

LES VILLES A LA FOLON (Ym)

## SPIS TREŚCI

NUMERU 1(97)

Konwekcja w płaszczu Ziemi <i>dr Leszek Czechowski</i>	str. 2
Zadania	str. 5
O loksodromie i odwzorowaniu Mercatora <i>dr Ryszard L. Krupiński</i>	str. 6
Patrz w niebo	str. 8
Katakлизmy we Wszechświecie <i>doc. dr Bolesław Grabowski</i>	str. 9
Zadania, których nie umiemy rozwiązać	str. 11
O nazwach liczb <i>doc. dr Mieczysław Basaj</i>	str. 12
Klub 44	str. 16
Liczba rzeczywista jako granica ciągu liczb wymiernych	str. 17

**W następnym numerze:**  
Algorytm kostki węgierskiej

„Delta”  
matematyczno-fizyczno-astronomiczny  
miesięcznik popularny  
Polskiego Towarzystwa  
Matematycznego, Polskiego  
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
Towarzystwa Astronomicznego  
wydawany przy poparciu  
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

### Komitet Redakcyjny:

doc. dr Jerzy Bartke  
doc. dr Andrzej Bączyński  
doc. dr Bolesław Gleichgewicht  
prof. dr Kazimierz Goebel  
doc. dr Bolesław Iwaskiewicz  
doc. dr Tadeusz Iwiński  
doc. dr Andrzej Januszajtis  
doc. dr Tadeusz Jarzębowski  
prof. dr Leon Jeśmanowicz  
dr Henryk Kaczorek  
prof. dr Marek Kuczma  
mgr Andrzej Mąkowski  
prof. dr Bohdan Paczyński  
prof. dr Zdzisław Pawlak  
prof. dr Arkadiusz Piekara  
doc. dr Sławomir Ruciński  
prof. dr Konrad Rudnicki  
prof. dr Zbigniew Semadeni  
doc. dr Grzegorz Sitarski  
prof. dr Jan Stankowski

doc. dr Kazimierz Stepień  
prof. dr Mieczysław Subotowicz  
doc. dr Stefan Turnau  
prof. dr Jerzy Wdowczyk  
doc. dr Andrzej Woszczyk  
prof. dr Janusz Zakrzewski —  
wiceprzewodniczący  
prof. dr Wojciech Żakowski —  
przewodniczący

### Redaguje Kolegium w składzie:

mgr Tomasz Chlebowski  
mgr Maciej Jędrzejczak  
dr Marek Kordos — red. nac.  
dr Tomasz Kwast — z-ca red. nac.  
dr inż. arch. Jacek Mazur — ilustracje  
dr Krzysztof Plasota — red. techn. graf.  
dr Michał Szurek  
mgr Krystyna Szypcio — sekr. red.  
doc. dr Michał Święcki — z-ca red. nac.

### Adres Redakcji

ul. Hoża 69 pok. 151,  
00-681 Warszawa  
Zakład Narodowy im.  
Ossolińskich — Wydawnictwo  
Wrocław, Oddział w Warszawie  
Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.  
wyd.; 2,50 ark. druk.;  
papier offsetowy V kl. 71 g, rola 61  
Wydrukowano w Drukarni im.  
Rewolucji Październikowej  
Warszawa, ul. Mińska 65  
Nr zam. 906/12/81 L-7

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

### Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instrukcje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTA”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.

Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.

Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Konto PKO I OM W-wa 1531-912

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7 00-068 Warszawa, Poland or with

— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland.

— Earls Court Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain.

— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia

Cena 1 egzemplarza zł 10 - nr indeksu 35723/35550

Dnia 24 stycznia 1982 roku  
zmarł w Warszawie

Prof. dr Karol BORSUK

wielki matematyk  
i niezwykley człowiek



Był twórcą polskiej szkoły topologii geometrycznej, twórcą teorii retraktów i teorii kształtu, autorem wielu sławnych twierdzeń, takich jak twierdzenie o antypodach, o przedłużaniu homotopii, o rozcinaniu przestrzeni euklidesowej. Napisał około 200 prac, w tym 2 monografie. Bogactwo i głębokość stawianych przez niego problemów stanowiły i nadal stanowią źródło badań prowadzonych w kraju i zagranicą.

Wychował wielu uczniów, przekazując im swój zapał i swoje intuicje, swoje zamiłowanie do "prawdziwych" problemów i niechęć do pustych formalizmów, swą pasję odkrywczą i precyzję, swą rzetelność i uczciwość w pracy naukowej. Był wymagający wobec siebie i innych, a jednocześnie zawsze gotów służyć swym czasem, wiedzą i doświadczeniem.

W czasie wojny brał udział w tajnym nauczaniu. Był więźniem Pawiaka. Po wojnie był współorganizatorem Instytutu Matematycznego PAN oraz Seminarium Matematycznego, które przekształciło się później w Instytut Matematyki UW. Pełnił szereg odpowiedzialnych funkcji /Dyrektor Instytutu Matematyki UW, Prezes OW PTM i inne/. Był dwukrotnie laureatem Nagrody Państwowej I stopnia, laureatem Nagrody PTM im. S. Mazurkiewicza i Nagrody Fundacji Jurzykowskiego. Otrzymał medal im. Sierpińskiego. Był członkiem PAN, członkiem honorowym PTM, członkiem zagranicznym Bułgarskiej Akademii Nauk, doktorem honoris causa Uniwersytetu w Zagrzebiu.

W "Delaie" artykuły Profesora można znaleźć w numerach 3/1979 i 11/1980.

TWIERDZENIE /K. Borsuk, Über die Zerlegung einer Euklidischen  $n$ -dimensionalen Vollkugel in  $n$ -Mengen, Verh. Intern. Math. Kongr. Zürich. 2/1932/, 192/.

Przy dowolnym rozkładzie kuli  $n$ -wymiarowej o średnicy 1 na  $n$  podzbiorów  $A_1, \dots, A_n$ , co najmniej jeden ze zbiorów  $A_i$ ,  $i=1, \dots, n$ , ma też średnicę 1.

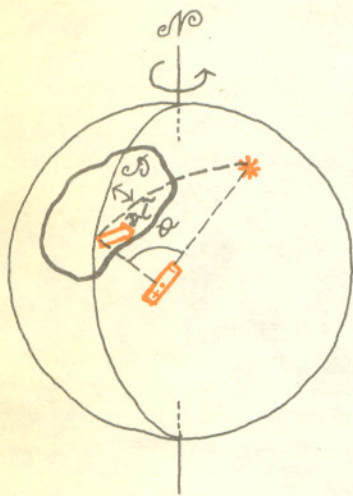
W związku z tym wynikiem Karol Borsuk postawił następujący PROBLEM. Czy dowolny ograniczony podzbiór  $A$  przestrzeni  $E^n$  o średnicy  $\text{diam } A > 0$  można rozłożyć na  $n+1$  zbiorów o średnicach mniejszych od  $\text{diam } A$ ?

O historii tego problemu będzie można dowiedzieć się z jednego z dalszych numerów "Deltę".

# Konwekcja w płaszczu Ziemi

Dr Leszek

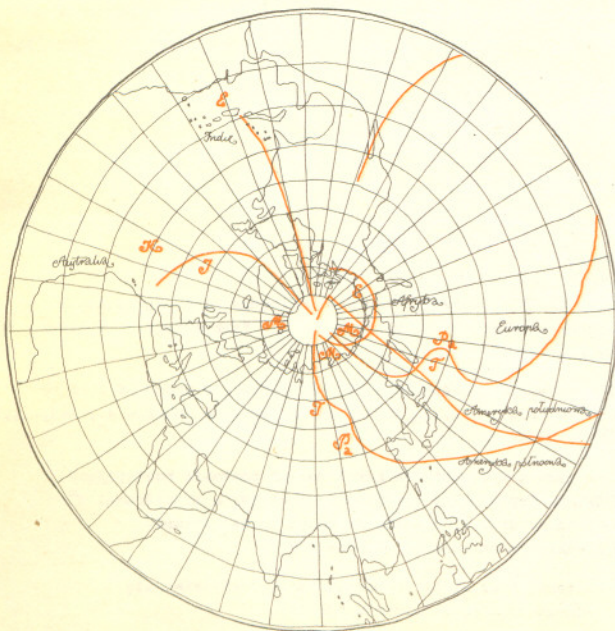
CZECHOWSKI



→ kierunek pola istniejącego w minionych epokach geologicznych określamy na podstawie kierunku namagnesowania skał powstałych w tym czasie. Okazuje się bowiem, że skała najtrwalej zachowuje to namagnesowanie, które miała w momencie swego powstania. W chwili, gdy stygnąca magma osiąga temperaturę punktu Curie, jest ona namagnesowana zgodnie z zewnętrznym polem magnetycznym. Powyżej punktu Curie namagnesowanie to niszczone jest przez ruch cieplny cząsteczek, a później utrzymuje się niezależnie od działania innych zewnętrznych pól magnetycznych. Dla magnetytu, który jest odpowiedzialny za namagnesowanie większości skał, temperatura punktu Curie wynosi 580°C.

Rys. 1  
Inklinacja to kąt, który tworzy wektor natężenia pola magnetycznego z poziomem, a deklinacja to kąt między wektorem pola i płaszczyzną południka.

Rys. 2. Trasy biegunów geomagnetycznych względem kontynentów. Literami oznaczono położenie bieguna w danym okresie geologicznym: Pa — paleozoik, E — kambry, K — kreda, J — jura, T — trias, M — mezozoik.



„Patrząc na mapę, upewniamy się dowodnie, że Ameryka odwręcała się od Starego Świata i na całej swej długości odpowiada doskonale zachodniej części naszego kontynentu, poprzez wybrzeża, które znajdują się naprzeciwko Europy i Afryki”. Tak napisał w 1859 roku A. Snider. Jest on też autorem pierwszego w historii rysunku przedstawiającego połączone kontynenty. Ich rozerwanie przypisuje kataklizmowi, który zdarzył się parę tysięcy lat temu, a na poparcie tej tezy przytacza liczne podobieństwa kultur Starego i Nowego Świata, które dziś tak chętnie cytują zwolennicy hipotezy o istnieniu Atlantydy.

Obecnie, kiedy zdajemy sobie sprawę, że rozdzielenie kontynentów nastąpiło dziesiątki milionów lat przed pojawieniem się człowieka na Ziemi, tylko pierwszy z powyższych argumentów zachował swą wartość. Pełną i zadowalającą z punktu widzenia nauki argumentację przedstawił dopiero w 1915 roku niemiecki geograf Alfred Wegener.

Ruch kontynentów, według Wegenera, rozpoczął się od rozpadu jednego pierwotnie kontynentu — Pangei. Na poparcie tej hipotezy przytaczał on argumenty geofizyczne, geologiczne, paleontologiczne, a także geodezyjne. Wśród argumentów geologicznych na uwagę zasługuje fakt, że niektóre struktury geologiczne Europy i Afryki znajdują swoją kontynuację na obszarze obu Ameryk.

Podobieństwo fauny i flory różnych kontynentów skłaniało paleontologów do wysunięcia hipotezy o istnieniu w przeszłości przesmyków lądowych, którymi zwierzęta i rośliny przedostawały się na kontynenty rozdzielone obecnie oceanem. Hipoteza Wegenera zakładająca zespolenie, dziś oddalonych, kontynentów wyjaśnia to podobieństwo gatunków biologicznych w sposób bardziej chyba przekonywający.

Pomiary geodezyjne również potwierdzają tę hipotezę. Okazuje się, na przykład, że odległość Waszyngtonu i Paryża rośnie obecnie z prędkością około 1,5 cm/rok.

Podobnych argumentów można przytoczyć jeszcze wiele, my jednak ograniczymy się do szczegółowego omówienia jednego, opartego na wynikach badań paleomagnetycznych, czyli badań pola magnetycznego Ziemi w przeszłości.

Kierunek pola istniejącego w minionych epokach geologicznych określamy na podstawie kierunku namagnesowania skał powstałych w tym czasie. Okazuje się bowiem, że skała najtrwalej zachowuje to namagnesowanie, które miała w momencie swego powstania. W chwili, gdy stygnąca magma osiąga temperaturę punktu Curie, jest ona namagnesowana zgodnie z zewnętrznym polem magnetycznym. Powyżej punktu Curie namagnesowanie to niszczone jest przez ruch cieplny cząsteczek, a później utrzymuje się niezależnie od działania innych zewnętrznych pól magnetycznych. Dla magnetytu, który jest odpowiedzialny za namagnesowanie większości skał, temperatura punktu Curie wynosi 580°C.

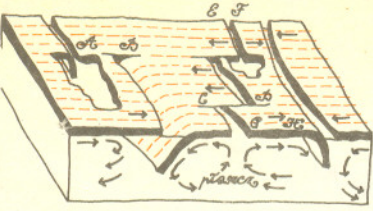
Tak więc kierunek namagnesowania skał pozwala znaleźć deklinację ( $D$ ) i inklinację ( $I$ ) pola magnetycznego w przeszłości. Sama znajomość tych wielkości niewiele by nam jednak dała, gdyby nie fakt, że pole Ziemi jest (z dokładnością około 10%) polem dipolowym. Dla takiego pola istnieje ścisły związek pomiędzy odległością kątową od bieguna ( $\theta$ ) i inklinacją pola magnetycznego:

$$\operatorname{tg} I = 0,5 \operatorname{ctg} \theta.$$

Ponieważ znając  $D$  możemy ustalić kierunek wskazujący biegun północny, więc  $I$  i  $D$  pozwalają wyznaczyć położenie bieguna geomagnetycznego (rys. 1).

Przebadanie tysięcy próbek skał o różnym wieku pozwoliło ustalić drogę bieguna względem każdego z kontynentów (rys. 2). Wniosek jest jednoznaczny — kontynenty poruszały się zarówno względem bieguna jak i względem siebie. Nie można bowiem wytłumaczyć jedynie ruchem bieguna, dlaczego badania skał pochodzących z jednego kontynentu wyznaczają odmienną drogę jego wędrówki niż podobne wyniki uzyskane na podstawie badań skał innego kontynentu.

W początkach lat pięćdziesiątych szczegółowe sondowanie Atlantyku doprowadziło do odkrycia doliny ryftowej przebiegającej wzdłuż Grzbietu Środkowo-Atlantyckiego. Podobną dolinę odkryto później także na dnie Pacyfiku. Grzbiet Wschodniopacyficzny (patrz mapka na okładce) jest wzniesieniem szerokości kilku tysięcy kilometrów, ciągnącym się na przestrzeni prawie 10 000 km. Wysokość jego wynosi około 2000 m ponad średni poziom dna oceanu. Niektóre, niewielkie jego fragmenty wystają nad powierzchnię, tworząc małe wyspy. Środkiem grzbietu biegnie stosunkowo wąska, lecz wyraźna dolina. To właśnie dolina ryftowa. Odkrycie dolin ryftowych stało się bodźcem do sformułowania nowej teorii zwanej tektoniką płyt, która w latach sześćdziesiątych zastąpiła teorię Wegenera. Podstawowe założenia tektoniki płyt zamknąć można w trzech punktach:



Rys. 3

O konwekcji pisaliśmy w numerze 4/1981.

1. Litosfera Ziemi podzielona jest na poruszające się względem siebie niemal sztywne płyty. Jeżeli na płycie znajduje się kontynent, to dryfuje on razem z płytą.
2. Granicami płyt są ryfty oceaniczne, rowy oceaniczne i uskoki transformujące.
3. Rozsuwanie się płyt odbywa się w strefie grzbietów oceanicznych, zbliżanie — w strefie rowów oceanicznych, zaś w uskokach transformujących następuje równoległe przesuwanie się płyt względem siebie.

Główną ideę teorii przedstawia rys. 3. Dwie płyty (grubości kilkudziesięciu kilometrów) rozdzielone grzbietem *E-G* rozsuwają się w przeciwnych kierunkach. Po dotarciu do rowu oceanicznego *H-F*, prawa płyta zagina się i zagłębia w płaszcz Ziemi. Bardziej skomplikowana jest lewa płyta. Jej część również zagłębia się w płaszcz, część natomiast nasuwa się na płytę zagłębiającą się z prawej strony.

Nieciągłości, które rozdzielają płyty poruszające się równoległe do siebie, to uskoki transformujące. Na rys. 3 uskoki *C-D* łączy grzbiet z grzbietem, a *A-B* rów z rowem. Dno Pacyfiku na przykład składa się z kilku płyt o bardzo różnych rozmiarach. Największą z nich jest Płyta Pacyficzna stanowiąca 21% powierzchni Ziemi. Porusza się ona w kierunku północno-zachodnim w stronę wielkich rowów oceanicznych: Aleuckiego, Kurylsko-Kamczackiego, Japońskiego i Mariańskiego.

