

optyka

ISSN 0013-788X
PI-3.14.1593

CENA 5 ZŁ

NR 9 (93) 1981

POPULARNY MIESIĘCZNIK MATEMATYCZNO-FIZYCZNO-ASTRONOMICZNY

SPIS TREŚCI

NUMERU 9 (93)

Zjawisko Josephsona <i>Mgr Wojciech Wojtanowski</i>	str. 1
Jak rozwiązujemy równania? <i>Dr Michał Szurek</i>	str. 4
Laser — układ kooperatywny <i>Mgr Stanisław Kryszewski</i>	str. 6
Zadania	str. 10
Patrz w niebo	str. 11
Modele	str. 12
Wybór czy determinacja, czyli nie ufajmy intuicjom <i>Dr Andrzej Pelc</i>	str. 14
Klub 44	str. 16

W następnym numerze:
Najbliższy metal

„Delta”
matematyczno-fizyczno-astronomiczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny:
doc. dr Jerzy Bartke
doc. dr Andrzej Bączyński
doc. dr Bolesław Gleichgewicht
prof. dr Kazimierz Goebel
doc. dr Bolesław Grabowski
dr Jan Hanasz
doc. dr Bolesław Iwazskiewicz
doc. dr Tadeusz Iwiński
doc. dr Andrzej Januszajtis
doc. dr Tadeusz Jarzębowski
prof. dr Leon Jeśmanowicz
dr Henryk Kaczorek
prof. dr Marek Kuczma
mgr Andrzej Mąkowski
prof. dr Bohdan Paczyński
prof. dr Zdzisław Pawlak
prof. dr Arkadiusz Piekara
doc. dr Sławomir Ruciński
prof. dr Konrad Rudnicki
prof. dr Zbigniew Semadeni
doc. dr Grzegorz Sitarski

prof. dr Józef Smak
prof. dr Jan Stankowski
doc. dr Kazimierz Stępień
prof. dr Mieczysław Subotowicz
doc. dr Stefan Turnau
prof. dr Jerzy Wdowczyk
doc. dr Andrzej Woszczyk
prof. dr Janusz Zakrzewski —
wiceprzewodniczący
prof. dr Wojciech Żakowski —
przewodniczący

Redaguje Kolegium w składzie:
mgr Tomasz Chlebowski
mgr Maciej Jędrzejczak
dr Marek Kordos — red. nac.
dr inż. arch. Jacek Mazur — ilustracje
dr Krzysztof Prażmowski — red. techn. graf.
dr Michał Szurek
mgr Krystyna Szypcio — sekr. red.
doc. dr Michał Święcki — z-ca red. nac.

Adres Redakcji
ul. Hoża 69 pok. 151,
00-681 Warszawa

Zakład Narodowy im.
Ossolińskich — Wydawnictwo
Wrocław, Oddział w Warszawie
Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.
wyd.; 2,50 ark. druk.;
papier offsetowy III kl. 80 g. 61 x 86
Wydrukowano w Drukarni im.
Rewolucji Październikowej
Warszawa, ul. Mińska 65
Nr zam. 516/12/81 L-20

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60—, cena prenumeraty półrocznej
zł 30—

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch” oraz urzędy pocztowe
i doręczyciele — w terminach:
— do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i cały rok następny
— do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego.
Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienie
w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”.
Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW, oraz prenumeratorzy
indywidualni zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.
Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej,
przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw,
ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 w terminach podanych dla
prenumeraty krajowej

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać
„DELTA”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.
Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem
lub za zaliczeniem pocztowym.
Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Konto PKO I OM W-wa 1531-912

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław
w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa
w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7
00-068 Warszawa, Poland or with
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68,
Bundesrepublik Deutschland.
— Earls Court Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain,
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia

Cena 1 egzemplarza zł 5— nr indeksu 35723/35550

$$\begin{array}{r}
 234 \\
 \times 567 \\
 \hline
 1638 \\
 1404 \\
 1170 \\
 \hline
 132678
 \end{array}$$

Na pewno potrafisz. A czy potrafisz powiedzieć: skąd wynika, że to dobry sposób?

Zjawisko Josephsona

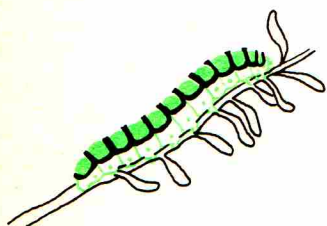
Mgr Wojciech WOJTANOWSKI

Przewidywanie możliwości istnienia efektów kwantowych związanych z układem makroskopowym jest dużym osiągnięciem fizyki ostatnich dziesięcioleci. Odkrycie nadprzewodnictwa czyli stanu materii, w którym następuje zanik oporu elektrycznego, inspirowało wielu fizyków do poszukiwania innych zjawisk, gdzie kolektywne własności elektronów w metalu, oziębionym poniżej temperatury przejścia do stanu nadprzewodzącego, przejawiałyby się w sposób makroskopowy. Jedno z takich zjawisk przewidział w roku 1962 angielski fizyk Brian D. Josephson. Wywnioskował on mianowicie, że w zasadzie można spowodować przepływ prądu nadprzewodzącego, składającego się ze skorelowanych par elektronów, przez przerwę izolującą dwa ciała nadprzewodzące, pod warunkiem, że przerwa ta jest dostatecznie mała.

Wydaje się, że najprościej istotę zjawiska Josephsona można zrozumieć, rozważając makroskopowe procesy związane z przepływem prądu przez nadprzewodnik. Weźmy pręt wykonany z substancji nadprzewodzącej, do którego przykładamy źródło prądu stałego. Do obwodu tego dołączamy również amperomierz i woltomierz. Woltomierz ten wskaże zerowy spadek napięcia, choć wskazówka amperomierza będzie wychylona. Oznacza to, że pręt nie wykazuje oporu elektrycznego i mówi się wtedy o nim, że jest w stanie nadprzewodzącym. Jeśli teraz pręt rozetniemy na dwie części i odsuniemy je od siebie na kilka centymetrów, to włączony do obwodu amperomierz nie wskaże przepływu prądu. Gdy jednak zmniejszymy odległość pomiędzy dwiema częściami tego nadprzewodzącego pręta do około 10 angstromów, może wystąpić jedno z dwóch zjawisk przewidzianych przez Josephsona. Pierwsze z nich polega na tym, że chociaż woltomierz nie pokazuje spadku napięcia, to przez obwód płynie prąd. Powstaje więc zadziwiające zjawisko przepływu prądu nadprzewodzącego zarówno przez oba kawałki pręta jak i rozdzielającą je przerwę. Nazywa się ono zjawiskiem Josephsona z prądem stałym.

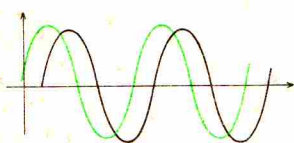
Inna sytuacja, która może mieć miejsce, polega na tym, że przy wychylonych wskazówkach obu mierników przerwa wysyła promieniowanie elektromagnetyczne o bardzo dużej częstotliwości, rzędu megaherców. Świadczy to o tym, że przez szczelinę przepływa prąd zmienny o tejże częstotliwości. Zjawisko to nazywa się zjawiskiem Josephsona z prądem zmiennym.

Badanie tego rodzaju zjawisk przyczyniło się do poznania istoty nadprzewodnictwa, a także stanowiło podstawę do opracowania szeregu przyrządów o praktycznym zastosowaniu. Umożliwiają one pomiary słabego pola magnetycznego z niebywałą wprost dokładnością, a także mogą stanowić bardzo precyzyjne źródła napięcia. Poza tym złącze Josephsona wykorzystuje się często jako tanie źródło spójnego promieniowania elektromagnetycznego o wysokiej częstotliwości (zakres mikrofalowy).



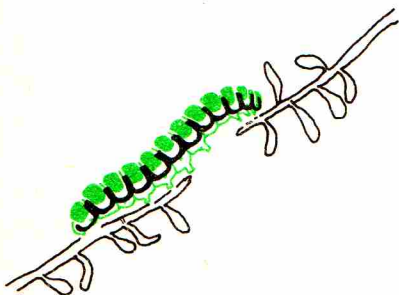
W celu wyjaśnienia zjawisk Josephsona konieczne jest sięgnięcie do istoty stanu nadprzewodzącego. Oddziaływanie elektronów przewodnictwa w metalu za pośrednictwem sieci krystalicznej prowadzi do powiązania ich w tzw. pary Coopera. Pary te dzięki temu, że są bozonami, gromadzą się wszystkie w tym samym stanie kwantowym tj. na przykład środki mas wszystkich par poruszają się z tym samym pędem. Rozpraszanie elektronów na węzłach sieci krystalicznej, odpowiedzialne za opór elektryczny, mogłoby prowadzić bądź do zmiany pędu pary, bądź do jej rozerwania. Pierwszy proces wymaga jednak bardzo dużej energii, ponieważ ze względu na wspomnianą korelację rozpraszanie musiałoby zmienić pęd wszystkich par. Rozerwanie pary następuje natomiast wtedy, gdy przekazana jej w akcie rozpraszania energia jest równa co najmniej energii wiązania. Nie może to nastąpić zanim pęd pary, a więc także gęstość prądu nadprzewodnictwa, nie przekroczy pewnej krytycznej wartości lub energia drgań cieplnych sieci krystalicznej nie stanie się porównywalna z energią wiązania. Tak więc dla niskich temperatur i odpowiednio małych gęstości prądu pary elektronowe w swym ruchu wewnątrz metalu nie napotykają na żaden opór.

W opisie kwantowomechanicznym par musi być uwzględniona ich falowa natura. Para elektronów o pędzie środka masy p może być opisana falą o długości h/p , gdzie h jest stałą Plancka. Stwierdzenie, że pędy środków mas wszystkich par są równe, oznacza, że fale opisujące te pary mają tę samą długość. Jednakże do korelacji w nadprzewodniku potrzebna jest jeszcze równość faz poszczególnych par elektronów.



