w najbliższych bądź dalszych numerach. Nasz apel o przysyłanie propozycji jest nadal aktualny. Ale uwaga: do tekstów proponowanych zadań prosimy dołączać ich rozwiązania /pełne lub skicowe/.

Zapraszamy gorąco do dalszego udziału w lidze. Terminy nadejścia rozwiązań będziemy dostosowywać do terminów ukazywania się kolejnych numerów naszego miesięcznika.