Pouczające jest prześledzenie granicy płyty na mapce na okładce. Rowy oceaniczne i grzbiety są widoczne na tle rzeźby dna. Łatwo odnaleźć też uskoki transformujące dla typu grzbiet-grzbiet. Dotychczas staraliśmy się odpowiedzieć na pytanie: czy i jak poruszają się kontynenty lub płyty litosfery. Czytelnik ma jednak prawo zapytać, jaka jest przyczyna dryfu. Otóż przyczyną ruchu płyt jest konwekcja w płaszczu Ziemi, źródłem energii natomiast — energia cieplna wydzielana przy rozpadzie pierwiastków radioaktywnych zawartych w płaszczu.

Konwekcja stanowi jeden ze sposobów transportu ciepła. Jest to makroskopowy ruch cieczy lub gazu. Dzięki zwykłemu przewodnictwu ciecz pobiera ze źródła ciepło, które następnie jest przenoszone z cieczą do chłodnicy, gdzie — znowu dzięki przewodnictwu — zostaje oddane. Przykładem może być konwekcja w podgrzewanym naczyniu z wodą. Woda pobiera od dna ciepło i oddaje je powietrzu nad naczyniem. Okazuje się, że ilość energii przenoszonej drogą konwekcji jest na ogół większa niż dzięki przewodnictwu i promieniowaniu.

Rozważmy to zjawisko na przykładzie cieczy w płaskim naczyniu podgrzewanym od dołu, a chłodzonym od góry. Jeśli ogrzewalibyśmy naczynie idealnie równomiernie, to najniższej utworzyłaby się warstwa gorącej cieczy, a nad nią warstwy coraz chłodniejsze. Ale ogrzewana ciecz zwiększa swoją objętość, a więc cieplejsza jest lżejsza od zimniejszej. Dlatego taki warstwowy układ cieczy jest niestabilny. Wystarczy minimalne zaburzenie cieczy, aby rozpoczął się ruch. Wydzielmy myślowo pewną objętość cieczy. Jeżeli wskutek zaburzenia przeniesie się ona choćby minimalnie w górę, to zostanie otoczona cieczą trochę chłodniejszą, a więc i cięższą. Siła wyporu zgodnie z prawem Archimedeasa znacznie wypychać rozpatrywaną objętość cieczy w górę, gdzie różnice temperatur staną się większe, a więc i większa siła wyporu. Ostatecznie ciepła ciecz znajdzie się w pobliżu powierzchni, pociągając za sobą strumień ciepłej cieczy z dna. Jednocześnie na jej miejsce napływają znacznie z góry ciecz chłodna — cięższa. Na powierzchni ciepły płyn odda swoje ciepło i jako cięższy znów znacznie opadać w dół. Utworzy się w ten sposób obszar, gdzie ciecz porusza się po zamkniętym torze, tworząc tzw. komórki konwekcyjną.

Okazuje się jednak, że do powstania konwekcji nie wystarczy, by temperatura na dole była wyższa niż na górze. Istnieją bowiem dwa zjawiska, które utrudniają pojawienie się konwekcji. Są to lepkość (tarcie wewnętrzne) cieczy oraz przewodnictwo cieplne.

Tarcie wewnętrzne charakteryzuje współczynnik lepkości cieczy  $\eta$ . Przykładowo siła oporu stawiana przez ciecz kuli o promieniu  $r$  poruszającej się z prędkością  $v$  jest równa

$$F_0 = 6\pi r\eta v, \quad \text{a więc jest proporcjonalna do } \eta.$$

W cieczy łatwo przewodzącej ciepło konwekcja także będzie utrudniona. Wynika to z faktu, że temperatura w rozpatrywanej uprzednio objętości może w takim przypadku szybko zrównać się z temperaturą otaczającej cieczy i w efekcie siła wyporu zaniknie. Ilość ciepła przewodzonego w jednostce czasu jest proporcjonalna do współczynnika przewodnictwa cieplnego  $K$ . Interesuje nas jednak nie ilość przewodzonego ciepła, a raczej szybkość wyrównywania się temperatur. Dlatego też wygodnie jest wprowadzić tzw. współczynnik dyfuzji temperaturowej  $\kappa$ . Ilość ciepła odpowiadająca zmianie temperatury jednostki objętości o  $\delta T$  wynosi  $Q = c\rho\delta T$ , gdzie  $c$  jest ciepłem właściwym, a  $\rho$  gęstością cieczy. Ponieważ  $Q \sim K$  mamy

$$\delta T \sim \frac{K}{c\rho} =: \kappa.$$

Siła wyporu jest proporcjonalna do różnicy gęstości chłodnej i gorącej cieczy  $\Delta\rho$  oraz przyspieszenia grawitacyjnego  $g$ . Możemy więc napisać

$$F_w \sim \Delta\rho \cdot g \sim \alpha\Delta Tg,$$

gdzie  $\alpha$  jest współczynnikiem rozszerzalności objętościowej cieczy, a  $\Delta T$  różnicą temperatur chłodnej i gorącej cieczy.

**Rozwiązanie zadania F 107.**  
 Zbliżenie naelektryzowanego ciała wywołuje przegrupowanie elektronów w monecie (zjawisko indukcji elektrostatycznej) oraz polaryzację dielektryka, jakim jest woda. W efekcie zarówno moneta, jak i ciecz są przyciągane przez ciało. Ciecz ulega jednak deformacji, na powierzchni tworzy się „wzgórek”, z którego, niczym z równi pochyłej, zeslizguje się pięćdziesięciogroszówka. Skutek jest więc taki, jak gdyby ciało ją odpychało. Czytelnikowi proponujemy zastanowienie się nad przytoczonymi poniżej pytaniami i eksperymentalne zweryfikowanie odpowiedzi. Ujawnią się wtedy pewne szczegóły, które pominięto w rozwiązaniu.

1. Jak wynik doświadczenia zależy od wielkości monety?
2. Jakie będzie zachowanie pływającej igły?
3. Czy przebieg doświadczenia uległby zmianie, gdyby zamiast monety użyć krążka z dielektryka?

Charakterystyczne rozmiary komórek konwekcyjnych są zwykle rzędu głębokości cieczy. Tylko taka konwekcja jest stabilna, tzn. tylko wtedy po „zamieszaniu” ciecz szybko wraca do pierwotnego stanu. Każda komórka o szerokości dużo większej niż wysokość jest niestabilna i chętnie rozpada się na kilka mniejszych. Na przykład proces dzielenia się „za szerokiej” komórki w płaszczu Ziemi przebiega następująco:

Biorąc pod uwagę trzy omówione wyżej czynniki: siłę wyporu, siłę oporu i przewodnictwo cieplne cieczy widzimy, że o pojawieniu się konwekcji decyduje następująca wielkość:

$$\frac{F_w}{F_o \cdot \kappa} \sim \frac{\alpha \rho^2 g \Delta T}{\eta K}$$

Zbadajmy jej wymiar:

$$\left[ \frac{\alpha \rho^2 g \Delta T}{\eta K} \right] = \frac{\frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{kg}} \frac{1}{\text{K}} \left( \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right)^2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \text{K}}{\frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} \frac{\text{J}}{\text{m} \cdot \text{K} \cdot \text{s}}} = \frac{1}{\text{m}^3}$$

Chcielibyśmy oczywiście, żeby nasze rozważania nie zależały od tego, jakimi jednostkami się posługujemy. Żeby otrzymać wielkość bezwymiarową wystarczy pomnożyć  $F_w/F_o \cdot \kappa$  przez wielkość o wymiarze  $\text{m}^3$ . Jedyną wielkością o wymiarze długości występującą w tym problemie jest grubość warstwy cieczy  $h$ . Wiemy ponadto z doświadczenia, że konwekcja występuje łatwiej, gdy grubość ta jest duża.

Tak więc konwekcja pojawi się wtedy, gdy bezwymiarowa liczba (liczba Rayleigha)

$$R = \frac{\alpha \rho^2 g \Delta T h^3}{\eta K}$$

będzie miała wartość większą od pewnej wartości krytycznej. Przykładowo dla nieskończonej warstwy cieczy o skończonej grubości krytyczna wartość liczby Rayleigha wynosi 657, jeżeli nie występuje tarcie między cieczą i ściankami, i około 1800, jeśli tarcie to występuje. W przypadku konwekcji w warstwie kulistej wartość ta jest rzędu kilkudziesięciu tysięcy.

Zanim zaczniemy mówić o warunkach pojawienia się konwekcji w płaszczu Ziemi, musimy jednak rozstrzygnąć, czy materiał, z którego zbudowany jest płaszcz, ma własności cieczy. Próbowano to zrobić już w pierwszej połowie XIX wieku. Obliczono w tym celu precesję osi Ziemi przy założeniu, że jej wnętrze wypełnia ciecz. Porównanie z obserwacjami wykazało jednak, że założenie to jest niesłuszne — wnętrze Ziemi jest ciałem stałym. Wniosek ten potwierdziły później także obserwacje fal sejsmicznych rozchodzących się w płaszczu.

Jednak to, że płaszcz zachowuje się jak ośrodek sprężysty dla fal o okresie drgań równym kilka sekund, nie oznacza, że podobnie będzie dla sił działających miliony lat. Wosk, ciało miękkie i deformowalne, wytrzymuje długotrwałe działanie małych sił. Dzięki temu w londyńskim gabinecie figur woskowych postacie wykonane z wosku nie deformują się pod własnym ciężarem. Ale bywa też i tak, że ciało dość twarde, np. smoła, zachowuje się jak gęsta ciecz. Podobnie ruch lodowca spowodowany jest rozplywaniem się lodu pod własnym ciężarem. Może własności takie mają również skały, z których zbudowany jest płaszcz Ziemi?

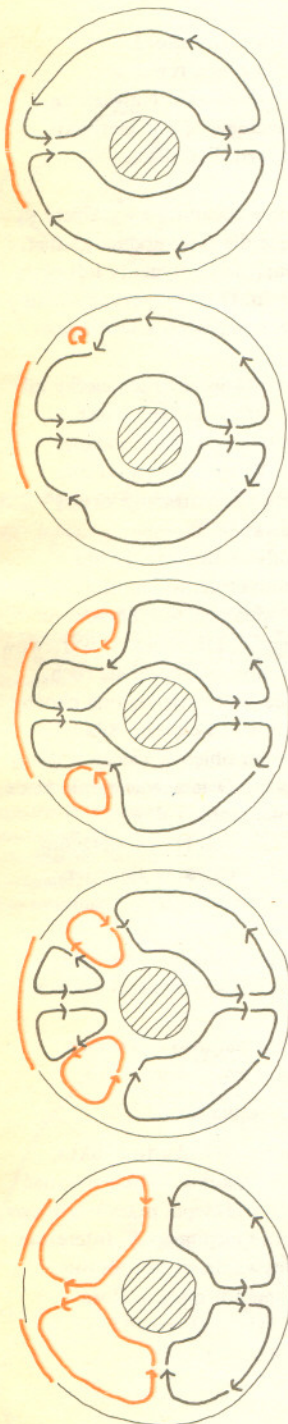
Jednym z argumentów przemawiających za taką możliwością jest istnienie na Ziemi obszarów, obciążonych lodowcem podczas ostatniego zlodowacenia, które po ustąpieniu lodowca (ok. 15 tys. lat temu) zaczęły się podnosić! Ruch ten trwa do dzisiaj z prędkością rzędu kilku centymetrów na stulecie.

Najbardziej znanymi przykładami takich obszarów jest Półwysep Skandynawski i północno-wschodnia część Kanady. Badania grawimetryczne wykazują niezbicie, że podnoszenie się nie jest wynikiem rozprężania ściśniętych skał, lecz wywołane jest dopływem materii spod sąsiednich obszarów. A więc jednak płaszcz ma własności cieczy. Na podstawie szybkości podnoszenia się można było obliczyć jej lepkość.

Badania większości obszarów polodowcowych wskazują na to, że górną część płaszcz (ok. 100 km) traktować trzeba jak ciało sprężyste. Poniżej jest dość cienka astenosfera o lepkości  $5 \cdot 10^{19}$  kg/m·s, zaś lepkość reszty płaszczka jest rzędu  $10^{21}$  kg/m·s.

O tym, czy konwekcja jest możliwa, decyduje, jak już wiemy, wartość liczby Rayleigha. Na podstawie badań laboratoryjnych skał, z których najprawdopodobniej zbudowany jest płaszcz, określono ciepło właściwe, współczynnik przewodnictwa cieplnego i współczynnik rozszerzalności cieplnej. Wynoszą one odpowiednio  $1,3 \cdot 10^3$  J/kg·K,  $4,6$  J/m·K·s,  $4 \cdot 10^{-5}$  1/K. Wielkości te słabo zależą od ciśnienia i temperatury, dlatego można przyjąć, że są one w całym płaszczu stałe. Gęstość wyznacza się zwykle na podstawie badań sejsmicznych. Do określenia liczby Rayleigha konieczne są jeszcze dwie wielkości: grubość warstwy konwekcyjnej i różnica temperatur.

Nie zostało dotychczas rozstrzygnięte, jaką część płaszczka Ziemi obejmuje konwekcja. Ponieważ w grubej warstwie konwekcja pojawia się łatwiej (duża liczba Rayleigha) można sądzić, że obejmuje ona cały płaszcz, a więc sięga do głębokości 2900 km. Istnieją jednak argumenty za tym, że grubość komórek konwekcyjnych wynosi około 700 km. Trzęsienia Ziemi występują tylko do tej głębokości. Brak głębszych trzęsień może świadczyć o braku wzajemnych ruchów w dolnej części płaszczka. Na głębokości tej następuje również gwałtowny skok gęstości płaszczka. Mógłby on stanowić przeszkodę dla prądów konwekcyjnych. Problem grubości warstwy objętej konwekcją pozostaje więc otwarty.



Niewielkie początkowo zaburzenie rozrasta się w coraz większą komórkę, która po pewnym czasie rozrywa tę „za szeroką”. Jedna z trzech powstałych w ten sposób komórek znika, a dwie pozostałe osiągają stabilne rozmiary.

miliony lat wstecz

3 000

2 000

1 000

300

dziś:

O jądro Ziemi,  
G komórka konwekcyjna,  
K kontynent.

Rys. 4

Oszacujemy liczbę Rayleigha od dołu. Dla  $h = 10^{21}$  kg/m $\cdot$ s,  $\eta = 700$  km,  $\Delta T = 1000^\circ$  C

$$R \approx 34\,000\,000.$$

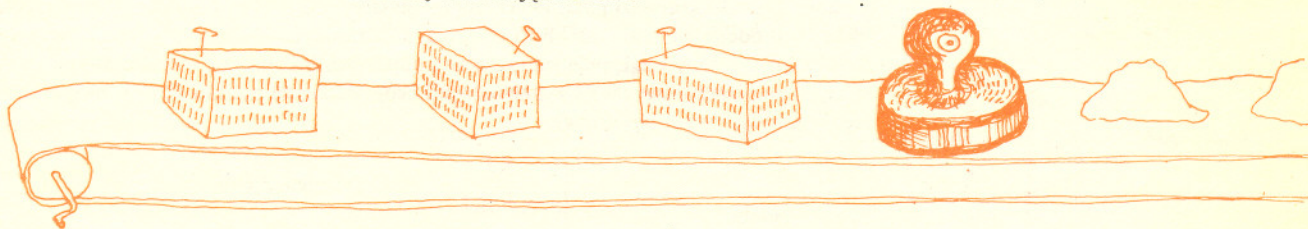
Czyli nawet przy wyborze najgorszych, z punktu widzenia konwekcji, wartości parametrów liczba Rayleigha znacznie przekracza wielkość krytyczną. Tak więc konwekcja musi się pojawić.

Ciekawą hipotezę wiążącą rozmieszczenie kontynentów z konwekcją w płaszczu Ziemi i rozmiarami jądra Ziemi wysunął w 1956 roku fizyk angielski Stanku Runcorn. Założył on, że jądro wydzielało się stopniowo z początkowo jednorodnego materiału, z którego zbudowana była Ziemia. Materiał ten zawierał trzy składniki: najcięższy — żelazo i nikiel, ciężkie ultrazasadowe skały i najlżejsze skały kwaśne. Żelazo i nikiel tworzyły jądro, a lekkie skały wydzielały się na powierzchnię. Jednocześnie w płaszczu zachodziła konwekcja. Okazuje się, że wielkość komórek konwekcyjnych określona jest przez rozmiary jądra. Dla małego jądra cały płaszcz Ziemi może obejmować jedna wielka komórka konwekcyjna w kształcie torusa (rys. 4). W miarę wzrostu jądra przepływ taki staje się niestabilny i komórka rozpada się na dwie mniejsze.

