

Dnia 5 listopada 1981 roku zmarł w Warszawie

członek rzeczywisty Polskiej Akademii Nauk

prof. dr Stanisław Mazur

matematyk światowej sławy

autor fundamentalnych prac z zakresu analizy funkcjonalnej
i analizy obliczalnej

SPIS TREŚCI

NUMERU 12 (96)

Najregularniejsze i najpopularniejsze geometrie	str. 1
Geometrie na płaszczyźnie afinicznej	str. 4
Konkurs	str. 5
Geometrie na różności	str. 6
Geometrodynamiczność	str. 7
Geometrie na sferze	str. 8
Klub 44	str. 9
Jak wygląda świat geometrii Bolyai-Łobaczewskiego	str. 10
Patrz w niebo	str. 11
Paradoks zegarów	str. 12
Gra	str. 13
Geometria świata kwarków	str. 14
Homografie	str. 14
Kondensatory	str. 15
Twierdzenie o powrocie	str. 16
Zadania	str. 17

Numer przygotowali:

Maciej Jędrzejczak

Marek Kordos

Antoni Kuszell

Krzysztof Nowiński

Krzysztof Prażmowski

Michał Świącki

Nasza okładka:

Czterowymiarowa kostka

Historia jednej powierzchni

„Delta”

matematyczno-fizyczno-astronomiczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny:

doc. dr Jerzy Bartke
doc. dr Andrzej Bączyński
doc. dr Bolesław Gleichgewicht
prof. dr Kazimierz Goebel
doc. dr Bolesław Grabowski
dr hab. Jan Hanasz
doc. dr Bolesław Iwaszkiewicz
doc. dr Tadeusz Iwiński
doc. dr Andrzej Januszajtis
doc. dr Tadeusz Jarzębowski
prof. dr Leon Jeśmanowicz
dr Henryk Kaczorek
prof. dr Marek Kuczma
mgr Andrzej Mąkowski
prof. dr Bohdan Paczyński
prof. dr Zdzisław Pawlak
prof. dr Arkadiusz Piekara
doc. dr Sławomir Ruciński
prof. dr Konrad Rudnicki
prof. dr Zbigniew Semadeni
doc. dr Grzegorz Sitarski

prof. dr Józef Smak
prof. dr Jan Stankowski
doc. dr Kazimierz Stepiń
prof. dr Mieczysław Subotowicz
doc. dr Stefan Turnau
prof. dr Jerzy Wdowczyk
doc. dr Andrzej Woszczyk
prof. dr Janusz Zakrzewski —
wiceprzewodniczący
prof. dr Wojciech Żakowski —
przewodniczący

Redaguje Kolegium w składzie:

mgr Tomasz Chlebowski
mgr Maciej Jędrzejczak
dr Marek Kordos — red. nac.
dr inż. arch. Jacek Mazur — ilustracje
dr Krzysztof Prażmowski — red. techn. graf.
dr Michał Szurek
mgr Krystyna Szypcio — sekr. red.
doc. dr Michał Świącki — z-ca red. nac.

Adres Redakcji

ul. Hoża 69 pok. 151,
00-681 Warszawa

Zakład Narodowy im.
Ossolińskich — Wydawnictwo
Wrocław, Oddział w Warszawie
Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.
wyd.; 2,50 ark. druk.;
papier offsetowy V kl. 71 g, rola 61
Wydrukowano w Drukarni im.
Rewolucji Październikowej
Warszawa, ul. Mińska 65
Nr zam. 791/12/81 L-20

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

Informacji o sposobie i warunkach prenumeraty
udzielają Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch”.

Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

Instrukcje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTA”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.
Sprzedż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem
lub za zaliczeniem pocztowym.
Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Konto PKO I O M W-wa 1531-912

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław
w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa
w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7
00-068 Warszawa, Poland or with
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68,
Bundesrepublik Deutschland.
— Earls Court Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain,
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia

Cena 1 egzemplarza zł 5— nr indeksu 35723/35550

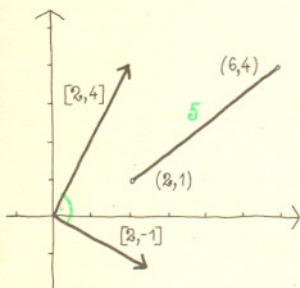


Najregularniejsze i najpopularniejsze geometrie

(w takiej kolejności, w jakiej zaczęto je uprawiać).

Geometria euklidesowa

Została zapoczątkowana przez Dorów (= Starożytni Grecy). I, ponieważ jesteśmy ich kulturowymi i cywilizacyjnymi potomkami, uważana jest powszechnie za tę „zwykłą” i „naturalną”. Znamy ją, zanim zaczniemy się cokolwiek uczyć — już w pierwszej klasie dzieci starannie piszą w zeszytach „takie same” litery jak pani na tablicy, choć przecież smarują obrazek 20 razy mniejszy. A możliwość *rysowania w skali* jest charakterystyczna dla geometrii euklidesowej i oddała Europejczykom wielkie usługi w technice i podbojach choćby. Powszechnie posługujemy się *prostokątem* i wiemy, że *nie ma prostych prostopadłych do nich samych*.



Wymienione trzy własności całkowicie odróżniają geometrię euklidesową od innych (uprawianych). Nie będziemy się nad tą geometrią rozwodzić, bo sądzimy, że Czytelnicy ją znają. Podobnie, jak wiedzą, co to są liczby rzeczywiste i że w kartezjańskim układzie współrzędnych na płaszczyźnie odległość punktów (x_1, x_2) i (y_1, y_2) wynosi

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

zaś prostopadłość wektorów $[x_1, x_2]$ i $[y_1, y_2]$ to zależność ta sama, co

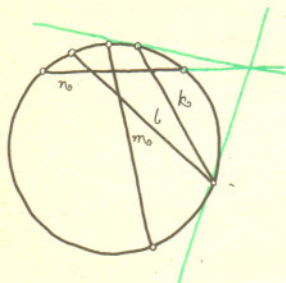
$$x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0.$$

Geometria Bolyai — Łobaczewskiego

Pisaliśmy o niej w Delcie 10/1975. Warto zwrócić też do książki Stefana Kulczyckiego „Geometria nieeuklidesowa”.

ma datę powstania (ok. 1830) i odkrywców (Janos Bolyai — 1832, Mikołaj Łobaczewski — 1829), choć była uprawiana już stulecie wcześniej. Wzięła się z rozważania konieczności umieszczenia w aksjomatyce geometrii euklidesowej tzw. V postulatu — była więc początkowo tworem czysto intelektualnym. Obecnie traktowana jest równorzędnie z euklidesową jako jeden z możliwych (i używanych przez fizyków i astronomów) sposobów opisu realnej przestrzeni.

Nie dopuszcza istnienia prostokątów, istnieją w niej trójkąty, na których nie da się opisać okręgu, trójkąty o odpowiednio równych kątach okazują się przystające, z sumy tych kątów można obliczyć pole, proste równoległe zblizają się asymptotycznie do siebie itd. itp.



Gdyby ktoś chciał samodzielnie się z nią zapoznać np. w przypadku dwuwymiarowym, polecamy eksperymenty z *modelem Kleina*. Jest to obiekt zbudowany na płaszczyźnie euklidesowej i mający te same własności, co płaszczyzna Bolyai — Łobaczewskiego. Punkty modelu Kleina, to punkty wnętrza euklidesowego koła jednostkowego, proste — to cięciwy tego koła. Kilka innych pojęć określimy za pomocą rysunku: proste leżące tak jak k i l — to równoległe, tak jak k i m — nadrównoległe, tak jak k i n (uwaga na zielone linie) — prostopadłe. Dla stwierdzenia, czy wszystko jest jasne, proszę sprawdzić, że dwie różne proste mają wspólną prostopadłą wtedy i tylko wtedy, gdy są nadrównoległe. A także: dowolny kąt ma prostą zagradzającą tj. prostą równoległą do obu jego ramion. Gdyby ktoś chciał mieć jeszcze odległość, niech poszuka w artykule „Geometria na płaszczyźnie afinicznej”.

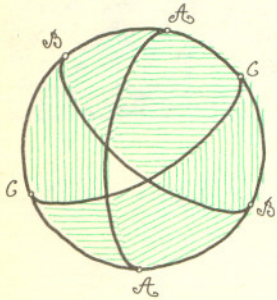
Tu podamy tylko jeszcze warunek na to, by wektory $[x_1, x_2]$ i $[y_1, y_2]$ w zwykłym kartezjańskim układzie współrzędnych (początek układu w środku koła) były prostopadłe:

$$1 - x_1 y_1 - x_2 y_2 = 0.$$

Inne modele są opisane w artykule „Jak wygląda świat geometrii Bolyai-Łobaczewskiego”.

Geometria eliptyczna

Pisaliśmy o niej w Delcie 1/1977 i 2/1977 (autorem tego ostatniego artykułu był Albert Einstein). Warto też zajrzeć do książki H.S.M. Coxetera „Wstęp do geometrii dawnej i nowej”.



Inny (choć nie bardzo) model jest opisany w artykule „Geometria na sferze”.

też ma datę narodzin (ok. 1860) i ojca (Bernhard Riemann) — tym razem bez żadnych zastrzeżeń. W tej geometrii każde dwie różne proste przecinają się w jednym punkcie. Nie ma więc ani równoległych, ani nadrownoległych. Są w niej prawdziwie wymienione wyżej własności geometrii Bolyai-Łobaczewskiego, w których nie było mowy o równoległych i nadrownoległych z jednym wyjątkiem — analogicznie jak w euklidesowej na trójkącie można opisać okrąg.

Ponadto np. prosta nie rozcina płaszczyzny eliptycznej, a trzy dzieli płaszczyznę nie na 7 (jak w obu wymienionych wyżej) lecz na 4 części.

Można sobie płaszczyznę eliptyczną wyobrazić, choć nie ma ona naturalnego modelu ani na płaszczyźnie, ani nawet w przestrzeni euklidesowej. Weźmy mianowicie półsferę w przestrzeni euklidesowej (mniej więcej to co widać patrząc na sferę) i niech prostymi będą na niej półokręgi wielkie. Żeby nasza płaszczyzna eliptyczna nie miała brzegu, „sklejmy” (utożsammy) końce tych półokręgów (nie da się tego fizycznie zrobić nie zlepiając ich w jedno, ale w wyobraźni można).

Odległość mierzymy wzdłuż „prostych” (oczywiście mniejszy z dwóch odcinków, nawet jeśli ten mniejszy zawiera sklejenie) zwyczajnie, np. nitką. Kąty też będziemy mierzyć zwyczajnie. I model gotowy.

Jeżeli nasza płaszczyzna eliptyczna powstała ze sfery jednostkowej (mającej środek w początku zwykłego przestrzennego kartezjańskiego układu współrzędnych), to prostopadłość wektorów $[x_1, x_2, x_3]$ i $[y_1, y_2, y_3]$ będzie się wyrażała wzorem

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0.$$

Geometria Minkowskiego

Pisaliśmy o niej w Delcie 12/1979 właśnie z okazji szczególnej teorii względności.

czyli czasoprzestrzeń. Tym samym podaliśmy i datę i autora — Hermann Minkowski opracował w 1903 r. tę teorię dla ścisłego matematycznego ujęcia szczególnej teorii względności Alberta Einsteina. Własności linii prostych w tej geometrii nie różnią się od euklidesowych. Natomiast we wszystkich wzorach dotyczących prostopadłości, czy odległości należy przed współrzędną „czasową” dodać „jednostkę urojoną” czyli $\sqrt{-1}$. Dla przykładu więc na płaszczyźnie Minkowskiego (jeden wymiar geometryczny, jeden „czasowy”) odległość punktów (x_1, x_2) i (y_1, y_2) wyrazi się wzorem

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2}$$

a prostopadłość wektorów $[x_1, x_2], [y_1, y_2]$

$$x_1 y_1 - x_2 y_2 = 0.$$

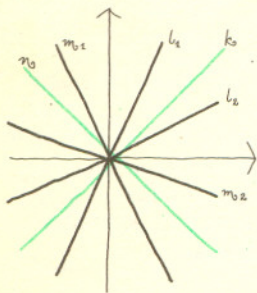
Natychmiast stwierdzamy stąd, że wektor $[1, 1]$ jest sam do siebie prostopadły (fachowo: *izotropowy*)! Prosta o kierunku izotropowym też jest tak nazywana. Na rysunku izotropowe są więc proste k i n . Proste l_1 i l_2 są prostopadłe, jak też proste m_1 i m_2 . Ogólnie każde proste położone (euklidesowo) symetrycznie względem prostych izotropowych są prostopadłe (i na odwrót: każde prostopadłe tak leżą). Mimo to na płaszczyźnie Minkowskiego istnieją prostokąty.

CO ONE MAJĄ WSPÓLNEGO

Przede wszystkim tytułową własność — jednorodność. Otóż otoczenia dowolnych punktów (w każdej z rozpatrywanych płaszczyzn) niczym nie różnią. Po drugie — prostopadłość w każdej z nich wyraża się przez pierwiastki wielomianu stopnia 2. „Po trzecie” raczej nie ma — ich (znów tytułowa) popularność wynika z wyżej podanych własności: Fizycy, czy astronomowie lubią po prostu wyobrażać sobie otaczający świat jednorodnie tak długo jak to się tylko da zrobić.