Rys. 1

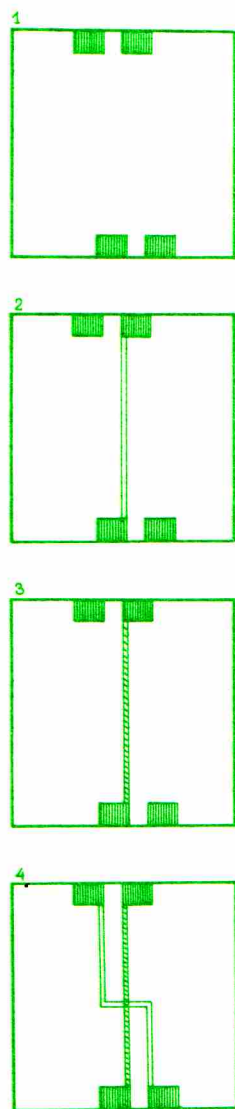
Pojęcie fazy ma kluczowe znaczenie dla zrozumienia zjawisk Josephsona. Na rys. 1 przedstawione są dwie fale o tej samej długości, a jednak nie identyczne. Staną się one jednakowe, gdy falę czarną przesuniemy o pewną odległość tak, żeby się pokryły. Będziemy mogli wtedy powiedzieć, że fale te mają zgodną fazę. Ta równość faz wszystkich par odpowiadających parom Coopera w nadprzewodniku jest zjawiskiem kwantowomechanicznym zachodzącym w skali makroskopowej. Gwarantuje ona najniższą energię układu. Zdefiniujmy fazę — jest to pomnożona przez 2π liczba cykli, jaką wykonał układ od ustalonego położenia początkowego. Przykładem może być koło rowerowe, w którym jedna szprycha jest kolorowa. Załóżmy, że początkowo szprycha ta ustawiona jest pionowo w dół. Po wykonaniu przez nią pół obrotu, mówimy, że faza zmieniła się o π . Obrotowi o $3/4$ odpowiada zmiana fazy równa $3\pi/2$. Gdy koło wykona cały obrót faza zmieni się o 2π i otrzymamy wyjściową sytuację. Możemy powiedzieć, że ruch koła zależy od tego jak faza zmienia się w czasie. Czas, w którym faza zmienia się o 2π nazywamy okresem ruchu. W ogólności układ może być okresowy zarówno w czasie jak i w przestrzeni. Długość fali w tym przypadku jest to odległość, na której zachodzi jedno pełne drgnięcie przestrzenne, a faza zmienia się o 2π . Zgodnie z mechaniką kwantową faza związana z parą elektronów w nadprzewodniku ma drgania przestrzenne, których długość określona jest przez pęd środka masy pary oraz drgania czasowe, których okres związany jest z energią pary. Zgodność faz wszystkich par Coopera wyjaśnia doskonale zanik oporu elektrycznego nadprzewodnika. Gdyby bowiem istniało napięcie V pomiędzy końcami pręta nadprzewodzącego, w którym płynie prąd, to energia pary elektronów na jednym końcu pręta byłaby o $2eV$ większa od energii pary na drugim końcu. Powstałaby zatem różnica faz pomiędzy tymi parami. Zamiast przejścia do stanu o wyższej energii, spowodowanego tym naruszeniem równości faz, nadprzewodnik przenosi prąd nie dopuszczając do pojawienia się różnicy potencjałów.



Do wyjaśnienia zjawisk Josephsona potrzeba nam jeszcze zrozumienia innego efektu kwantowomechanicznego nazywanego efektem tunelowania. Tunelowanie polega na tym, że dzięki swojej falowej naturze elektrony mogą przenikać przez bariery, które byłyby dla nich nie do przebycia, gdyby elektrony były tylko i wyłącznie cząstkami.

Wróćmy teraz do zjawiska Josephsona. Rozważmy znowu problem dwóch kawałków nadprzewodzącego pręta. Jeżeli są one rozsunięte dość daleko, to pomiędzy fazami par Coopera w obu częściach nie ma żadnego określonego związku. Kiedy jednak zbliżymy je tak blisko, że zaistnieje możliwość tunelowania par z jednej części do drugiej, to układ będzie starał się zająć stan o najniższej energii, w którym różnica faz w obu częściach będzie jednoznacznie określona. Na tę względną różnicę faz można wpływać polem elektrycznym lub magnetycznym. Jeżeli w jakiś sposób uda się nam wytworzyć określoną różnicę faz pomiędzy parami Coopera z obu części pręta, to popłynie prąd elektryczny.

Jaka będzie postać tego prądu? Otóż, jak łatwo wytłumaczyć, zależność gęstości prądu płynącego przez złącze od różnicy faz ma charakter sinusoidalny. Widać to na przykładzie pracy koła napędowego i tłoka lokomotywy. Od fazy ruchu koła połączonego z tłokiem zależy kierunek przesuwu tłoka. Podobnie jest z prądem w złączu. Przy przemieszczaniu się par w uprzywilejowanym kierunku zmieniają one swoją fazę o tyle, żeby osiągnąć wartość fazy w tej części nadprzewodzącego pręta, do którego właśnie przechodzą. Pary usiłujące przemieszczać się w przeciwnym kierunku będą zmieniać swą fazę o tę samą wartość. Jeżeli w wyniku tego ich faza dopasuje się do fazy w nadprzewodniku, do którego dążą, to przejście takie może nastąpić i wypadkowy prąd będzie równy zeru. Jeżeli jednak takie dopasowanie nie nastąpi, to przejście będzie niemożliwe. W tym przypadku pary przechodzące w kierunku uprzywilejowanym spowodują powstanie stałego prądu elektrycznego. Jest to właśnie zjawisko Josephsona z prądem stałym.



Rys. 2

Przejdźmy teraz do zjawiska Josephsona z prądem zmiennym. Poprzednio różnica faz pomiędzy parami Coopera w obu częściach nadprzewodzącego pręta nie zmieniała się w czasie. Wiemy już jednak, że jeżeli pomiędzy dwoma nadprzewodnikami istnieje różnica napięć, to różnica faz nie będzie stała. W zjawisku Josephsona z prądem stałym będzie zmieniała się dotąd, aż osiągnie wartość odpowiadającą prądowi wytwarzanemu przez źródło. Trwa to przez jedną dziesięciomiliardową część sekundy od włączenia prądu. Potem już różnica faz jest stała. Jeżeli jednak źródło prądu wytwarza prąd przekraczający maksymalny prąd Josephsona, to skompensowanie nie nastąpi i na złączu istnieje pewne napięcie, powodujące zmianę względnej fazy w czasie. Jak już wspominaliśmy wcześniej prąd Josephsona zależy od różnicy faz czyli zacznie płynąć raz w jednym raz w drugim kierunku. Oczywiście prędkość tych zmian będzie od napięcia na złączu. Mamy w tym przypadku do czynienia ze zjawiskiem Josephsona z prądem zmiennym.

Przejdźmy teraz do omówienia możliwości sprawdzenia przewidywań teoretycznych na drodze eksperymentalnej. Otrzymanie układu, w którym dwie części nadprzewodnika rozsunięte są na odległość 10 angstromów nie jest sprawą łatwą. (Jak mała jest to odległość niech nam uzmysłowi fakt, że atom ma rozmiary rzędu angstroma). Tę podstawową trudność pokonano stosując metodę naparowywania w próżni. Metal ogrzewany w próżni paruje i jego pary osadzają się na szklanym podłożu. Złącze Josephsona otrzymuje się w następujący sposób (patrz rys. 2):

1. naparowywuje się cztery elektrody,
2. kolejno naparowywuje się cienki pasek metalu, który po oziębieniu staje się nadprzewodnikiem,
3. na ten pasek, przez wpuszczenie do komory próżniowej ściśle określonej ilości tlenu, nanosi się cienką warstwę (10 \AA) izolującego tlenku,
4. wreszcie naparowywuje się na to, zwykle prostopadle, drugi cienki pasek metalu.

Wystarczy teraz do elektrod podłączyć przewody, oziębic złącze poniżej temperatury przejścia do stanu nadprzewodzącego i układ jest gotowy.

Do tej pory przeprowadzono już tysiące doświadczeń potwierdzających wszelkie teoretyczne przewidywania dotyczące zastosowań złącza Josephsona. Jak już wspominaliśmy, prąd stały płynący w złączu zależy od przyłożonego pola magnetycznego, co jest wynikiem zależności fazy fali odpowiadającej parze Coopera od pola magnetycznego. Powoduje to przestrzenną zależność różnicy faz w dwu nadprzewodnikach, o ile do złącza przyłożymy stałe i jednorodne pole magnetyczne. Można wykazać, że w polu tym następuje zmiana fazy w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku pola i jest ona proporcjonalna do wielkości pola. Zmiana fazy powoduje z kolei oscylacje gęstości prądu w przestrzeni. Fakt ten nie oznacza nic innego jak to, że przy dostatecznie silnym polu prąd może zmienić kilkakrotnie swój kierunek. Powoduje to oczywiście periodyczną zależność maksymalnego wypadkowego prądu stałego płynącego przez złącze od natężenia pola magnetycznego. Wykorzystanie powyższych zależności pozwala mierzyć słabe pola magnetyczne z olbrzymią dokładnością.

Rozpatrując zjawisko Josephsona z prądem zmiennym mówiliśmy o proporcjonalności częstości emitowanego promieniowania do napięcia na złączu. Zależność ta ma postać $\nu = 2eV/h$, gdzie ν — częstość oscylacji, V — napięcie na złączu, e — ładunek elektronu. Wykorzystując ten związek można budować wzorce napięcia o bardzo dużej dokładności, czy też znajdować wartość stosunku stałej Plancka h do ładunku elektronu. Widzimy tu wspaniałą sposobność wykorzystania makroskopowego zjawiska kwantowego do wznaczenia podstawowych stałych fizycznych.

2. Czy liczba 99999999999999991008 jest podzielna przez 72? Oczywiście, że... Na pewno szybko znajdziesz odpowiedź. A czy potrafisz udowodnić znaną cechę podzielności przez 9?

Jak rozwiązujemy równania?

Dr Michał SZUREK

Niewiele jest przesady w stwierdzeniu, że matematyka istnieje po to, abyśmy umieli rozwiązywać równania. A równania są przecież wszędzie: w poznawaniu kosmosu, przy badaniu elementarnych cząstek materii, budowie dróg i planowaniu gospodarczym.

Znamy ze szkoły wzory na pierwiastki równania kwadratowego i — być może — sześciennego. Są jeszcze wzory dla równań czwartego stopnia. W r. 1826 norweski matematyk, Niels Henryk Abel, udowodnił, że gdy dane jest równanie piątego stopnia

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

to — poza bardzo wyjątkowymi przypadkami — nie istnieją wzory, wyrażające pierwiastki tego równania w zależności od współczynników, za pomocą czterech działań arytmetycznych i wyciągania pierwiastka. Użyta przez Abela metoda dała początek całej algebrze abstrakcyjnej, to jest gałęzi matematyki badającej ogólne właściwości zbiorów i określonych w nich działań. Abel związał bowiem z każdym równaniem jego tak zwaną grupę Galois i wykazał, że o możliwości rozwiązania równania (ściślej: o możliwości podania wzorów, w których użyjemy tylko +, ·, −, : i $\sqrt[n]{}$) decydują pewne abstrakcyjne własności tej grupy.

Co to znaczy „umieć rozwiązać równanie”? Proste pytanie, powiedzą Czytelnicy. To przecież znaczy „umieć znaleźć jego pierwiastki”! Ale między „umieć” a „umieć” — też jest różnica. Nasi przodkowie nadzwyczaj rzadko *naprawdę* potrzebowali znaleźć rozwiązanie skomplikowanego równania, wobec czego „umiejętność rozwiązywania” pojmowali raczej idealistycznie — byle był wzór, nawet nie nadający się praktycznie do niczego. O zaprezentowanych poniżej metodach, dających szybko dowolnie dokładne rozwinięcie pierwiastka, mawiano pogardliwie: Phi, to tylko metody przybliżone!

Dziś musimy umieć efektywnie szukać i znajdować rozwiązania. Dlatego i teoria równań, i w ogóle cała matematyka, algorytmizuje się. Wyżej cenimy *przepisy* (przesiać 30 dag mąki, dodać 20 dag masła, posiekać dokładnie mieszając, włożyć 4 surowe żółtka, przesiany cukier i zmielone orzechy; zagnieść ciasto, ułożyć na blasze i piec 10 minut...) niż ogólne opisy (rożki orzechowe robi się z mąki, jajek, masła, cukru i orzechów, a piecze się w piekarniku) lub ogólne rady („weź nadgodziny, zarobisz 200 zł więcej i kupisz w Hortexie”). Odnosi się to też do wykładów algebry i analizy matematycznej, a o metodach stycznej i siecznej mówi się: oto proste i szybko zbieżne algorytmy!

