

SPIS TREŚCI

NUMERU 5 (89)

Nieco historii matematyki w wykładzie algebry <i>Prof. dr Stanisław Balcerzyk, dr Michał Szurek</i>	str. 1
Czego nie wiemy o neutrinach (II) <i>Mgr Roman Juszkiewicz</i>	str. 5
Zadania	str. 6
Spójność światła <i>Doc. dr Andrzej Kujawski, dr Jan Mostowski</i>	str. 7
Mała Delta	str. 10
Pierwszy Rentgen Łabędzia <i>Mgr Włodzimierz Kluźniak</i>	str. 13
Patrz w niebo	str. 15
Matematyczne poezje	str. 16

„Delta”
matematyczno-fizyczno-astronomiczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny:

doc. dr Jerzy Bartke
doc. dr Andrzej Bączyński
doc. dr Bolesław Gleichgewicht
prof. dr Kazimierz Goebel
doc. dr Bolesław Grabowski
dr Jan Hanasz
doc. dr Bolesław Iwaszkiewicz
doc. dr Tadeusz Iwiński
doc. dr Andrzej Januszajtis
doc. dr Tadeusz Jarzębowski
prof. dr Leon Jeśmanowicz
dr Henryk Kaczorek
prof. dr Marek Kuczma
mgr Andrzej Mąkowski
prof. dr Bohdan Paczyński
prof. dr Zdzisław Pawlak
prof. dr Arkadiusz Piekara
doc. dr Sławomir Ruciński
prof. dr Konrad Rudnicki
prof. dr Zbigniew Semadeni
doc. dr Grzegorz Sitarski

prof. dr Józef Smak
prof. dr Jan Stankowski
doc. dr Kazimierz Stępień
prof. dr Mieczysław Subotowicz
doc. dr Stefan Turnau
prof. dr Jerzy Wdowczyk
doc. dr Andrzej Woszczyk
prof. dr Janusz Zakrzewski —
wiceprzewodniczący
prof. dr Wojciech Żakowski —
przewodniczący

Redaguje Kolegium w składzie:
mgr Tomasz Chlebowski
mgr Maciej Jędrzejczak
dr Marek Kordos — red. nac.
dr inż. arch. Jacek Mazur — ilustracje
dr Krzysztof Prażmowski — red. techn. graf.
dr Michał Szurek
mgr Krystyna Szypcio — sekr. red.
doc. dr Michał Święcki — z-ca red. nac.

Adres Redakcji
ul. Hoża 69 pok. 151,
00-681 Warszawa

Zakład Narodowy im.
Ossolińskich — Wydawnictwo
Wrocław, Oddział w Warszawie
Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.
wyd.; 2,50 ark. druk.;
papier offsetowy III kl. 80 g. 61 × 86
Wydrukowano w Drukarni im.
Rewolucji Październikowej
Warszawa, ul. Mińska 65
Nr zam. 168/12/81 L-7

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60—, cena prenumeraty półrocznej zł 30—

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach:
— do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i cały rok następny
— do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego.
Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienie w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”.
Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW, oraz prenumeratorki indywidualni zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.
Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej

Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.
Sprzedż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.
Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Konto PKO I OM W-wa 1531-912

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław
w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa
w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7
00-068 Warszawa, Poland or with
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68,
Bundesrepublik Deutschland.
— Earls Court Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain,
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia

Cena 1 egzemplarza zł 5— nr indeksu 35723/35550

Nieco historii matematyki w wykładzie algebry

Prof. dr Stanisław BALCERZYK, dr Michał SZUREK

Motto: *Historia est magistra vitae — Historia jest nauczycielką życia*

Piękne twierdzenia, które prezentujemy naszym słuchaczom na wykładach, są jak wspaniałe brylanty iskrzące się wewnętrznym blaskiem; nikt nie potrafi z ich obecnego wyglądu odgadnąć, jak wiele nadziei i trudu towarzyszyło znalezieniu niezbyt efektywnego diamentu, który dopiero po żmudnej pracy szlifierza stał się prawdziwym klejnotem.