Dopóki istniała jedna komórka konwekcyjna, lekki materiał spiętrzał się nad obszarem, gdzie chłodny strumień konwekcyjny opadał w dół tworząc jeden kontynent. Gdy promień jądra zwiększył się do 0,06 promienia Ziemi, nastąpił rozpad komórki na dwie mniejsze. Nowy system prądów konwekcyjnych rozerwał kontynent i rozsunął jego części. Dalszy wzrost jądra powodował dalszy podział komórek konwekcyjnych. Obecnie, gdy promień jądra wynosi 0,55 promienia Ziemi, należy się spodziewać pięciu komórek konwekcyjnych.

Rozpad komórek musi być katastrofą na ogólnoziemską skalę, należy się więc spodziewać w tym okresie wzrostu aktywności wulkanicznej. Rzeczywiście — badania wieku skał magmowych wykazały istnienie czterech okresów, kiedy aktywność była wyjątkowo duża: 2600, 1800, 1000 i 250 mln lat temu. Przyjmując, że ilość żelaza osadzająca się w jądrze jest proporcjonalna do powierzchni jądra oraz do ilości żelaza pozostałego w płaszczu można wyznaczyć okresy, kiedy następować powinny zmiany konwekcji. Wyniki tych obliczeń przedstawione są na rys. 4.

Hipoteza Runcorna choć, jak się okazało, oparta na zbyt prostych założeniach wskazuje na niezwykle interesującą możliwość powiązania wędrówki kontynentów ze zmianami konwekcji w miarę wzrostu jądra Ziemi.



## Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 283. Przekątne  $AC$  i  $BD$  dzielą czworokąt  $ABCD$  na trójkąty  $OAB$ ,  $OBC$ ,  $OCD$  i  $ODA$ , przy czym promienie okręgów wpisanych w te trójkąty są równe. Pokazać, że  $ABCD$  jest rombem. Rozwiązanie na str. 10

M 284. Znaleźć ostatnią cyfrę liczby  $[(6 + \sqrt{31})^{1982}]$ .  $[x]$  oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od  $x$ .

Rozwiązanie na str. 9

M 285. Pokazać, że jeżeli dowolnie ponumerujemy punkty zaznaczone na rysunku liczbami 1, 2, ..., 18, to znajdzie się odcinek, dla którego różnica numerów końców będzie większa od trzech.

Rozwiązanie na str. 11

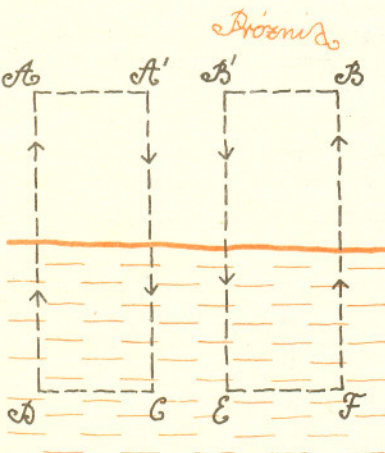
Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

F 106. Różnoimienne ładunki przyciągają się w próżni silniej niż w dielektryku. Przenosząc zatem równocześnie dane ładunki po torach:  $AA'CDA$  i  $BB'EFB$  (patrz rysunek) uzyskujemy „perpetuum mobile”. Znaleźć lukę w rozumowaniu.

Rozwiązanie na str. 8

F 107. Na powierzchni wody pływa moneta (np. pięćdziesięciogroszówka). Co nastąpi, gdy zbliży się do niej naelektryzowane ciało?

Rozwiązanie na str. 3



Ciekoty dielektryk

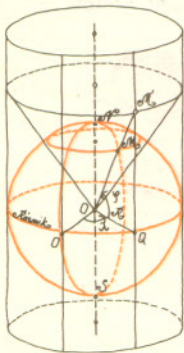
# O loksodromie i odwzorowaniu Mercatora

Dr Ryszard  
S. KRUPIŃSKI

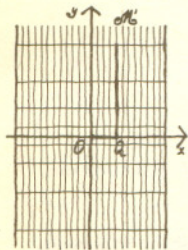
*Navigare necesse est, vivere non est necesse*  
(Plutarch)

Zeglowanie jest koniecznością,  
życie nią nie jest

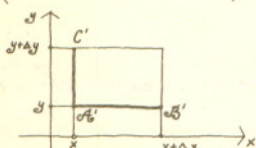
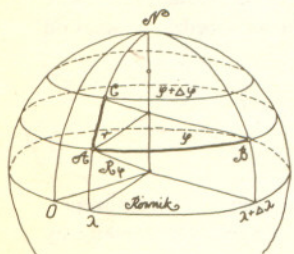
Dowód, że sfera nie jest rozwijalna na płaszczyźnie, można otrzymać ze słynnego *theorema egregium* Gaussa: przy izometriach wewnętrznych (nie zmieniających długości krzywych) krzywizna całkowita powierzchni nie zmienia się. Krzywizna całkowita powierzchni  $S$  w punkcie  $x \in S$  to iloczyn najmniejszej i największej z krzywizn krzywych przechodzących na  $S$  przez punkt  $x$ . Płaszczyzna ma oczywiście zerową krzywiznę całkowitą, a sfera o promieniu  $R$  — krzywiznę  $R^{-2}$ .



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

## I. Odwzorowanie Mercatora

Mapy nawigacyjne stanowią, oprócz instrumentów nawigacyjnych (busola, sekstans, radar, log,...), podstawowe narzędzie pracy oficera nawigacyjnego podczas wachty. Instrumenty nawigacyjne przechodzą ciągłą ewolucję, od prostych busol do systemów radiolokacyjnych (Omega, Decca). Tymczasem mapy nawigacyjne przetrwały nieomal w swej pierwotnej formie prawie od czterech stuleci. Najczęściej statek porusza się po krzywej nazywanej loksodromą (opis poniżej), która ma kształt spiralny. Wykreślenie takiej krzywej na dowolnej mapie danego obszaru morskiego, w trudnych warunkach morskich (statek w ruchu) byłoby wręcz niewykonalne. Najlepiej by było, aby obrazem loksodromy na mapie była linia prosta, którą można najłatwiej wykreślić, jak również odczytać kąty między obrazem loksodromy a obrazami południków ziemskich. Z zadania skonstruowania takiej mapy wywiązał się, ze znakomitą rezultatem, w 1569 r. kartograf flamandzki G. Cremer nazywany Mercatorem.

Podany przez Mercatora sposób odwzorowania powierzchni kuli (sfery) na płaszczyźnie znalazł powszechne zastosowanie w kartografii nawigacyjnej, gdzie przetrwał po dzień dzisiejszy. Można wykazać, że sfera nie jest rozwijalna na płaszczyźnie. Nie można np. rozciąć nożyczkami papierowej sfery tak, aby otrzymać obszar płaski. Powierzchniami rozwijalnymi na płaszczyźnie są natomiast np. powierzchnia boczna walca lub stożka. Mercator zastosował pośredni sposób odwzorowania sfery na płaszczyźnie. Najpierw odwzorowuje się sferę na powierzchnię boczną walca, następnie powierzchnię walca na płaszczyznę. Załóżmy, dla uproszczenia, że Ziemia ma kształt kuli. Możemy opisać na Ziemi walec kołowy styczny do niej wzdłuż równika (patrz rys. 1). Każdemu punktowi  $M$  powierzchni Ziemi (poza biegunami) przyporządkowujemy punkt  $M'$  powierzchni walca, który jest punktem przecięcia powierzchni walca półprostą  $OM$ , gdzie  $O$  jest środkiem Ziemi. Tak określone odwzorowanie jest wzajemnie jednoznaczne, tylko bieguny Ziemi nie mają obrazu. Obrazami równoleżników są okręgi, jako przekroje powierzchni bocznej walca powierzchniami stożków. Obrazami południków są tworzące (proste) powierzchni bocznej walca. Po rozcięciu powierzchni bocznej walca wzdłuż tworzącej będącej np. obrazem południka  $\lambda = 180^\circ$  i rozwinięciu jej na płaszczyźnie otrzymujemy płaski obraz powierzchni Ziemi (bez biegunów). Obrazem płaskim powierzchni Ziemi jest więc pas płaszczyzny, obrazy południków tworzą pęk prostych równoległych do krawędzi pasa, a obrazy równoleżników — pęk odcinków prostopadłych do krawędzi pasa. Obierzmy na płaszczyźnie prostokątny układ współrzędnych tak, aby oś odciętych zawierała obraz równika, a oś rzędnych — obraz południka zerowego. Z rys. 1 odczytujemy wzajemnie jednoznaczność między współrzędnymi punktu  $M'(x, y)$  na płaszczyźnie  $Oxy$  i współrzędnymi geograficznymi punktu  $P(\varphi, \lambda)$  na powierzchni Ziemi (z wyłączeniem biegunów)

$$(1) \quad \begin{cases} x = R\lambda \\ y = R \operatorname{tg} \varphi \end{cases} \quad R \text{ — promień Ziemi.}$$

Odwzorowanie (1) nazywamy rzutem walcowym. Uogólnieniem (1) jest rzut walcowy normalny, w którym rzędna jest dowolną funkcją szerokości geograficznej:

$$(2) \quad \begin{cases} x = R\lambda \\ y = f(\varphi). \end{cases}$$

Z określenia rzutu walcowego wynika, że skala na osi  $Ox$  jest regularna, a na osi  $Oy$  — nieregularna (patrz rys. 2). W rzucie tym obraz ulega zniekształceniu zarówno w kierunku równoleżnikowym jak i południkowym. Wyznamy funkcję  $y = f(\varphi)$  taką, żeby obydwa zniekształcenia były równe.

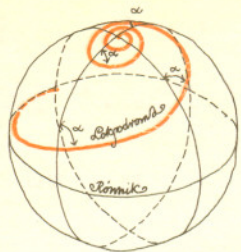
Niech będą dane na powierzchni Ziemi punkty  $A(\varphi, \lambda)$ ,  $B(\varphi, \lambda + \Delta\lambda)$  oraz  $C(\varphi + \Delta\varphi, \lambda)$  gdzie  $\Delta\varphi$ ,  $\Delta\lambda$  — dowolne, niezerowe przyrosty szerokości i długości geograficznych (patrz rys. 3). Obrazami punktów w rzucie (2) są punkty  $A'(x, y)$ ,  $B'(x + \Delta x, y)$  i  $C'(x, y + \Delta y)$ , gdzie  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  — różne od zera przyrosty zmiennych  $x$  i  $y$ , ponadto  $\Delta x = R \cdot \Delta\lambda$ .

Granice  $g_1$  stosunku długości odcinka  $A'B'$  do długości łuku  $\widehat{AB}$ , przy  $\Delta\lambda \rightarrow 0$ , nazywamy zniekształceniem równoleżnikowym, natomiast granicę  $g_2$  stosunku długości odcinka  $A'C'$  do długości łuku  $\widehat{AC}$ , przy  $\Delta\varphi \rightarrow 0$  nazywamy zniekształceniem południkowym w punkcie  $A$  w rzucie (2), (patrz rys. 3):

$$g_1 = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{|A'B'|}{|\widehat{AB}|} = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{R \cdot \Delta\lambda} = \frac{1}{\cos \varphi},$$

$$g_2 = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{|A'C'|}{|\widehat{AC}|} = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{1}{R} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta\varphi} = \frac{1}{R} \frac{dy}{d\varphi}.$$

Warunek  $g_1 = g_2$  oznacza, że w odwzorowaniu (2) nie ulegają zmianie kąty (tzn. kąty między krzywymi na sferze równają się kątom między rzutami krzywych na płaszczyźnie). Takie odwzorowanie nazywamy odwzorowaniem walcowym normalnym równokątnym (wiernokątnym) lub odwzorowaniem walcowym (rzutem) Mercatora.



Rys. 4

Z równości  $g_1 = g_2$  wynika równanie różniczkowe

$$\frac{1}{R} \frac{dy}{d\varphi} = \frac{1}{\cos \varphi},$$

którego rozwiązaniem ogólnym jest funkcja

$$y = R \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right| + C.$$

Ponieważ  $-45^\circ < \frac{\varphi}{2} < 45^\circ$ , więc  $-\infty < \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) < +\infty$ , a tym samym

$$y = R \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) + C.$$

Ponieważ dla  $\varphi = 0$  mamy  $y = 0$ , więc stała całkowania  $C$  równa jest 0. Wykazaliśmy, że między współrzędnymi punktów  $M'(x, y)$  i  $M(\varphi, \lambda)$  w rzucie Mercatora zachodzą związki:

$$(3) \quad \begin{cases} x = R \cdot \lambda \\ y = R \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right). \end{cases}$$

## II. Loksodroma

Loksodromą (z greck.:  $\lambda\omicron\varsigma\omicron\sigma$  „krzywy” +  $\delta\rho\omicron\mu\omicron\sigma$  „bieg”) nazywamy krzywą na powierzchni Ziemi, która przecina każdy południk pod danym, ustalonym kątem skierowanym  $\alpha$  ( $\alpha \in \langle 0; 360^\circ \rangle$ ). W nawigacji kąt ten nazywany jest kątem drogi lub azymutem loksodromy. Nazwa „loksodroma” została wprowadzona przez uczonego holenderskiego Snelliusa w 1624 r. Loksodroma ma kształt przestrzennej „spirali logarytmicznej” zbliżonej asymptotycznie do biegunów (patrz rys. 4). Pokażemy, że obrazem loksodromy w rzucie Mercatora jest linia prosta. Dowód: Na rys. 5 przedstawione są obrazy południków  $\lambda$  i  $\lambda + \Delta\lambda$ , obrazy równoleżników o szerokościach geograficznych  $\varphi$  i  $\varphi + \Delta\varphi$  oraz element  $\Delta l$  łuku loksodromy, przecinającej południki pod kątem  $\alpha$ .

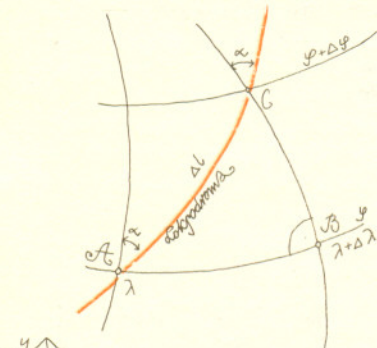
Z zależności między elementami trójkąta  $A'B'C'$  wynika, że  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{ctg} \alpha$ ,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} \alpha, \text{ czyli } \frac{dy}{dx} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

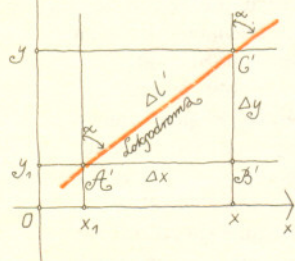
Rozwiązaniem otrzymanego równania różniczkowego w przedziale  $\langle x_1, x \rangle$  jest funkcja liniowa

$$y = \operatorname{ctg} \alpha \cdot (x - x_1) + y_1,$$

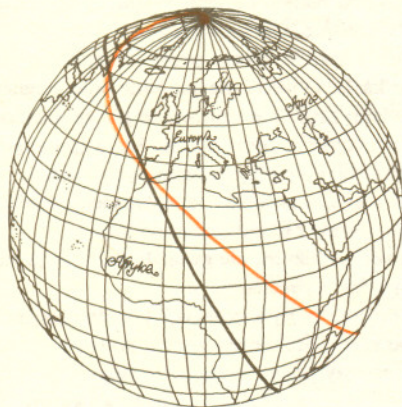
której wykresem jest prosta tworząca z dodatnim kierunkiem osi  $Ox$  kąt  $90^\circ - \alpha$ .



Rys. 5



W każdym rzucie walcowym normalnym obrazem loksodromy będzie linia prosta lub odcinek. Linia prosta jest bowiem jedyną krzywą przecinającą pęk prostych równoległych pod stałym kątem.



O loksodromie pisaliśmy np. w numerze 1/1980; porównanie loksodromy z ortodromą (łukiem koła wielkiego na sferze) zawiera np. „Kalejdoskop Matematyczny” Hugona Steinhausa, skąd reprodukowujemy powyższe dwa rysunki.

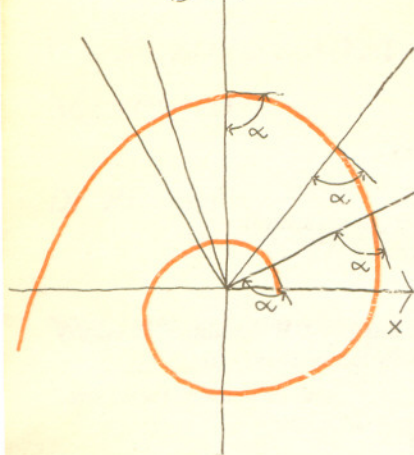
Wyprowadzimy wzór na tangens kąta drogi po loksodromie wyznaczonej przez dwa punkty  $A(\varphi_1, \lambda_1)$  i  $C(\varphi_2, \lambda_2)$ . Niech  $A'(x_1, y_1)$  i  $C'(x_2, y_2)$  będą rzutami punktów  $A, C$ . Z rys. 5 odczytujemy, że  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$ , gdzie  $\alpha$  — stały kurs statku.