Jeżeli chcemy obliczyć pierwiastek równania (nawet z dużą dokładnością) a mamy choć kalkulator, to metoda „prób i błędów” nie jest zupełnie do niczego. Lepsza jest jednak metoda połowienia (tablica obok). Zilustrujemy ją na przykładzie równania

$$f(x) = \frac{1}{x} - 0,3 = 0,$$

którego pierwiastkiem jest oczywiście $x = \frac{10}{3} = 3,33333\dots$ Niech $p = 3$ i $q = 4$ (krok 1); wtedy $h = 3,5$. Ta wartość h jest pierwszym przybliżeniem naszego pierwiastka $x = 3,33333\dots$



Rozwiązanie równania $f(x) = 0$ metodą połowienia.

Krok 1. Wybierz p i q , tak by $f(p)$ i $f(q)$ miały różne znaki.

Krok 2. Oblicz $h = \frac{p+q}{2}$.

Krok 3. Oblicz $f(h)$.

Krok 4. Jeżeli $f(h) = 0$, to $x = h$ jest rozwiązaniem;

Stop!

Krok 5. Jeżeli $f(h)$ i $f(p)$ mają ten sam znak, zastąp p przez h , a $f(p)$ przez $f(h)$.

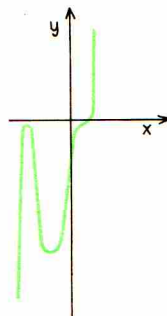
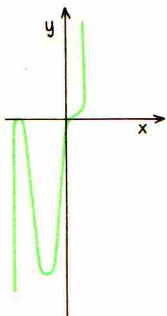
W przeciwnym razie zastąp q przez h i $f(q)$ przez $f(h)$. Teraz wróć do kroku 2.

Test wcale nie dla uczniów

3. Na rysunku obok widzisz wykres funkcji

$$f(x) = x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4 \equiv (x+2)^2(x-1)$$

Czy znajdzie się taki wielomian, którego wykres wygląda tak, jak na rysunku niżej, to znaczy ma skrócony jeden łuk tak, jak na rysunku?



Metoda siecznej

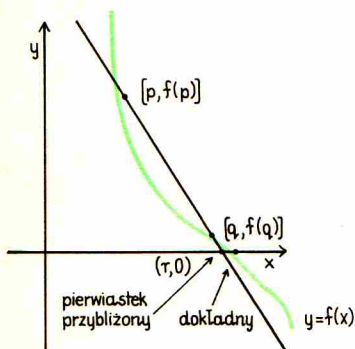
Krok 1. Wybierz dwie liczby p, q , leżące blisko rozwiązania.

Krok 2. Oblicz $r = q - \frac{(p-q) \cdot f(q)}{f(p) - f(q)}$.

Krok 3. Oblicz $f(r)$.

Krok 4. Jeżeli $f(r) = 0$; stop!

Krok 5. Jeżeli $|f(p)| \geq |f(q)|$, to zastąp p przez r , a $f(p)$ przez $f(r)$. W przeciwnym razie zastąp q przez r , zaś $f(q)$ przez $f(r)$. Wróć do kroku 2.



Metoda stycznej (metoda Newtona)

Krok 1. Wybierz dowolne p (blisko rozwiązania).

Krok 2. Oblicz $f(p)$.

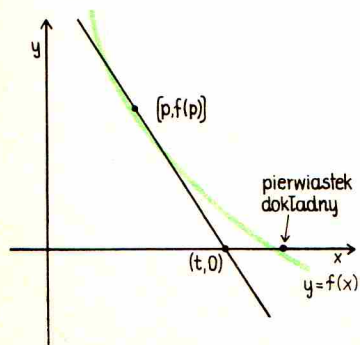
Krok 3. Jeżeli $f(p) = 0$; stop!

Krok 4. Oblicz $f'(p)$.

Krok 5. Oblicz $t = p - \frac{f(p)}{f'(p)}$.

Krok 6. Podstaw $p = t$.

Wróć do kroku 2.



Ponieważ $f(h) = -0,14285714$ i $f(3)$ mają różne znaki,

więc rozwiązanie leży między 3 a 3,5. Następne h jest równe $\frac{1}{2}(3 + 3,5) = 3,25$,

a ponieważ $f(h) = 0,00769231$, więc prawdziwe rozwiązanie leży między 3,25 a 3,5. Dalsze postępowanie przyniesie taki ciąg przybliżonych rozwiązań: 3,375, 3,3125, 3,34375, 3,328125. Widzimy, że zbieżność do granicy 3,33333... jest dosyć powolna.

Dlatego zazwyczaj lepsza jest metoda siecznej (tablica obok). Metodą tą otrzymamy szybciej zbieżny ciąg rozwiązań 2, 3, 3,2, 3,32, 3,3328, 3,333312, 3,3333333. Nazwę „metoda siecznej” uzasadnia rysunek: każde kolejne przybliżenie rozwiązania jest punktem przecięcia osi x -ów przez sieczną łączącą $(q, f(q))$ z $(p, f(p))$.

Metoda następna to metoda „stycznej” (tablica obok). Stosując ją do równania

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 6x - 2 = 0$$

mamy kolejno

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 6 = 3(x^2 + 4x + 2); \text{ i dalej:}$$

Przybliżenie Nr	p	$f(p)$	$f'(p)$	$t = p - \frac{f(p)}{f'(p)}$
1	0	-2	6	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	0,7037037	10,333333	0,26523297
3	0,26523297	0,03214774	9,39384	0,2369982
4	0,2369982	-0,22769017	9,0124826	0,26156369
5	0,26156369	-0,00222945	9,344011	0,26180229
6	0,26180229	0,00000042	9,3472488	0,26180224
7	0,26180224	0,0000000022		

„Dokładnym” wzorem na pierwiastek tego równania jest

$$x = 2 \sqrt[3]{2\sqrt{2}} \cos \frac{\varphi + 4\pi}{3}$$

gdzie $\cos \varphi = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ i $180^\circ < \varphi < 360^\circ$

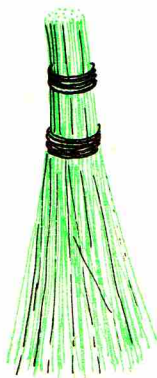
(w przybliżeniu $\varphi = 249^\circ, 29519$).

Uzasadnienie nazwy „metoda stycznej” znów widać na rysunku. Wspomniemy, że użycie opisanych metod obwarowane jest pewnymi założeniami, których tu jednak dyskutować nie będziemy, ponieważ tylko dla stosunkowo skomplikowanych równań mogą one nie być spełnione.

4. Jak brzmi zaprzeczenie zdania (wyrażającego pewien pogląd o pracy redakcji Delty):
 Nikt tu nigdy niczego niepotrzebnie nie robi.
 A co jest zaprzeczeniem zdania:
 C nie jest całkowicie zawarte w K?

Laser — układ kooperatywny

Mgr Stanisław KRYSZEWSKI



Obiektami zainteresowania wielu współczesnych gałęzi nauki są układy makroskopowe, składające się z bardzo wielu podukładów. Oto kilka przykładów: laser, molekuly wchodzące w reakcje chemiczne, ludzie tworzący grupy społeczne, warstwy geologiczne uczestniczące w ruchach górotwórczych, zwierzęta różnych gatunków zamieszkujące określone środowisko ekologiczne. Matematyczny model takich układów jest skomplikowany, bo do ich opisu potrzeba bardzo wielu zmiennych, reprezentujących poszczególne podukłady. Opis taki musi uwzględniać zarówno wpływ środowiska na każdy z podukładów jak i ich indywidualne własności. Okazuje się, że równania opisujące zjawiska przebiegające w takich układach mają podobną strukturę matematyczną, co jest wynikiem tego, że ich zachowanie jest jakościowo podobne. Kiedy na przykład parametry zewnętrzne przyjmują określone wartości (najczęściej małe), wówczas wpływ środowiska (środowisko jednego podukładu tworzą pozostałe podukłady) jest nieznaczący, a podukłady zachowują się niezależnie — chaotycznie. Przy pewnych wartościach parametrów układ staje się jednak niestabilny i wystarczy niewielka ich zmiana, żeby nastąpiła dramatyczna zmiana zachowania, a czasami struktury przestrzennej układu. Podukłady zaczynają współdziałać, zachowywać się w sposób uporządkowany — kooperatywny. Aby lepiej zrozumieć te zjawiska, prześledzimy je na przykładzie lasera.

Zasadniczym elementem lasera jest rura wypełniona gazem i zamknięta z obu stron zwierciadłami. Aby laser zaczął działać, musi być pompowany tzn. atomy gazu muszą być oświetlane silną lampą, dzięki czemu ulegają wzbudzeniu. W wyniku przemieszczania się ładunku pod wpływem pola fali pompującej, w atomie wytwarza się oscylujący w czasie, elektryczny moment dipolowy. Oscylujący dipol z jednej strony promieniuje fale elektromagnetyczne (światło), a z drugiej oddziałuje z polem elektromagnetycznym znajdującym się w rurze. Wzbudzone elektrony po pewnym (bardzo krótkim) czasie przechodzą do stanu podstawowego, emitując światło, które z kolei może oddziaływać z następnymi atomami.

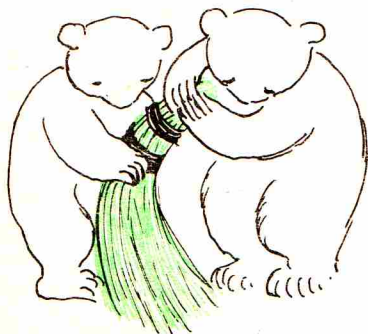
Należy podkreślić, że naszkicowane tutaj rozwiązania mają charakter przybliżony, ponieważ nasz opis nie uwzględnia tych cech układu, które można opisać jedynie na gruncie mechaniki kwantowej.

Na podstawie przedstawionego wyżej obrazu można ułożyć równanie opisujące prędkość zmian natężenia pola elektrycznego w rurze lasera:

$$(1) \quad \frac{d}{dt} E(t) = -\kappa E(t) + GE(t) + \sum_n g_n p_n(t) E(t) + F(t),$$

gdzie $\kappa > 0$.

Pierwszy wyraz po prawej stronie równania uwzględnia straty wynikłe z obecności otoczenia, np. przy odbiciu światła od luster. Drugi — jest to przyrost wywołany pompowaniem, którego siłę reprezentuje stała G . Trzeci wyraz opisuje zmiany pola wywołane drganiami (wymuszonymi przez to samo pole) elementarnych dipoli; g_n jest stałą proporcjonalną do ładunku elektronu; $p_n(t)$ to elektryczny moment dipolowy atomu, a n numeruje poszczególne atomy. Ostatni wyraz $F(t)$ opisuje fluktuacje, przypadkowe zmiany wynikłe z losowych zdarzeń, np. wahania natężenia światła lampy pompującej.