CO MOGĄ MIEĆ WSPÓLNEGO

Jest powszechnie wiadomo, że pierwsze dwie spośród wymienionych geometrii mają wspólną bardzo obfitą w twierdzenia część zwaną geometrią absolutną (z dobrą dokładnością to, co wynika z pierwszych czterech postulatów Euklidesa). Trzy pierwsze są zebrane razem w artykule „Geometrie na rozmaitości”. A cztery? Jeśli je nieco rozszerzymy i tu znajdzie się okazała część wspólna.



Rozwiązanie zadania F 104. Skoro wewnętrzna powierzchnia z założenia nie absorbuje światła, to musi się ustalić stan stacjonarny, w którym strumienie świetlne: wnikający do sfery i wybiegający z niej są równe. Oznacza to równość oświetleń otworu od wewnątrz i z zewnątrz. Na punkt położony naprzeciwko otworu pada światło ze źródła oraz światło rozproszone przez wewnętrzną powierzchnię sfery. Jeśli średnica otworu jest mała w porównaniu z promieniem sfery, to oświetlenie światłem rozproszonym każdego punktu wewnętrznego jest takie samo jak oświetlenie otworu od wewnątrz. Wynika stąd, że punkt naprzeciwko otworu jest dwa razy mocniej oświetlony niż pozostałe.

Jest to pierwsza publikacja na ten temat. Szkoda, że tak pobeżna.

Wypada tu najpierw przypomnieć (zasugerować), co to jest przestrzeń (w szczególności płaszczyzna) rzutowa. Powstaje ona przez dołączenie do każdej prostej euklidesowej nowego punktu zamykającego nasze proste w „okręgi”, przy czym do prostych równoległych dołączamy ten sam punkt. W przypadku płaszczyzny umawiamy się jeszcze dodatkowo, że te nowe punkty tworzą (jedną) nową prostą.

Ktoś może zauważyć, że to właściwie tak samo, jak w geometrii eliptycznej, i że ta półsfera, to model geometrii rzutowej. Słusznie! Tyle, że geometria eliptyczna jest bogatsza od rzutowej, gdyż jest w niej mowa nie tylko o prostych, lecz także o prostopadłości, o odległości.

Pytanie, czy nie można by było w geometrii rzutowej tak określić prostopadłości, by na jej „starych” punktach była to prostopadłość euklidesowa? Albo Minkowskiego? Można. Wystarczy zachować stary wzór na prostopadłość. Wówczas nowa prosta będzie prostopadła do wszystkich innych (do siebie zresztą też) — będzie *osobliwa*.

A w przypadku Bolyai-Lobaczewskiego? Model Kleina leży na płaszczyźnie euklidesowej, ta z kolei... No dobrze, a co z prostopadłością? Jeśli bez uprzedzeń przyjrzeć się rysunkowemu przepisowi, to będzie on działał na całej płaszczyźnie rzutowej. A co ze wzorem?

Tu znów uwaga na boku — w geometrii rzutowej do współrzędnych starych punktów dopisuje się jeszcze jedną, równą 1 i za współrzędne punktu uważa się całą klasę trójek proporcjonalnych do otrzymanej, zaś nowe punkty mają tę dodatkową współrzędną równą zero. Wzór na prostopadłość w geometrii Bolyai-Lobaczewskiego przyjmuje wtedy postać

$$x_3 y_3 - x_1 y_1 - x_2 y_2 = 0.$$

I tak możemy uprawiać cztery wymienione geometrie łącznie, jako te, które mają prostopadłość wyrażającą się przez pierwiastki wielomianu jednorodnego (względem obu wektorów) stopnia 2, nie redukowalnego do jednomianu. Bo algebra poucza, że każdy inny sprowadzimy przez zmianę układu współrzędnych do jednej z podanych wyżej postaci.

CZY TO NIE SZTUCZNE

Okazuje się, że nie. Oto przykład czegoś wspólnego dla tak rozszerzonych geometrii. Weźmy pod uwagę punkt A i nie przechodzącą przez niego prostą a . Dla dowolnego punktu P (różnego od A i nie na a) oznaczmy przez \bar{P} punkt przecięcia prostej AP z a , oraz przez P' czwarty harmoniczny do $A\bar{P}P$ — czyli taki, dla którego da się narysować taką figurę jak na rysunku (odległości nie odgrywają roli — ważne jest tylko przecinanie się prostych). Ciekawe, że taki punkt P' jest dokładnie jeden. Homologią harmoniczną o środku A i osi a nazywamy następujące przekształcenie φ :

$$\varphi(P) = \begin{cases} P & \text{gdy } P = A \vee P \in a \\ P' & \text{gdy } P \neq A \wedge P \notin a. \end{cases}$$

Symetrią nazwiemy homologię harmoniczną o środku A i osi a spełniających warunek

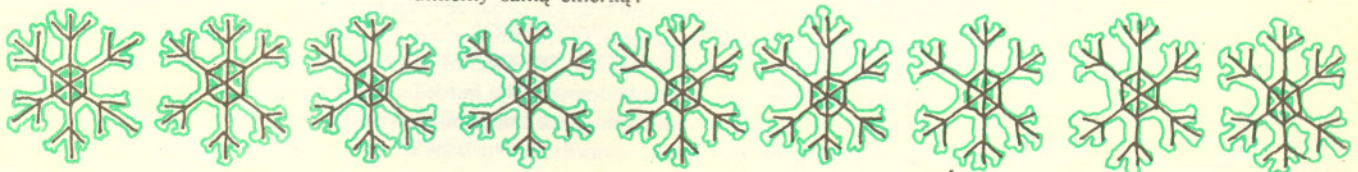
$$\bigwedge_b A \in b \rightarrow a \perp b.$$

I wówczas każda izometria (w każdej z czterech, ale rozszerzonych geometrii) jest złożeniem dwóch symetrii.

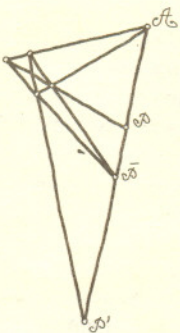
CIĘŻKO BYŁO, ALE

warto sprawdzić, czy się wie, o co chodzi. W tym celu proponujemy zastanowienie się nad dwoma zadaniami:

1. Wykazać, że takie symetrie w rozszerzonej płaszczyźnie euklidesowej to zwykle symetrie osiowe, bądź środkowe.
2. Skoro tak, to dlaczego nie umiemy rysować obrazów symetrycznych samą linijką? A czy umiemy samą ekiemką?



Tu zdecydowanie należy gdzieś zajrzeć. Np. do Delt 12/1980.



Geometria na płaszczyźnie afinicznej

PŁASZCZYŻNA AFINICZNA

Jeżeli na „zwykłej” płaszczyźnie euklidesowej będziemy brali pod uwagę tylko stosunki liniowe, to tak określona dwuwymiarowa przestrzeń będzie (z definicji) *płaszczyzną afiniczną*. Czy warto ją odróżnić od płaszczyzny euklidesowej? Czym się one różnią? Przede wszystkim na płaszczyźnie afinicznej jest większa „swoboda ruchów”: każde przekształcenie przeprowadzające proste na proste (czyli *afiniczne*) nic w tej płaszczyźnie nie zmienia (jest *automorfizmem*). Wszystkie takie przekształcenia można otrzymać przez składanie *powinowactw osiowych*. Są to przekształcenia określone przez podanie prostej (*oś*), *kierunku* różnego od kierunku osi i różnej od zera liczby rzeczywistej (*stosunek*) w następujący sposób:

Powinowactwo $(k, [l], \lambda)$ jest (jedynym) przekształceniem φ spełniającym warunki

- proste przechodzą na proste,
- jeśli $A \in k$, to $\varphi(A) = A$,
- jeśli $A \notin k$, to prosta $A\varphi(A)$ ma kierunek $[l]$,
- jeśli prosta $A\varphi(A)$ przecina k w punkcie P , to $\overline{P(A)\varphi(A)} = \lambda \cdot \overline{AP}$.

Łatwo zauważyć, że (tw. Talesa) na każdej prostej przekształcenie afiniczne płaszczyzny jest podobieństwem. Oczywiście dla różnych prostych skale tego podobieństwa mogą być różne (ale dla prostych równoległych są takie same — prawda?). W szczególności warto zapamiętać, że: *Przekształcenia afiniczne zachowują stosunek podziału odcinka* (w szczególności środek). Analitycznie przekształcenia afiniczne to dokładnie wszystkie przekształcenia postaci

$$\begin{cases} \bar{x} = \alpha x + \beta y + \mu \\ \bar{y} = \gamma x + \delta y + \nu \end{cases}$$

spełniające warunek

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0.$$

Na płaszczyźnie afinicznej wielu obiektów nie da się odróżnić — np. elipsy od okręgu (bo dają się afinicznie nałożyć — prawda?). Podobnie nie umiemy określić np. obrotu. Ale możemy wyróżnić symetrie środkowe i przesunięcia (oczywiście — jest przecież zachowany środek).

PŁASZCZYŻNY LINIOWOMETRYCZNE

Jeżeli na płaszczyźnie afinicznej podamy jakiś sposób mierzenia odległości, zgodny z jej strukturą liniową, to otrzymana w ten sposób płaszczyzna będzie *liniowometryczna*.

Pytanie o wskazanie wszystkich możliwych płaszczyzn liniowometrycznych zostało rozwiązane w 1905 roku przez G. Hamela. W myśl tego, co zostało napisane wyżej stosunki odcinków jednej prostej są w każdej z możliwych metryk takie same. Różnych sposobów obrania metryki jest (jak się okazało) nieskończenie wiele. Tutaj wymienimy dwa sposoby, pochodzące od H. Minkowskiego i D. Hilberta.

METRYKI MINKOWSKIEGO

Weźmy pod uwagę krzywą zamkniętą i mocno wypukłą, to znaczy nie zawierającą odcinków i leżącą po jednej stronie każdej prostej mającej z nią (dokładnie) jeden punkt wspólny. Niech dodatkowo nasza krzywa c ma środek symetrii O (własność afiniczna). Odległość A i B na płaszczyźnie określimy w następujący sposób:

- przesuwamy B o wektor \overrightarrow{AO} i otrzymujemy punkt B' ,
- znajdujemy punkt P przecięcia krzywej c z półprostą OB' ,
- $\varrho_c(AB)$ określamy jako stosunek \overline{OP} do $\overline{OB'}$.

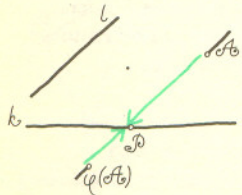
Taką metrykę nazywamy *metryką Minkowskiego*.

Geometrią liniowometryczną z metryką Minkowskiego — LMM — nazywa się teorię wszystkich płaszczyzn powstałych w wyżej opisany sposób. Dla różnych krzywych otrzymujemy różne płaszczyzny. W geometrii LMM jest jednak (mimo ogólności) dużo twierdzeń. Przytoczymy dwa: *Równoległobok ma przeciwległe boki tej samej długości*.

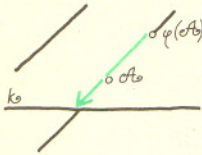
Wszystkie okręgi są jednokładne (a więc jednokładne z krzywą c , bo to przecież okrąg jednostkowy).

Każdy z Czytelników może sam znajdować dalsze twierdzenia.

Szczególny przypadek płaszczyzny LMM, mianowicie gdy krzywa c jest okręgiem, to oczywiście (zwykajna) płaszczyzna euklidesowa. Nic więc dziwnego, że każde z twierdzeń geometrii LMM jest twierdzeniem geometrii euklidesowej. Nje jest jednak na odwrót — są takie płaszczyzny LMM, że dla niektórych prostych na nich nie istnieje symetria osiowa (np. gdy krzywa c jest taka jak na rysunku — proszę sprawdzić).

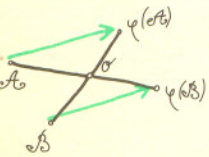


a)



b)

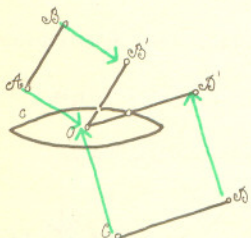
Powinowactwo osiowe. Na rysunku a) mamy $-1 < \lambda < 0$, na b) zaś $\lambda > 1$.



Jeśli O jest środkiem \overline{AB} i $\overline{A'B'}$, to φ jest przesunięciem.

Metryka ϱ (sposób mierzenia odległości) jest zgodna z daną strukturą liniową, jeśli spełnia warunek: *punkty A, B, C leżą na jednej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy $\varrho(AB) + \varrho(BC) = \varrho(AC)$ lub $\varrho(BC) + \varrho(CA) = \varrho(AB)$ lub $\varrho(CA) + \varrho(AB) = \varrho(CB)$.*

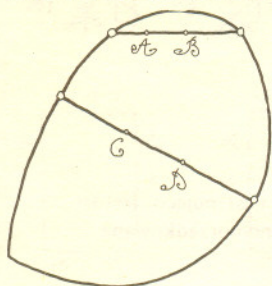
Płaszczyzna afiniczna z metryką Minkowskiego nie ma nic (poza autorem) wspólnego z opisaną w innej części numeru płaszczyzną Minkowskiego



Odcinki \overline{AB} i \overline{CD} mają tę samą długość Minkowskiego (wyznaczoną przez obranie krzywej c). Konkretnie $\varrho_c(AB) = \varrho_c(CD) = 3$.

METRYKI HILBERTA

Płaszczyzna afiniczna z metryką Hilberta nie ma nic (poza autorem) wspólnego ze znaną skądinąd przestrzenią Hilberta.