Współrzędne punktów  $A'$  i  $C'$  otrzymujemy ze wzoru (3). Po podstawieniu współrzędnych  $x_1, x_2, y_1, y_2$  do ostatniej równości dostajemy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\ln \left( \frac{\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right)} \right)}$$



cy



Rys. 6

Niech będzie dana kula styczna w punkcie  $O$  do płaszczyzny. Punkt  $N$  kulki przeciwnieległy punktowi  $O$  możemy nazwać biegunem. Każdemu punktowi  $P$  płaszczyzny możemy przyporządkować punkt  $P'$  powierzchni kuli, w którym półprosta  $NP$  przecina tę kulę. Przyporządkowanie to jest wzajemnie jednoznaczne we wszystkich punktach poza biegunem, któremu nie jest przyporządkowany żaden punkt płaszczyzny. Opisane przyporządkowanie nazywamy rzutem stereograficznym.

A oto zadania dla Czytelnika

1. Wyprowadzić równanie różniczkowe loxodromy  $l = l(\varphi)$ .

2. Wykazać, że pochodna długości łuku loxodromy wyraża się wzorem  $\frac{ds}{d\varphi} = \frac{R}{\cos \alpha}$ ,

( $\alpha$  — kąt kursu,  $R$  — promień sfery).

3. Wyprowadzić wzór na długość łuku loxodromy od szerokości geograficznej  $\varphi_1$  do  $\varphi_2$  biegnącej pod kątem  $\alpha$  względem południków.

Odp:  $l = \frac{R}{\cos \alpha} (\varphi_2 - \varphi_1)$ .

4. Wykazać, że loxodroma przecina każdy południk nieskończenie wiele razy, zawsze na innej szerokości geograficznej.

5. Wykazać, że rzutem stereograficznym loxodromy jest spirala logarymiczna (rys. 6).

6. Obliczyć odległość loxodromiczną pomiędzy Warszawą a Nowym Jorkiem. Porównać ją z długością łuku koła wielkiego łączącego te miasta.

## Patrz w niebo

Nauka rozwija się bardzo szybko. W zeszłym miesiącu opisaliśmy pewną nowo odkrytą gwiazdę i zakończyliśmy stwierdzeniem, że właściwie nie wiadomo, jak ten obiekt sklasyfikować. To było w zeszłym miesiącu. Dzisiaj wiemy dużo więcej, a w momencie pojawienia się tej „Delt” w kioskach nasza wiedza o nowo odkrytej gwiazdce zostanie najprawdopodobniej posunięta jeszcze dużo dalej. Spróbujemy dzisiaj zaklasyfikować tę gwiazdę i pod tym pretekstem zapoznamy Czytelników z podstawami podziału gwiazd na różne klasy. Najogólniej dzielimy gwiazdy na zmienne i stałe. Nasza gwiazdka jest zmienna. Wszystkie zmienne gwiazdy można podzielić na zmienne „fizycznie” (kiedy autentycznie zmienia się z czasem strumień promieniowania emitowanego przez gwiazdę) i „optycznie” (kiedy zmienność spowodowana jest przez zmiany geometrii, np. zaćmienia, rotacja niejednorodnej gwiazdy itd.). Nasza gwiazdka jest zmienną fizyczną. Oczywiście istnieją układy, gdzie występują oba rodzaje zmian. Gwiazdy fizycznie zmienne można ogólnie podzielić na zmienne kataklizmiczne (gdzie procesy wybuchowe określają zachowanie się systemu) i „inne” (pulsujące, powoli niestabilne itd). Zmienne kataklizmiczne dzielimy na parę klas, które wreszcie coś nam mówią. Są to supernowe, nowe i „inne-prim” (oczywiście jest to nazwa wymyślona przeze mnie tylko dla celów tego artykułu). Nasza gwiazdka nie jest supernową ani klasyczną nową, bo amplituda zmian jasności tych dwóch klas w czasie wybuchu wynosi co najmniej 1000 (milion w przypadku supernowych). Nasza gwiazdka wpada do trzeciego koszyka. Najprawdopodobniej wszystkie nowe i „inne-prim” są zbudowane podobnie: jest to zawsze system podwójny, w którego skład wchodzi czerwona gwiazdka ciągu głównego, a drugi składnik jest białym karłem. Wybuchy są konsekwencją przepływu materii z czerwonej gwiazdy w okolice białego karła.

Zachowanie gwiazd trzeciego koszyka jest zdeteminowane przez istnienie lub nieistnienie pola magnetycznego wokół zdegenerowanego karła. Obiekty mające silne pole magnetyczne nazywają się „polarami” z trzech powodów: a) światło przez nie emitowane jest spolaryzowane, b) duże znaczenie mają w nich obszary biegunów magnetycznych białego karła (po angielsku — polar caps) i c) w uznaniu dużego wkładu Polaków przy badaniu tych gwiazd.

Nasza gwiazdka nie ma najprawdopodobniej silnego pola magnetycznego. Podobne obiekty można podzielić na dwie grupy: nowe karłowate i układy nowopodobne.

W tych ostatnich nie ma wybuchów, nawet niedużych, ale gwiazdy zachowują się cały czas pod wieloma względami jak gwiazdy nowe między wybuchami.

Nasza gwiazdka ma wybuchy i to dość często, mniej więcej co 2 tygodnie, więc jest nową karłowatą. Ale na tym nie koniec. Nowe karłowate można znowu podzielić na co najmniej 3 klasy, jednak są one już tak jednorodne, że wystarczy podać nazwę typowego przedstawiciela, aby określić daną klasę. A więc gwiazdy typu Z Camelopardalis są to nowe karłowate, które czasami po wybuchu nie uspokajają się zupełnie, a pozostają „zawieszony” jakby przez pewien czas w stanie „pośrednim”. Nie znamy przyczyny tego zjawiska.

Inna klasa, gwiazd typu SU Ursae Maioris, charakteryzuje się tym, że gwiazdy wchodzące w jej skład mają dwa rodzaje wybuchów: normalne i tzw. supermaksima, kiedy wybuch jest potężniejszy i trwa dłużej. Wreszcie u gwiazd trzeciej klasy, typu U Geminorum w krzywych blasku nie występują powyższe zjawiska. U naszej gwiazdy również nie odkryto dotychczas żadnych poważnych odstępstw od mniej więcej regularnych wybuchów. A więc według stanu wiedzy na dzisiaj klasyfikujemy ją jako gwiazdę typu U Gem.

Klasyfikację tę i podziały na podgrupy można ciągnąć dalej. Po narysowaniu odpowiedniego drzewka zobaczycie, że staje się ona bardziej skomplikowana, niż biologiczna klasyfikacja stworzeń żywych. I nic dziwnego, bo gwiazd jest dużo więcej niż istot żyjących na Ziemi.

mgr Tomasz CHLEBOWSKI

### Rozwiązanie zadania F 106.

Błędny wniosek wynika z połowicznego uwzględnienia efektów polaryzacji dielektryka. W rozumowaniu wzięto pod uwagę obecność ładunków polaryzacyjnych na granicach: ciała obdarzone ładunkami — dielektryk (osłabienie oddziaływania przenoszonych ładunków w dielektryku), pominięto natomiast istnienie ładunków polaryzacyjnych na granicy ośrodków. Postępowanie takie bywa usprawiedliwione, gdy dielektryk można potraktować jako ośrodek nieskończony, w danym przypadku wiedzy jednak do mylnej konkluzji, iż praca sił zewnętrznych podczas pionowego przenoszenia ładunków jest zerowa. W rzeczywistości, praca włożona w trakcie wynurzenia ładunków jest większa niż uzyskana podczas zanurzenia. Dla uzmysłowienia sobie tego faktu zauważmy, że lokalna gęstość ładunków polaryzacyjnych rośnie wraz ze wzrostem składowej normalnej natężenia pola w pobliżu granicy ośrodków. Zbliżenie ładunków o przeciwnych znakach zmniejsza wartość tej składowej, zmniejszając się więc musi wypadkowa siła wciągająca ładunek do wnętrza dielektryka.

# Kataklizmy we Wszechświecie

(I)

Doc. dr Bolesław  
GRABOWSKI



Rozwiązanie zadania M 284.

Oznaczmy  $a_n = (6 + \sqrt{31})^n$  i  $b_n = (6 - \sqrt{31})^n$ .  
Mamy dla  $n \geq 1$ ,  $0 < b_n < 1$ , i równocześnie

$$a_n + b_n = 6^n + \binom{n}{1} \cdot 6^{n-1} \cdot \sqrt{31} + \dots + (\sqrt{31})^n +$$

$$+ 6^n - \binom{n}{1} 6^{n-1} \sqrt{31} + \dots + (-1)^n (\sqrt{31})^n \text{ jest}$$

liczbą całkowitą. Tak więc  $[a_n] = a_n + b_n - 1$ .

Mamy dalej, jak łatwo sprawdzić

$$a_1^2 - 12a_1 + 5 = 0 \text{ i } b_1^2 - 12b_1 + 5 = 0, \text{ skąd}$$

$$\text{i z równości } a_{n+2} = a_1^2 \cdot a_n, a_{n+1} = a_1 \cdot a_n$$

$$\text{oraz } b_{n+2} = b_1^2 \cdot b_n, b_{n+1} = b_1 \cdot b_n \text{ wynika,}$$

$$\text{że dla każdego } n \text{ jest } a_{n+2} = 12a_{n+1} - 5a_n,$$

$$b_{n+2} = 12b_{n+1} - 5b_n, \text{ a więc ciąg}$$

$$c_n = a_n + b_n \text{ spełnia równanie rekurencyjne}$$

$$c_{n+2} = 12c_{n+1} - 5c_n.$$

Ponieważ  $c_1 = 12$ ,  $c_2 = 134$  otrzymamy łatwo

cykliczny ciąg ostatnich cyfr  $c_n = 2, 4, 8, 6,$

$2, 4, 8, \dots$ , w którym na miejscu 1982 pojawi

się 4. Tak więc ostatnią cyfrą  $[a_{1982}]$  jest 3.

Aż do połowy naszego wieku badacze nieba pozostawali pod silnym wrażeniem spokoju emanującego z głębi kosmosu. W anglojęzycznej literaturze popularnonaukowej można jeszcze dziś spotkać nostalgiczne określenie „gentle cosmos” (~kosmos dżentelmeński (!) spokojny). Trzeba przyznać, że wizerunek kosmosu tamtego czasu mógł zniewalać swoją elegancją i ładem, i to na różnych szczeblach jego organizacji: od naszego „podwórka” — Układu Słonecznego, aż po odległe galaktyki. Wszystko to zdawało się dowodzić, iż cokolwiek w tym świecie miało być rozstrzygnięte — dawno zostało już rozstrzygnięte.

Obraz ten dość wyraźnie nie przystawał do Ziemi (tak, oczywiście dlatego, iż była ona lepiej niż inne poznanym ciałem niebieskim!), z jej niespokojnym „życiem” — katastrofalnymi konwulsjami skorupy, które co rusz doświadczały jej mieszkańców. Gwałtowne erupcje obserwowano także na Słońcu, np. w czasie całkowitego zaćmienia, kiedy to gigantyczne fontanny gorącej plazmy stawały się widoczne za obrzeżem przysłoniętej tarczy; nie mogły ująć uwagę jeszcze bardziej spektakularne wydarzenia — wybuchy gwiazd *nowych* i *supernowych* (to jednak na zasadzie wydarzeń zupełnie wyjątkowych) — były to wszakże tylko pewne rysy na wizerunku „dżentelmeńskiego kosmosu”. Bardziej zasadnicze wyłomy dokonały się właśnie w połowie naszego wieku, kiedy to zaczęto chwycić i przetwarzać na informację promieniowanie radiowe. Dzieło zniszczenia tego wizerunku dopełniło się w latach siedemdziesiątych, kiedy to za pośrednictwem obserwatoriów satelitarnych pomiarami objęto podczerwień, a nade wszystko — wysokoczęstotliwościową część widma elektromagnetycznego: UV, X i  $\gamma$ . I tak oto, zza uchylonej nieco kurtyny ujrzeliśmy naraz obraz zupełnie inny i w zasadzie nieoczekiwany: arenę wydarzeń gwałtownych, które, jak się dziś wydaje, w świecie dużych mas bynajmniej nie należą do wydarzeń osobliwych, lecz są raczej przejawami „normalnego” losu poszczególnych jednostek, lub ich układów.

Prześledźmy skalę zjawisk, idąc w jej górę, wzdłuż wybranych dla ilustracji przypadków; wyjściową jednostkę miary zwiążmy z naszymi ziemskimi standardami.

**1. Eksplozje nuklearne.** Jak być może wiemy, zniszczenia związane z eksplozjami materiałów wybuchowych dokonują się głównie na styku z powierzchnią gwałtownego skoku gęstości, ciśnienia i temperatury ośrodka (najczęściej gazu), który — ze względu na jego roboczą, wykonawczą rolę — jest jakby egzekutorem wyroku. Powierzchnia ta, zwana frontem fali uderzeniowej, biegnie z prędkością zależną od początkowej energii eksplozji oraz od gęstości ośrodka i upływu czasu. Niech naszą jednostką w skali energii będzie „ładunek” energii uwolnionej w eksplozji nuklearnej. Nie możemy zaprzeczyć, iż jest to — jak na naszą miarę — jednostka gruboskalowa.

W Wielkiej Encyklopedii Powszechnej pod hasłem „bomba jądrowa”, we fragmencie odnoszącym się do łańcuchowej reakcji rozszczepienia, czytamy: „...wyzwolenie energii występuje w postaci wybuchu, przy czym ponad 90% stanowi energia kinetyczna produktów reakcji (z czego 2/3 zamienia się w energię podmuchu, a 1/3 w promieniowanie ciepłe); resztę energii unosi promieniowanie  $\gamma$  i neutrony”. Owa ponad (lub około) 90-procentowa dyktatura pierwotnej energii kinetycznej jest cechą wspólną wszystkich materiałów rozszczepialnych; o tym, jak energia ta zostanie „później” (dzieje się to w pojedynczych mikrosekundach!) rozdysponowana między dwie frakcje, „podmuch” i „promieniowanie ciepłe”, zależy już od wielu okoliczności lokalnych. „Regulatorem” jest tu nieprzezroczystość materii, a ściślej — współczynnik absorpcji promieniowania elektromagnetycznego. Zależy on funkcyjnie od częstości kwantów i od bloku dodatkowych danych, jako parametrów: (a) gęstości i temperatury, (b) składu chemicznego i szczegółów atomowomolekularnej struktury ośrodka. Pierwsza grupa parametrów wciąga w poważne kłopoty merytoryczne, druga — oprócz tego, spiętra trudności numeryczne. Całość jako żywo przypomina legendarny węzeł gordyjski. Tylko w dwóch okolicznościach można sprawę przejrzeć do końca: (1) w warunkach skrajnie dużej nieprzezroczystości ośrodka pierwotna energia kinetyczna produktów rozpadu zamieniana jest w całości na niszczycielski „podmuch”; (2) na przeciwnym biegunie, przy doskonałej przezroczystości ośrodka, który jednak nie jest próżnią, „jonizacyjno-grzewczy” impet produktów rozpadu już w pierwszej fazie natarcia na ośrodek zamienia się rekombinacyjnie na promieniowanie ciepłe i opuszcza teren akcji w oślepiającym błysku, który nakłada się na pierwotny strumień promieniowania gamma. W tym przypadku chłodzenie ognistej racy wybuchu jądrowego jest natychmiastowe i niemal zupełne. Zasięg szczątkowego podmuchu jest zminimalizowany; zasięg promieniowań jest niemal nieograniczony. Sęk jednak w tym, jak zachowa się przyroda w realnych, a nie modelowych warunkach...

Podobnym problemem (choć z powodu zupełnie innych motywacji) zajmowali się astrofizycy-teoretycy; mowa o problemie transportu promieniowania we wnętrzach i atmosferach gwiazdowych. Z ich pomocą sformułowano odpowiedź — apokaliptyczną, a już wkrótce potem największy naukowy hazard objawił się dokumentalnie pierwszym atomowym grzybem. Miało to miejsce 16 lipca 1945 r. na pustynnym poligonie Alamogordo w amerykańskim stanie Nowy Meksyk. Dalsze zarysy szczegółów, które można odtworzyć na podstawie „odtajnionych” niedawno raportów (nieco na ten temat — Armstrong i Nicholls: *Emission, Absorption and Transfer of Radiation in Heated Atmospheres*), chyba warte są również wzmianki. Potęga wybuchu przekroczyła wszelkie oczekiwania; oceny teoretyków pozostały „w tyle” aż o kilkaset procent.