5. Wielomian stopnia 3 ma zawsze pierwiastek. Na przykład jeżeli $a > b > 1$ oraz

$$f(x) = x^3 + ax + b,$$

to przy $x < -a$ wartość $f(x)$ jest ujemna, zaś dla $x > 0$ mamy $f(x) > 0$. „Gdzieś po drodze” musi więc być $f(x) = 0$.

Ten dowód można wzmocnić. Podstawiamy za x tylko wartości wymierne; niech a, b będą takie. Dostatecznie daleko na lewo $f(x) < 0$, dostatecznie daleko na prawo $f(x) > 0$, a zatem gdzieś w środku $f(x) = 0$. Dowolny wielomian trzeciego stopnia ma pierwiastek wymierny? Oczywiście, że nie! Sprawdź np. $f(x) = x^3 + 3x + 2$.

Jaką własność bezprawnie przypisaliśmy liczbom wymiernym w tym oszukany dowodzie?

Atomowe momenty dipolowe także podlegają zmianom. Z jednej strony drgania dipola zanikają, a z drugiej pole elektryczne wzbudza atomy wymuszając drgania dipoli. A zatem dla n -tego atomu równanie opisujące oba te procesy ma postać:

$$(2) \quad \frac{d}{dt} p_n(t) = -\gamma p_n(t) + h_n E(t) D_n(t),$$

gdzie $\gamma > 0$ jest stałą charakteryzującą prędkość zaniku drgań atomowego dipola; h_n opisuje „siłę”, z jaką pole o jednostkowym natężeniu wymusza drgania dipola. Wyjaśnienia wymaga wielkość $D_n(t)$ zwana inwersją obsadzeń. Jest to różnica prawdopodobieństw tego, że atom jest w stanie wzbudzonym i tego, że jest w stanie podstawowym. Atom w stanie wzbudzonym ma większy moment dipolowy (wymuszony przez pole $E(t)$), niż w stanie podstawowym i dlatego we wzorze pojawia się dodatkowo inwersja obsadzeń.

Zupełnie analogiczne rozumowanie doprowadzi nas do trzeciego równania — dla inwersji obsadzeń w n -tym atomie

$$(3) \quad \frac{d}{dt} D_n(t) = \Gamma [D_n^{(0)} - D_n(t)] + H_n E(t) p_n(t) \quad (\Gamma > 0),$$

gdzie sens współczynników jest podobny do tych z równania (2). Jedyna różnica polega na pojawieniu się dodatkowego wyrazu $\Gamma D_n^{(0)}$, w którym $D_n^{(0)}$ jest inwersją obsadzeń powstałą w wyniku zewnętrznego pompowania.

Trzy równania (1)-(3) opisują procesy zachodzące w laserze. Tworzą one skomplikowany układ równań, ponieważ równania (2) i (3) trzeba zbudować dla wszystkich atomów, a liczba ich jest co najmniej rzędu 10^{15} . Niemożliwe jest zatem znalezienie dokładnych rozwiązań i trzeba sięgnąć po metody przybliżone. Pole $E(t)$ jest wielkością makroskopową, mierzoną w doświadczeniu, podczas gdy $p_n(t)$ i $D_n(t)$ są wielkościami atomowymi. Procesy atomowe przebiegają bez porównania szybciej niż procesy makroskopowe. Można zatem przyjąć, że prędkości zaniku momentu dipolowego γ i inwersji obsadzeń Γ są znacznie większe niż κ — prędkość zaniku pola elektrycznego w rurze lasera. W czasie, gdy dipol elektryczny wykona bardzo wiele oscylacji (atom wielokrotnie ulegnie wzbudzeniu i przejściu do stanu podstawowego), pole $E(t)$ zmieni się nieznacznie. Jednocześnie pole $E(t)$ wymusza zmiany $p_n(t)$ i $D_n(t)$, które są znacznie wolniejsze niż odpowiednie prędkości zaniku. Dlatego w równaniach (2) i (3) możemy zaniedbać pochodne, co prowadzi do równań:

$$p_n(t) \approx \frac{1}{\gamma} h_n E(t) D_n(t),$$

$$D_n(t) \approx \frac{1}{\Gamma} H_n E(t) p_n(t) + D_n^{(0)}.$$

Łatwo stąd obliczyć, że

$$(4) \quad p_n(t) = D_n^{(0)} \left[1 - \frac{1}{\Gamma \gamma} h_n H_n E^2(t) \right]^{-1}.$$

Ponieważ, jak się okaże za chwilę, $E^2(t)$ jest wielkością małą, więc czynnik w równaniu (4) można zastąpić pierwszymi wyrazami jego rozwinięcia w szereg potęgowy

$$(5) \quad p_n(t) \approx D_n^{(0)} \left[1 + \frac{1}{\Gamma \gamma} h_n H_n E^2(t) \right].$$





Jeżeli rezultat ten podstawimy do równania (1), to otrzymamy

$$\frac{d}{dt} E(t) = (-\kappa + G)E(t) + \sum_n g_n D_n^{(0)} \left[1 + \frac{1}{\Gamma\gamma} h_n H_n E^2(t) \right] E(t) + F(t).$$

Grupując wyrazy z jednakowymi potęgami pola $E(t)$ możemy powyższe równanie zapisać w postaci:

$$(6) \quad \frac{d}{dt} E(t) = (-\kappa + G')E(t) + CE^3(t) + F(t),$$

gdzie

$$G' = G + \sum_n g_n D_n^{(0)},$$

$$C = \frac{1}{\Gamma\gamma} \sum_n g_n D_n^{(0)} H_n h_n.$$

Należy tu zwrócić uwagę na następujący fakt. Otrzymaliśmy przybliżone równanie opisujące działanie lasera, zawierające tylko jedną nieznaną funkcję, a mianowicie natężenie $E(t)$ pola elektrycznego. Wyeliminowaliśmy tutaj skomplikowane procesy atomowe, które należałoby rozpatrywać w języku mechaniki kwantowej. Nasze przybliżenie można sformułować w następujący sposób: Zmiany drgań atomowych dipoli i inwersji obsadzeń są podporządkowane polu elektrycznemu. Pole elektryczne „steruje” ruchem wewnątrzatomowym.

Równanie (6) jest równaniem różniczkowym pierwszego rzędu — zawiera tylko pierwszą pochodną; nieliniowym — bo zawiera nieznaną funkcję w trzeciej potęgce. Dodatkowo występuje jeszcze człon $F(t)$ opisujący przypadkowe fluktuacje. Dyskusja rozwiązania ogólnego jest utrudniona ze względu na fluktuacyjny charakter $F(t)$. Omówimy wobec tego jedynie pewne własności rozwiązań tego równania. Interesują nas jedynie rozwiązania stabilne w czasie.

Jeżeli układ opisywany rozwiązaniem stabilnym wytrącimy ze stanu $E_s(t)$ tworząc nowy stan $E(t) = E_s(t) + \Delta E(t)$, to wówczas zaburzenie $\Delta E(t)$ zanika wraz z upływem czasu i układ powraca do stanu $E_s(t)$ — stabilnego. Rozważymy dwa przypadki.

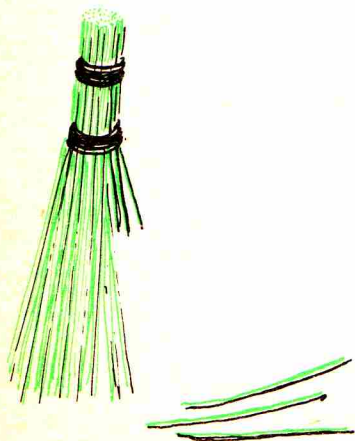
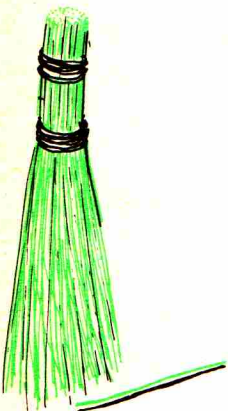
A) $\kappa > G'.$

Załóżmy na chwilę, że $F(t) = 0$. Jedynym rozwiązaniem stabilnym jest wówczas $E_s(t) = 0$. Gdy uwzględnimy fluktuacje, to wówczas laser działa jak lampka. Przypadkowe wzbudzenia atomów dają świecenie całości w sposób chaotyczny, nieuporządkowany czyli niespójny. Fizycznie oznacza to, że istniejące we wnętrzu niespójne pole $E(t)$ jest zbyt słabe, aby podporządkować sobie zmiany drgań dipoli atomowych i inwersji obsadzeń. Układ emituje wówczas bardzo krótkie (długości około kilkunastu metrów) ciągi falowe.

B) $G' > \kappa.$

Teraz mamy inną sytuację. Równanie (6) ma niezerowe rozwiązanie stabilne. Dzięki silnemu pompowaniu przewyższającemu straty pole $E(t)$ w sposób uporządkowany wymusza drgania dipoli atomowych. Atomy świecą w sposób uporządkowany dając wąską wiązkę promieniowania o wysokiej spójności. Ciągi falowe mogą mieć długości rzędu 300 000 km, czyli układ działa rzeczywiście jak laser. Pole $E(t)$ jest wystarczająco duże, aby wymusić drgania atomowych dipoli zgodne w fazie, co właśnie daje bardzo długie ciągi falowe. Makroskopowo ma ono nadal małą wartość, tyle, że rozwiązanie stabilne jest niezerowe.

Widzimy więc w tym przypadku pewien ogólny schemat. Układ złożony z bardzo wielkiej liczby podukładów, podczas zmiany zewnętrznego parametru, którym jest tutaj pompowanie (wielkość G') podlega gwałtownej i radykalnej zmianie. Jedną z wielkości charakteryzujących układ — pole elektryczne — $E(t)$ „podporządkowuje” sobie pozostałe wielkości, tym samym wymuszając zachowanie się całości w sposób makroskopowo spójny. Wyróżnienie $E(t)$ jako wielkości „porządkującej” pozwoliło nam ograniczyć liczbę zmiennych niezbędnych do opisanego układu do tylko jednej — właśnie $E(t)$. Oczywiście nasze rozważania miały charakter przybliżony, jednak pełna analiza zjawiska prowadzi do tych samych wniosków.



Bardzo podobny opis można stosować np. przy badaniu reakcji chemicznych. Przyjmijmy, że mamy dwa typy molekuł: a i b . Molekuły a powstają w wyniku reakcji autokatalitycznej, tj. reakcja przebiega tym prędzej, im więcej jest molekuł tego typu. Natomiast molekuły a rozpadają się (w reakcji autokatalitycznej) tworząc molekuły b tym prędzej, im więcej jest molekuł b . Prędkość zmian ilości molekuł a można więc przedstawić w postaci

$$\frac{d}{dt} a = \alpha_a a - ab.$$

Natomiast liczba rozpadających się molekuł b jest proporcjonalna do liczby tych molekuł. Załóżmy, że w reakcji produkcji molekuł b , biorą udział dwie molekuły a . Wtedy szybkość zmian liczby molekuł b

$$\frac{d}{dt} b = -\alpha_b b + a^2 \quad (\alpha_b > 0).$$

Przyjmijmy dalej, że molekuły a są znacznie bardziej trwale niż molekuły b , czyli $|\alpha_a| \ll \alpha_b$. Wtedy rozpad molekuł a jest powolny, tworzy się mało molekuł b .