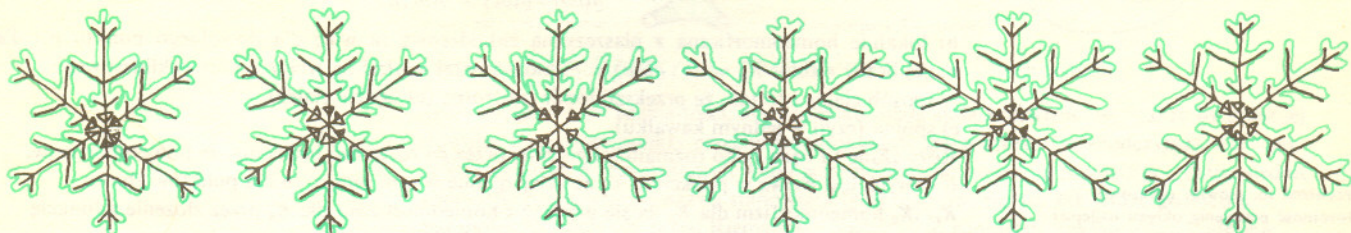
Odcinki \overline{AB} i \overline{CD} mają tę samą długość Hilberta (wyznaczoną przez obranie krzywej c).

Znów weźmy pod uwagę krzywą zamkniętą i mocno wypukłą c . Nie będziemy tym razem żądać, by miała ona środek symetrii, ale też podana niżej metryka Hilberta nie będzie określona dla całej płaszczyzny, a tylko dla wnętrza obranej krzywej. Robi się to tak:

- znajdujemy punkty P i Q przecięcia prostej AB z krzywą c ,
- znajdujemy iloraz stosunku podziału odcinka \overline{PQ} punktem A przez stosunek podziału odcinka \overline{PQ} punktem B ,
- $\rho^c(AB)$ określamy jako wartość bezwzględną logarytmu tego ilorazu.

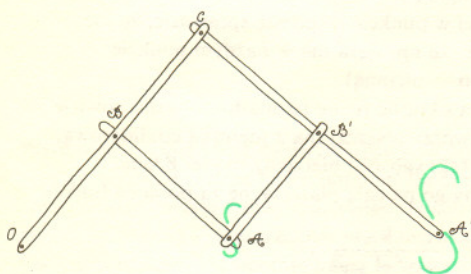
W ten sposób możemy zmetryzować dowolną mocno wypukłą i ograniczoną figurę na płaszczyźnie afinicznej.

Geometrią liniowometryczną z metryką Hilberta — LMH — nazywa się teorię wszystkich tak otrzymanych obiektów (płaszczyzn LMH). Płaszczyzn LMH jest wiele i są bardzo różne. Każdy z Czytelników może spróbować poszukać twierdzeń geometrii LMH. Wszystkie te twierdzenia będą twierdzeniami geometrii Bolyai-Lobaczewskiego, bo gdy krzywa c jest okręgiem, to płaszczyzna LMH okazuje się (zwyczajną) płaszczyzną Bolyai-Lobaczewskiego.

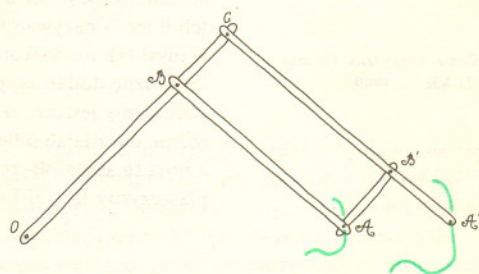


KONKURS — budujemy symetrograf.

Wszyscy znamy prosty przyrząd kreślarski zwany pantografem. Składa się on z czterech listewek połączonych przegubowo tak, jak to pokazuje rysunek. Gdy punkt O unieruchomimy, punkt A' będzie w każdym położeniu pantografu obrazem punktu A przy pewnej jednokładności (u nas w skali 2) względem punktu O . Zmieniając położenie listewek tak, jak to pokazuje następny rysunek, możemy łatwo uzyskać inne skale jednokładności. Przyrząd nasz umożliwia więc łatwe przerysowywanie danego rysunku w dowolnej skali.



$AB = B'C = BC = AB' = OB = A'B'$
i $A'B'C$ są współliniowe. Stąd $AB \parallel B'C$,
 $\sphericalangle OBA = \sphericalangle OCA'$ i $\triangle OBA \sim \triangle OCA'$.
Wobec tego OAA' są współliniowe
 $OA' : OA = OC : OB = 2$.



OAA' są współliniowe i $OA' : OA = OC : OB = A'C : B'C$.

Errata

W numerze 10/1981 w komentarzu redakcyjnym do artykułu dr Zbigniewa Sawonia „O iteracji przejść granicznych” podaliśmy nieprawdziwe twierdzenie.

Oto poprawna wersja: Jeżeli szereg funkcyjny

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny, funkcje f_n

różniczkowalne, a szereg pochodnych

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$ jest zbieżny jednostajnie

w pewnym otoczeniu punktu x , to pochodna

sumy szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ istnieje i jest sumą

pochodnych składników.

Przepraszamy dr Sawonia i naszych Czytelników.

Pora na zadanie konkursowe: proponujemy Wam, Czytelnicy, zastanowienie się nad budową *symetrografu*, czyli takiego mechanizmu przegubowego, który przy unieruchomieniu jednego lub więcej punktów i przesuwaniu ustalonego punktu po danej figurze rysuje innym punktem jej obraz przy symetrii względem danej prostej. Przyrząd nie może zawierać połączeń innych, niż przegubowe, w szczególności wykluczamy połączenia suwakowe.

To ostatnie zastrzeżenie jest uzasadnione tym, że o ile dostatecznie precyzyjne połączenie przegubowe można uzyskać łącząc listwy zwykłym gwoździem, o tyle wykonanie suwaka (prostowodu) jest już trudnym zadaniem mechanicznym.

Praca konkursowa powinna zawierać projekt symetrografu z dowodem poprawności jego działania oraz działający model urządzenia. Obie części pracy będą oceniane oddzielnie.

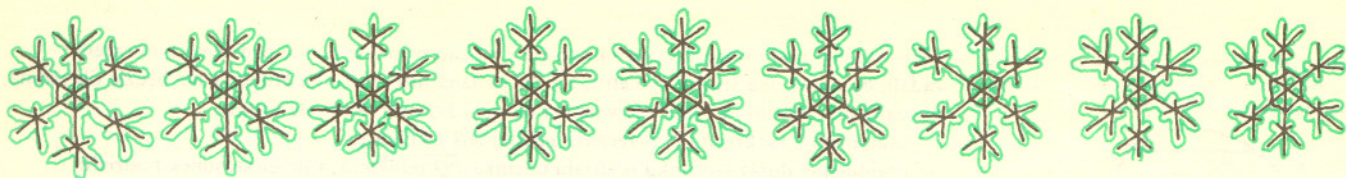
Nie proponujemy zadania nierozwiązalnego. Redakcja zna symetrograf składający się z 18 listewek. Czy można go uprościć — to już zechcą nam powiedzieć uczestnicy konkursu.

Prace konkursowe oceniać będzie jury w składzie

1. dr Jerzy Bednarczuk
2. dr Marek Kordos
3. dr Krzysztof Prażmowski

Termin nadesłania prac: 1 marca 1982 roku.

Za najlepsze prace przyznane będą nagrody. Najlepszą konstrukcję opiszemy w „Delcie”. Zachęcamy do wzięcia udziału w konkursie.



Geometrie na rozmaitości

Rozmaitość dwuwymiarową (tylko o takich będziemy mówić) określimy następująco: jest to a) przestrzeń metryczna (a więc dowolnym dwu jej punktom p i q jest przyporządkowana liczba rzeczywista nieujemna $\varrho(pq)$ tak, że są spełnione warunki

$$\begin{aligned}\varrho(ab) &= 0 \leftrightarrow a = b, \\ \varrho(ab) &= \varrho(ba), \\ \varrho(ab) + \varrho(bc) &\geq \varrho(ac),\end{aligned}$$

b) lokalnie homeomorficzna z płaszczyzną euklidesową (a więc dla dowolnego punktu p i dla małej liczby r zbiór $K_p = \{a : \varrho(ap) < r\}$ można przekształcić na wnętrze koła euklidesowego w sposób ciągły i to tak, że przekształcenie odwrotne też będzie ciągłe),

c) spójna (czyli w jednym kawałku).

Rozważane tu będą tylko rozmaitości *gładkie*, przez co rozumieć będziemy, że homeomorfizmy, o których jest mowa w punkcie b, są ze sobą zgodne w tym sensie, że dla punktów zbioru $K_p \cap K_q$ homeomorfizm dla K_p da się uzyskać z homeomorfizmu dla K_q przez złożenie z funkcją dowolną liczbę razy różniczkowalną. Dzięki temu będziemy mogli na rozmaitości mówić o krzywych (przeciwobrazach krzywych rysowanych kawałkami na kołach euklidesowych) i o długościach tych krzywych, stycznych do nich, ich krzywiznie itd.

Będziemy żądali także, by rozmaitość była *zupełna*, a więc by spełniała warunek: jeśli ciąg (a_n) ma własność Cauchy, tj.

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_N \bigwedge_{n, m} n, m > N \rightarrow \varrho(a_n a_m) < \varepsilon,$$

to ma granicę należącą do rozmaitości.

Na rozmaitości będziemy prostymi nazywać geodezyjne, a więc linie, dla bliskich punktów, najkrótsze z łączących te punkty i leżące na rozmaitości. Jeśli rozważymy wszystkie geodezyjne przechodzące przez dany punkt p , to da się ustalić wśród ich krzywizn największą i najmniejszą. Ich iloczyn nazywamy *krzywizną Gaussa* rozmaitości w punkcie p (proszę sprawdzić, że już w myśl tak niedoskonałej definicji można stwierdzić, że np. sfera ma w każdym punkcie krzywiznę dodatnią, płaszczyzna — zerową, a siodło — ujemną).

Zauważmy jeszcze, że na tym samym zbiorze można określić różne rozmaitości — mianowicie różnie określając odległość. I tak inną rozmaitość tworzy płaszczyzna z metryką euklidesową, a inną ta sama płaszczyzna z metryką określoną w taki sposób: bierzemy model Kleina płaszczyzny Bolyai-Łobaczewskiego i przekształcamy go na całą płaszczyznę za pomocą funkcji

$$f((x, y)) = (x, y) \cdot \frac{1}{1 - \sqrt{x^2 + y^2}},$$

umawiając się, że odległość AB jest równa odległości $f^{-1}(A)f^{-1}(B)$ w modelu Kleina.

Ta druga rozmaitość ma krzywiznę ujemną (ustalenie tego jest trudnym, ale wykonalnym zadaniem), pierwsza zaś — zero.

Geometria gładkich i zupełnych rozmaitości jest nazywana *geometrią Riemanna* i stanowi geometryczne narzędzie ogólnej teorii względności. Niżej zajmiemy się tymi jej szczególnymi przypadkami, które są jednorodne (otoczenia wszystkich jej punktów są takie same). Oczywiście muszą one mieć tę samą krzywiznę w każdym punkcie. Warunek ten okazuje się być również warunkiem wystarczającym na to, by rozmaitości były jednorodne.

Geometrie Riemanna o stałej krzywiznie

Wyżej podaliśmy przykład dwóch rozmaitości określonych na tym samym zbiorze. Tutaj podamy odpowiedź na pytanie, na jakich zbiorach można określić rozmaitość o stałej krzywiznie.

Krzywizna dodatnia. Łatwo zauważyć, że są *dwie* takie rozmaitości. Mianowicie *sfera* z naturalną metryką i *płaszczyzna eliptyczna*, ta na półsfery. Obie mają krzywiznę równą $\frac{1}{R^2}$, gdzie R jest

promieniem sfery, czy odpowiednio półsfery. Ciekawe natomiast, że każda inna rozmaitość o stałej krzywiznie dodatniej jest równoważna (ma te same własności), z jedną z wymienionych.

Krzywizna zerowa. Takich jest (z dokładnością do równoważności) *pięć*. Oczywiście jedną z nich jest *płaszczyzna* z metryką euklidesową. A oto jak otrzymać pozostałe cztery.

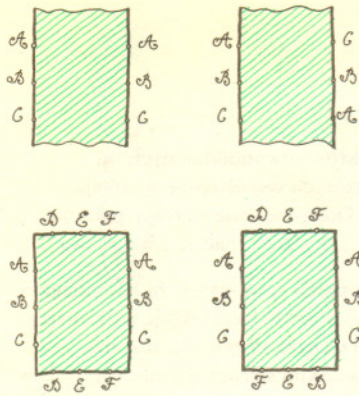
Krzywizna to, mówiąc obrazowo, odwrotność promienia okręgu najlepiej w danym punkcie przylegającego do krzywej. Dokładniej można o tym przeczytać np. w Delcie 12/1980 i 1/1981.

Jeśli warunek zupełności zastąpić warunkiem zwartości, a więc domkniętości i ograniczoności, to rozmaitość będzie powierzchnią. (por. Delta 1/1981).

Dokładnie o geodezyjnych — Delta 2/1981.

Inny sposób określenia krzywizny Gaussa można znaleźć w Delcie 12/1980.

Warto to skonfrontować z artykułem „Geometria na sferze” i „Najregularniejsze i ...”.