Słuchacze naszych wykładów są często nawet w gorszej sytuacji niż telewizywie, którzy mozoły podróży znają tylko z ekranu. Uczący się przeważnie nie mają żadnego wyobrażenia o drodze rozwoju nie tylko teorii matematycznych, ale nawet o losach poszczególnych twierdzeń. Wykładowcy i autorzy podręczników również rzadko zwracają uwagę na dzieje teorii. Maksimum wiedzy to zwykle znajomość przebiegu procesu osłabiania założeń w dążeniu do uzyskania końcowego, eleganckiego wyniku. Pięknym wyjątkiem od tej reguły są książki Nicolasa Bourbaki, zawierające informacje historyczne podane w sposób użyteczny dla studiów nad odpowiednią teorią.

W tym stanie rzeczy pragniemy podzielić się z Czytelnikami pewnymi refleksjami na temat celowości kontaktu z przeszłością matematyki. Oczywiście byłoby nonsensem wzywanie do nauczania matematyki przez prezentowanie kolejnych etapów jej rozwoju. Byłoby to zaprzeczeniem postępu, zmarnowaniem czasu. Jednak całkowite odcięcie się od przeszłości także nie jest dobre. Warto czasem zwrócić się wstecz, aby lepiej ocenić i zrozumieć teraźniejszość, nabrać szacunku dla twórczości i wspaniałej intuicji naszych przadków, aby dostrzec, że ich działalność służyła konkretnym zagadnieniom, że zbudowane przez nich teorie były mocno osadzone wśród potrzeb ówczesnej matematyki.

Opowiemy o dziejach powstania podstawowych dzisiaj pojęć algebry — pierścienia przemiennego i ideału na gruncie algebraicznej teorii liczb, w pracach Kummera, Kroneckera i Dedekinda, o ratowaniu zasadniczego twierdzenia arytmetyki o jednoznaczności rozkładu — oraz nieco o dalszych badaniach z tym związanych.

Na ogół w kursach algebry istnienie i jednoznaczność rozkładu elementu (takiego jak liczba całkowita lub wielomian) na iloczyn elementów nierozkładalnych jest traktowana jako „prawidłowość” — jej brak raczej jako osobliwość. Zapewne temu zawdzięczamy słynną notatkę Fermata na marginesie dzieła Diofantosa a właśnie teoria liczb skłania do oceny przeciwnej — jednoznaczność rozkładu jest własnością wyjątkową. Zagadnienie rozwiązalności równania Fermata wystarczy oczywiście badać dla wykładników będących liczbami pierwszymi: jeśli $n = pq$ i x, y, z spełniają równanie $x^n + y^n = z^n$, to x^q, y^q, z^q spełniają równanie $X^p + Y^p = Z^p$. Ustalmy więc liczbę pierwszą $p > 2$ i przypuśćmy, że równanie Fermata ma rozwiązanie składające się z dodatnich liczb całkowitych x, y, z , a zatem $x^p + y^p = z^p$. Narzuca się od razu pomysł: prawa strona jest iloczynem p czynników $z^p = z \cdot z \cdot \dots \cdot z$, dobrze byłoby również i lewą stronę przedstawić w postaci iloczynu czynników nierozkładalnych i próbować znaleźć związek pomiędzy czynnikami po obu stronach. Jednak wyrażenie $x^p + y^p$ możemy rozłożyć na iloczyn jedynie dwóch czynników

$$x^p + y^p = (x + y)(x^{p-1} - x^{p-2}y + \dots - xy^{p-1} + y^{p-1}).$$

Dopuszczając jednak czynniki będące liczbami zespolonymi możemy wyrażenie to rozłożyć na iloczyn p czynników.

Oznaczmy przez ζ_p liczbę zespoloną $\cos \frac{2\pi}{p} + i \sin \frac{2\pi}{p}$, wówczas $(\zeta_p)^p = 1$ i liczby

$$\zeta_p^0 = 1, \zeta_p, \zeta_p^2, \dots, \zeta_p^{p-1}$$

są wszystkimi zespolonymi pierwiastkami p -tego stopnia z 1.