Więc $\frac{db}{dt} \approx 0$ i można zaniedbać tę pochodną. Otrzymujemy zatem

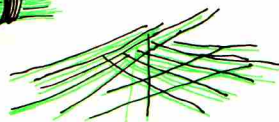
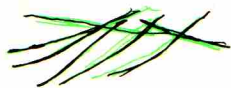
$$\frac{d}{dt} a = \alpha_a a - \frac{1}{\alpha_b} a^3.$$

Jak widać równanie to ma podobną postać do równania lasera. Jego analiza przebiega tak samo. W zależności od znaku α_a mamy albo chaotyczne reakcje, albo też ściśle określony przyrost liczby molekuł a , a co za tym idzie i molekuł b . Liczba molekuł a odgrywa w tym przypadku rolę wielkości porządkującej. Reakcje chemiczne, których opis jest podobny do przedstawionego powyżej, są dosyć skomplikowane. Przykładem może być tzw. reakcja Biełousowa-Żabotyńskiego, w którą wchodzi związek cezu Ce. Związki zawierające jon Ce^{3+} reagują z inną prędkością niż związki zawierające jon Ce^{4+} . Przy określonych stężeniach reagentów obserwuje się rozdzielanie roztworu na warstwy niebieskie, zawierające głównie Ce^{4+} i czerwone, gdzie dominuje Ce^{3+} . Takie rozwarstwienie wskazuje na to, że w roztworze zachodzą procesy prowadzące do pojawienia się struktury makroskopowej typowej dla procesów kooperatywnych.

Podobne rozwiązania, aczkolwiek niekiedy znacznie bardziej złożone, można stosować do opisu układów, których wspólną cechą jest to, że przy pewnych warunkach zewnętrznych zachowują się chaotycznie i niespójnie. Natomiast w innych warunkach następuje bardzo silna korelacja podukładów tak, że zaczynają one „współpracować”, działać spójnie (koherentnie) i „kooperatywnie”. Istotną cechą takich układów, upraszczającą opis matematyczny jest to, że spośród na ogół bardzo wielu zmiennych, jedna (lub kilka) ma porządkującą, niejako nadrzędny charakter. Wymusza ona makroskopowo spójne działanie układu jako całości. Niekiedy nadaje ona nieuporządkowanemu, chaotycznemu przestrzennie układowi wyraźną strukturę przestrzenną, jak ma to np. miejsce w procesie magnesowania — powstawania makroskopowej magnetyzacji w układzie złożonym pierwotnie z wielkiej liczby chaotycznie zorientowanych elementarnych magnesów.

Bardzo ważne są dwie cechy opisu matematycznego układów kooperatywnych. Jedną z nich jest nieliniowość równań. Własnością rozwiązań równań nieliniowych jest to, że niewielkie zmiany parametrów prowadzą nieraz do gwałtownych zmian charakteru tych rozwiązań, co odpowiada gwałtownym zmianom własności układów fizycznych opisywanych przez te równania. Drugą ważną cechą są fluktuacje zawsze występujące w realnych układach fizycznych.

Nową gałęzią nauki, zajmującą się ogólną teorią układów, w których możliwe jest działanie kooperatywne jest synergetyka. Nazwa ta powstała z połączenia greckich słów „wspólne działanie”. Synergetyka zajmuje się więc opisem układów pozornie różnych, ale dających się opisać podobnym formalizmem matematycznym, a więc wykazujących jakościowe podobieństwo. Laser zaś tworzy jeden z najlepiej zbadanych układów wykazujących działanie kooperatywne. Stanowi on więc doskonały model ilustrujący główne zasady, kierunki poszukiwań i możliwości synergetyki. Na podstawie jego zachowań możliwe jest wyciąganie wniosków dotyczących innych układów opisywanych podobnymi równaniami.



Test wcale nie dla uczniów

6. Łatwo obliczyć wartość nieskończonej sumy

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \frac{1}{729} + \dots$$

Oznaczając ją przez S mamy bowiem

$$S = 1 + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \dots \right)$$

i widzimy, że wyrażenie w nawiasie też jest równe S — bo jest sumą odwrotności wszystkich potęg trójki. Mamy zatem równanie

$$S = 1 + \frac{1}{3} \cdot S,$$

skąd natychmiast wyliczymy, że $S = \frac{3}{2}$.

Obliczmy w ten sposób wartość nieskończonej sumy

$$\Sigma = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + \dots$$

Mamy $\Sigma = 1 + 3 \cdot (1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + \dots) = 1 + 3\Sigma$, skąd $\Sigma = -\frac{1}{2}$... Zaraz, zaraz?

Suma potęg trójki ma być równa minus połówce?

Które z tych obliczeń jest poprawne? Pierwsze? Drugie? Żadne? Obydwa? Dlaczego?



Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 271. Rozwiązać równanie

$$(x_1 + x_2 \sqrt{7})^4 + (y_1 + y_2 \sqrt{7})^4 = 2 + \sqrt{7},$$

w zbiorze liczb wymiernych.

Rozwiązanie na str. 13

M 272. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $[(2 + \sqrt{3})^n]$ jest nieparzysta. Symbol $[x]$ oznacza największą z liczb całkowitych nie większych od x .

Rozwiązanie na str. 13

M 273. W kwadracie o boku długości 1 zawarty jest zbiór A o tej własności, że żadna para

punktów tego zbioru nie jest odległa dokładnie o $\frac{1}{100}$. Wykazać, że $S(A) < 0,341$.

Symbol $S(X)$ oznacza pole zbioru X .

Rozwiązanie na str. 13

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

F 99. Gdy prędkość wypływu gazów z dysz rakiety jest mniejsza niż prędkość jej samej, wtedy gazy poruszają się w ślad za rakieta. Czy w takim przypadku prędkość rakiety może wzrastać?

Rozwiązanie na str. 13

F 100. Samoloty A i B lecą obok siebie z prędkością v . Następnie samolot A zwiększa dwukrotnie swoją prędkość. Dla obserwatora na ziemi energia kinetyczna samolotu A wzrosła o

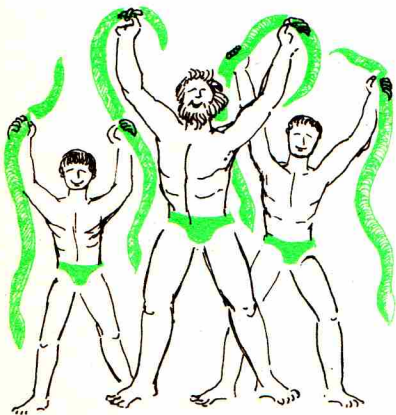
$$\Delta K_1 = \frac{m(2v)^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2} mv^2.$$

Dla pilota samolotu B odpowiedni przyrost energii samolotu A wynosi

$$\Delta K_2 = \frac{mv^2}{2} - 0 = \frac{mv^2}{2}.$$

Ilość spalanego w trakcie przyspieszania paliwa jest w obu układach odniesienia taka sama, zaś skutek zdecydowanie różny. Wyjaśnić paradoks.

Rozwiązanie na str. 13



Test wcale nie dla uczniów 7. Podobną sztuczkę jak w 6. można zastosować do rozwiązywania równań. Jeżeli x spełnia równanie

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

to $x = \sqrt{5x-6}$. Podstawiając za x po prawej stronie znów $\sqrt{5x-6}$ mamy

$$x = \sqrt{5 \sqrt{5x-6} - 6}$$

i tak dalej

$$x = \sqrt{5 \sqrt{5 \sqrt{5 \sqrt{5 \sqrt{5x-6} - 6} - 6} - 6} - 6}.$$

Aby otrzymać rozwiązanie naszego równania, możemy wystartować z dowolnego x i obliczać kolejno $\sqrt{5x-6}$, $\sqrt{5 \sqrt{5x-6} - 6}$, ... — w granicy dostaniemy ... Sprawdźmy „empirycznie”, co. Zaczniemy od $x = 4$. Za pomocą kalkulatora lub tablic pierwiastków otrzymujemy ciąg 4, 3,7417, 3,5648, 3,4382, 3,3456, dwudziesty piąty wyraz tego ciągu wynosi 3,0059. Nie mamy wątpliwości, że granicą jest 3 — pierwiastek naszego równania. Jeżeli zaczniemy od $x = 2,5$ też dojdziemy w granicy do 3. Nawet 2,1 daje kolejno: $\sqrt{5 \cdot 2,1 - 6} = 2,1213$, $\sqrt{5 \cdot 2,1213 - 6} = 2,1462$ następnym wyrazem jest 2,1752 a dwudziesty piąty wyraz = 2,94. Zbieżność do 3 jest oczywista. Możemy zacząć nawet od tak dużej liczby jak 589. Po dwudziestym piątym kroku otrzymamy 3,0209. Zaczynamy od liczb mniejszych niż 2, np. 1,9. Ciąg wychodzi taki: $\sqrt{5 \cdot 1,9 - 6} = 1,8708$ i dalej 1,8314, 1,7768, 1,6983, 1,5784, 1,3756, 0,9369 i następna liczba podpierwiastkowa $5 \cdot 0,9369 - 6$ jest ujemna.

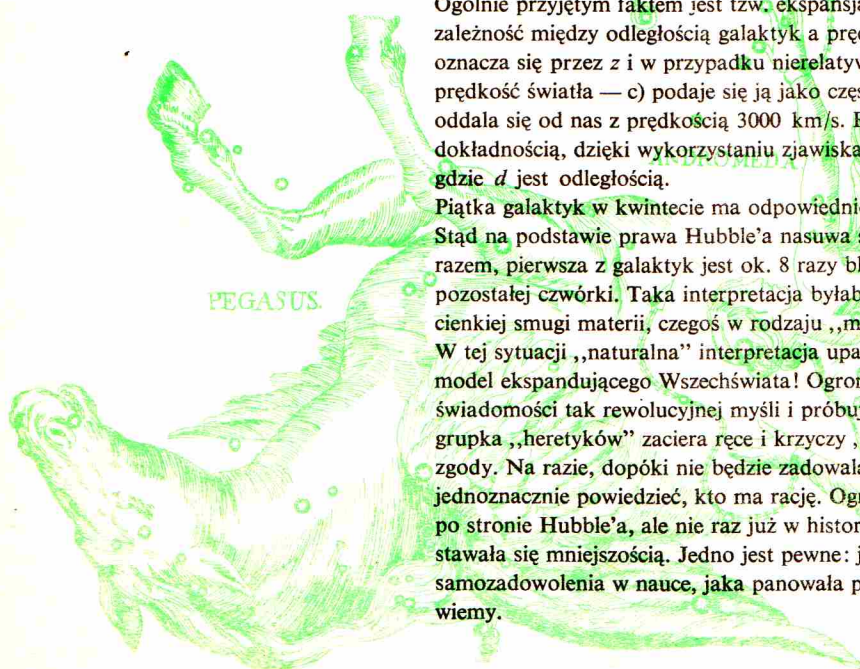
Kiedy dojdziemy do drugiego z pierwiastków równania, — ?? Odpowiedź jest widoczna: tylko wtedy gdy początkową wartością będzie 2. Może ta metoda jest zupełnie zła tak jak z tą Σ z poprzedniego punktu? No, nie, przecież *jeden* z pierwiastków w końcu dostaliśmy. Ale dlaczego *ten*, a nie akurat drugi? Czy 2 jest gorsze niż 3 dla równania $x^2 - 5x + 6 = 0$? Dla wyższych potęg zbieżność ciągu przybliżeń do rozwiązania jest szybsza. Jeśli macie pod ręką kalkulator, to przekonajcie się o tym szukając pierwiastka równania $x^5 - 4x - 2 = 0$. Zaczniście od pierwszego przybliżenia $x = 1,5$.