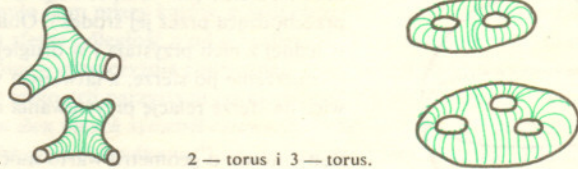
I tu warto zajrzeć do Deltę 1/1981.

Pas (nieskończony) skleamy w *walec*. Oczywiście po sklejeniu krzywizna jest taka jak przed, gdyż żadna odległość na powierzchni się nie zmieniła, a za pomocą odległości da się ustalić krzywiznę.

Albo taki sam pas skleamy w *wstęgę Möbiusa*. Jeśli przyjmiemy umowę, co do odległości taką samą, jak przy przekształceniu modelu Kleina na całą płaszczyznę (patrz wyżej), to i tu uzyskamy krzywiznę zero, gdyż odległości nie będą zmienione.

Sklejając z kolei prostokąt w *torus* lub w *butelkę Kleina*, z analogiczną umową jak przy wstędze Möbiusa uzyskamy ostatnie dwie rozmaitości o krzywiznie zerowej.

Krzywizna ujemna. Tu mamy nieskończenie wiele możliwości. Jest wśród nich płaszczyzna z metryką uzyskaną wyżej z modelu Kleina. Pozostałe możliwości to między innymi wszystkie n torusy (dla $n > 1$) i n walce (dla $n > 2$).



3 — walec i 4 — walec.

2 — torus i 3 — torus.

Geometrie eliptyczna, paraboliczna i hiperboliczna

Jeżeli zażądamy od rozmaitości, aby nie tylko miała stałą krzywiznę, lecz także by przez jej dowolne dwa różne punkty przechodziła dokładnie jedna prosta (= geodezyjna), wówczas w każdej z trzech rozpatrzonych wyżej grup pozostanie po jednej rozmaitości. Odpowiednie geometrie noszą właśnie nazwy stanowiące tytuł tego fragmentu. Jak widać geometria paraboliczna miała już przed Riemannem nazwę — to geometria euklidesowa. Podobnie hiperboliczna — to geometria Bolyai-Łobaczewskiego.

Jeśli przez defekt trójkąta $-\Delta(ABC)$ będziemy rozumieli różnicę π i sumy rozwartości jego kątów, to w każdej z wymienionych płaszczyzn mamy $\Delta(ABC) = K \cdot S_{ABC}$, gdzie K jest krzywizną Gaussa tej płaszczyzny.

A oto np. wzór sinusów w każdej z tych geometrii:

$$\text{eliptyczna: } \frac{\sin BC}{\sin \alpha} = \frac{\sin CA}{\sin \beta} = \frac{\sin AB}{\sin \gamma},$$

$$\text{paraboliczna: } \frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{CA}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin \gamma},$$

$$\text{hiperboliczna: } \frac{\sinh BC}{\sin \alpha} = \frac{\sinh CA}{\sin \beta} = \frac{\sinh AB}{\sin \gamma}.$$

Inaczej o tym samym — Delta 7/1975.

Geometrodynamika

Wyobraźmy sobie świat dwuwymiarowy. Wszystko, o czym powiemy, będzie można łatwo uogólnić na przypadek rzeczywistego świata trójwymiarowego. Niech więc światem będzie na przykład powierzchnia nieskończenie rozległego płaskiego oceanu. Na oceanie mogą jednak rozchodzić się fale. Każdemu rodzajowi fali odpowiada nieeuklidesowa geometria świata powierzchniowego. Co więcej, kształt powierzchni falującego oceanu, a więc i wartość jej krzywizny będzie w każdym punkcie zmieniać się wraz z upływem czasu. Geometria świata powierzchniowego będzie wtedy ewoluować, podobnie jak to czyni geometria świata rzeczywistego.

Szczególnym rodzajem ruchu falowego jest rozchodzenie się fali płaskiej o określonej częstotliwości. Słowo rozchodzenie się jest jednak w tym przypadku nie bardzo właściwe. Każdy punkt oceanu drga bowiem zupełnie tak samo i mówienie o tym, co jest wcześniej a co później, nie ma większego sensu. Trudno na takim nieskończeniu i wszędzie jednakowo falującym oceanie mówić o jakimkolwiek upływie czasu. Tym bardziej, że prócz tej powierzchni nasz świat nie zawiera niczego więcej. Nieskończone fale płaskie o określonej częstotliwości grają w fizyce rolę szczególną. Przez złożenie odpowiedniej ich ilości (zsumowanie bądź scałkowanie) możemy w wyniku interferencji fal o różnych częstotliwościach uzyskać zupełnie dowolny kształt powierzchni oceanu wraz z dowolnymi jego zmianami. W taki też sposób przez interferencję fal świetlnych dostajemy promienie światła — podstawę optyki geometrycznej. Podobnie, odpowiednia

interferencja fal materii prowadzi do pojawienia się torów cząstek elementarnych i przeprowadza nas od świata mechaniki kwantowej do mechaniki klasycznej. W obu tych przypadkach interferencja destrukcyjna (wygaszanie) wszędzie, z wyjątkiem bardzo wąskiego paska przestrzeni (toru promienia lub cząstki), prowadzi do pojawienia się nietrywialnego zjawiska rozchodzenia się, a w konsekwencji i czasu. Cząstka bowiem rozchodzi się z określoną prędkością (prędkością owej grupy interferujących fal) i gdzie jest najpierw, a gdzie indziej potem. Zupełnie podobnie może być w przypadku geometrii świata.

Wyobraźmy sobie, że różne rodzaje fal płaskich o różnych częstotliwościach to możliwe geometrycznie stany świata powierzchni oceanu. W każdym z nich pojęcie czasu nie ma sensu. Świat prawdziwy powstaje w wyniku interferencji wielu takich fal i ma pewną określoną strukturę geometryczną oraz określony jej rozwój w czasie. Szczęśliwy traf, który musiał kiedyś nastąpić, spowodował, że interferencja różnych form istnienia świata stała się prawie wszędzie destrukcyjna i od tego momentu liczymy upływ czasu i możemy mówić o czterowymiarowej czasoprzestrzeni. „Przedtem” czasu nie było, a właściwie lepiej powiedzieć, że wszędzie były wszystkie możliwe czasy — od początkowego, aż do ostatecznego.

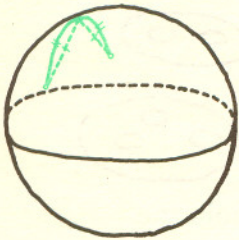
Wydaje się, że taki obraz świata miał na myśli John Archibald Wheeler proponując swą geometrodynamikę. Niestety idea ta nie doczekała się żadnej poważniejszej realizacji.

Geometrie na sferze

Sfera

W trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej sfera to zbiór punktów równooddalonych od ustalonego punktu przestrzeni. Jest to zatem zbiór punktów, których współrzędne spełniają równanie $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 = r^2$, gdzie $r \neq 0$. Dowlone dwie sfery są podobne, możemy więc dalej przyjąć, że $r = 1$ i $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle$ i tę sferę uznać za „wzorcową”.

Odległości punktów na sferze możemy mierzyć dwoma (co najmniej) sposobami: za ich odległość przyjąć długość odcinka w przestrzeni łączącego te punkty albo długość łączącego je najkrótszego łuku na sferze (łuk taki, to fragment okręgu wielkiego, czyli przecięcia sfery z płaszczyzną przechodzącą przez jej środek). Obie metryki są równoważne w takim sensie: odcinki przystające w jednej z nich przystają i w drugiej; bardziej naturalna wydaje się ta „wewnętrzna” — mierzenie po sferze, a łatwiejsza w posługiwaniu „zewnątrzna” definicja odległości. Mamy więc na sferze relację przystawiania odcinków.



Żeby mówić o geometrii warto móc posługiwać się prostymi. Najprościej zdefiniować: prosta to symetralna odcinka. Jeśli tak, to prosta jest przecięciem płaszczyzny (w przestrzeni symetralnej to płaszczyzny) ze sferą, a więc okręgiem wielkim (bo środek sfery leży na symetralnej dowolnej pary punktów ze sfery).

Geometria sferyczna

Uzyskaliśmy tak *geometrię sferyczną* — opisuje ona płaszczyznę sferyczną (czyli naszą sferę) przy użyciu pojęć „punkt”, „prosta” (czyli okrąg wielki) i „kąt między prostymi” — bo kąty także umiemy mierzyć, skoro umiemy mierzyć odległości na płaszczyźnie sferycznej. Możemy też w niej mówić o symetriach osiowych — bo każda taka symetria to w istocie obcięcie trójwymiarowej symetrii płaszczyznowej do powierzchni sfery. Dowolną izometrię płaszczyzny sferycznej możemy rozszerzyć do izometrii całej przestrzeni — izometria taka musi mieć punkt stały (środek sfery nie może się poruszyć), a więc może być tylko obrotem lub symetrią obrotową.

Stąd uzyskujemy mocne i podobne do euklidesowego twierdzenie: *Każda izometria płaszczyzny sferycznej jest złożeniem co najwyżej trzech symetrii osiowych.*

Skoro umiemy mierzyć kąty, warto może byłoby zainteresować się podobieństwami płaszczyzny sferycznej. To nic, że spotkać tu możemy trójkąty „dziwne” — o dwóch, albo i trzech kątach prostych, o dwóch kątach większych od prostego itp. Nie szkodzi — podobieństwo i tu ma sens — to przekształcenie zachowujące kąty. Dopóki mierzyć będziemy kąty między prostymi (okręgami wielkimi), a więc również wymagać, by przechodziły one na siebie, nie uzyskamy nic nowego — każde podobieństwo płaszczyzny sferycznej jest jej izometrią. Ale jeśli do konkurencji dopuścimy wszystkie okręgi... Zauważmy, że przy zwykłej definicji okręgu (zbiór punktów równooddalonych od danego) proste płaszczyzny sferycznej są też na niej okręgami.

Geometria Möbiusa

Rozważmy takie przekształcenie f . Wybierzmy punkt p leżący poza sferą. Dla każdego punktu q na sferze konstruujemy jego obraz $f(q)$ jak następuje: łączymy p i q prostą a drugi punkt jej przecięcia ze sferą (albo q , gdy jest ona do sfery styczna) oznaczamy $f(q)$. Zbiór punktów stałych f układa się na pewnym okręgu k , a samo f jest „wiernokątne” — przeprowadza okręgi na sferze na okręgi i zachowuje kąty między okręgami. A więc jest podobieństwem (i do tego inwolucyjnym, czyli odwrotnym do siebie). Można by je też nazwać *symetrią*, względem k — nawet obraz punktu konstruuje się jak przy „zwykłej” symetrii, a gdy p umieścimy „w nieskończoności”, to f okaże się znaną już symetrią — okrąg k będzie okręgiem wielkim.

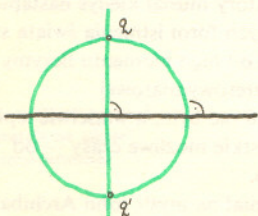
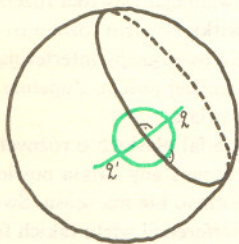
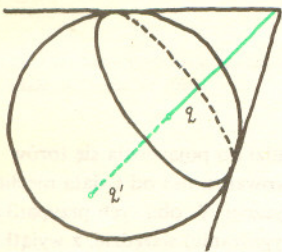
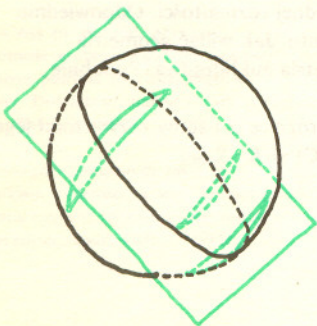
W ten sposób na sferze zbudowaliśmy drugą geometrię — *geometrię Möbiusa*. Posługuje się ona pojęciami „punkt” = punkt ze sfery, „prosta” = okrąg na sferze, „prostokątność” [albo „kąt między prostymi”]. A poznane dopiero co symetrie tworzą w niej zbiór generujący wszystkie podobieństwa. Mamy bowiem twierdzenie:

Każde podobieństwo płaszczyzny Möbiusa jest złożeniem co najwyżej czterech symetrii osiowych.

A dalej — dalej możemy już po prostu uprawiać tę geometrię i dowodzić takie (dość już nieoczywiste) twierdzenia:

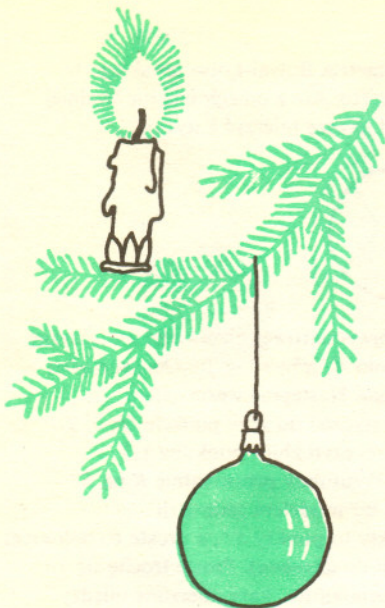
W geometrii sferycznej i w geometrii Möbiusa każde podobieństwo parzyste (tzn. zachowujące orientację) rozkłada się na co najwyżej dwa inwolucyjne podobieństwa parzyste. Z izometriami łatwiej — szukane inwolucje to symetrie osiowe sfery, ale na płaszczyźnie Möbiusa?