Bardzo łatwo sprawdzić, korzystając z wzoru $(T-1)(T-\zeta_p) \dots (T-\zeta_p^{p-1}) = T^p - 1$, że

$$x^p + y^p = (x + y)(x + \zeta_p y) \dots (x + \zeta_p^{p-1} y),$$

a zatem równanie Fermata możemy przepisać w postaci

$$(x + y)(x + \zeta_p y) \dots (x + \zeta_p^{p-1} y) = z \cdot z \cdot \dots \cdot z$$

Definicje pojęć o których mowa w artykule obok. **Pierścieniem** nazywamy zbiór A wraz z określonymi w nim pewnymi działaniami \oplus oraz \odot spełniającymi następujące warunki

- 1) „dodawanie” \oplus jest przemienne, łączne i ma element neutralny, tj. taki $\theta \in A$, że $a \oplus \theta = a$ przy każdym $a \in A$. Ponadto równanie $a \oplus x = \theta$ o niewiadomej $x \in A$ ma zawsze rozwiązanie — inaczej mówiąc każdy element a zbioru A ma „przeciwny”;
- 2) „mnożenie” jest łączne i przemienne;
- 3) „mnożenie” \odot jest rozdzielne względem „dodawania” \oplus :

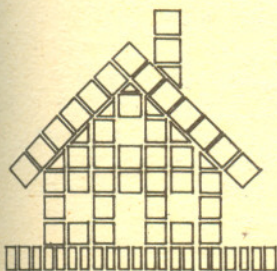
$$a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c),$$

przy dowolnych $a, b, c \in A$.

Podzbiór $I \subset A$ nazywa się **ideałem** pierścienia A , gdy jest zamknięty ze względu na „dodawanie” tj. $(a \in I, b \in I) \Rightarrow a \oplus b \in I$ oraz gdy spełnia jeszcze warunek $(a \in I, x \in A) \Rightarrow a \odot x \in I$.

Najważniejszymi przykładami pierścieni są pierścienie składające się z liczb; A jest pewnym podzbiorem liczb zespolonych, zamkniętym ze względu na zwykłe dodawanie i zwykłe mnożenie liczb. Działania \oplus i \odot określamy wtedy właśnie jako zwyczajne dodawanie i mnożenie. Zbiór liczb naturalnych nie tworzy pierścienia, tworzy go natomiast zbiór wszystkich liczb całkowitych, a także: zbiór Z [i] złożony z liczb $m + ni$ (gdzie $m, n \in Z$), zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, zbiór wszystkich liczb zespolonych. Ostatnie z wymienionych pierścieni są też **ciałami**. Tak nazywamy pierścienie K , w których „mnożenie” \odot ma też element neutralny L przy czym $L \neq \theta$ oraz każdy niezerowy element $a \in A$ ma „odwrotny”: równanie $a \odot x = L$ ma rozwiązanie dla każdego $a \neq \theta$. Jeżeli w pierścieniu A $a \odot b = \theta \Rightarrow a = \theta$ lub $b = \theta$ to A nazywamy **dziedzina całkowitości**.

„Jest niemożliwe rozłożyć sześciąt na dwa sześciąty, czwartą potęgę na dwie czwarte potęgi i ogólnie potęgę wyższą niż druga na dwie takie potęgi; znalazłem naprawde zdziwiający dowód tego, jednak margines jest za mały, by go pomieścić”.