Patrz w niebo

Wrzesień jest w Polsce jednym z najwdzięczniejszych miesięcy do prowadzenia obserwacji astronomicznych. Noce nareszcie są dłuższe, jest jeszcze dość ciepło i pogoda przeważnie dopisuje. Wieczorem najprędzej rzuca się w oczy charakterystyczny „krzywy” prostokąt, którego 3 wierzchołki należą do gwiazdozbioru Pegaza (*Peg*), a jeden, północno-wschodni do Andromedy (*And*).

W okolicy głowy Pegaza, mniej więcej na linii łączącej środek czworoboku i gwiazdę Deneb z gwiazdozbioru Łabędzia odkryto małą, widoczną tylko przez największe teleskopy, grupę galaktyk, którą nazwano „Kwintet Stephana”. Ta niepozorna piątka, razem z kilkoma innymi, później odkrytymi grupkami, spędza od dziesięcioleci sen z oczu astronomów-kosmologów. Ogólnie przyjętym faktem jest tzw. ekspansja Wszechświata. E. Hubble odkrył w 1922 roku zależność między odległością galaktyk a prędkością ich oddalania się. Prędkość tę najczęściej oznacza się przez z i w przypadku nierelatywistycznym (tzn. kiedy jest ona dużo mniejsza niż prędkość światła — c) podaje się ją jako część $z = v/c$. Np. $z = 0,01$ oznacza, że galaktyka oddala się od nas z prędkością 3000 km/s. Parametr ten jest dość łatwy do zmierzenia z dużą dokładnością, dzięki wykorzystaniu zjawiska Dopplera. A więc Hubble odkrył zależność $z \sim d$, gdzie d jest odległością.

Piątka galaktyk w kwintecie ma odpowiednio z równe 0,0025, 0,0203, 0,0200, 0,0167 i 0,0201. Stąd na podstawie prawa Hubble’a nasuwa się oczywisty wniosek, że ta piątka nie trzyma się razem, pierwsza z galaktyk jest ok. 8 razy bliżej i tylko przez przypadek występuje na tle pozostałej czwórki. Taka interpretacja byłaby najbardziej naturalna, gdyby nie odkryto ... cienkiej smugi materii, czegoś w rodzaju „mostu”, łączącego „bliską” galaktykę z „dalszymi”. W tej sytuacji „naturalna” interpretacja upada, co więcej, być może, podważony zostaje cały model ekspandującego Wszechświata! Ogromna większość astronomów nie dopuszcza do świadomości tak rewolucyjnej myśli i próbuje rozwiązać tę zagadkę innymi sposobami. Mała grupka „heretyków” zaciera ręce i krzyczy „A mówiliśmy, że Hubble nie miał racji!”. Nie ma zgody. Na razie, dopóki nie będzie zadowalającego wytłumaczenia tego problemu, nie można jednoznacznie powiedzieć, kto ma rację. Ogromna większość astronomów (i argumentów) jest po stronie Hubble’a, ale nie raz już w historii się zdarzało, że większość po pewnym czasie stawała się mniejszością. Jedno jest pewne: jesteśmy jeszcze daleko od powtórzenia się atmosfery samozadowolenia w nauce, jaka panowała pod koniec XIX wieku. Zdecydowanie bardzo mało wiemy.



mgr Tomasz CHLEBOWSKI

8. Jeżeli $x < 100$, to również $x \leq 100$. To oczywiście tak samo jak i to, że implikacja odwrotna

$$x \leq a \Rightarrow x < a$$

nie jest prawdziwa. Spójrzmy więc na definicję granicy ciągu

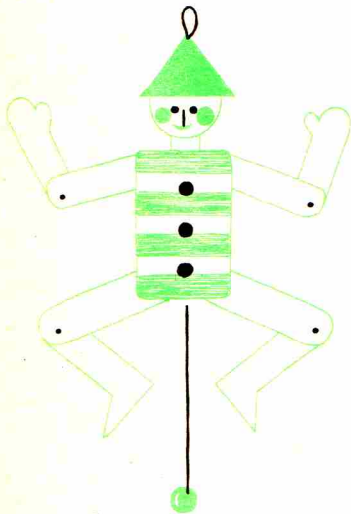
$$\lim a_n = g \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_N \bigwedge_{n > N} |a_n - g| < \varepsilon,$$

a następnie zastąpmy warunek po prawej stronie przez łatwiejszy do spełnienia

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_N \bigwedge_{n > N} |a_n - g| \leq \varepsilon.$$

Jeśli $|a_n - g| < \varepsilon$, to także $|a_n - g| \leq \varepsilon$, ale nie na odwrót. Powinny więc istnieć ciągi a_n spełniające dla pewnej liczby g warunek drugi (ten z nieostrą nierównością), a nie spełniające pierwszego. Czy potrafisz taki ciąg wymyślić?

Modele



Projekty nowych konstrukcji samolotów czy statków są przed realizacją badane na zmniejszonych modelach — to łatwiejsze niż rozwiązywanie równań. Nie wystarczy jednak podobieństwo geometryczne, by na podstawie przepływu powietrza czy wody wokół modelu określić przepływ wokół konstrukcji naturalnej wielkości.

Warunki jakie muszą być spełnione można odgadnąć analizując wymiary wielkości fizycznych występujących w tym problemie. Wielkość obiektu może być określona przez podanie dowolnego rozmiaru D , na przykład rozpiętości skrzydeł. Podobnie prędkości można mierzyć w jednostkach równych prędkości powietrza w tunelu aerodynamicznym V . Do opisu ośrodka, jeśli jest nieściśliwy, potrzebne są dwie wielkości: gęstość ρ i lepkość η .

Kiedy w równaniach różniczkowych opisujących przepływ wyrazimy prędkości, współrzędne i czas w jednostkach odpowiednio D , V i D/V , to parametry tych równań będą bezwymiarowe. Tak więc kształty linii prądu są takie same, jeśli tylko wielkości bezwymiarowe, które da się utworzyć z D , V , ρ , η , mają dla modelu i konstrukcji te same wartości. Łatwo pokazać, że istnieje tylko jedna taka wielkość

$$Re = D \cdot V^a \rho^b \eta^c [m^{a-2b-c} s^{-a-c} kg^{b+c}] = \frac{D \cdot V \cdot \rho}{\eta}$$

zwana liczbą Reynoldsa. Przepływy są więc takie same, jeśli liczby Reynoldsa są równe. Kiedy, na przykład, model jest wykonany w skali 1:5 to prędkość powietrza w tunelu aerodynamicznym musi być pięciokrotnie większa albo trzeba użyć gazu, dla którego ρ/η jest pięciokrotnie większa.

W praktyce najczęściej mierzy się siłę nośną skrzydła albo siły działające na poszczególne części modelu. Jak, stosując argumenty wymiarowe, na podstawie wyników takich pomiarów obliczyć siły działające w rzeczywistości?

Dla dużych prędkości V istotna staje się ściślność ośrodka którą określa się zwykle przez podanie prędkości dźwięku w ośrodku v . Można wtedy utworzyć jeszcze jedną wielkość bezwymiarową V/v , zwaną liczbą Macha. W tym przypadku kształty linii prądu są podobne, jeśli zarówno liczba Reynoldsa jak i liczba Macha dla modelu i obiektu są takie same.

Test wcale nie dla uczniów 9. Jeżeli x dodam do siebie x razy, otrzymam x^2

$$x+x+\dots+x=x^2$$

Zrózniczkujemy obie strony

$$\frac{d}{dx}(x+x+\dots+x) = \frac{dx^2}{dx};$$

czyli

$$\frac{dx}{dx} + \frac{dx}{dx} + \dots + \frac{dx}{dx} = 2x,$$

$$x = 2x,$$

$$1 = 2.$$



Rozwiązanie zadania F99

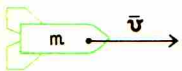
Natychmiastową odpowiedź uzyskuje się przechodząc do układu odniesienia związanego z rakietą. Reakcja wypływającego strumienia gazów jest przyczyną nieinercyjności tego układu i musi następować wzrost prędkości rakiety w każdym innym układzie odniesienia, względem którego porusza się ona „ku przodowi”. Do tego samego wyniku można dojść na drodze bardziej precyzyjnych rozważań. Rozważmy sytuację przed i po wyrzuceniu niewielkiej masy gazów (dm) z prędkością u względem rakiety. Stany te, względem pewnego inercyjnego układu odniesienia przedstawia rysunek. Z zasady zachowania pędu w kierunku x wynika:

$$mv_x = (m-dm)(v_x + dv_x) + dm(v_x + u_x).$$

Po wykonaniu działań algebraicznych mamy:

$$dv_x = -\frac{dm}{m}u_x.$$

Ale $u_x < 0$, stąd $dv_x > 0$, co oznacza wzrost v_x .



Przed wyrzuceniem gazów



Po wyrzuceniu porcji gazów o masie dm .



W układzie odniesienia rakiety



Rozwiązanie zadania M 271.

Zauważmy, że jeżeli a_1, a_2, b_1, b_2 są wymierne to z równości $a_1 + a_2 \sqrt{7} = b_1 + b_2 \sqrt{7}$ wynika, że $a_1 - b_1 = -(a_2 - b_2) \sqrt{7}$, co wobec niewymierności $\sqrt{7}$ jest możliwe tylko wtedy, gdy $a_1 = b_1$ i $a_2 = b_2$. Tak więc liczba a postaci $a_1 + a_2 \sqrt{7}$ wyznacza jednoznacznie swoją „część wymierną” a_1 i „część niewymierną” $a_2 \sqrt{7}$. Przyporządkowanie liczbie a liczby $\bar{a} = a_1 - a_2 \sqrt{7}$ jest więc wzajemnie jednoznaczne, a ponadto $a + \bar{a} = a_1 + b_1$ oraz $a\bar{a} = (a_1 - a_2 \sqrt{7})(b_1 - b_2 \sqrt{7}) = (a_1 b_1 + 4a_2 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1) \sqrt{7} = ab$. Wynika stąd, że jeżeli $x = x_1 + x_2 \sqrt{7}, y = y_1 + y_2 \sqrt{7}$ są rozwiązaniami naszego równania to $(x)^+ + (y)^+ = 2 + y \sqrt{7} = 2 - y \sqrt{7} < 0$, co nie jest prawdą. Równanie nasze nie ma więc rozwiązań.