Nieprzezroczystość materii jest funkcją częstości promieniowania; można wyróżnić dwa składniki nieprzezroczystości: wolno zmienna ciągła funkcja częstości oraz zbiór odpowiadający liniom widmowym, w których zdolność emisji i absorpcji materii zmieniają się bardzo gwałtownie.



Gdy nieco później z inspiracji ojca amerykańskiej bomby wodorowej, Edwarda Tellera, wykonano bardziej realistyczne oceny nieprzezroczystości gorącego powietrza — wzięto mianowicie pod uwagę udział nie tylko *nieprzezroczystości ciągłej*, ale również szacunkową reprezentację *nieprzezroczystości liniowej*, którą dotąd, nie mając innego wyjścia, po prostu ignorowano — okazało się, że „winowajczynią” pomyłki była właśnie nieprzezroczystość, pierwotnie niedoceniona o te kilkadziesiąt procent.

Niedoceniony nieprzezroczystości liniowej jest wprost przygniatający i sprawa ta zasługuje na parę dodatkowych uwag. Samych tylko „znaczących” linii widmowych są setki tysięcy, a każda z nich oddzielnie wymaga danych na temat „rodowodu”, *prawdopodobieństwa przejścia* i *szerokości polówkowej*. Wtedy, w drugiej połowie lat czterdziestych, dane te były znane tylko wrywkowo (ich współczesny stan, gdy chodzi o zapotrzebowanie astrofizyki, jest nadal wysoce niezadowolający!), ponadto tzw. moce obliczeniowe były znikome. W sumie „zadanie rachunkowe” przerastało z nawiązką możliwości ręcznych arytmometrów; wykonał je jednak niewiarygodnie szybki rachmistrz elektroniczny — „machina von Neumanna”, której prototyp obmyślono i właśnie wtedy skonstruowano w zespole słynnego matematyka. Wyniki obliczeń Tellera-Mayera (teoretyczny pomysł i wykonanie są właściwie dziełem Mayera) zamknięto w ściśle tajnym raporcie „szarej literatury” w Los Alamos, jako materiał kluczowy dla oceny skutków eksplozji w atmosferze bomb o najróżniejszych mocach, bez potrzeby ich praktycznego detonowania. Niedługo potem Goody doszedł niezależnie, choć w sposób mniej „teoretyczny”, do podobnych wyników i nieświadom roli dekonspiratora, jaką spełnia, opublikował je w brytyjskim kwartalniku meteorologicznym. Demon, który izolowanym od siebie zespołem w różnych zakątkach naszego globu napędza roboty na polu opętanej, na polu graniczącej z sztucznym i geniuszem, mógł filuternie przymrużyć oko...

Eksplozja bomby, która rankiem 6 sierpnia 1945 roku zgotowała straszliwą hekatombę w Hiroszimie, wyzwoliła energię  $10^{14}$  dżuli (J), równoważną eksplozji 20 kiloton chemicznych materiałów wybuchowych, dewastując kompletnie ponad 10 km<sup>2</sup> miasta. W dzień Wszystkich Świętych Anno Domini 1952 żar ognistej kuli w mgnieniu oka „zdematerializował” jedną z wysp Pacyfiku, pozostawiając w jej miejscu krater o średnicy około 2 km i głębokości 60 m. Zdetonowana wówczas pierwsza bomba wodorowa miała moc 5–7 megaton. Dziś — w magazynowanych stumegatonowych superbombach wodorowych (w jej pojedynczych egzemplarzach!) drzemie energia nie poddająca się wprost wyobrażeniu:  $5 \times 10^{17}$  J. Jest to ilość wielokrotnie przewyższająca sumę ładunków wybuchowych, jakie użyto na wszystkich frontach drugiej wojny światowej.

**2. Wulkany.** W pięknym esejie „Planeta Ziemia” niezjącego już geologa, prof. Henryka Świdzińskiego, znajdujemy pełen ekspresji opis jednego z najgwałtowniejszych w naszych czasach paroksyzmów natury — wybuchu wulkanu, jaki miał miejsce w 1883 roku na niewielkiej wyspie Krakatau między Sumatrą a Jawą. „26 sierpnia w południe rozpoczęły się gwałtowne erupcje, chmury dymów i popiołów wznosiły się na ogromną wysokość, a grzmoty słychać było na setki kilometrów wokoło. Wkrótce nad znacznymi obszarami w otoczeniu wyspy zapanował zupełny mrok. Wybuchy ciągnęły się przez resztę dnia i noc, aż przed południem następnego dnia, wśród ogłuszającego grzmotu, przeszło połowa wyspy wyleciała w powietrze. Na jej miejscu powstała kilkusetmetrowa głębia, w którą wdarły się wody oceanu, spiętrzając się następnie w potworną falę, wysoką miejscami na 30–40 metrów. Zwaliała się ona na najbliższe wybrzeża gęsto zaludnionej Jawy i Sumatry, zmiatając z powierzchni około 300 osiedli nadmorskich. Ponad 35 000 mieszkańców poniosło wówczas śmierć”. Fale poddmuchu powybiły szyby w oknach i spowodowały pęknięcie ścian w zasięgu 160 km, a odgłosy eksplozji słyszano w promieniu około 5000 km. Część wyrzuconych pyłów wdarła się aż do górnych warstw stratosfery i rozproszyła się nad całą kulą ziemską; w obserwatorium astronomicznym Montpellier we Francji przez trzy kolejne lata po erupcji mierzono oświetlenie słoneczne niższe o 10% od „normy”. Ocenia się, iż w trakcie wybuchu wulkan wyrzucił łącznie do 21 km<sup>3</sup> materii.

Dokonania te są imponujące, nie umiemy jednak z takich danych skorzystać, aby ocenić ilośćowo „porcję” uwolnionej energii mechanicznej. Gdyby tak była znana geometria tej gigantycznej „fontanny” bądź rozkład wyrzuconej masy... Na ten temat znajdujemy tylko ogólnikowe wzmianki: „Co najmniej 10 km<sup>3</sup> produktów wulkanicznych opadło w promieniu 500 km” (T.A. Muth i inni: *The Geology of Mars*); „...wulkan wyrzucił co najmniej 18 km<sup>3</sup> produktów, z czego dwie trzecie opadły w promieniu 15 km” (J. V. Luce: *Koniec Atlantyd*). Sformułujemy niesprzeczne z nimi zgrubne warunki modelowe: około 20 km<sup>3</sup> produktów, gęstość około  $5 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup>, a więc łączna masa  $m \approx 10^{14}$  kg; geometria „fontanny” osiowoosymetryczna, z optymalnym (dla zasięgu, który przyjmujemy około 15 km) nachyleniem początkowego toru,  $\alpha = \pi/4$ . Rzecz całą sprowadziliśmy tym samym do elementarnego rzutu ukośnego. Zignorujemy wszelkie znaczenie wysokości początkowej krateru i zaniedbajmy opór powietrza. W równaniu toru dla rzutu ukośnego,

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - g x^2 / 2 v_0^2 \cos^2 \alpha, \quad (1)$$

(wszystkie oznaczenia mają zwykły sens) położmy  $y = 0$  i rozwiążmy względem prędkości początkowej  $v_0$ ; początkową energię kinetyczną otrzymujemy równą  $E_k \approx \frac{mg x_{\max}}{2 \sin 2\alpha}$ .



#### Rozwiązanie zadania M 283.

Pokażemy najpierw, że  $ABCD$  jest równoległobokiem, czyli, że  $OA = OC$  i  $OB = OD$ . Przypuśćmy, że tak nie jest, że  $OA > OC$  i  $OB \geq OD$ . Przekształcając trójkąt  $OCD$  przez symetrię względem  $O$  otrzymamy, że  $C'$  leży wewnątrz  $OA$  i  $D'$  leży na  $OB$ , a więc  $\triangle OC'D' < \triangle OAB$  i  $\angle OC'D' < \angle OAB$  wbrew założeniu. Tak więc  $ABCD$  jest równoległobokiem.

Wynika stąd, że  $S_{OAB} = S_{OBC} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$ .

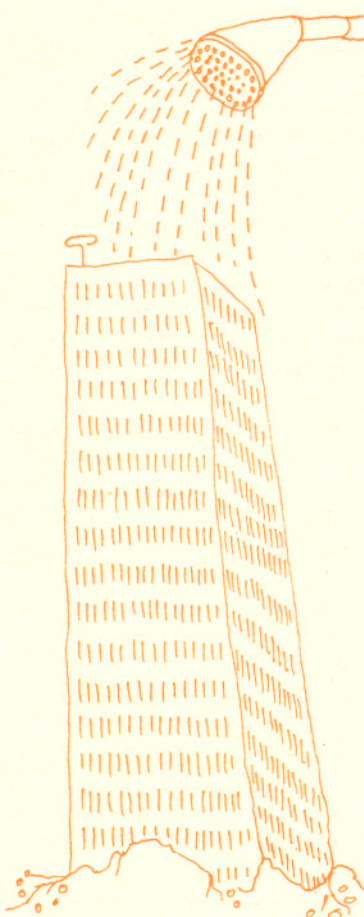
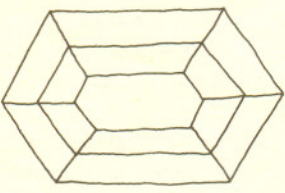
$$\text{Ale } S_{OAB} = \frac{AB+OB+OA}{2} \cdot r_{OAB} \text{ i } S_{OBC} =$$

$$= \frac{BC+OB+OC}{2} \cdot r_{OAB}, \text{ skąd łatwo wynika,}$$

że  $AB = BC$ , a więc, że  $ABCD$  jest rombem.



**Rozwiązanie zadania M 285.**  
 Każde dwa punkty na rysunku można połączyć łamaną o najwyżej pięciu odcinkach. Poszukiwany odcinek znajdziemy na łamanej łączącej punkt 1 z punktem 18.



Podstawiając wcześniej ustalone wartości liczbowe mamy  $E_k \approx 10^{19}$  J, co pod względem energetycznym równoważy wyrzut pionowy całej masy produktów wulkanicznych na wysokość około 10 km, lub eksplozję 10 stumegatonowych bomb wodorowych. Dodajmy do tego energię wywleconą na powierzchnię Ziemi w formie ciepła. Przyjmijmy średnią pojemność cieplną około  $2,5 \times 10^4$  J/(kg · K) i temperaturę początkową magmowego stopu 1500 K; daje to ilość energii cieplnej  $3 \times 10^{21}$  J, o ponad dwa rzędy wielkości górującą nad energią mechaniczną... Nie mamy wątpliwości: ta nieokiełznana furia i monstrialny wprost spust rozżarzonej kipieli (a może bliżej prawdy — ledwie znikome iskry, dobywające się z podziemnego „wielkiego pieca”?) mogą żądać należnego respektu. Zapisaly one niejedną czarną kartę w dziejach rodzaju ludzkiego. Archeolodzy są dziś zgodni, że Imperium Minojskie na Krecie najprawdopodobniej zmiotła z powierzchni (XV w.p.n.e.) straszliwa erupcja wulkanu na wyspie Thera, odległej o ponad 120 km; w 79 r. n.e. Wezuwiusz zgotował totalną zagładę pobliskim miastom Pompeja i Stabie; w t'izszych nam czasach wulkan Mont Pelé na Martynice w kwietniu 1902 r. w ciągu ledwie dwóch minut przyniósł śmierć niemal wszystkim mieszkańcom 30-tysięcznego portowego miasta St. Pierre.

Bledną jednak „wyczyni” wulkanów ziemskich, gdy porównamy je z tym, co dzieje się na Io, jednym z czterech „galileuszowskich” księżyców Jowisza. Od dwu lat, gdy jego powierzchnię przemiotły kamery *Voyagera 1*, wiemy, iż najprawdopodobniej jest to obiekt najsilniej wstrząsany konwulsjami wulkanicznymi w całym Układzie Słonecznym. Wydaje się, że gigantyczne siły przyływowe ze strony Jowisza utrzymują większość podpowierzchniowej masy Io w stanie płynnym; jeżeli tak jest istotnie, eksplozje wulkaniczne są tam zjawiskiem „codziennym”. Potężne pióropusze pyłu i gazu nierzadko sięgają — jak widziano to 4 marca 1979 r. — wysokości ponad 100 km nad powierzchnię Io. Powierzchnia całego globu, jak sugerują zdjęcia wykonane w kilkudniowych odstępach czasu, przysypywana jest wulkanicznym pyłem w niewiarygodnym wprost tempie — kilku centymetrów rocznie.

**3. Wstrząsy sejsmiczne.** Pod tym względem Io wydaje się znajdować w sytuacji również wyjątkowej, jako że wulkanizm i sejsmiczność są ze sobą spowinowacone i najprawdopodobniej mają podobne mechanizmy napędowe. Dwa dalsze satelity Jowisza, Europa i Ganimed, obiegające go po mniej ciasnych niż Io orbitach, mają skorupy także niespokojne. Możemy przypuszczać, że występujące tu ruchy tektoniczne są straszliwe, skoro ujawniły się one już przy zdalnym oglądzie kamerami *Voyagerów*. Skupmy jednak uwagę na materiale ilościowym, uzyskanym za pomocą sejsmografów. W jego świetle „staruszka” Ziemia jest jakby ciągle w stadium burzliwej młodości. Aktywność sejsmiczna naszego Księżyca jest bez porównania mniejsza niż Ziemi; Mars ma cechy pośrednie. Sejsmolodzy posługują się dopasowanym empirycznie związkiem między energią  $E$  (w dżulach), władowaną w fale sprężyste przez mechanizm rozruchowy trzęsienia ziemi, a miarą (tzw. magnitudo)  $M$  tego trzęsienia w epicentrum:

$$\log E = 4,8 + 1,5M. \quad (2)$$

Przyjmijmy, iż jest on miarodajny, przynajmniej co do rzędu wielkości. Zauważmy przy tym, że dwa trzęsienia różniące się o jeden stopień w skali magnitudowej w istocie różnią się w skali energii o czynnik 30.

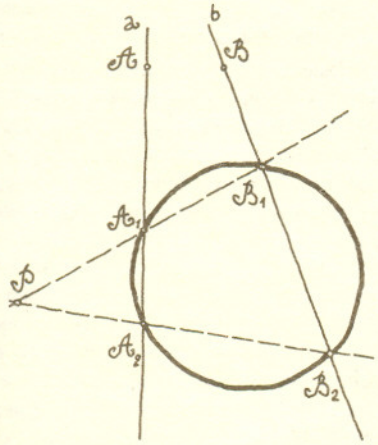
Najpotężniejsze z zarejestrowanych trzęsień ziemi miały magnitudy przekraczające 8: w Japonii w 1974 r. — 8,1; na Alasce w 1964 r. — 8,4; w Assam u podnóża Himalajów w 1950 r. — 8,6. Podstawmy do wzoru i wykonajmy proste działania. Widzimy np., że trzęsienie w Assam w samej tylko formie fal mechanicznych uwolniło energię rzędu  $5 \times 10^{17}$  J, równoważną eksplozji stumegatonowej bomby wodorowej. A przecież fale sprężyste unoszą tylko niewielką część całkowitej „energii trzęsienia”; reszta rozprasza się w postaci ciepła, jej kosztem dokonują się trwałe deformacje mas skalnych itp.

### Zadania, których nie umiemy rozwiązać (I)

Entuzjastom geometrii chcieliśmy zaproponować stały kącik pod powyższym hasłem. Będziemy w nim prezentować zadania z geometrii, z którymi nie umiemy sobie poradzić. Jeżeli ktoś z Czytelników je rozwiąże (bądź wskaże, gdzie można znaleźć rozwiązanie), to jego rozwiązanie zamieścimy w naszym kąciku.

Oczekiwać także będziemy na zadania z geometrii, na które natknęli się Czytelnicy i bezskutecznie usiłowali je rozwiązać. Jeżeli będziemy umieli je rozwiązać — odpiszemy, jeśli nie — zamieścimy je tutaj.

A oto nasza pierwsza propozycja zadania, którego nie umiemy rozwiązać:  
 Dany jest okrąg i trzy punkty  $A, B, P$ . Przez punkty  $A$  i  $B$  należy poprowadzić takie proste  $a$  i  $b$ , wyznaczające na danym okręgu cięciwy  $A_1A_2$  i  $B_1B_2$ , by proste  $pr. A_1B_1$  i  $pr. A_2B_2$  przecinały się w punkcie  $P$ .