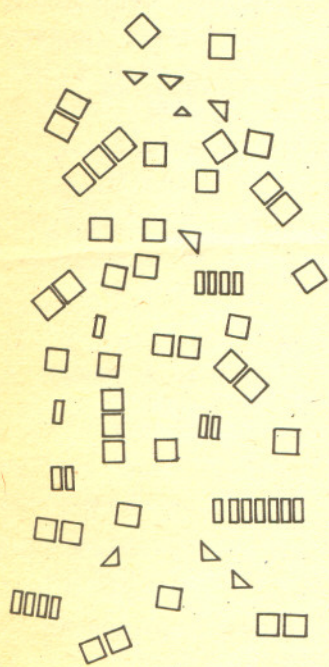




Rozwiązanie zadania M 259. Zauważmy, że ponieważ

$$x^k - y^k = (x-y)(x^{k-1} + x^{k-2}y + \dots + xy^{k-2} + y^{k-1})$$

dla każdego $k \geq 1$, to $p(x) - p(y)$ jest podzielne przez $x - y$ dla każdej pary $x, y \in R$. Gdyby teraz x_0 było pierwiastkiem całkowitym wielomianu $p(x)$, to $x_0 - 0 \mid p(x_0) - p(0)$, czyli $x_0 \mid p(0)$ oraz $x_0 - 1 \mid p(x_0) - p(1)$, czyli $x_0 - 1 \mid p(1)$, co jest niemożliwe, ponieważ jedna z liczb $x_0, x_0 - 1$ jest parzysta, a zarówno $p(0)$ jak i $p(1)$ są nieparzyste, zgodnie z warunkami zadania. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że x_0 nie może być pierwiastkiem p .



Rozwiązanie zadania M 261. Spośród wszystkich trójkątów o wierzchołkach leżących w wierzchołkach W wybierzmy trójkąt ABC o największym polu. Pokażemy, że jego środek ciężkości S spełnia warunki zadania. Wiemy, że $J_S^{1/2}(ABC) = A'B'C'$ gdzie A', B', C' są odpowiednio środkami boków BC, AC i AB . Gdyby teraz $D' = J_S^{1/2}(D)$ leżał poza trójkątem ABC dla pewnego wierzchołka D wielokąta W , to moglibyśmy wskazać wierzchołek ABC (np. A) taki, że D' i A leżą po przeciwnych stronach prostej BC . Wtedy jednak pole $(A'B'C') < < \text{pole}(B'C'D')$ i wobec tego pole $(BCD) > \text{pole}(ABC)$ wbrew założeniu. Wobec tego obrazy wszystkich wierzchołków W leżą w trójkącie ABC , a więc $J_S^{1/2}(W) \subset ABC \subset W$. Gdy teraz $-\frac{1}{2} < t < 0$ to $J_S^t(W) \subset J_S^{1/2}(W) \subset W$. e.b.d.o.

i otrzymujemy rozkład na czynniki należące do pierścienia $Z[\zeta_p]$ składającego się z liczb zespolonych postaci $a_0 + a_1\zeta_p + \dots + a_{p-1}\zeta_p^{p-1}$, gdzie a_0, a_1, \dots, a_{p-1} są liczbami całkowitymi.

Liczby $x + y$ i z powinny zatem mieć nietrywialny wspólny dzielnik, a więc ... Otóż nie! W rozumowaniu tym korzystamy bowiem z własności jednoznaczności rozkładu elementów pierścienia $Z[\zeta_p]$ na czynniki nierozkładalne. Wiele błędnych dowodów twierdzenia Fermata (m.in. Gaussa, Eulera, Lagrange'a i prawdopodobnie samego Fermata) polegało właśnie na przyjęciu za oczywistą jednoznaczności rozkładu tam, gdzie nie była ona wcale oczywistą, albo i w ogóle nie miała miejsca.

W XIX wieku najwięcej energii problemowi Fermata poświęcił matematyk niemiecki Ernst Eduard Kummer (1810—1893). Niemal przez całe życie starał się zrealizować ów „naturalny” pomysł — dowód hipotezy Fermata za pomocą rozkładów elementów na czynniki. Pierwszym, który zauważył, że w pewnych pierścieniach liczbowych nie obowiązuje twierdzenie o jednoznaczności rozkładu, był prawdopodobnie Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805—1859). Na przykład w pierścieniu $Z[\sqrt{-5}]$, złożonym z liczb zespolonych postaci $m + n\sqrt{-5} = m + n\sqrt{5}i$, gdzie m, n są całkowite, mamy $6 = 2 \cdot 3 = (1 - \sqrt{-5})(1 + \sqrt{-5})$ i wszystkie cztery wypisane czynniki są nierozkładalne w rozważanym pierścieniu. To odkrycie stanowiło wielki wstrząs dla Kummera: zawiódł go podstawowy pomysł. Nie załamując się jednak, podjął heroiczny wysiłek znalezienia jakiejś namiastki twierdzenia o jednoznacznym rozkładzie. Stworzył w tym celu pojęcie „idealnego czynnika” i nowatorsko spojrzął na samą relację podzielności. Przymiotnik „idealny” znaczy tu raczej „metafizyczny, duchowy” niż „doskonały”. Owe nieziemskie, idealne liczby musiały być przede wszystkim dzielnikami liczb pierwszych całkowitych. Stąd i nazwa — przecież liczby pierwsze nie mają nietrywialnych dzielników w zakresie liczb całkowitych. Aby opisać „idealne czynniki” Kummera prześledźmy najpierw prostą sytuację, jaka ma miejsce dla pierścienia liczb całkowitych Z . W dzisiejszej terminologii waluacją (niearchimedesową) pierścienia A nazywamy określoną na A funkcję v o wartościach całkowitych oraz ∞ i taką, że