Albo: dowolne dwa trójkąty na płaszczyźnie Möbiusa o sumie kątów 0 można przeprowadzić na siebie pewnym podobieństwem.



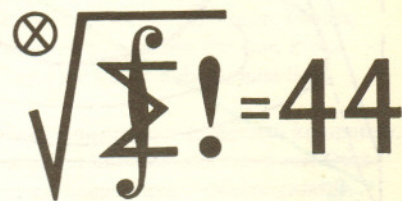
Płaszczyzna Möbiusa i wstęga Möbiusa nie mają nic wspólnego (poza tym, że obie są powierzchniami).





Geometria eliptyczna

Obie te geometrie mają jednak jedną, dość nieprzyjemną własność: proste mogą się przecinać w dwu różnych punktach. W geometrii sferycznej nawet muszą — bo dowolne dwie płaszczyzny wycinające na sferze okręgi wielkie przecinają się wzdłuż prostej (przechodzącej przez środek sfery) — a ta przecina sferę w dwu punktach. Ale jeśli dwa punkty nie leżą antypodycznie (prosta łącząca je nie przechodzi przez środek sfery), to przez takie dwa punkty na płaszczyźnie sferycznej przechodzi już dokładnie jedna prosta. Możemy więc utożsamiać punkty antypodyczne — posklejać je w pary. Przy sklejanju odpowiadające sobie punkty leżą na tych samych prostych, a więc po utożsamieniu antypod dowolne dwie proste będą się przecinać i to w dokładnie jednym punkcie. Taka posklejana sfera nie mieści się w przestrzeni trójwymiarowej — nie szkodzi — można ją sobie wyobrazić, można także mówić o prostych na niej — to odpowiednio pozlepiane okręgi wielkie. I w ten sposób uzyskaliśmy płaszczyznę eliptyczną — wystarczy zauważyć, że sklejanie nie popsło nam miary kątów, a jeśli chcemy mierzyć odległości punktów $p - q$ musimy zmierzyć na sferze odległość p od q i odległość p od antypody q — mniejsza z nich to dobra miara odległości w płaszczyźnie eliptycznej. Tyle, że jest to płaszczyzna nieorientowalna — nie można rozróżnić izometrii parzystych od nieparzystych. Albo inaczej — każda symetria osiowa jest złożeniem dwu innych symetrii osiowych, co łatwo zobaczyć na posklejanej sferze: symetria względem bieguna („środkowa”) i symetria względem równika są tu tożsame.



Name: $a, b, c > 0$

Oblicz: $x = \frac{a}{b}$

Namówij:

liczbę a starym a
liczbę b starym b

Zamień:

nowe $a = \text{stare } a + c \cdot \text{stare } b$

nowe $b = \text{stare } a + \text{stare } b$

Podstaw:

$a = \text{nowe } a$

$b = \text{nowe } b$

Klub 44

Skrót regulaminu ligi zadaniowej

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr. $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4-3 \cdot \frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.

Ligę organizuje Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, oraz nasza Redakcja.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr. 9/1981.

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Deltą”

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Zadania Nr 10, 11, 12

Termin nadesłania rozwiązań: do 28.II.1982

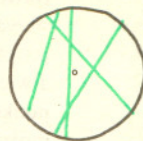
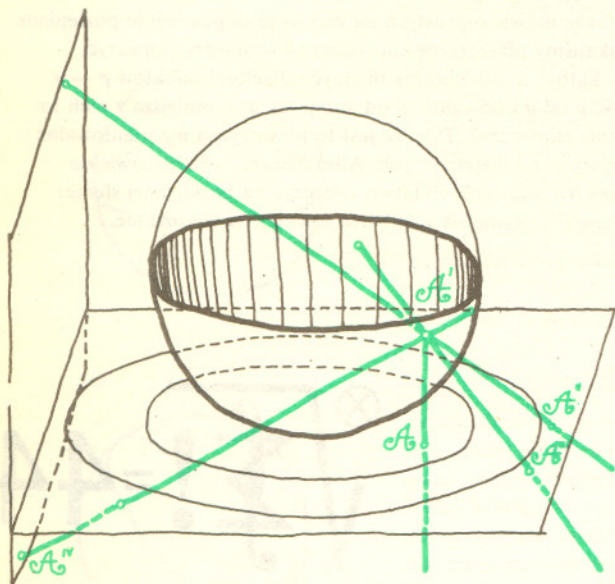
10. W wyniku działania przedstawionego programu powstaje nieskończony ciąg liczb x (w rozkazie obwiedzionym podwójną ramką). Udowodnić, że ciąg ten jest zbieżny i obliczyć granicę. Poszukać uogólnień.

11. Załóżmy, że W jest wielomianem o współczynnikach całkowitych, różnym od stałej. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych p , dla których równanie $W(x) = py$ ma rozwiązanie w liczbach całkowitych x, y .

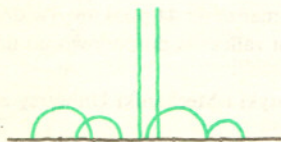
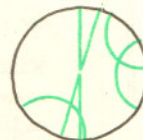
12. Niech Z oznacza zbiór 27 punktów przestrzeni tworzących konfigurację następującą: wierzchołki sześcianu — środki jego krawędzi — środki jego ścian — środek całego sześcianu. Ile jest różnych (= nieprzystających) trójkątów o wierzchołkach w punktach zbioru Z ?

Jak wygląda świat geometrii Bolyai-Łobaczewskiego

Właściwie dziwne pytanie — wystarczy zajrzeć do artykułu „Najregularniejsze i ...” i zobaczyć — geometria Bolyai-Łobaczewskiego to geometria modelu Kleina. Proste to kawałki euklidesowych prostych — cięciwy koła czyli odcinki otwarte. Ale z odległością już trudniej i wzór (por. artykuł „Geometria na płaszczyźnie afinicznej”) wcale nie jest ładny. A gdyby ktoś chciał jeszcze mierzyć kąty!



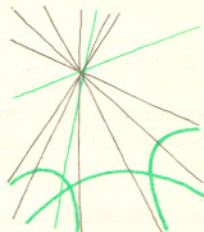
Zróbmy więc tak: weźmy w trójwymiarowej przestrzeni płaszczyznę H o równaniu $z = 0$ i w niej koło $K: x^2 + y^2 < 1$ — model Kleina geometrii Bolyai-Łobaczewskiego. Następnie weźmy sferę $S: x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$. S jest styczna do H w punkcie $\langle 0, 0, 0 \rangle$. Niech S^+ oznacza dolną półsferę, czyli zbiór punktów z S spełniających zależność $z < 1$. Zrzutujemy prostokątnie K na S^+ — każdy uwierzy, że obraz będzie też modelem geometrii Bolyai-Łobaczewskiego — punkty to punkty S^+ , a proste to półokręgi prostopadłe do brzegu S^+ (czyli do *absolutu*). Proste trochę się pogięły, ale za to model jest wiernokątny: kąty mierzone między tymi półokręgami są takie, jak między prostymi w geometrii hiperbolicznej. A może chcielibyście zobaczyć tu model na płaszczyźnie? Proszę bardzo — zrzutujemy S^+ stereograficznie na H z punktu $\langle 0, 0, 2 \rangle$ (bieguna antypodycznego do punktu styczności S i H). Obrazem na H będzie koło K' o równaniu $x^2 + y^2 < 4$, $z = 0$; proste to półokręgi w K' prostopadłe do brzegu K' oraz średnice K' . To też model wiernokątny — bo rzut stereograficzny jest przekształceniem wiernokątnym. Ten model nazywa się *modelem Poincarégo w kole*.



A żeby model był (euklidesowo) nieograniczony?

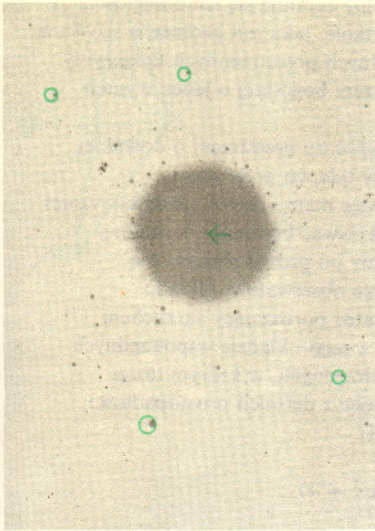
Do tego celu ustawmy płaszczyznę H' o równaniu $y = -1$ i zrzutujemy S^+ na H' z punktu $\langle 0, 1, 1 \rangle$ — antypodycznego do punktu styczności S z H' . Obrazem na H' będzie półpłaszczyzna $z < 1, y = -1$. Proste — to półproste prostopadłe do jej brzegu i półokręgi prostopadłe do tego brzegu (czyli o środkach leżących na nim). I ten model — *model Poincarégo na półpłaszczyźnie* — jest wiernokątny.

Wszystkie dotychczas pokazywane modele były budowane na pewnych kawałkach płaszczyzny euklidesowej. Czy nie można zobaczyć geometrii Bolyai-Łobaczewskiego na całej płaszczyźnie? Weźmy jeszcze raz model na półsferze S^+ i zrzutujemy go na H — tym razem ze środka sfery czyli punktu $\langle 0, 0, 1 \rangle$. Obrazami półokręgów przechodzących przez $\langle 0, 0, 0 \rangle$ będą na H proste przechodzące przez $\langle 0, 0, 0 \rangle$. Obrazami innych półokręgów prostopadłych do brzegu będą gałęzie hiperbol o środku w $\langle 0, 0, 0 \rangle$. I tak oto dostaliśmy następną model geometrii Bolyai-Łobaczewskiego — *model Ornocha*. Proste nie są wprawdzie zbyt proste a i model nie jest wiernokątny, ale za to jest na całej płaszczyźnie. I do tego jest wiernoodległościowy — odległości mierzone po prostych tego modelu są takie, jak w geometrii hiperbolicznej.



Model Ornocha można też wprost uzyskać z modelu Kleina — por. hiperboliczną metryzację całej płaszczyzny euklidesowej podaną w artykule „Geometria różności”.

W każdym z tych modeli można zobaczyć geometrię Bolyai-Łobaczewskiego i w każdym z nich można ją uprawiać. Równoważnie — skoro są izomorficzne, a wszak konstruowane rzuty to były izomorfizmy budowanych modeli. Tyle, że wspomagać się przy tym możemy różnymi innymi geometriami: w modelu Kleina rzutową, w modelach Poincarégo — Möbiusa lub euklidesową. Tak więc w modelu Kleina symetrie to pewne homologie, w modelu Poincarégo w kole symetrie to inwersje (i zwykle osiowe), a na sferze to symetrie względem okręgów. Może ktoś ładnie opisać, czym są symetrie osiowe w modelu Ornocha.



Negatyw zdjęcia okolic Syriusza zrobionego w USA w 1944 roku. Strzałkami zaznaczony jest Syriusz i nowo odkryta, nie znana wtedy gwiazda.

Późnym wieczorem, w grudniu góruje nisko nad południowym horyzontem Syriusz, najjaśniejsza (oczywiście po Słońcu) gwiazda widziana z Ziemi. Wiele czasu poświęcili jej astronomowie i poci. W przewodniku dla miłośników nieba i amatorów obserwacji, wydanym 4 lata temu, zamieszczono zdjęcie Syriusza, widzianego przez duży teleskop. Jest oczywiste, że Syriusz na tym zdjęciu jest otoczony słabszymi gwiazdami. Jedna z tych gwiazd została odkryta w sierpniu zeszłego roku. Czy nie jest to paradoks, że prawdopodobnie tysiące ludzi, nawet może nie mających pojęcia o astronomii, widziały zdjęcie gwiazdy przed jej odkryciem?

Rzeczywiście jest w tym pewien paradoks, jednak wynika on stąd, że pojęcie odkrycia gwiazdy jest rozumiane inaczej przez zawodowych astronomów, a inaczej przez ludzi nie związanych z tą nauką. Około 25 lat temu opublikowano atlas nieba, znany pod nazwą PSS (Palomar Sky Survey). Jest to zbiór ok. 1000 zdjęć pokrywających prawie całe niebo. Najśłabsze gwiazdy i galaktyki widoczne na kartach tego atlasu mają jasność 21^m (ok. 100 tysięcy słabsze niż najśłabsze gwiazdy widoczne gołym okiem, które mają jasność ok. 6^m). Prawie wszystkie gwiazdy odkryte (wg nomenklatury astronomów) w ciągu ostatnich 25 lat są wyraźnie widoczne w atlasie wydanym przed ich odkryciem. Bo odkrycie nie oznacza tu stwierdzenia, że jeszcze jedna gwiazda istnieje — praktycznie nikogo to nie interesuje (wiemy, że w naszej Galaktyce krąży ok. 200 miliardów gwiazd). Odkrycie nowej gwiazdy oznacza stwierdzenie, że gwiazda zasługuje z tego czy innego powodu na uwagę, tzn. nie jest zwykłą „zjadaczką pyłu międzygwiazdowego”, ale jest osobowością wybitną; wybitność ta manifestuje się najczęściej zmianami jasności lub w widmie, co z kolei oznacza często niestabilność i przechodzenie przez ważne etapy ewolucji.