PROOF

# O nazwach liczb

Doc. dr Mieczysław BASAJ

Umiejętność nazywania liczb znacznie wyprzedziła umiejętność ich zapisywania, przynajmniej jeśli chodzi o liczby względnie niewielkie. Fakt ten ma duże znaczenie dla historii kultury. Z nazw liczb możemy mianowicie wyciągać wnioski w zakresie sposobu liczenia w zamierzonej przeszłości, kształtowania się współczesnych systemów liczenia, związków kulturowych między różnymi ludami w czasach, kiedy człowiek jeszcze nie znał pisma. Początki liczenia wiązać należy z kojarzeniem postrzeganych przedmiotów z palcami; myśl posługiwania się palcami przy liczeniu nasuwała się sama. Obranie liczby 5 jako podstawy układu liczenia tłumaczy się właśnie związkiem z liczbą palców jednej ręki. Suma palców u jednej ręki stanowi w praktyce podstawę wszystkich systemów liczenia.

Z odwiecznych elementów liczbowych powstały z czasem trzy systemy zależnie od tego czy opierały się na palcach jednej ręki, obu rąk, czy też na palcach u rąk i nóg. W niektórych językach można zaobserwować ślady układu dwójkowego. Na przykład u jednego z plemion Mikronezji mamy „1” — *ke-yap*, „2” — *pullet*, „3” — *ke-yap-pullet*, „4” — *pullet-pullet*. Na tym jednak kończy się podobieństwo, gdyż na oznaczenie liczb większych używa się wyrazu, którego znaczenie jest „wiele”. W niektórych dialektach australijskich liczebnika „3” nie można wyrazić inaczej niż przez połączenie dwu pierwszych liczebników.

Przykładowo, w dialekcie kamilorojskim w Australii liczy się do trzech: „1” — *mal*, „2” — *bularr*, „3” — *guliba*. Nazwy liczby od czterech tworzy się przez dodawanie: „4” — *bularrbularr* (2+2), „5” — *bularrguliba* (2+3), „6” — *gulibaguliba* (3+3).

Pomijam tu oczywiście system dwójkowy, zastosowany przez człowieka w maszynach cyfrowych, czy też inne systemy sztuczne, często wykazujące zresztą wiele zalet, jak np. propagowany w USA system dwunastkowy. System piątkowy najbardziej rozpowszechniony jest w językach afrykańskich. W układzie tym zbiera się pięć jedności w jednostkę drugiego rzędu, tj. w piątkę, pięć piątek w jednostkę trzeciego rzędu, tj. w dwudziestkę piątkę, pięć dwudziestek piątek w jednostkę czwartego rzędu, odpowiadającą liczbie 125 według układu dziesiątkowego. Układ piątkowy spotyka się do dziś u ludów pierwotnych. Dla ilustracji przytoczę kilka przykładów.

W języku Wedau w Nowej Gwinei jego użytkownicy liczą następująco:

- |   |
|---|
| 1 = <i>tagogi</i>   |
| 2 = <i>ruag'a</i>   |
| 3 = <i>tonug'a</i>  |
| 4 = <i>ruag'a-ma-ruag'a</i> (tj. jako 2+2)                |
| 5 = <i>ura-i-ga</i>                                       |
| 6 = <i>ura-g'ela-tagogi</i> (tj. jako 5+1)                |
| 7 = <i>ura-g'ela-ruag'a</i> (tj. jako 5+2)                |
| 8 = <i>ura-g'ela-tonug'a</i> (tj. jako 5+3)               |
| 9 = <i>ura-g'ela-ruag'a-ma-ruag'a</i> (tj. jako 5+4)      |
| 10 = <i>ura-ruag'a-i-ga</i> (tj. jako 2×5)                |
| 11 = <i>ura-ruag'a-i-ga-au-ae-tagogi</i> (tj. jako 2×5+1) |

W języku Papuasów zamieszkujących na wyspie Hanse-Vulkan przy wybrzeżu Nowej Gwinei używane są następujące liczebniki:

- |                  |                                      |
|------------------|--------------------------------------|
| 1 = <i>teé</i>   | 6 = <i>lima téé</i> (tj. jako 5+1)   |
| 2 = <i>rua</i>   | 7 = <i>lima rua</i> (tj. jako 5+2)   |
| 3 = <i>tolli</i> | 8 = <i>lima tolli</i> (tj. jako 5+3) |
| 4 = <i>oatti</i> | 9 = <i>lima oatti</i> (tj. jako 5+4) |
| 5 = <i>lima</i>  | 10 = <i>ulema</i>                    |

Czulkowie na Półwyspie Czukoockim liczą używając następujących wyrazów:

- |                      |                                      |
|----------------------|--------------------------------------|
| 1 = <i>enen</i>      | 6 = <i>enelmuloen</i> (tj. jako 1+5) |
| 2 = <i>njak</i>      | 7 = <i>njakumalen</i> (tj. jako 2+5) |
| 3 = <i>nioch</i>     | 8 = <i>niochmulen</i> (tj. jako 3+5) |
| 4 = <i>niediaka</i>  | 9 = <i>konnaaisinkö</i>              |
| 5 = <i>mullongen</i> | 10 = <i>mungatken</i>                |

W języku Herero w Afryce Południowo-Zachodniej liczy się następująco:

- |                 |   |
|-----------------|---|
| 1 = <i>mue</i>  | 6 = <i>hambou-mue</i> (tj. jako ponadto 1)    |
| 2 = <i>vari</i> | 7 = <i>hambou-mbari</i> (tj. jako ponadto 2)  |
| 3 = <i>tatu</i> | 8 = <i>hambou-n-datu</i> (tj. jako ponadto 3) |
| 4 = <i>ne</i>   | 9 = <i>imu-viu</i>                            |
| 5 = <i>tano</i> | 10 = <i>omuringo</i>                          |

Z przytoczonych ilustracji widać, że w języku Wedau w nazwach liczb 6—10 powtarzają się liczby 1—5, w języku Papuasów w nazwach liczb 6—9 — liczby 1—4, natomiast w języku Czulków i Herero tylko w nazwach liczb 6—8 powtarzają się liczby 1—3. Wyraz *hambou* w języku Herero oznacza „przekraczać”.

Ślady układu piątkowego rzucają się w oczy w zapisie (nie w nazwach!) liczb 4 oraz 6—8 za pomocą tzw. cyfr rzymskich. Rzymianie pisali liczbę 5 w formie znaku V, a liczby 4, 6, 7, 8 w formie znaków IV, VI, VII, VIII — a więc wyraźnie jako 5—1, 5+1, 5+2, 5+3. Liczbę 10 pisali w formie znaku X; jest to znak jakby składający się z dwóch znaków liczby 5 — połączonych w jedną całość, czyli pojmowali go jako 10 = 2×5.

Powstawanie liczebników następowało w taki sposób, że najpierw pojawiły się samodzielne słowa na oznaczenie pierwszych pięciu cyfr; zamykało to pierwsze stadium kształtowania się systemów liczeniowych. Wkrótce jednak (u niektórych ludów już co najmniej przed pięciu tysiącami lat) w językach narodów bardziej rozwiniętych pojawiła się nazwa dla drugiej piątki, a więc dla liczby 10. Przejście od systemu piątkowego do dziesiątkowego związane było z ustaleniem się nazwy na oznaczenie podstawowej liczby tego systemu, tj. liczby 10. Liczbę 10 z zasady wyraża się całkowicie innym słowem; rzadko używa się podwójnej formy wyrazu oznaczającego liczbę 5. Do wyjątków należy nazwa liczby „10” — *karrirum karrirum* w języku mieszkańców wyspy Pany.

O wyborze liczby 10 zdecydowały przede wszystkim względy praktyczne: liczba palców u obu rąk. W dalszej kolejności powstawały nazwy na oznaczenie liczb między pierwszą i drugą piątką, tj. liczb 6—9. Że było tak, a nie inaczej, można przypuszczać na tej m.in. podstawie, że w wielu językach mających dziesiętny układ liczenia liczebniki od 6 do 10 nie powstały w wyniku dodawania do 5 (a więc nie według wzoru 6 = 5+1), ale odejmowania od 10 (przykładowo 8 = 10—2), co dowodzi wcześniejszego istnienia i posługiwania się samodzielnym słowem na oznaczenie liczby 10.

Słowa oznaczające liczby od „6” do „9”, a zwłaszcza „8” i „9” tworzone przez odejmowanie od „10”, są oczywistym dowodem, że liczebnik „10” powstał wcześniej niż liczebniki niższe, to jest liczebniki „6”, „8”, „9”.

Na przykład Ainowie liczą następująco: „1” — *sznepf*, „2” — *tup*, „3” — *repf*, „4” — *inipf*, „5” — *asziki*, „6” — *juvambi*, „7” — *aruvambi*, „8” — *tubiszambi* (2 od 10), „9” — *sznebiszambi* (1 od 10), „10” — *vambi*. W dialektach symskich w dorzeczu Jeniseju mamy „8” — *ynä bese chuos* (do 10 brakuje 2), „9” — *chusä bese chuos* (do 10 brakuje 1). Podobnie węgierskie *nyolc* „8” uważa się za powstałe z *nyo* (l), starej nazwy liczby „2” oraz zbitki -c, powstałej z *tiz*, a *kilenc* „9” tłumaczy się jako „1 od 10”, ponieważ można tu widzieć dwa wyrazy: *kilen* (od *külön*, „oddzielny”) oraz -c (od *tiz*, „10”).

W układzie dziesiątkowym dziesięć jedności zbieramy w dziesiątkę, dziesięć dziesiątek w setkę, dziesięć setek w tysiąc. Z punktu widzenia nazw liczb system dziesiątkowy można uważać za naturalne przejście od systemu piątkowego. Na powiązanie układu piątkowego z układem dziesiątkowym wskazują np. liczebniki 11—19 w języku Papuasów z wyspy Hanse-Vulkan przy wybrzeżu Nowej Gwinei.

Por.:

- |  |
|--|
| „11” = <i>ulema téé</i> (tj. jako 10+1)        |
| „12” = <i>ulema rua</i> (tj. jako 10+2)        |
| „13” = <i>ulema tolli</i> (tj. jako 10+3)      |
| „14” = <i>ulema oatti</i> (tj. jako 10+4)      |
| „15” = <i>ulema lima</i> (tj. jako 10+5)       |
| „16” = <i>ulema lima téé</i> (tj. jako 10+5+1) |
| „17” = <i>ulema lima rue</i> (tj. jako 10+5+2) |

„18” = *ulema lima tolli* (tj. jako 10 + 5 + 3)  
 „19” = *ulema lima oatti* (tj. jako 10 + 5 + 4)  
 „20” = *ulem tamata*

Śladów powiązania systemu piątkowego z systemem dziesiętkowym można dopatrywać się również (przy założeniu, że X powstało jakby z połączenia dwu liczb V) w tzw. rzymskim sposobie zapisywania liczb 9, 11—19, to znaczy IX, XI—XIX.

Równocześnie z używanym układem dziesiętnym na terenie dzisiejszego państwa Irak zaczął pojawiać się układ pozycyjny oparty na liczbie 60 jako jednostce wyższego rzędu. Układ sześćdziesiątkowy przetrwał do dziś w miarach czasu (godzina ma 60 minut, minuta zaś 60 sekund) i w liczeniu na kopy (60 sztuk). Podział kąta pełnego na 360 stopni jest również w ścisłym związku z układem sześćdziesiątkowym. Jeden stopień, który jest jednostką miary kątów (lub łuków), dzieli się na 60 minut kątowych, a 1 minutę kątową na 60 sekund kątowych.

W wielu językach system nazywania liczb nie zakończył się na liczbie palców u obu rąk, ale został rozszerzony na palce u nóg. Przykładowo, w języku jednego ze szczepów Papuasów liczbę 20 oznacza słowo *moanda*, które jednocześnie znaczy *człowiek*. Skojarzenie nasuwa się samo: człowiek ma 20 palców u rąk i nóg. Dwudziestkowy układ liczeniowy rozpowszechnił się najbardziej w Ameryce, szczególnie w językach rodziny karibi, arawak, kiczua i czibcza. Bardzo oryginalny układ dwudziestkowy stworzyło plemię indiańskie Majów: jednostkę nazywali oni słowem *kin* „dzień”, a jednostką wyższego rzędu była liczba 20, nazywana *uinal* „miesiąc”; następną jednostką była liczba 360 (= 18 × 20; rok liczył 18 miesięcy po 20 dni każdy), nazywana *tun* „rok”. Dalej był już czysty układ dwudziestkowy:

20 <i>tun</i> = 1 <i>katun</i>	20 <i>piktun</i> = <i>calabun</i>
20 <i>katun</i> = 1 <i>baktun</i>	20 <i>calabun</i> = <i>kinchiltun</i>
20 <i>baktun</i> = 1 <i>piktun</i>	20 <i>kinchiltun</i> = <i>alantun</i>

Jako przykład konsekwentnego układu dwudziestkowego można przytoczyć liczebniki w języku Indian z rodziny aztek-tano z terenu Meksyku. Por.: 1 = *ce*, *cem*; 2 = *ome*; 3 = *jej*; 4 = *nau*; 5 = *makuilli* od wyrazu *ma* „ręka”. Nazwy liczb 6—10 tworzy się przez składowanie dwu nazw:

6 = <i>ēika ce</i> (5 + 1)	11 = <i>matlaktili on ce</i> (10 + 1) itd.
7 = <i>ēikome</i> (5 + 2)	20 = <i>cempuallilicem-poualli</i> (1 × 20)
8 = <i>ēikūjej</i> (5 + 3)	30 = <i>cem-pouallilicem-matlaktili</i> (1 × 20 + 10)
9 = <i>ēikunau</i> (5 + 4)	40 = <i>ompuaalli</i> (2 × 20) itd.
10 = <i>matlaktili</i>	100 = <i>makuil poualli</i> (5 × 20)

Tamankowie z okolic Caracas w Wenezueli liczą w następujący sposób:

1 = <i>tevinitpe</i>
2 = <i>akčaké</i>
3 = <i>ačiluove</i>
4 = <i>akčakemnene</i>
5 = <i>amgnaitone</i> „jedna cała ręka”
10 = <i>amgna ačeponare</i> „obie ręce”
11 = <i>puitta-poná tevinitpe</i> „jeden (palec) u nogi”
15 = <i>iptai toné</i> „jego noga cała” (tj. dwie ręce i jedna noga)
16 = <i>itakonó puitta pona tevinitpe</i> „jeden palec u drugiej nogi”
20 = <i>tevin itóto</i> „jeden Indianin” tj. ręce i nogi człowieka
21 = <i>itakonó itóto jamgnar-boná tevinitpe</i> „jeden u ręki drugiego itóto”
40 = <i>akčake itóto</i> „dwaj itóto — Indianie”
60 = <i>ačiluove itóto</i> „trzej Indianie” itd.

Podstawową jednostką wszystkich obliczeń w języku Tamanków jest więc *itóto* „Indianin” jako suma 20 palców.

W Europie układ dwudziestkowy ma język baskijski. Przykładowo wymienić tu można następujące nazwy liczb: 10 = *amar*; 20 = *oguey*; 30 = *oguey-t-amar* (20 + 10); 40 = *berroquey* (2 × 20); 50 = *berroquey-t-amar* (40 + 10); 60 = *yrurogey* (3 × 20). Podobnie w języku bretońskim mamy 20 = *ugent*, 30 = *trégont*, 40 = *daou ugent* (2 × 20), 50 = *hanterkant* (*semicent*), 60 = *tri ugent* (3 × 20), 70 = *dek tri ugent* (10 + 3 × 20), 80 = *pevar ugent*, 90 = *dek ha pevar ugent* (10 + 4 × 20), 100 = *kant*.

W niektórych nazwach liczb w języku francuskim językoznawcy dopatrują się wpływów celtyckich: 60 = *soixante*, 70 = *soixante dix* (60 + 10), 71 = *soixante onze* (60 + 11), 80 = *quatre-vingt* (4 × 20). Dalsze nazwy liczb aż do 99 są nazwami wskazującymi na tę pozostałość już tylko językową, np. 96 = *quatre-vingt-seize* (4 × 20 + 16). Ślady układu dwudziestkowego mamy również

w łacinie, gdzie liczebniki 18 i 19 tworzone są przez odejmowanie, por. *duodeviginti* (18 = 20 - 2), *undeviginti* (19 = 20 - 1). Ślady układu dwudziestkowego obserwowaliśmy do niedawna w Anglii, (funt szterling dzielił się na 20 szylingów). Była to pozostałość z czasów Karola Wielkiego. Przetrwiała zatem 12 wieków; we Francji została zarzucona w okresie rewolucji pod koniec XVIII w.