Rozwiązanie zadania M 272

Jeżeli dla liczby $z = a + b \sqrt{3}$ (a, b — całkowite) przez z oznaczymy liczbę $\bar{z} = a - b \sqrt{3}$, to $z + \bar{z}$ będzie zawsze liczbą parzystą oraz (por. rozwiązanie zadania M 271)

$$(z + \bar{z})^n = (2 - 1 \sqrt{3})^n$$

Teza zadania wynika teraz z nierówności

$$(2 + 1 \sqrt{3})^n < (2 + 1 \sqrt{3})^n + (2 - 1 \sqrt{3})^n < (2 + 1 \sqrt{3})^n + 1.$$



Rozwiązanie zadania F 100

Sformułowanie zadania sugeruje, że paradoks pojawia się, gdy skorzysta się z zasady zachowania energii zapisanej — w postaci:

$$\Delta U + \Delta K = 0$$

gdzie: ΔU — zmiana energii wewnętrznej paliwa (ściślej pewna jej część determinowana przez praktyczną sprawność silników)

ΔK — zmiana energii kinetycznej samolotu

(Dla uproszczenia zamedbują się opory ruchu). Powyższa postać zasady zachowania obowiązuje dla układów izolowanych, podczas gdy samolot A takim układem nie jest. Zaponiadałoby jeszcze o Ziemi, która „przejmie” część energii kinetycznej w trakcie przyspieszania samolotu. Poprawny zapis wyżej wymienionej zasady zachowania jest następujący:

$$\Delta U + \Delta K_A + \Delta K_Z = 0.$$

Indeksy: „ A ” oraz „ Z ” dotyczą odpowiednio — samolotu i Ziemi. Wyraz: ΔK_Z zależy od układu odniesienia, względem którego obliczane są zmiany energii, w układzie związanym z Ziemią jest on pomijalnie mały, w układzie samolotu B znaczny, wyznaczający tyle ile „zginęła” energia — mv^2 .

Oczywiście wybór sił wewnętrznych w skład układu jest dowolny. Gdy uźmą się za stosowne potraktować jako układ samolot A , wtedy jest to układ poddany działaniu sił zewnętrznych, których wypadkową nazywa się zwykle „siłą napędową”. Jej praca zmienia energię kinetyczną samolotu. Praca ta musi zależeć od układu odniesienia — nie więc dziwnego, iż zmiany energii kinetycznej mogą być różne. Zatem i w tym szczególnym sensie — paradoksalnie.



Rozwiązanie zadania M 273.

Oznaczmy przez A_1 i A_2 obrazy A przy przesunięciach odpowiednio o wektor v_1 i v_2 ,

przy czym $|v_1| = |v_2| = \frac{1}{100}$ i $\angle(v_1, v_2) = 60^\circ$, a wektor v_2 jest równoległy do jednego z boków kwadratu.

Zauważmy, że gdyby $x \in A_1 \cap A_2$, to $x - v_1 \in A$,

przy czym $q(x, x - v_1) = \frac{1}{100}$ wbrew założeniu, a więc $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Podobnie pokazujemy, że $A_2 \cap A = \emptyset$.

Gdyby wreszcie $y \in A_1 \cap A_2$, to $y - v_1 \in A$,

$y - v_2 \in A$ oraz $q(y - v_1, y - v_2) = |v_1 - v_2| = \frac{1}{100}$ wbrew założeniu. Tak więc A, A_1, A_2

są parami rozłączne i, jak łatwo sprawdzić, leżą w kwadracie o boku $1 + \frac{1}{100}$.

Mamy więc $\mathcal{L}(A) \leq \left(1 + \frac{1}{100}\right)^2$ i wobec tego $\mathcal{L}(A) < 0,341$.

10. Doc. dr Lech Kubik przedstawił następujący przykład. 230 osób poddano leczeniu pewnym lekiem *A*. Istotna poprawa nastąpiła u 65 osób. Innym 160 osobom podano lek *B*, uzyskując poprawę u 60 pacjentów. Który lek jest lepszy: *A* czy *B*? No i co tu takiego? Wystarczy obliczyć procenty: $65:230 = 0,28$, $60:160 = 0,38$ i jasno widać, że jakkolwiek skuteczność obu leków pozostawia wiele do życzenia, to drugi jest wyraźnie lepszy — o 10%. I dobrze. Zainteresowano się jednak skutecznością leków *A* i *B* oddzielnie dla kobiet i mężczyzn. Oto odpowiednia statystyka

lek <i>A</i>	leczeni	poprawa	skuteczność leczenia
mężczyzn	210	50	0,24
kobiet	20	15	0,75
ogółem	230	65	0,28

lek <i>B</i>	leczeni	poprawa	skuteczność leczenia
mężczyzn	100	20	0,20 (mniejsza niż <i>A</i>)
kobiet	60	40	0,67 (mniejsza niż <i>A</i>)
ogółem	160	60	0,38 (większa niż w <i>A</i>)

Co widzimy? Choć zarówno dla kobiet jak i dla mężczyzn lek *A* jest lepszy to ogólnie jest gorszy. Kto to zrozumie? A może statystyka kłamie? Ale w którą stronę?

Wybór czy determinacja, czyli nie ufajmy intuicjom

Dr Andrzej PELC

Czego wymagamy przede wszystkim od systemu aksjomatów teorii matematycznej? Oczywiście, żeby nie był wewnętrznie sprzeczny! O tym jednak trudno się zwykle przekonać patrząc na same sformułowania pewników. Aby zmniejszyć ryzyko sprzeczności staramy się na ogół o to, by aksjomaty były „intuicyjnie prawdziwe”. Mając więc — w wyniku długiej praktyki matematycznej — pewne wycucie tego, czym są zbiory, próbujemy zapisać w aksjomatyce teorii mnogości istotne własności tych obiektów i ufamy, że zbudowany w ten sposób system jest niesprzeczny, opisuje bowiem zbiory takimi, jakie są „naprawdę”. Innymi słowy, wierzymy w niesprzeczność własnych intuicji. Wiara ta powodowała wielokrotnie, że matematycy po pewnym czasie pracy z taką „intuicyjnie murowaną” aksjomatyką, stwierdzali z przerażeniem, że doszli do sprzeczności. Chodzi tu o tzw. antynomie teorii mnogości z najsłynniejszym paradoksem Russella na czele. Szczęśliwie zostały one wyeliminowane przez sprecyzowanie aksjomatów: czy jednak nie wyskoczą sprzeczności nowe? My zaś chcemy dziś zaproponować Czytelnikom test na intuicję matematyczną. Sprawdźmy, jak dalece czujemy, czym są zbiory.

Paradoks Russella. Rozważmy zbiór *X* złożony ze zbiorów, które nie są swoim własnym elementem. Czy $X \in X$? W wersji „popularnej”: fryzjer w miasteczku goli tych wszystkich mężczyzn, którzy nie golą się sami. Czy goli on sam siebie?

Pierwszy aksjomat, który pragniemy poddać pod rozwagę to tak zwany aksjomat wyboru. Powiada on, że dla każdej rodziny zbiorów niepustych i parami rozłącznych istnieje zbiór *S* zwany *sektorem*, który zawiera dokładnie jeden element wspólny z każdym zbiorem rozważanej rodziny. Robiąc zakupy w sklepie ze słodyczami można przecież utworzyć selektor ze zbioru gatunków czekolady, kładąc do koszyka po jednej tabliczce z każdego rodzaju (artykuł był pisany w 1979 r., red.). Dla rodzin nieskończonych trudno podać taki handlowy przykład, ale... z pewnością jest tam podobnie, prawda?

Znakomicie, rozważmy więc inny, bardziej „rozrywkowy” aksjomat, tzw. aksjomat determinacji. Mówi on o grach...

Dwaj gracze: I i II wybierają kolejno liczby naturalne. Przed rozpoczęciem gry partnerzy ustalili pewien zbiór A nieskończonych ciągów o wyrazach naturalnych. Partia w grze G_A (zależnej od zbioru A) liczy nieskończenie wiele ruchów, a w jej wyniku powstaje ciąg liczb naturalnych. Jeżeli należy on do wyróżnionego zbioru ciągów A , wygrał gracz I, jeśli nie — wygrał II. Powiemy, że gracz I ma strategię zwycięską, jeśli istnieje funkcja f określona na skończonych ciągach liczb naturalnych o tej własności, że jeśli w każdym ruchu, w pozycji $a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_n b_n$ gracz I zagra $f(a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n)$, to wygra niezależnie od dalszych ruchów partnera. Analogicznie określamy strategię zwycięską dla gracza II. Aksjomat determinacji mówi, że dla każdego zbioru A któryś z graczy ma strategię zwycięską w grze G_A . Czy to jest zgodne z intuicją? Pomyślmy: jeżeli mój partner nie ma pewnego sposobu, żeby ze mną wygrać (bo tym w istocie rzeczy jest strategia zwycięska) to ja, grając dobrze na pewno go pokonam, skoro przepisy gry nie dopuszczają remisów. A więc, chyba „prawdziwy” aksjomat...?

Dowód sprzeczności aksjomatu wyboru z aksjomatem determinacji można znaleźć np. w książce W. Guzicki, P. Zbierski „Podstawy teorii mnogości”.

Odsłońmy karty: ci, co uwierzyli i w wybór i w determinację nabrali się. System zawierający oba te aksjomaty (i inne, powszechnie przyjmowane i na ogół nie budzące kontrowersji) jest sprzeczny! Czyli — intuicja kłamała. Pytanie, który aksjomat jest zły? Trudno to rozstrzygnąć, zwłaszcza jeśli ktoś przed chwilą gotów był przyjąć obydwa. W takiej sytuacji dobrze jest przyjrzeć się konsekwencjom obu tych „wrogich sobie” pewników. Może wówczas zdecydujemy się na któryś z nich.

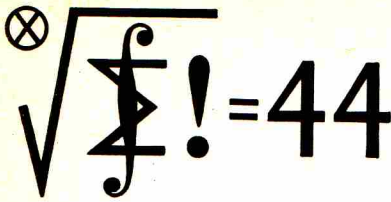
W teorii mnogości z aksjomatem wyboru można udowodnić następujące, przynajmniej dość paradoksalne, **twierdzenie Banacha i Tarskiego**: istnieje rozbicie kuli o promieniu 1 na skończoną ilość takich rozłącznych kawałków, że przesuając i sklejkając pewne z nich otrzymamy jedną kulę o promieniu 1 a przesuując i sklejkając pozostałe — inną kulę, też o promieniu 1. A więc z jednej kuli dwie takie same — każdy przyzna, że to niemożliwe. Ale nie uznając paradoksu Banacha i Tarskiego musimy odrzucić aksjomat wyboru, a wydawał się tak intuicyjny.

Przyjrzyjmy się z kolei aksjomatowi determinacji. Jego ważny i spory „kawałek” jest wręcz twierdzeniem teorii mnogości, tzn. jest „na pewno” prawdziwy. Precyzyjnie: jest konsekwencją innych, powszechnie uznawanych aksjomatów. Chodzi mianowicie o tzw. determinację borelowską, która orzeka, że któryś z graczy ma strategię zwycięską w grze G_A , jeśli tylko zbiór A jest borelowski (tzn. ma odpowiednio regularną budowę). Może więc przyjąć aksjomat determinacji? Ale wtedy trzeba się pogodzić z tak samo dziwnymi jak paradoksalny rozkład kuli konsekwencjami — choć dotyczą one bardziej skomplikowanych obiektów. Przykładem niech będzie wynikający z aksjomatu determinacji fakt, że każdy zbiór liczb rzeczywistych jest mierzalny w sensie Lebesgue’a. Z drugiej strony, przyjęcie każdego z rozważanych pewników ma swoje zdecydowane zalety. Z aksjomatu wyboru wynika szereg ważnych dla całej matematyki faktów: twierdzenie Tichonowa mówiące, że iloczyn kartezjański przestrzeni zwartych jest zwarty, twierdzenie o istnieniu bazy w każdej przestrzeni liniowej i wiele innych. Zaletą aksjomatu determinacji jest zaś np. to, że wyklucza on paradoks Banacha i Tarskiego.