Gwiazdy zmienne przyciągają znaczną uwagę astronomów, ze względu na to, że dzięki ich obserwacjom możemy nauczyć się wiele o ich budowie i ewolucji. Gwiazdy te dzielą się na wiele klas i typów. Im mniej liczna jest dana klasa, tym odkrycie uważane jest za cenniejsze. Istnieją klasy zawierające po jednym, unikalnym obiekcie, jak np. opisywana ostatnio *Eta Car*, która przyciągnęła uwagę astronomów już w 1677 roku (i do niczego nie jest podobna), inne liczą tysiące członków (np. cefeidy).

W kilku obserwatoriach świata do odkrywania nowych gwiazd zmiennych zaprzęgnięto komputery. Brzmi to jak z fantastycznej bajki, jednak jest prawdziwe, a nawet koncepcyjnie trywialne. Otóż astronom robi dwa zdjęcia tego samego kawałka nieba (zawierającego nieraz miliony gwiazd) w odstępie kilku miesięcy. Komputer zapamiętuje dokładną postać obu zdjęć i następnie porównuje w pamięci punkt po punkcie. Jeśli jakaś słaba gwiazdka jest zmienna, to istnieje duże prawdopodobieństwo, że jej jasność na obu zdjęciach będzie różna, co komputer od razu wychwyci, dając znać czekającemu na to astronomowi. Jemu pozostaje do sprawdzenia, czy nie jest to defekt kliszy, pyłek, chmurka itd, oraz dalszego badania danej gwiazdy. Maszyny te mają jednak duże kłopoty z porównywaniem okolic bardzo jasnych gwiazd, które jakby je rażą, ich „poświata” powoduje znaczne zmniejszenie czułości tej metody. W związku z tym nauczono komputery omijania jasnych gwiazd. I dlatego obszary te są jakby dziewicze i pozostało tam wiele stosunkowo jasnych gwiazd zmiennych czekających na swoje odkrycie, podobnie jak gwiazdka, od której zaczęliśmy naszą notkę.

Żeby nie zostawić Czytelnika z uczuciem niedosytu wspominamy, że gwiazdka ta otrzymała nazwę 1E 0643.0-1648 (po wyjaśnienie tego ciągu cyfr odsyłamy Czytelnika do czerwcowego „Patrz w niebo”).

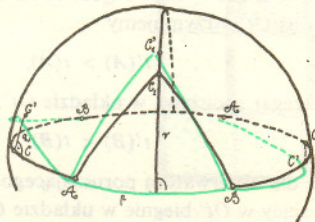
Jest to układ dwóch gwiazd, z których jedna jest białym karłem a druga czerwoną gwiazdą ciągu głównego. Następuje przepływ materii z gwiazdy czerwonej do (prawdopodobnie) dysku otaczającego zdegenerowanego karła, na skutek pewnych niestabilności (nie znamy ich przyczyn) co ok. 15 dni materia ta wybuchu powodując nagłe pojaśnienie układu. Ze względu na to, że nie jesteśmy pewni, jak silne jest pole magnetyczne białego karła, nie możemy jeszcze jednoznacznie i ostatecznie zakwalifikować tego układu, wiadomo jednak, że jest on również aktywny w promieniach rentgenowskich i możemy już powiedzieć, że należy do tych ciekawych.

mgr Tomasz CHLEBOWSKI

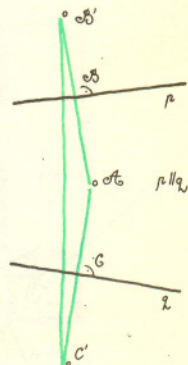
Rozwiązanie zadania M 282. Prosta p na płaszczyźnie eliptycznej ma skończoną długość π . Ustalmy na niej punkty A, B, C dzielące ją na trzy równe odcinki i na symetralnej r odcinka AB ustalmy punkt C_1 taki, że $AC_1 = BC_1 = \frac{\pi}{3}$. Niech wreszcie

C' będzie punktem leżącym na prostej q prostopadłej do p przechodzącej przez C takim, że $CC' < \frac{\pi}{3}$.

Mamy: $AC' = BC' > \frac{\pi}{3}$. Odsuwając teraz punkt C_1 wzdłuż prostej r od A i B znajdziemy takie jego położenie C'_1 , że $AC'_1 = BC'_1 = AC' = BC'$. Wystarczy teraz zauważyć, że kąty BAC' i ABC' są większe od BAC'_1 i ABC'_1 , aby się przekonać, że trójkąty ABC' i ABC'_1 spełniają warunki zadania.



Rozwiązanie zadania M 280. Ustalmy dwie równoległe proste p i q oraz punkt A pomiędzy nimi. Wiemy, że odcinki $AB \perp p$ i $AC \perp q$ nie są współliniowe (tak, jak to by było na płaszczyźnie euklidesowej). Wynika stąd, że przyjmując za B' punkt symetryczny do A względem p a za C' — punkt symetryczny do A względem q otrzymamy niezdegenerowany trójkąt $AB'C'$. Symetralnymi boków AB' i AC' są proste p i q . Wynika stąd, że nie istnieje punkt równoodległy od A, B', C' , a więc nie istnieje okrąg opisany na trójkącie $AB'C'$.



Paradoks zegarów

Fizycy badając wzajemne położenie zjawisk w sposób naturalny zajmują się ich odległością w przestrzeni, jak też w czasie. Powstaje w związku z tym pytanie, jaka jest geometria używanej przez nich czasoprzestrzeni. Innymi słowy: gdy do współrzędnych przestrzennych dołączymy jeszcze jedną, musimy zdecydować, jak w otrzymanej przestrzeni bogatszej o jeden wymiar należy wprowadzić pojęcia geometryczne, np. prostopadłość.

Zasadniczo stosuje się trzy sposoby. Każdego z nich można użyć do przestrzeni o dowolnej geometrii, a więc teoretycznych czasoprzestrzeni jest trzy razy tyle, co przestrzeni. Tu zajmiemy się dwuwymiarowymi czasoprzestrzeniami. A więc mamy prostą (geometrycznie) i czas. Prosta niech będzie taka, jak w geometrii Euklidesa. Używać będziemy normalnej terminologii, a więc dwuwymiarową czasoprzestrzeń nazwiemy po prostu płaszczyzną. Każdy punkt płaszczyzny to „zdarzenie”, które dla wybranego obserwatora (układu współrzędnych) zaszło w punkcie x w chwili t . Drugi obserwator poruszający się ruchem jednostajnym prostoliniowym względem pierwszego zakreśli w jego układzie współrzędnych prostą. Ta prosta to jednocześnie oś czasowa t' układu współrzędnych, w którym drugi obserwator spoczywa. Kierunek osi Ox' znajdujemy korzystając z definicji prostopadłości wektorów. Dwa wektory $[t_1, x_1], [t_2, x_2]$ są prostopadłe jeśli:

w geometrii Galileusza $t_1 t_2 = 0$

w geometrii Minkowskiego $t_1 t_2 - x_1 x_2 = 0$ (prędkość światła $c = 1$)

w geometrii Euklidesa $t_1 t_2 + x_1 x_2 = 0$.

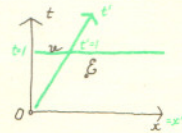
Tak więc w geometrii Galileusza Ox' pokrywa się z osią Ox , zaś w geometrii Minkowskiego Ox' to prosta położona symetrycznie do Ot' względem prostych izotropowych. Nowe współrzędne „zdarzenia” możemy jednak określić dopiero po wyskalowaniu nowych osi. W tym celu konieczne jest znalezienie zbioru punktów odległych o jednostkę od początku układu współrzędnych. W pierwszym przypadku (odległość punktów $d = |t_1 - t_2|$) jest to prosta, w drugim ($d = \sqrt{(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2}$) hiperbola, której asymptotami są proste izotropowe, a w trzecim okrąg jednostkowy.

Korzystając z rysunków zamieszczonych obok można teraz wyprowadzić wzory na nowe współrzędne

w geometrii Galileusza

$$t = t'$$

$$x' = x - \vartheta t,$$

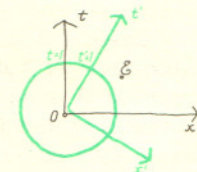


w geometrii Minkowskiego

$$t' = t \cosh \alpha + x \sinh \alpha$$

$$x' = t \sinh \alpha + x \cosh \alpha,$$

gdzie $\vartheta = -\tanh \alpha$,

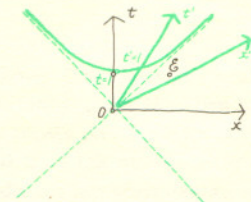


w geometrii Euklidesa

$$t' = t \cos \alpha - x \sin \alpha$$

$$x' = t \sin \alpha + x \cos \alpha,$$

gdzie $\vartheta = -\tan \alpha$.



Pierwsza z wymienionych geometrii opisuje kinematykę klasyczną ($\vartheta \ll c$), druga kinematykę relatywistyczną (ϑ dowolne), a trzeciej — tej, która opisuje czasoprzestrzeń taką, jak jej przestrzenna część, w fizyce nic nie odpowiada. Czas, jak się okazuje, to zupełnie inny wymiar niż wymiary przestrzenne.

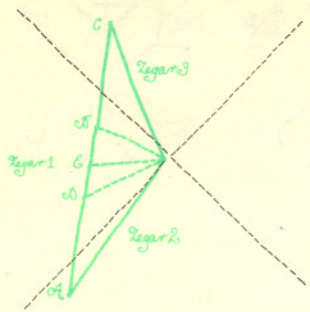
W geometrii Galileusza czas płynie tak samo dla wszystkich obserwatorów tj. zdarzenie E ma we wszystkich układach tę samą wartość współrzędnej czasowej. W geometrii Minkowskiego już tak nie jest. Rozważmy dwóch obserwatorów Ot i Ot' i zdarzenie A . Dla pierwszego z nich A zajdzie w czasie $t(A) = 1$ (jednostka czasu zegara spoczywającego w Ot). Rzutując A prostopadłe na oś Ot' otrzymujemy

$$t'(A) > t(A),$$

Podobnie dla zdarzenia B (zegar spoczywa w układzie Ot')

$$t'(B) < t(B).$$

Czas w układzie Ot biegnie dla obserwatora poruszającego się wolniej niż jego czas własny i odwrotnie zegar spoczywający w Ot' biegnie w układzie Ot wolniej niż zegar spoczywający w Ot' .



Ta symetria między obserwacjami w różnych inercjalnych układach odniesienia sugeruje paradoks, którego istotę wyjaśnia rysunek 3. Proste AB , BC i AC są liniami zegarów poruszających się bez przyspieszenia. Zegar 2 oddala się od zegara 1, a zegary 1 i 3 zbliżają się, by spotkać się w punkcie C . W punkcie A synchronizowane są zegary 1 i 2, a w punkcie B — zegary 2 i 3. W układzie spoczynkowym zegara 1 zegary 2 i 3 poruszają się. Powinno więc być

$$\tau_{AC} > \tau_{AB} + \tau_{BC},$$

gdzie przez τ oznaczyliśmy czasy własne zegarów. Paradoks polega na tym, że w układzie własnym zegarów 2 i 3 zegar 1 porusza się, co powinno dać

$$\tau_{AC} < \tau_{AB} + \tau_{BC}.$$

Żeby wyjaśnić ten paradoks musimy znaleźć na odcinku AC zdarzenia równoczesne z B dla obserwatorów 1 (punkt E), 2 (punkt D), 3 (punkt D') i skorzystać z faktu, że w geometrii Minkowskiego odcinek łączący dwa zdarzenia P i S jest zawsze krótszy od różnicy współrzędnych czasowych w dowolnym inercjalnym układzie współrzędnych

$$\tau_{PS} \leq t_P - t_S.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \tau_{AC} = \tau_{AE} + \tau_{EC} = t_{1E} - t_{1A} + t_{1C} - t_{1E} = t_{1B} - t_{1A} + t_{1C} - t_{1B} > \tau_{AB} + \tau_{BC} > t_{2B} - t_{2A} + t_{3C} - \\ - t_{3B} = t_{2D} - t_{2A} + t_{3C} - t_{3D'} > \tau_{AO} + \tau_{D'C} = \tau_{AC} - \tau_{DD'} \end{aligned}$$

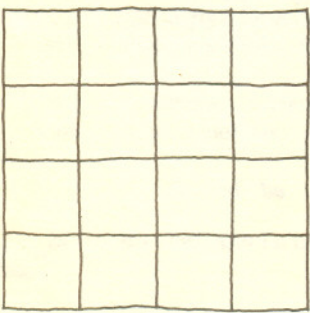
a więc $\tau_{DD'} > 0$ i nie ma już paradoksu. W punkcie C zegar 1 wskazuje większy czas niż czas wskazywany przez zegar 2. W powyższym rozumowaniu pominięto fakt, że w punkcie zwrótnym zegar porusza się z przyspieszeniem, co może mieć wpływ na jego bieg. Aby ocenić wpływ przyspieszenia a na zegar trzeba porównać je z typowym przyspieszeniem „mechanizmu” zegarowego b . Niedokładność biegu zegara wywołana przyspieszeniem jest w przybliżeniu równa

$$\Delta t \approx t \cdot \frac{a}{b} \approx \frac{\Delta \theta}{b},$$

gdzie t jest czasem trwania przyspieszenia.