$$v(xy) = v(x) + v(y),$$

$$v(x+y) \geq \min(v(x), v(y))$$

dla niezerowych $x, y \in A$ oraz $v(1) = 0, v(0) = \infty$ (przyjmujemy, że zawsze $n + \infty = \infty$). Z każdą liczbą pierwszą p można związać pewną waluację pierścienia liczb całkowitych, tzw. waluację p -adyczną v_p . Dla $n \neq 0$ przyjmujemy $v_p(n) = k$ wtedy i tylko wtedy, gdy p^k dzieli n oraz p^{k+1} nie dzieli n . Dla każdej liczby całkowitej $n \neq 0$ istnieje więc tylko skończona ilość waluacji p -adycznych, których wartość na n jest różna od zera. Na przykład dla liczby $n = 457380 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2$ mamy $v_2(n) = 2, v_3(n) = 3, v_5(n) = v_7(n) = 1, v_{11}(n) = 2$, a wszystkie pozostałe waluacje p -adyczne przyjmują na n wartość 0. Każda liczba całkowita jest (z dokładnością do czynnika ± 1 — są to jedyne elementy odwracalne w pierścieniu Z) wyznaczona przez podanie wartości wszystkich waluacji p -adycznych na niej. Dalej, nietrudno wykazać, że poza p -adycznymi (i ich wielokrotnościami) pierścień liczb całkowitych Z ma tylko waluację trywialną $v_0, v_0(n) = 0$ dla $n \neq 0$.

Owe „idealne czynniki” Kummera były to właśnie waluacje pierścienia $Z[\zeta_p]$. Wykładnik, z jakim taki czynnik wchodzi w rozkład liczby $x \in Z[\zeta_p]$, to po prostu wartość na x owej waluacji.

Ta konstrukcja Kummera jest jednym z najpiękniejszych przykładów abstrakcji — procesu oderwania się od „całkowitoliczbowego terytorium”, spojrzenia na zagadnienie z ogólniejszego punktu widzenia (stworzenie arytmetyki pierścieni $Z[\zeta_p]$) — o czym za chwilę) oraz zastosowanie do wyjściowego problemu. W liście do Liouville'a Kummer pisał:

„Zachęcony przez mojego przyjaciela, p. Lejeune Dirichleta, pozwalam sobie przesłać Panu kilka kopii dysertacji, jaką napisałem trzy lata temu, z okazji jubileuszu stulecia Uniwersytetu w Królewcu, jak również inną dysertację mego przyjaciela i ucznia p. Kroneckera, młodego i wybijającego się geometry. W tych pracach, które zechce Pan przyjąć jako wyraz mego głębokiego szacunku, znajduje się kilka rezultatów dotyczących pewnych zagadnień z teorii liczb zespolonych otrzymanych z pierwiastków z jedności, tj. pierwiastków równania $r^n = 1$, które to rezultaty były ostatnio przedmiotem dyskusji w Pańskiej prześwietnej Akademii, z okazji próby p. Lamé udowodnienia wielkiego twierdzenia Fermata. Co do elementarnego stwierdzenia o tych liczbach, że dowolna złożona liczba zespolona