Wpływ dwudziestkowego systemu liczenia do dziś widać wyraźnie także w języku duńskim. Por.: 20 = *tyve*, 30 = *trediv* (3 × 10; *ti* = 10), 40 = *tyrretyve* (4 × 10). Od liczebnika 50 wyrazu *tyve* używa się w znaczeniu „20”, ale łączy się z odpowiednimi liczebnikami za pomocą słowa *sinds* „razy”, np.:

60 = <i>tre-sinds-tyve</i> (3 × 20)
50 = <i>halv-tre-sinds-tyve</i> (półtrzecia × 20)
80 = <i>fir-sinds-tyve</i> (4 × 20)
70 = <i>halv-fjerd-sinds-tyve</i> (półczwarta × 20)
90 = <i>halv-fem-sinds-tyve</i> (półpiąta × 20)

Dwudziestkowy układ liczeniowy szeroko rozpowszechniony jest w językach Azji oraz, i to przede wszystkim, Afryki. Nas jednak najbardziej interesuje nasz dziesiętkowy system liczenia. Tym sposobem liczenia zajmiemy się też dokładniej. W układzie dziesiętkowym liczebniki od 1 do 10 mają oddzielne nazwy dla poszczególnych liczb w zakresie 1—10. W językach indoeuropejskich (należą tu wszystkie języki ludów Europy z wyjątkiem języka fińskiego i węgierskiego) pochodzenie tych nazw jest następujące: nazwę liczby „1” wywodzi się z *\*oikos* // */\*oinos*, por. łacińskie *ūnus*, gockie *ains*, sanskryckie *ēka*; nazwę liczby „2” — *\*duwō* // *\*dwō* (rodzaj męski) lub *\*duwoi* // *\*dwi* (rodzaj żeński i nijaki), por. łac. *duo*, gockie *twai*, sanskryckie *\*d(u)vā* // *\*d(u)vē*, litewskie *dū* (rodzaj męski), *dvi* (rodzaj żeński i nijaki); nazwę liczby „3” — *\*treyes* (rodzaj męski), *\*t(r)isres* (rodzaj żeński), *\*trī* (rodzaj nijaki), por. łac. *trēs*, *tria*, sanskryckie *traysa*, *tisras*, *tri*; nazwę liczby „4” — *\*k<sup>w</sup>etwores* (rodzaj męski), *\*k<sup>w</sup>etesres* (rodzaj żeński), *\*k<sup>w</sup>etōr* (rodzaj nijaki), por. sanskryckie *čatvāras*, *čatasras*, *čatvāri*, łacińskie *quattuor*, gockie *fidwōr*; nazwę liczby „5” — *\*penk<sup>w</sup>e*, por. sanskryckie *pañca*, łacińskie *quinque*, gockie *fimf*, litewskie *penki*; nazwę liczby „6” — *\*s(w)eks*, por. sanskryckie *\*sat-*, łacińskie *sex*, gockie *saihs*, litewskie *šeši*; nazwę liczby „7” — *\*septm*, por. sanskryckie *saptá*, łacińskie *septem*, gockie *sibun*; nazwę liczby „8” — *\*oktō*, por. sanskryckie *astā*, łacińskie *octō*, litewskie *aštuoni*; nazwę liczby „9” — *\*newn*, sanskryckie *nāva*, litewskie *devyni*; nazwę liczby „10” — *\*dekmt*, por. sanskryckie *dāca*, gockie *taihun*, litewskie *dešimt*.

Dalej liczymy w ten sposób, że do dziesięciu doliczamy jeden, dwa, trzy itd. W języku polskim mówimy np. jedenaście, dwanaście itd. aż do dwudziestu. Nazwa liczby „20” to właściwie 2 × 10. Por. awestyjskie 1 = *eka*, 2 = *dva*, 3 = *tri*, 4 = *čatur*, 5 = *pañča*, 6 = *xšvaš*, 7 = *haptan*, 8 = *aštan*, 9 = *navan*, 10 = *desan*, 11 = *ekadasan* (1 + 10), 12 = *dvasan* (2 + 10) itd. aż do 20 = *vinsati* (*dvidasati*: 2 × 10).

Dalej liczymy nadając nowe nazwy dziesiątkom według podobnej zasady, np. „40” — to „cztery dziesiątki” itd., a nazwy jednostek dołączamy do nazw dziesiątek. Mówimy np. czterdzieści osiem. Nową nazwę nadajemy dopiero dziesięciu dziesiątkom — to jest setka, sto. Sto w sanskrycie wyraża się słowem *çatām*, któremu odpowiada greckie *hekaton* (spolszczone jako *heкто*), łacińskie *centum*, litewskie *šimtas*, gockie *hunda* (np. w złożeniach *tva-hunda* — „200”, *niun-hunda* — „900”). Dalej do tysiąca liczymy setkami, mówiąc dwieście, trzysta itd. aż do dziesięciu setek. Na określenie dziesięciu setek wprowadzamy nową nazwę tysiąc (po grecku *chilioi*, spolszczone w postaci *kilo*) i liczymy tysiące jak przedtem jednostki. Mówimy np. sto dwadzieścia siedem tysięcy siedemset siedemdziesiąt dwa. U Greków największą liczbą, która miała oddzielny znak (i nazwę!), było „10 000” — *myriás*; w języku polskim wyraz ten spolszczono

w nazwach miar jako *miria*, np. miriagram — 10 kilogramów, lub jako *miriada*, np. o *miriadach much latem*. U Rzymian nową nazwę *milion* otrzymało dopiero tysiąc tysięcy. Widzimy więc, że do miliona wystarczy 13 różnych nazw aby nazwać dowolne liczby w tym zakresie. Jeżeli doliczymy 25 słów o brzmieniu nieco się różniącym od zwykłego stawiania obok siebie tych 33 nazw (a więc jedenaście, pięćdziesiąt, trzysta itp.), otrzymamy łącznie 38 słów, które trzeba poznać, aby bez żadnych trudności nazywać liczby do miliona, a właściwie nawet do 999 999 999. Nazwy wyższych liczb, tzw. wielkich liczb, są już tworzone przez uczonych. Podstawę ich stanowią łacińskie nazwy liczb od dwóch do dziesięciu. Porównaj nazwy *bilion* (od łacińskiego *bis* oznaczającego dwa; bilion ma  $2 \times 6$  zer), *decybilion* (od łacińskiego *decem* oznaczającego dziesięć; decybilion ma  $10 \times 6$  zer). W ten sposób utworzone zostały specjalne nazwy *bilion*, *trylion*, *kwadrylion*, *kwintylion*, *seksybilion*, *septylion*, *oktylion*, *nonybilion*, *decybilion*. W ten sposób można tworzyć nazwy liczb jeszcze większych, np. *centybilion* od wyrazu *centum* (po łacinie: sto). Podany wyżej system tworzenia nazw liczb wielkich oparty jest na grupach sześciocyfrowych (sześć zer w milionie) i stosowany w Polsce, w Niemczech, w Anglii, niektórych krajach północnej Europy i powszechnie w fizyce i matematyce. Natomiast w ZSRR, we Francji, w Ameryce, w krajach południowej Europy, w naukach ekonomicznych — częściej używa się systemu opartego na grupach trzycyfrowych (ilość zer w tysiącu). W tych więc krajach przez bilion, zwany często miliardem, rozumieją tysiąc milionów, przez trylion — tysiąc bilionów itd. Amerykanie zaś przez miliard rozumieją sto milionów, co znakomicie powiększa ilość miliardów w USA.

Powracając do nazw liczb niższych stwierdzamy, że nazwy te, w językoznawstwie nazywane terminem liczebniki, w obrębie słownictwa stanowią grupę wyrazów, które z jednej strony odznaczają się wielką archaicznością, z drugiej zaś wykazują nieoczekiwane na pierwszy rzut oka, w każdym razie niezwykle przekształcenia. Konserwatyzm liczebników opiera się przede wszystkim na ich funkcji znaczeniowej, która jest wybitnie intelektualna, przeważnie pozbawiona zabarwienia uczuciowego. Jedynie liczebniki „jeden” i „pierwszy”, które mogą oznaczać w pewnych sytuacjach także „jedyń” i „najlepszy, najważniejszy”, bywają nieraz silnie nacechowane uczuciowo. Dalsze liczebniki nie mają już tego zabarwienia: pięć czy sześć wyraża treść niemal całkowicie obojętną dla ekspresji. Dopiero wyrazy oznaczające bardzo wielkie i okrągłe liczby znów nabierają ekspresyjności, stając się synonimami określeń takich, jak „bardzo liczny”, „bardzo wielki” itp. Tak np. po polsku *tysiące* oznacza po prostu „bardzo dużo”. Podobnie jest w innych językach. Ten sam czynnik, który uwarunkowuje zachowanie bez zmian większości liczebników, mianowicie ich ściśle intelektualny charakter, wywołuje pewne szczególne zmiany, właściwe tylko tym wyrazom. Dłuższe liczebniki, stanowiące złożenia, jak nazwy jednostek od 11 do 19, czy też nazwy dziesiątek od 20 do 90, mogą ulegać niezwykłym skróceniom, które próżno byłoby tłumaczyć regularnymi zmianami fonetycznymi. Przekształcenie dokonało się w liczebniku jako w wyrazie często używanym, a pozbawionym wartości uczuciowej i wobec tego wymawianym szybko, krócej niż wyrazy, na których spoczywa nacisk. Ogólnie rzecz biorąc system liczebnikowy indoeuropejski jest dobrze znany. Liczebniki główne były przymiotnikami nieodmiennymi; tylko liczebniki 1—4 miały osobne formy rodzajowe i przypadkowe. Co do budowy liczebniki 5—10 były tworami niepodzielnymi, tj. nie widać w nich elementów przedrostkowych, przyrostkowych czy końcówkowych; to samo dotyczy wyrazu oznaczającego „sto”. Liczebnik „tysiąc” w języku indoeuropejskim prawdopodobnie jeszcze nie istniał. Natomiast liczebniki 11—19, nazwy dziesiątek 20—90 i nazwy setek 200—900, były wyrazami złożonymi, których podstawą

był liczebnik „dziesięć” albo „sto”, uzupełniony odpowiednio nazwą jednostek. System ten przeziara mniej lub więcej wyraźnie we wszystkich znanych dziś językach indoeuropejskich. W szczególności jest jednak sporo różnic. W porównaniu ze stanem prajęzykowym system liczebników słowiańskich wykazuje szereg ważnych innowacji. Jedna cecha ogólna rzuca się w oczy od razu: wszystkie liczebniki stały się tu wyrazami odmiennymi; zarówno nazwy jednostek 5—10, jak liczebniki wyższe 11—19, nazwy dziesiątek i setek.

Cecha ta jest mianowicie dwójaka: po pierwsze, liczebniki główne nieodmienne 5—10 i 100, o składni przymiotnikowej (jak po łacinie: *quinque viri* „pięciu ludzi”, por. *boni viri* „dobrzy ludzie”) zastąpiono derywatami odmiennymi, o składni rzeczownikowej: *pięć koni*, jako stado koni, tj. od liczebnika *pięć* uzależniony jest rzeczownik w dopełniaczu. Po drugie, wszystkie liczebniki wyższe, złożone, uległy całkowitej przebudowie. Robią one takie wrażenie, jakby zostały na gruncie słowiańskim utworzone na nowo, choć oczywiście na podstawie elementów odziedziczonych.

Proszę spróbować odmienić przez przypadki „21 chłopców”

W systemie prasłowiańskim liczebniki nie stanowiły jeszcze oddzielnej części mowy w dzisiejszym tego słowa znaczeniu; wydzielają się jedynie w grupę wyrazów o wyraźnej funkcji znaczeniowej. Z czasem oznaczanie ilości stało się cechą nie tylko semantyczną, ale także formalną. Jeszcze w języku starosłowiańskim wyrazy *petь*, *šestь*, *sedьmь*, *osmь*, *devetь* były rzeczownikami odmieniającymi się według wzoru *kość* „kość”. Według tej samej odmiany odmieniała się *desetь* z tym, że w niektórych przypadkach zachowały się także formy starsze według innej deklinacji. Podobnie inne wyrazy kwantytatywne, *soto*, *tysešta* (*tysąsta*), *toма* (*toma*), *nesъvѣda* były rzeczownikami bez jakichś cech wyróżniających, może z wyjątkiem *soto*, które występowało także w połączeniach z innymi liczebnikami. Co się tyczy sposobu łączenia z rzeczownikami, to liczebniki od „5” wwyż w języku starosłowiańskim wymagały dopełniacza liczby mnogiej rzeczowników nie tylko wtedy, kiedy występowały w mianowniku, ale także w przypadkach zależnych, por. *petь lѣto*, *peti lѣto*, *petijā lѣto* itd. W taki związek wstępują obecnie rzeczowniki, por. polskie *garść jagód*, *garścią jagód*, *rogi ulic*, *rogach ulic* itp. W odróżnieniu od liczebników, por. polskie *sześć zeszytów*, *z sześcioma zeszytami*, *o sześciu zeszytach* itp. Jeżeli chodzi o liczebniki 1—4, to i one stopniowo zatracaly charakter pierwotnych przydawek, ale proces ten do dziś nie jest zakończony; przebiega on w znacznie wolniejszym tempie i nierównomiernie w poszczególnych językach słowiańskich. W starosłowiańskim liczebniki te zachowują formę zgody z rzeczownikami w przypadku oraz w rodzaju (liczebniki 2—4 mają formy *dъva*, *trie*, *četyre* dla rodzaju męskiego oraz *dъvě*, *tri*, *četyri* dla rodzaju żeńskiego i nijakiego; liczebnik „1” ma oddzielne formy dla trzech rodzajów) i liczbie (liczebnik „1” łączy się z liczbą pojedynczą rzeczownika, liczebnik „2” — z tak zwaną liczbą podwójną rzeczownika, zaś liczebnik „3” i „4” — z liczbą mnogą).

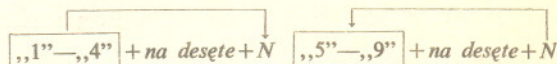
W rozwoju liczebników zasadnicze znaczenie przypisuje się liczebnikom 11—19. W liczebnikach 11—14 syntaktycznie członem nadrzędnym był pierwotnie człon pierwszy, to jest liczebniki 1—4, które miały charakter przydawki zgodnej z rzeczownikiem, natomiast w liczebnikach 15—19 człon pierwszy, to jest liczebniki 5—9 miały charakter rzeczownika rozwijanego przez rzeczownik. I tak np. przy oznaczaniu „11” rzeczownik występuje w liczbie pojedynczej, a rodzaj i przypadek członu *edina* zgadza się z rodzajem i przypadkiem rzeczownika, por. starosłowiańskie (Kodeks Mariański, Mat 28, 16): *ediny že na desetę učeníkь*. Przy oznaczaniu „12” rzeczownik występuje w liczbie podwójnej, a rodzaj i przypadek członu *dъva* zgadza się z rodzajem i przypadkiem rzeczownika, por. starosłowiańskie

(Kodeks Zografski, J6, 13): *naplǫnǫ dǫva na desęte koša ukruchǫ*. Przy oznaczaniu 13—14 rzeczownik występuje w liczbie mnogiej. Przy oznaczaniu 15—19 rzeczowniki występują zarówno w przypadkach prostych, jak i zależnych liczebników w dopełniaczu liczby mnogiej, to znaczy mamy *pęť na desęte učeníkǫ, kǫ pęťi na desęte učeníkǫ*. Liczebniki te jako często używane stawały się jednostkami leksykalnymi, co w konsekwencji prowadziło do zacierania dotychczasowej motywacji różnego łączenia liczebników 11—14 i 15—19 z rzeczownikiem. Ostatecznie z pierwotnych połączeń liczebnikowych, wskutek uproszczenia powstały współczesne formy syntetyczne jedenaście, dwanaście itd. Rozwój prasłowiańskich liczebników *iedǫnǫ na desęte, dǫva na desęte* itd. należy do tej kategorii zjawisk językowych, które przebiegają paralelnie we wszystkich językach słowiańskich. Wspólna jest mianowicie na ogół tendencja do zmian redukcyjnych w ostatnim członie złożenia, to jest w wyrazie *\*desęte*. Przyjmuje się zwykle tezę, że przyczyną tych zmian jest deetymologizacja złożów *\*iedǫnǫ na desęte, \*dǫva na desęte, \*trie na desęte, \*pęť na desęte* itd. oraz przesunięcie funkcji wyrażenia *\*na desęte*, które staje się sufiksem. Formalnym współczynnikiem była bez wątpienia stabilizacja akcentu na przyimku *na*, ułatwiająca przeprowadzenie uproszczeń.