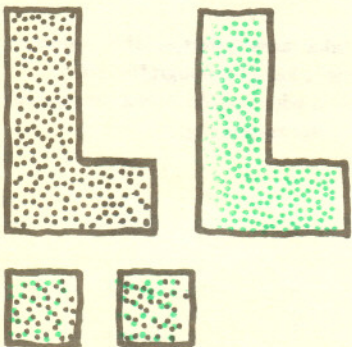
Dla typowego zegara atomowego z okresem drgań $4 \cdot 10^{-11}$ s niedokładność ta jest rzędu zaledwie 10^{-14} s.

Różnica wskazań zegarów w punkcie C zmieni się istotnie jeśli będą się one poruszały w polu grawitacyjnym. Uwzględnienie wywołanego obecnością mas „zakrzywienia” geometrii Minkowskiego prowadzi czasami do wyniku przeciwnego niż otrzymany powyżej. Jeśli na przykład jeden z bliźniaków pozostanie na orbicie Ziemi, a drugi poleci w rakiecie balistycznej do Plutona, a następnie wróci dzięki przyciąganiu Słońca, to okaże się, że podróżnik stanie się starszy od swojego brata. Widać stąd, że dopiero dokładne określenie warunków, w jakich odbywa się podróż, pozwala przewidzieć wynik porównania wskazań zegarów po powrocie.

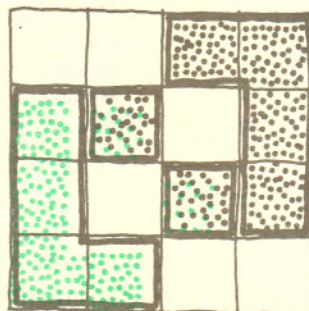


„ELKA”

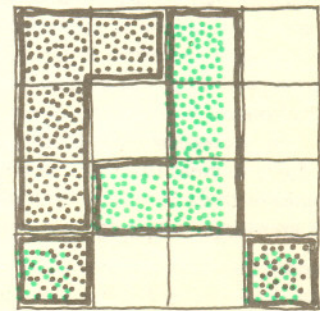
Na szachownicy 4×4 ułożone są dwie figury w kształcie litery L (3×2), oraz dwa kwadraty (1×1) zgodnie z tą szachownicą (a więc przykrywające całe pole). Jedna z „elek” należy do jednego z graczy, a druga do drugiego; kwadraty są „neutralne”. Ruch (który na przemian wykonują gracze) polega na ułożeniu swojej „elki” w inny sposób na niezajętych polach (można ją przy tym odwrócić „na lewą stronę”). Po wykonaniu ruchu gracz może jeszcze (przed ruchem przeciwnika) przenieść jeden lub dwa kwadraty na dowolne z niezajętych pól. Przegrywa ten, który nie może wykonać ruchu. Czy gra jest zdeterminowana (a więc czy istnieje strategia zwycięska dla któregoś z graczy, a może strategia remisowa)?



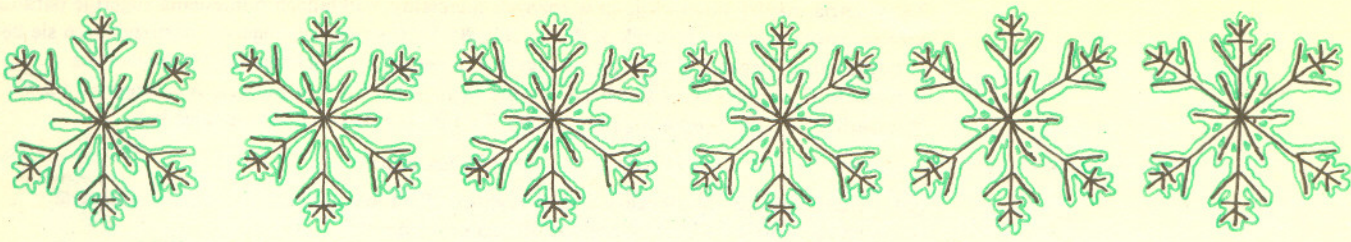
Szachownica i pionki



W takiej pozycji zaczynamy grę



Jeśli kolej na „czarnego”, to przegrał



Geometria świata kwarków

Zgodnie z definicją podaną w 1911 roku przez Ernesta Rutherforda, jądro atomowe to taka część atomu, która oddziałuje z cząstkami naładowanymi elektrycznie niezgodnie z prawem Coulomba. Składniki jądra, nukleony, związane są specyficznymi siłami oddziaływań jądrowych (częściej zwanych silnymi), które mogą być badane jedynie przez śledzenie owych odstępstw od prawa Coulomba. Choć obecnie znamy bardzo dużo cząstek (są to tzw. hadrony, patrz Delta 2/1979) biorących udział w oddziaływaniach silnych, to jednak natura tych oddziaływań wciąż nie została w pełni poznana. Wiemy jedynie, że hadrony składają się z pewnych subcząstek — kwarków i że oddziaływania silne polegają na permanentnym dla kwarków byciu wewnątrz hadronów. Same kwarki są odpowiedzialne za całość oddziaływań elektromagnetycznych (i słabych) hadronów. Na czym polega bycie wewnątrz hadronów — nie wiemy. W jednym z modeli opisujących zachowanie się hadronów, kwarki są połączone ze sobą pewnym patyczkiem, tzw. struną niezbyt jasnego pochodzenia. I tak na przykład niektóre mezony składają się z pary bezmasowych kwarków (kwark — antykwark) połączonych struną i obracających się dokoła siebie z prędkością światła. Zamiast zastanawiać się nad tym, skąd się wzięła struna, rozważmy nieco dokładniej wewnętrzną geometrię naszego tworu. Jak zobaczymy, nie bardzo przypomina on obracający się odcinek z końcami, czyli koło. Tak by było jedynie wtedy, gdybyśmy posłużyli się naturalną, klasyczną mechaniką newtonowską. Bardziej odpowiednią jest jednak teoria względności, szczególnie dla prędkości bliskich prędkości światła. W teorii tej wszystkie poruszające się ciała ulegają skróceniu w kierunku ruchu:

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2},$$

gdzie l_0 — długość ciała w spoczynku, v — jego prędkość, zaś c — prędkość światła.

Wprowadźmy układ odniesienia obracający się razem ze struną. Jest to najbardziej naturalny, własny układ odniesienia mezonu. W układzie tym punkty na okręgu o promieniu r poruszają się z prędkością $r \cdot \omega$, gdzie ω jest prędkością kątową obrotu. Promień r nie ulega skróceniu, gdyż jest prostopadły do kierunku ruchu. Zmienia się natomiast obwód koła poruszający się z prędkością $\omega \cdot r$:

$$l = 2\pi r \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}.$$

Tak więc stosunek obwodu koła do jego promienia zmienia się od 2π dla bardzo małych wartości r do ∞ dla $r = c/\omega$. Zatem wewnętrzna geometria mezonu to geometria modelu Kleina o promieniu c/ω , czyli geometria Bolyai-Łobaczewskiego. Być może na tym właśnie polega permanentne uwięzienie kwarków w hadronach. Wtedy oddziaływania silne demonstrowałyby szczególne cechy geometryczne świata, w którym żyją kwarki. Byłby to świat (patrz z zewnątrz) zamknięty w kuli o promieniu rzędu 10^{-13} cm. Oddziaływania silne miałyby, podobnie jak grawitacja, naturę czysto geometryczną.

Homografie

Homografie to inna nazwa funkcji liniowo-wymiernych, czyli funkcji postaci

$$f(x) = \frac{ax-b}{cx-d}, \quad \text{gdzie } ad-bc \neq 0.$$

(Gdy $c = 0$, to f jest zwykłą funkcją liniową.)

Zobaczymy, jak wygląda wykres takiej funkcji dla $c \neq 0$. Dla $x = d/c$ f jest nieokreślona (możemy powiedzieć $f(d/c) = \infty$). Właściwie, to nawet gorzej — w d/c f nie ma granicy:

$$\lim_{x \rightarrow d/c^-} f(x) = -\operatorname{sgn}(a/c) \cdot \infty, \quad \lim_{x \rightarrow d/c^+} f(x) = \operatorname{sgn}(a/c) \cdot \infty$$

($\operatorname{sgn}(e) = 1$, gdy $e > 0$ i -1 , gdy $e < 0$).

Możemy też napisać nieco inaczej

$$f(x) = \frac{a}{c} + \frac{ad-bc}{c(cx-d)},$$

skąd otrzymujemy granicę f w nieskończoności: $\frac{a}{c}$.

Ponadto oznaczając $A = \frac{a}{c}$, $B = \frac{ad-bc}{c^2}$, $D = d/c$ mamy

$$f(x) = A + \frac{B}{x-D},$$

a to znaczy, że wykresem homografii jest hiperbola o asymptotach $x = d/c$ i $y = a/c$. Stąd też zauważamy, że homografia jest wzajemnie jednoznaczny przekształceniem prostej bez punktu d/c na prostą bez a/c . Można, formalnie, dołączyć do prostej punkt ∞ ; wtedy homografia jest bijekcją rozszerzonej tak prostej na siebie.

Takim samym wzorem określone przekształcenia można też badać na płaszczyźnie zespolonej (czyli w ciele liczb zespolonych). Homografie zespolone zachowują rodzinę okręgów i prostych, co więcej, są konforemne, czyli zachowują kąty między krzywymi. A co jeszcze więcej, każda funkcja konforemna i zachowująca orientację jest homografią.

Gdyby nie żądać zachowania orientacji, rozwiązaniem byłyby homografie i homografie sprzężone, czyli funkcje dane wzorem

$$f(x) = \frac{a\bar{x}-b}{c\bar{x}-d}, \quad ad-bc \neq 0.$$

Inwersja względem okręgu o środku a i promieniu r na takiej płaszczyźnie zapisze się wzorem

$$i(z) = \frac{r^2}{z-a} + a, \quad \text{będzie więc homografią.}$$

Ale, co może ważniejsze — to taka sama inwersja, jak ta opisana w artykule „Geometria na sferze”; każda homografia jest złożeniem pewnej ilości inwersji, a więc podobieństwa płaszczyzny Möbiusa to homografie płaszczyzny zespolonej.



Rozwiązanie zadania M 281. Zauważmy, że w modelu Kleina okrąg współśrodkowy z „brzegiem” modelu jest okręgiem hiperbolicznym. Wystarczy teraz zauważyć, że gdy okrąg ten ma promień większy, niż połowa promienia koła stanowiącego model, to opisanie na tym okręgu trójkąta jest niemożliwe.

Każdemu punktowi (x, y) płaszczyzny odpowiada liczba zespolona

$$z = x + iy.$$

We współrzędnych biegunowych $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$; r nazywamy modułem liczby z , zaś φ jej argumentem.

Możemy z traktować jak pojedynczą zmienną i przy jej pomocy określać różne funkcje przyjmujące wartości zespolone. Każdą taką funkcję można przedstawić w postaci sumy jej części rzeczywistej i urojonej:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

gdzie funkcje u i v są rzeczywiste.

Okazuje się (jest to treścią podstawowego w analizie zespolonej twierdzenia), że dla każdej

„zwyyczajnej” funkcji zmiennej zespolonej (np. $z^2, \ln z, \frac{1}{z}, \sin z \dots$) spełnione są warunki

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{i} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Wynika z nich natychmiast, że zarówno funkcja u , jak i v spełnia dwuwymiarowe równanie Laplace'a, czyli przedstawia pewien potencjał elektrostatyczny. Dla przykładu rozważmy funkcję

$$f(z) = \ln z = \ln r + i\varphi.$$

Mamy dla niej

$$u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Aby określić sens fizyczny otrzymanego w ten sposób potencjału, musimy wyznaczyć linie ekwipotencjalne. Są to okręgi. Taki układ linii ekwipotencjalnych przedstawia np. rozkład pola w otoczeniu naładowanego przewodnika prostoliniowego.

Nietrudno teraz odgadnąć, jaka funkcja zespolona daje potencjał wewnątrz nieskończenie długiego kondensatora cylindrycznego o promieniach r i 1 , którego zewnętrzna okładka jest uziemiona, a potencjał wewnętrznej wynosi V . Jest to mianowicie funkcja

$$f(z) = V \ln z / \ln r.$$

A jak znaleźć potencjał pola, gdy rozsunie okładki kondensatora? Tym razem z pomocą przychodzi funkcja zespolona zwana homografią

$$F(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

gdzie a, b, c i d to stałe zespolone, przy czym $ad - bc \neq 0$. Dwie własności tej funkcji pozwolą na rozwiązanie postawionego wyżej problemu. Homografia przekształca dowolny okrąg na płaszczyźnie xy w okrąg na płaszczyźnie uv , a dowolną parę punktów symetrycznych względem okręgu w parę punktów symetrycznych względem obrazu tego okręgu.

Możemy teraz w prosty sposób przekształcić układ przewodników z rysunku na kondensator cylindryczny.

Wystarczy tylko wybrać odpowiednią homografię. W tym celu konstruujemy wspólną styczną do obu okręgów i wykreślamy na niej półokrąg. Punkty przecięcia półokręgu z linią łączącą środki okręgów (a i b) są wtedy symetryczne jednocześnie względem obu okręgów (dowód pozostawiamy Czytelnikowi). Dla okręgów koncentrycznych punktami symetrycznymi jednocześnie względem obu okręgów są 0 i ∞ . Homografię należy więc dobrać tak, aby przekształcała punkt a w 0 , a punkt b w ∞ . Jediną taką homografią jest

$$F(z) = \frac{z-a}{z-b}.$$

Możemy teraz odgadnąć potencjał pola wokół przewodników. Część rzeczywista funkcji

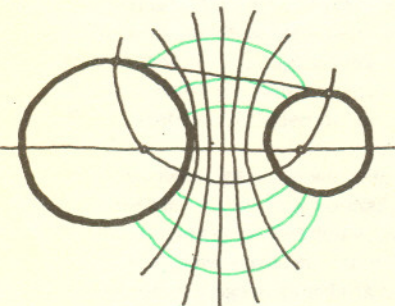
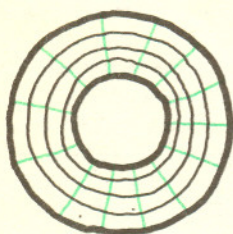
$$f[F(z)] = V \ln \frac{z-a}{z-b} / \ln r$$

spełnia, jak łatwo sprawdzić, wszystkie warunki brzegowe.