Który aksjomat jest „lepszy”, rozstrzygnąć nie sposób. Obu naraz przyjąć nie wolno, można — według osobistych upodobań — uznać jeden z nich lub nie zgodzić się na żaden. W ostatnim jednak przypadku znacznie zmniejszy się siła dowodowa zubożonej w ten sposób teorii mnogości.



Niezależnie zaś od decyzji „wybór czy determinacja” powyższe przykłady zdołały chyba przekonać Czytelnika, że intuicje bywają w matematyce zawodne i nie zawsze obejmują wszystkie konsekwencje rozważanych faktów.



Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delta”

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Regulamin

1. Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego oraz Redakcja miesięcznika „Delta” ogłaszają konkurs — ligę zadaniową pod nazwą **Klub 44**.
2. Liga ma charakter ciągły. Zadania konkursowe będą ogłaszane w miesięczniku „Delta”, po 3 zadania w każdym numerze, z dwumiesięczną przerwą (nr nr 6 i 7 każdego roku).
3. Uczestnikiem ligi może być każdy.
4. Uczestnictwo w lidze polega na rozwiązywaniu zadań konkursowych i przesyłaniu opracowanych rozwiązań na adres redakcji „Delta”. Aby zostać uczestnikiem, wystarczy przysłać rozwiązanie choćby jednego zadania.
5. Moment przystąpienia do ligi można wybrać dowolnie. Nie ma konieczności rozwiązywania zadań z każdego miesiąca.
6. Rozwiązania zadań z numeru n należy nadsyłać do końca miesiąca $n+2$ (dodawanie *modulo* 12, np. termin nadsyłania zadań z nr 11/1981 upływa 31 stycznia 1982). W numerze $n+4$ podane będą szkicowe rozwiązania.
7. Rozwiązanie każdego zadania powinno być pisane na oddzielnym arkuszu papieru i podpisane. Uczniowie proszeni są o podanie klasy, studenci — roku i uczelni. Na kopercie prosimy umieszczać dopisek: Klub 44.
8. Prace powinny być samodzielne. Serie rozwiązań jednobrzmiących nie będą brane pod uwagę.
9. Rozwiązanie każdego zadania będzie oceniane w skali ocen od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Przy ocenie będzie brana pod uwagę nie tylko poprawność logiczna i rachunkowa, lecz także pomysłowość metody i elegancja rozwiązania.
10. Każde zadanie otrzyma współczynnik trudności ustalany po upływie terminu nadsyłania rozwiązań. Współczynnik ten będzie liczbą pomiędzy 1 a 4 ustaloną według następującej zasady: jeżeli N oznacza liczbę osób które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru, a S oznacza sumę ocen uzyskanych przez wszystkich uczestników za dane zadanie, wówczas otrzymuje ono współczynnik trudności

$$WT = 4 - 3 \frac{S}{N}.$$

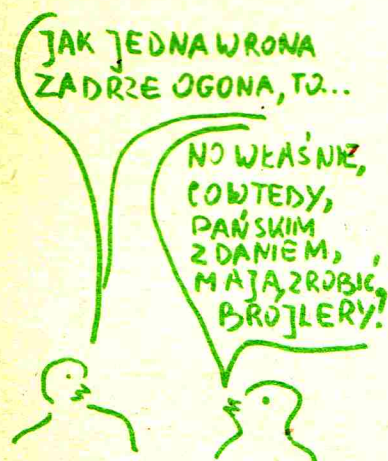
Za nadesłane rozwiązanie uczestnik otrzyma w punktacji ligowej liczbę punktów równą iloczynowi uzyskanej oceny przez współczynnik trudności (z zaokrągleniem do dwóch miejsc po przecinku).

11. Punkty zdobyte przez każdego uczestnika za rozwiązania poszczególnych zadań (obliczone według podanej wyżej zasady) będą sumowane. Z chwilą osiągnięcia łącznej sumy 44 punktów uczestnik staje się **członkiem Klubu 44**.
12. Po zgromadzeniu 44 punktów (i zostaniu członkiem Klubu 44) można w dalszym ciągu brać udział w konkursie ligowym. Nadwyżka punktów ponad wartość 44 zostaje zaliczona na poczet ponownego uczestnictwa w lidze.
13. Trzykrotne uzyskanie członkostwa Klubu 44 daje tytuł **Weterana Klubu 44**.
14. Czołówka listy ligowej będzie systematycznie ogłaszana w miesięczniku „Delta” począwszy od numeru 3/1982.
15. Członkowie Klubu 44 będą zapraszani na spotkania Klubu 44, które będą organizowane w Warszawie raz do roku.
16. Organizatorzy zastrzegają sobie wyłączne prawo interpretacji i możliwość zmian Regulaminu.

Wydział MIM UW
Redakcja „Delta”



Z niepowodzeń gniew wyrasta
 Chłód panuje w sercach smutnych
 Stąd się bierze dziwna kasta
 Ludzi zimnych i okrutnych
 Małe cele czynią błazna
 Czar sukcesu go rozpiera
 Z niepowodzeń gniew wyrasta
 Szukaj szczęścia w małych celach
 Nim podejmiesz ciężar jarzma
 Bacz byś nie brał nazbyt wiele
 Z niepowodzeń gniew wyrasta
 Czynią błazna małe cele



Ilekród wrzenie rewolucyjne zaczyna
 ogarniać którąkolwiek z wyżej odeń
 stojących warstw społeczeństwa, .
 proletariat wchodzi z nią w związek
 i w ten sposób dzieli wszystkie
 porażki, ponoszone kolejno
 przez wszystkie partie.

Karol MARKS

Zmagania ligowe rozpoczęte! Oczekujemy liczego udziału naszych miłych Czytelników. Mamy nadzieję, że nasze zadania będą dostarczać zajmującej rozrywki.

Regulamin ligi podaliśmy wyżej. Należy się teraz kilka słów komentarza.

Zgodnie z regulaminem nie wymaga się od uczestników spełnienia żadnych warunków wstępnych — każdy może startować. Nie ukrywamy jednak, że najbardziej liczymy na udział młodzieży szkolnej.

Sukcesy w lidze nie dają korzyści materialnych. Nie przewidujemy nagród pieniężnych ani rzeczowych, nie dajemy ulg w rekrutacji na studia, oferujemy jedynie satysfakcję członkostwa Klubu 44. Główną nagrodą ma być przyjemność płynąca z gimnastyki umysłowej. Mamy ambicję propagować piękną, choć ostatnio mało popularną, ideę czystego amatorstwa w sporcie. Nie zamierzamy stanowić konkurencji dla Olimpiady Matematycznej. O ile rozrywki Olimpiady Matematycznej można przyrównać do wielkich wyścigów lub rajdów samochodowych, o tyle nasza liga ma raczej przypominać zdobywanie odznak turystycznych (GOT itp.): żadnej rekordomanii, punkty można zbierać szybko lub powoli, wytrwale lub nie, można włączać się do ligi w dowolnym momencie, a także robić dowolnie długie przerwy.

Jakiego rodzaju będą zadania? Przede wszystkim — elementarne, tj. nie wykraczające zasadniczo poza zakres matematyki szkolnej. Przewidujemy dużą różnorodność, obecność zadań „nietypowych”, odbiegających od standardów podręcznikowych, a także zadania typu zagadki — łamigłówek. Czasami polecenie zadania będzie nie w pełni zdeterminowane (np.: podane twierdzenie nieprawdziwe; polecenie — wzmocnić założenia tak, by twierdzenie stało się prawdziwe; ocena będzie tym wyższa, im lepszy i ładniejszy wynik zawierać będzie rozwiązanie). Zadania będą dość znacznie różnić się trudnością; wprowadzamy więc współczynniki trudności. Doświadczenia uczą, że ustalanie stopnia trudności *a priori* często bywa zawodne i nazbyt subiektywne — nie zawsze można trafnie przewidzieć, co okaże się trudne, a co łatwe. Dlatego

decydujemy się na formułę $WT = 4 - 3 \frac{S}{N}$ uzależniającą współczynnik trudności od wstępnych

ocen za rozwiązania. Stosunek $x = \frac{S}{N}$ jest liczbą z przedziału $\langle 0,1 \rangle$ i przyjmuje wartość 0 gdy

nikt nie nadesłał rozwiązania poprawnego choćby częściowo, zaś wartość 1 gdy wszyscy uczestnicy podadzą rozwiązania bezbłędne. Funkcja $y = 4 - 3x$ odwzorowuje przedział $\langle 0,1 \rangle$ na przedział $\langle 1,4 \rangle$ w sposób liniowy, tak więc największy możliwy współczynnik trudności równa się 4 (nikt zadania nie rozwiązał), a najmniejszy 1 (wszyscy rozwiązali).

Jeśli, dajmy na to, czyjeś rozwiązanie zostało ocenione na 0,8 (rozwiązanie poprawne ale z usterkami), a zadanie otrzymało współczynnik trudności $WT = 2,3$, wówczas uczestnik zdobywa w naszej klasyfikacji $0,8 \cdot 2,3 = 1,84$ pkt.

Zgodnie z obietnicą regulaminu będziemy przedstawiali szkicowe rozwiązania zadań. Mamy jednak nadzieję, że rozwiązania przysłane przez uczestników ligi często będą ładniejsze, bardziej pomysłowe lub ogólniejsze od rozwiązań nam znanych. Toteż do niektórych zadań będziemy jeszcze wracać, a najciekawsze rozwiązania będziemy po adaptacji drukować.

Zwracamy się też do Czytelników z apelem o nadsyłanie propozycji zadań. Te, które uzyskają naszą aprobatę, wykorzystamy w lidze podając nazwisko autora. Przy wszystkich pozostałych zadaniach ligowych (nie pochodzących z korespondencji naszych Czytelników) nie będziemy podawać źródła.

Mile będą widziane także wszelkie listy z uwagami na temat ligi zadaniowej; prosimy umieszczać na kopercie dopisek: Klub 44.

Czekamy teraz na korespondencję, na pierwsze rozwiązania zadań, na ukształtowanie „tabeli ligowej”, wreszcie na moment, gdy Klub 44 stanie się zbiorem nieupstym.

Organizatorzy

Zadania 1, 2, 3

termin nadsyłania: do 30.11.1981

1. Udowodnić, że żadna suma częściowa szeregu harmonicznego $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$

(gdzie $n \geq 2$) nie jest liczbą całkowitą.

2. Na płaszczyźnie dane są punkty A i B oraz jeszcze pewien skończony zbiór punktów Z . Rozpatrujemy wszystkie linie łamane o początku A , końcu B , o wierzchołkach w punktach zbioru Z , nie omijające żadnego z tych punktów. Udowodnić lub obalić twierdzenie: najkrótszą spośród rozpatrywanych łamanych jest ta, która jest „najmniej kręta”, tzn. dla której suma kątów (wewnętrznych) przy wierzchołkach jest największa.

3. Obliczyć największą możliwą objętość bryły obrotowej powstałej przez obrót trójkąta o obwodzie 1 wokół prostej leżącej w płaszczyźnie tego trójkąta, przechodzącej przez jeden z jego wierzchołków i nie przechodzącej przez jego punkty wewnętrzne.