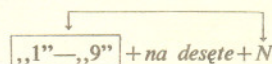
Najstarsze teksty, pisane w języku staro-cerkiewno-słowiańskim, z wieku X i XI zawierają liczne przykłady omawianych form — są to z reguły zestawienia syntaktyczne, nie podlegające skróceniom, np. *dǫva na desęte, oba na desęte, osmǫ na desęte* itp. Wydaje się pewne, że co najmniej do wieku XII stan taki utrzymuje się we wszystkich językach słowiańskich. Do zasadniczych przekształceń w badanych liczebnikach dochodzi w wieku XIII. Sposób przeprowadzenia redukcji wyrażenia *\*na desęte* nie jest taki sam we wszystkich językach słowiańskich. Można zaobserwować wyraźne odrębności wschodnie, zachodnie i południowe, a więc zgodnie z jednym z najstarszych językowych podziałów Słowian. W obrębie trzech wymienionych grup zachodzą dalsze opozycje. W językach zachodnich można mówić o historycznej łączności polsko-łuzyckiej, przeciwstawiającej się językowi czeskiemu i w mniejszym już stopniu słowackiemu, w językach południowych bułgarski i macedoński przeciwstawiają się w pewnym zakresie serbsko-chorwackiemu i słoweńskiemu. W językach wschodniosłowiańskich przejście *-nadesjatsǫ* w *-nadcatsǫ* zaszło w ciągu XIII wieku; forma ta staje się literacką i utrzymuje się do dzisiaj. W tekstach staropolskich, pochodzących już z XIV wieku, liczebniki interesującego nas tu typu mają zakończenie *-naćce, naće* i lokalnie *naśce*; w wieku XV ustala się w polszczyźnie zakończenie *-naście*. Jeszcze dalej niż w języku polskim poszła redukcja w języku słowackim, a zwłaszcza w czeskim. W językach tych w XV wieku zaginęły wszystkie samogłoski prasłowiańskiego członu *desęte* dając w efekcie z wyrażenia *na desęte* tylko zbitkę *-nǫct* w języku czeskim i *-nǫst* w języku słowackim, por. *jedenǫct, jedenǫst*. Południe Słowiańszczyzny przeciwstawia się w interesującym nas zakresie wszystkim językom północnosłowiańskim tak pod względem chronologii, jak i typu zachodzących zmian. Literacki język bułgarski na przykład do dzisiaj zachowuje formy bardzo bliskie prasłowiańskim: *edinadeset, dvanadeset* itd., choć w mowie potocznej zmiany są znaczne, bliskie tym, jakie zaszły w pozostałych językach południowosłowiańskich. W obiegowej postaci mówionej wszystkie języki południowosłowiańskie wykazują duże podobieństwo rozwojowe, por. serbsko-chorwackie *pęťnaest*, wymawiane też *pęťnajst*, słoweńskie *pęťnajst*, macedońskie *petnǫdeset* wymawiane jako *petnǫjse*, bułgarskie *petnǫdesetǫ* oboczne do powszechnego w mowie potocznej *petnǫjset*.

Reasumując należy stwierdzić, że obecnie liczebniki 11—19 robią takie wrażenie, jakby na gruncie słowiańskim zostały utworzone

na nowo. Jak wspomniałem wyżej, pojmowanie tych liczebników jako jednostek leksykalnych, otworzyło drogę do wzajemnych wpływów grupy liczebników 11—14 oraz 15—19 doprowadzając w konsekwencji do unifikacji formalnej liczebników pod względem syntaktycznym. Wpływy te, o których częściowo już wyżej wspomniałem, można ująć następująco: grupa liczebników 11—14 starała się narzucić swoją cechę konstytutywną (odmienianie przez przypadki liczonego przedmiotu) grupie liczebników 15—19, a ta z kolei swoją cechę konstytutywną (kładzenie liczonego przedmiotu w dopełniaczu liczby mnogiej) grupie liczebników 11—14. Zasady te, w pełni zachowane jeszcze w zabytkach starosłowiańskich, schematycznie można przedstawić następująco (*N* = rzeczownik):

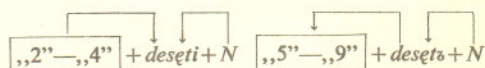


W efekcie pojmowania całego zestawienia liczebnikowego jako jednego wyrazu fleksja została przeniesiona na część przyrostkową powstałego złożenia, to jest na zbitkę liczebnika *desęte*, a sposób łączenia się liczebnika z rzeczownikiem poszedł w kierunku wzajemnego wyrównania liczebników 11—14 i 15—19. Wyrównania te można przedstawić następująco:



Sprzyjało temu z jednej strony upodobnienie się liczebników 11—14 do 15—19 pod względem morfologicznym, a z drugiej — niewątpliwie także poczucie semantyczne oznaczanej liczby. Z chwilą, kiedy liczebniki 11—19 stały się jednostkami leksykalnymi, zanikły dotychczasowe motywacje różnego sposobu łączenia się liczebników 11—14 i 15—19 z rzeczownikami.

Nie mniej ciekawie przedstawia się historia tak zwanych liczebników dziesiątkowych: 20, 30, 40, 50 itd. Liczebnik 20 był pierwotnie zestawieniem liczebnika *dǫva* oraz liczebnika 10 w tak zwanej liczbie podwójnej: *dǫva desęti*. Liczebniki 30 i 40 były pierwotnie również zestawieniami liczebników *tri, čtyri* oraz liczebnika 10 w liczbie mnogiej: *tri desęti, čtyri desęti*. Druga część dawnego zestawienia bardzo wczesnie uległa redukcji spadając do funkcji przyrostka dając w efekcie np. w staropolszczyźnie formy *dwadzieści, trzydzieści, czterdzieści*. Liczebniki 50—90 składały się pierwotnie z liczebników 5—9 oraz liczebnika 10, przy czym liczebniki 5—9 odmieniały się przez przypadki, natomiast liczebnik 10 zawsze występował w dopełniaczu liczby mnogiej, a więc np. *pęť desęť, dopełniacz pęťi desęť* itd. Niezależnie od różnych związków wewnętrznych liczebników 20—90, sposób ich połączeń z licznym przedmiotem jest taki sam: głównym komponentem jest liczebnik 10, a więc:



Liczebniki 20—90 wczesnie zatraciły pierwotną wyrazistość (odrębność) semantyczną obu członów zestawienia. W rezultacie różnych wyrównań, w istocie swej podobnych jednak do wyrównań w liczebnikach 11—19, schemat ich połączeń z rzeczownikami jest taki sam jak liczebników typu „5”.

Pozostałe liczebniki nie nastroczają poważniejszych wątpliwości, przynajmniej w języku polskim, i dlatego nie będę się nimi zajmował. Na uwagę zasługiwałyby tu jedynie nazwy liczb pośrednich między wielokrotnościami „10”, „100” i „1000” w języku staropolskim i przede wszystkim w języku starosłowiańskim oraz w języku staroczeskim. Jest to jednak problem bardzo szeroki i wymagałby oddzielnego opracowania.



Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n+2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr.  $n+4$ . Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4-3 \cdot \frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.

Ligę organizuje Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, oraz nasza Redakcja.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr. 9/1981.

## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Deltę”

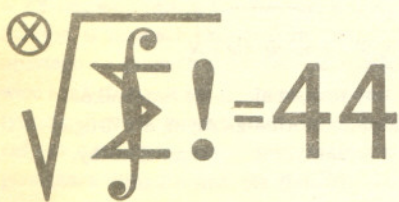
Zadania nr 13, 14, 15

Termin nadsyłania rozwiązań: 31. 5. 1982 r.

13. Dla jakich wartości  $a > 1$  ciąg  $a, a^a, a^{a^a}, a^{a^{a^a}} \dots$ , jest zbieżny?

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA 14. Wyprowadzić wzór wyrażający pole trójkąta przez długości jego trzech wysokości.

15. **Samochodem przez pustynię.** Samochód może zabrać tylko jedną baryłkę paliwa, co wystarcza na przejechanie połowy drogi przez pustynię. Jaka jest minimalna ilość paliwa wystarczająca do przebycia całej drogi? Zakładamy, że można po drodze odlewać (i magazynować, a potem w stosownej chwili zabierać) dowolną ilość paliwa.



## Klub 44

1. Sprowadźmy składniki rozważanej sumy do wspólnego mianownika:

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{L_1 + L_2 + \dots + L_n}{M} = \frac{L}{M},$$

Rozwiązania zadań 1, 2, 3 z numeru 9/1981

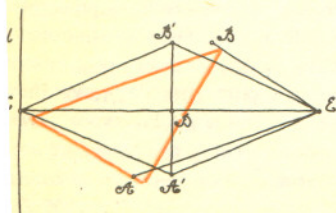
gdzie  $M$  jest najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb  $1, 2, \dots, n$ . Niech  $k$  będzie taką liczbą naturalną, że  $2^k \leq n < 2^{k+1}$ . Spośród liczb  $j = 1, 2, \dots, n$  tylko jedna (mianowicie  $j = 2^k$ ) dzieli się przez  $2^k$ , wobec czego wszystkie liczniki  $L_j$  o numerach  $j \neq 2^k$  są liczbami parzystymi. Natomiast licznik  $L_{2^k}$  jest liczbą nieparzystą. Zatem liczba  $L = \sum L_j$  jest nieparzysta i iloraz  $L/M$  nie może być liczbą całkowitą.

2. Podane zdanie nie jest prawdziwe. Kontrprzykład: niech  $PQRS$  będzie kwadratem o boku  $PQ$  leżącym na odcinku  $AB$ , przy czym  $AP = PQ = QB$ , i niech  $Z = \{P, Q, R, S\}$ . Wówczas najkrótszą drogą od  $A$  do  $B$  jest łamana  $APSRQB$ , natomiast drogą „najmniej krętą” (w sensie określonym w zadaniu) jest łamana  $ASRPQB$ .

3. Objętość rozpatrywanej bryły obrotowej wyraża się wzorem: (\*)  $V = 2\pi rS$ , gdzie  $S$  jest polem obracanego trójkąta, a  $r$  — odległością jego środka ciężkości od osi obrotu. Jest to znana reguła Guldina — słuszna nie tylko wtedy, gdy obracana figura jest trójkątem — ale dla trójkąta dowodzi się ją łatwo, zauważając, że badana bryła jest różnicą stożka ściętego i dwóch stożków zwykłych. Przy ustalonym kształcie trójkąta objętość (\*) jest więc największa, gdy oś obrotu przechodzi przez wierzchołek leżący najdalej od środka ciężkości i jest prostopadła do środkowej wychodzącej z tego wierzchołka. Niech więc  $ABC$  będzie dowolnym trójkątem o obwodzie 1; założmy, że  $CD$  jest jego najdłuższą środkową i obierzmy jako oś obrotu, zgodnie z poprzednią uwagą, taką prostą  $l$ , że  $C \in l \perp CD$ . Pokażemy, że jeśli  $AC \neq BC$ , to można znaleźć trójkąt równoramienny o obwodzie 1 o wierzchołku w punkcie  $C$ , dla którego wielkość (\*) jest większa, niż dla trójkąta  $ABC$ .

Oznaczmy przez  $A'$  i  $B'$  punkty określone przez warunki:  $AA' \parallel CD \parallel BB'$ ,  $A'D \perp CD \perp B'D$  (rysunek). Pola trójkątów  $ABC$  i  $A'B'C$  są równe, zaś obwód trójkąta  $A'B'C$  jest mniejszy od 1, bowiem  $A'B' < AB$  oraz  $A'C + B'C < AC + BC$  (co najłatwiej zauważyć uzupełniając trójkąt  $ABC$  do równoległoboku  $BCAE$ , o obwodzie większym od obwodu rombu  $B'CA'E$ ). Oddalając teraz punkty  $A'$  i  $B'$  od prostej  $l$  o stosowny odcinek dostaniemy trójkąt równoramienny o obwodzie 1, a czynniki  $r$  i  $S$  we wzorze (\*) zwiększą się przy tej operacji.

Zatem w rozwiązaniu zadania wystarczy ograniczyć uwagę do sytuacji, gdy obracany trójkąt jest równoramienny, a jego oś symetrii jest prostopadła do osi obrotu. Oznaczmy przez  $x$  połowę długości podstawy, a przez  $h$  — wysokość. Obwód ma być równy 1, więc  $2x + 2\sqrt{x^2 + h^2} = 1$ , skąd  $h = \sqrt{1 - 4x}/2$ . Czynniki we wzorze (\*) równe są odpowiednio  $r = 2h/3$ ,  $S = xh$ , co po krótkich rachunkach daje  $V = \pi x(1 - 4x)/3$ . Otrzymana funkcja kwadratowa przyjmuje maksimum  $V_{\max} = \pi/48$  dla  $x = 1/8$ , czyli wtedy, gdy obracany trójkąt ma boki długości  $2/8, 3/8, 3/8$ .



## Liczba rzeczywista jako granica ciągu liczb wymiernych

Wiadomo, że każda liczba rzeczywista jest granicą ciągu liczb wymiernych. Udowodnimy to twierdzenie.

Można skonstruować ciąg liczb wymiernych zbieżny do liczby  $\sqrt{2}$ , na przykład tak:

Niech  $a$  będzie dowolną liczbą wymierną większą od  $\sqrt{2}$ .

Przyjmijmy, że  $a$  jest pierwszym wyrazem ciągu.

Rozważmy liczbę  $\frac{a^2+2}{2a}$ . Widać, że jest to liczba wymierna. Pokażemy, że

$$\sqrt{2} < \frac{a^2+2}{2a} < a \quad (1)$$

i liczbę  $\frac{a^2+2}{2a}$  uznamy za drugi wyraz ciągu.

Przekształcając nierówności (1) w sposób równoważny otrzymujemy

1°.  $a^2 - 2a\sqrt{2} + 2 > 0$ ,  $(a - \sqrt{2})^2 > 0$ ,  $a \neq \sqrt{2}$  — prawda,

2°.  $a^2 + 2 < 2a^2$ ,  $a^2 > 2$ ,  $a > \sqrt{2}$  — prawda.

Zatem nierówności (1) zostały udowodnione. Z nierówności tych widać, że mając liczbę wymierną  $a > \sqrt{2}$  możemy otrzymać liczbę wymierną leżącą pomiędzy liczbą  $\sqrt{2}$  i liczbą  $a$  w sposób

następujący:  $\frac{a^2+2}{2a}$ . Mając zaś liczbę wymierną  $\frac{a^2+2}{2a}$  możemy otrzymać liczbę wymierną

leżącą pomiędzy liczbą  $\sqrt{2}$  i liczbą  $\frac{a^2+2}{2a}$  w sposób następujący:  $\frac{\left(\frac{a^2+2}{2a}\right)^2 + 2}{2\left(\frac{a^2+2}{2a}\right)}$  itd.

Otrzymujemy ciąg nieskończony liczb wymiernych. Ciąg ten możemy zdefiniować tak:

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2}{2a_n} \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots$$

Z uwagi na to, że ciąg ten jest malejący i ograniczony z dołu (przez  $\sqrt{2}$ ), więc jest zbieżny. Oznaczmy granicę tego ciągu przez  $g$ . Mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 + 2}{2a_n}. \quad (2)$$

Skoro  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$ , więc  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = g$ . Zatem z równości (2) otrzymujemy:

$$g = \frac{g^2 + 2}{2g}, \quad \text{skąd } g = \sqrt{2}.$$

Można wskazać inny ciąg liczb wymiernych zbieżny do  $\sqrt{2}$ . Np.

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = \frac{4a_n}{a_n^2 + 2} \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots,$$

gdzie  $a$  jest dowolną liczbą wymierną taką, że  $0 < a < \sqrt{2}$ .

Dowód, że ciąg ten jest zbieżny do  $\sqrt{2}$ , przebiega analogicznie jak w przykładzie ciągu poprzedniego.

Mało to jednak cieszy, bo nie widać jak można by stosować taką metodę do dowolnej liczby niewymiernej np.  $\pi$ . Trzeba więc poszukać innej metody.

W tym celu weźmy pod uwagę funkcję  $[x]$  przyporządkowującą dowolnej liczbie  $x$  największą z liczb całkowitych nie większych od  $x$ . Łatwo dostrzec, że dla dowolnej liczby  $x$  jest:

$$x - 1 < [x] \leq x.$$

Biorąc jako  $x$  liczbę  $n\alpha$ , gdzie  $\alpha$  jest dowolną liczbą rzeczywistą otrzymujemy

$$n\alpha - 1 < [n\alpha] \leq n\alpha,$$

$$\alpha - \frac{1}{n} < \frac{[n\alpha]}{n} \leq \alpha.$$

Stąd na podstawie twierdzenia o trzech ciągach mamy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[n\alpha]}{n} = \alpha$ .

A więc do dowolnej liczby rzeczywistej  $\alpha$  zbieżny jest ciąg liczb wymiernych o wyrazie ogólnym  $\frac{[n\alpha]}{n}$ .