Funkcja

$$F(z) = z + e^z$$

przekształca pasek $-\pi < y < \pi$ na całą płaszczyznę z wyjątkami półprostymi $-\infty < u < -1, v = \pm\pi$. Czytelnikowi pozostawimy znalezienie na podstawie znanego rozkładu pola w nieskończonym kondensatorze płaskim pola wokół kondensatora, którego okładki są półpłaszczyznami.



Rozwiązanie zadania F 105. Odczytywanie tekstu polega na rozróżnianiu jasności elementów powierzchni, na którą został naniesiony. Gdy cienki papier (np. bibułka papierosowa) znajduje się w sporej odległości od tekstu, wtedy promienie światła odbitego w różnych kierunkach od białych elementów strony dają w przybliżeniu równomierne oświetlenie jej powierzchni. Przeczytanie tekstu jest niemożliwe, tym bardziej, że sama bibułka dodatkowo rozprasza padające na nią promienie. W przypadku przylegania do tekstu, odbite promienie nie pokrywają się. Decydującą rolę odgrywa wtedy rozpraszanie na przylegającym papierze. Gdy jest on dostatecznie cienki, rozpraszanie jest tak małe, że kontrast między literami i bielą kartki nie ulega istotnej zmianie.



Twierdzenie o powrocie

Jednym z bardziej zaskakujących rezultatów w mechanice klasycznej jest twierdzenie o powrocie sformułowane w XIX. w. przez wybitnego matematyka, fizyka i filozofa francuskiego Henri Poincarégo.

Dla przejrzystego sformułowania tego twierdzenia, jak też i dla jego dowodu, konieczne jest przypomnienie kilku własności ruchu w przestrzeni fazowej (Delta 1/1981).

Rozważmy układ cząstek działających na siebie całkowicie dowolnymi siłami. Jeśli układ ten ma f stopni swobody, to podanie f wartości współrzędnych x_1, \dots, x_f i f odpowiadających im pędów p_1, \dots, p_f daje kompletną informację o jego stanie. Nasuwa to myśl, żeby zmiany stanu układu w czasie rozważać w $2f$ wymiarowej przestrzeni euklidesowej.

Przestrzeń będąca zbiorem punktów $\gamma = (x_1, \dots, x_f, p_1, \dots, p_f)$, nazywana jest przez fizyków *przestrzenią fazową*. Każdemu możliwemu stanowi układu odpowiada dokładnie jeden punkt przestrzeni fazowej, a zmianom tego stanu w czasie przesuwaniu się po krzywej $\gamma(t)$ wyznaczonej przez $2f$ równań ruchu. Krzywa ta zwana trajektorią układu leży na hiperpowierzchni wyznaczonej przez rozdzielające stałe ruchu, takie jak całkowita energia układu, całkowity pęd (tylko dla układów izolowanych) lub całkowity moment pędu (dla układów o symetrii obrotowej). Kształt trajektorii zależy oczywiście od punktu startu (stanu początkowego) na hiperpowierzchni, jednak żadne dwie trajektorie (różne stany początkowe) nie mogą się przecinać, ponieważ przy zadanych warunkach początkowych równania ruchu mają tylko jedno rozwiązanie.

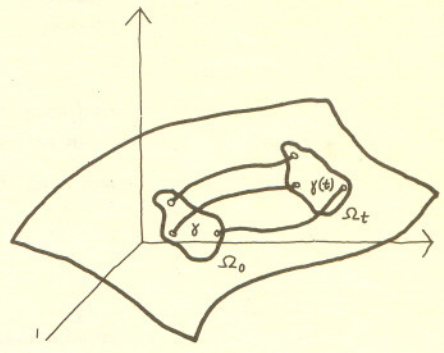
Możemy więc wyobrazić sobie każdą trajektorię jako linię prądu fikcyjnej cieczy wypełniającej przestrzeń fazową. Przepływ cieczy odpowiada ruchowi układu, a jej podstawowa cecha to nieściślność. Fakt ten stanowi treść twierdzenia Liouville'a — w przestrzeni fazowej objętość zachowuje się w czasie ruchu układu.

Twierdzenie to, równoważne równaniom ruchu, jest chyba najprostszym sposobem opisu ruchu układu wielu cząstek. Niech Ω oznacza dostępną przestrzeń fazową, tj. hiperpowierzchnię stałych ruchu odpowiadającą zespołowi tych stałych wyznaczonych przez dane początkowe. Rozważmy pewien zbiór $\Omega_0 \subset \Omega$ o objętości $\vartheta(\Omega_0)$. Każdy punkt γ zbioru Ω_0 można przyjąć za stan początkowy układu. Wtedy Ω_t będzie obszarem złożonym ze wszystkich punktów $\gamma(t)$. Twierdzenie Liouville'a orzeka, że

$$\vartheta(\Omega_0) = \vartheta(\Omega_t).$$

Możemy teraz przystąpić do sformułowania *twierdzenia o powrocie*. Jedynym istotnym założeniem tego twierdzenia jest żądanie, by dostępna przestrzeń fazowa układu miała skończoną objętość. Do spełnienia tego założenia wystarczy na przykład ograniczenie się do hiperpowierzchni stałej energii (układ izolowany).

Niech teraz γ_0 będzie punktem początkowym trajektorii $\gamma(t)$. Wtedy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje czas T_ε , po którym punkt $\gamma(t)$ znajdzie się powtórnie w pobliżu γ_0 w odległości mniejszej niż ε . Twierdzenie to jest spełnione dla wszystkich punktów początkowych poza zbiorem o zerowej objętości.



Mówiąc mniej precyzyjnie, o ile nie mamy pecha i nie wybierzemy złe punktu startowego, to trajektorja po pewnym skończonym czasie powróci dowolnie blisko punktu startowego. Dla dowodu rozważmy podzbiór A dostępnej przestrzeni fazowej. Niech objętość tego podzbioru będzie większa od zera a jego średnica mniejsza od ε . Pokażemy, że objętość zbioru B tych punktów A , które nigdy nie powracają do A , jest równa zeru. Z definicji zbioru B wynika, że musi istnieć czas τ , po którym zbiór B całkowicie „oderwie się” od zbioru A , tj. $B_\tau \cap A = \emptyset$. Przyjrzyjmy się teraz historii zbioru B w chwilach $0, \tau, 2\tau, \dots, N\tau$. Wszystkie zbiory $B_{n\tau}$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$ są rozłączne. Załóżmy, że tak nie jest i

$$\tilde{\gamma} \in B_{n\tau} \cap B_{m\tau}, \quad \text{gdzie } n > m.$$

Jeśli teraz cofniemy się wzdłuż trajektorii, do której należy punkt $\tilde{\gamma}$ o m kroków wstecz w czasie, to z jednej strony powrócimy do zbioru $B \subset A$ a z drugiej do zbioru $B_{(n-m)\tau}$. Ponieważ jednak trajektorie nie mogą się przecinać, punkt, do którego w ten sposób dojdziemy będzie punktem wspólnym zbiorów A i $B_{(n-m)\tau}$, co przeczy definicji zbioru B .

Mamy więc N rozłącznych zbiorów $B_{n\tau}$ o tej samej objętości. Gdyby objętość ta była większa od zera, to ich całkowita objętość przekroczyłaby dla pewnego N objętość dostępnej przestrzeni fazowej. Objętość zbioru B musi więc być równa zeru.

Twierdzenie Poincarégo jest źródłem jednego z najistotniejszych paradoksów fizyki — paradoksu Zermelo. Termodynamika traktuje wszystkie rzeczywiste procesy jako procesy nieodwracalne, czego wyrazem jest zasada wzrostu entropii. Tymczasem zgodnie z twierdzeniem Poincarégo może się zdarzyć, że gaz początkowo wypełniający połowę naczynia, po rozprężeniu, z powrotem skupił się w tej samej połowie.

Paradoks ten rozwiązano w fizyce statystycznej przez dopuszczenie możliwości samorzutnego przejścia układu ze stanu równowagi do stanu nierównowagi z jednoczesnym zmniejszeniem się entropii układu. Im większa jest jednak taka fluktuacja, tym mniejsze jest prawdopodobieństwo jej wystąpienia. Jeżeli średni czas, jaki upływa między kolejnymi identycznymi fluktuacjami (czas powrotu), jest dużo większy od czasu obserwacji układu, to (na ogół) nie zdąży on powrócić do początkowego stanu nierównowagi i proces będzie miał (na ogół) charakter nieodwracalny.

Okazuje się, że czas powrotu dla układu N cząstek jest równy w przybliżeniu iloczynowi e^N i czasu charakterystycznego układu, co w przypadku jednego mola gazu daje niewyobraźalnie długi czas $e^{10^{23}} \cdot 10^{-23}$ s — dużo, dużo dłuższy od czasu życia Wszechświata.

Regulamin konkursu uczniowskich prac z matematyki

1. Konkurs organizowany jest corocznie przez Zarząd Główny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i Redakcję miesięcznika „Delta”, przy poparciu Ministerstwa Oświaty i Wychowania.
2. W konkursie mogą brać udział uczniowie wszystkich typów szkół.
3. Konkurs składa się z eliminacji i finału.
4. W eliminacjach bierze udział każdy uczeń, który w terminie do dnia 1 maja prześle pod adresem Redakcji „Delt” jeden egzemplarz swojej pracy maturalnej lub innej pracy matematycznej. Do pracy należy dołączyć następujące informacje: adres prywatny autora, klasa, nazwę i adres szkoły, imię, nazwisko i adres nauczyciela — opiekuna pracy.
5. Praca powinna zawierać samodzielny wkład ucznia i pełną informację o źródłach, z których korzystał jej autor. Prace czysto kompilacyjne nie będą dopuszczane do finału konkursu.
6. Prace nadesłane na eliminacje zostaną ocenione przez Komisję Konkursu i kompetentnych recenzentów. Te spośród prac, które spełniają warunki konkursu, zostaną przedstawione Jury Konkursu. Jury zakwalifikuje najlepsze prace do finału, który odbędzie się w trakcie dorocznej Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego.
7. Zawiadomienia o zakwalifikowaniu do finału zostaną przesłane autorom prac oraz nauczycielom — opiekunom prac przed końcem roku szkolnego.
8. Finałiści i nauczyciele opiekujący się ich pracami otrzymują od Zarządu Głównego PTM zaproszenie do udziału w Sesji na koszt Towarzystwa.
9. Finał polega na wygłoszeniu (nie odczytaniu) przez ucznia, podczas specjalnego otwartego posiedzenia Sesji, referatu (trwającego nie dłużej niż 15 minut) i wzięciu udziału w dyskusji na temat, któremu poświęcona była praca.
10. Rezultaty finału oceni Jury Konkursu. Jury będzie brało pod uwagę, oprócz merytorycznej wartości pracy, również samodzielność i oryginalność ujęcia tematu oraz przebieg referatu i dyskusji. Jury przyznaje medale: złoty, srebrny i brązowy, wyróżnienia oraz nagrody pieniężne fundowane przez Ministerstwo Oświaty i Wychowania.
11. Ogłoszenie wyników finału następuje w trakcie Walnego Zgromadzenia Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Medale wręcza Prezes Towarzystwa. Wszyscy uczestnicy finału otrzymują dyplomy.
12. Wyniki konkursu i skrót zwycięskiej pracy będą opublikowane w miesięczniku „Delta”.
13. Komisję Konkursu oraz Jury tego Konkursu powołuje Zarząd Główny PTM na wniosek Komitetu Redakcyjnego „Delt”.



Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 280. Podać przykład trójkąta na płaszczyźnie hiperbolicznej, na którym nie można opisać okręgu.

Rozwiązanie na str. 11

M 281. Podać przykład okręgu na płaszczyźnie hiperbolicznej, na którym nie można opisać trójkąta.

Rozwiązanie na str. 14

M 282. Podać przykład takiej pary trójkątów ABC i $A'B'C'$ na płaszczyźnie eliptycznej, że $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $AC = A'C'$ a trójkąty ABC i $A'B'C'$ nie są przystające.

Rozwiązanie na str. 11

Wskazówek do zadań należy szukać w numerze.

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

F 104. Przez niewielki otwór wnika do sfery, wzdłuż jej średnicy, promień świetlny. Porównać oświetlenia poszczególnych punktów wnętrza sfery, przy założeniu (niemożliwym do spełnienia w praktyce), że jej wewnętrzna powierzchnia nie pochłania światła i równomiernie je rozprasza.

Rozwiązanie na str. 2

F 105. Przez cienki papier (np. pergamin) ściśle przylegający do książki można bez trudu odczytywać tekst. Nie udaje się to natomiast, gdy papier zostanie nieco odsunięty od tekstu. Dlaczego?

Rozwiązanie na str. 15