- Mówili coś o kolarzach?
- Tak, tak, przed chwilą. Ogromny peleton na czele. Nasi w czołówce. W telewizji właśnie mówili, że do Warszawy przyjadą na wół do szóstej.
- Aha, to u nas będą koło wół do piątej.
- Jadą, jadą!!
- Co, już? Dopiero 16¹⁵.
- Widocznie jadą dziś wolniej niż zwykle.
- Jak to? Wolniej jadą, a wcześniej przyjeżdżają?
- Och, zajrzyj na str. 16

może być rozłożona na czynniki pierwsze w dokładnie jeden sposób, na brak którego zwraca Pan tak słusznie uwagę, a którego brak i w innych sytuacjach, mogą Pana zapewnić, że w ogólności nie jest ono prawdziwe dla liczb zespolonych postaci

$$a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots + a_{n-1} r^{n-1},$$

ale można je uratować przez wprowadzenie nowego rodzaju liczb zespolonych, które nazwałem idealnymi liczbami zespolonymi. Wyniki moich badań w tym zakresie przedstawiłem Akademii w Berlinie i wydrukowane są one w sprawozdaniach z jej posiedzeń (marzec 1846); praca na ten sam temat pojawi się wkrótce w *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Już dawno temu rozpatrywałem zastosowania tej teorii do dowodu twierdzenia Fermata i udało mi się wyprowadzić nierozwiązalność równania $x^n + y^n = z^n$ z dwóch własności liczby pierwszej n , tak że pozostaje tylko zbadać, czy własności te przysługują wszystkim liczbom pierwszym. Gdyby te rezultaty wydawały się Panu godne zainteresowania, może Pan je znaleźć w sprawozdaniach Akademii Berlińskiej z bieżącego miesiąca”.

Dalsza metamorfoza pojęcia „liczby idealnej” dokonana została w pracach Dedekinda. Punktem wyjścia były dwie własności podzielności przez liczbę p : (i) jeśli p dzieli x , to p dzieli każdą wielokrotność x , (ii) jeśli p dzieli x i y , to p dzieli $x + y$, które przysługiwały też „liczbom idealnym” Kummera. Richard Dedekind zauważył, że te dwie własności są najbardziej istotne przy badaniu relacji podzielności w sensie Kummera. Doprowadziło go to do ulepszenia pojęcia „idealnej liczby” przez zastąpienie tej „liczby” zbiorem liczb przez nią podzielnych — do sformułowania pojęcia ideału. W dodatku do książki Lejeune Dirichleta o teorii liczb (1871) Dedekind pisał:

... System a nieskończonego zbioru liczb należących do \mathfrak{o} [w dzisiejszej terminologii \mathfrak{o} oznaczał dowolny pierścień liczbowy] nazywa się ideałem, jeżeli spełnia on dwa warunki:

- 1) suma i różnica dwóch liczb z \mathfrak{a} znów jest liczbą z \mathfrak{a} ;
- 2) każdy iloczyn liczby z \mathfrak{a} przez liczbę z \mathfrak{o} jest znów liczbą z \mathfrak{a} .

... Jeśli α należy do \mathfrak{a} to powiemy, że \mathfrak{a} dzieli α , lub że \mathfrak{a} wchodzi [jako czynnik] do α ...

Jeżeli wszystkie liczby pewnego ideału \mathfrak{a} należą także do ideału \mathfrak{b} , to \mathfrak{b} składa się z jednej lub kilku klas (mod \mathfrak{a}) i powiemy, że \mathfrak{a} jest wielokrotnością \mathfrak{b} , albo że dzieli się przez \mathfrak{b} , a \mathfrak{b} jest dzielnikiem \mathfrak{a} lub, że wchodzi jako czynnik do \mathfrak{a} .

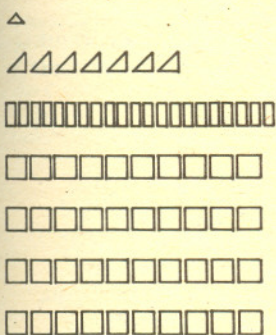
Ideał \mathfrak{p} , różny od \mathfrak{o} , który nie ma dzielników różnych od \mathfrak{p} i od \mathfrak{o} , nazywa się ideałem pierwszym (dziś — maksymalnym).

Jeżeli ideał \mathfrak{a} składa się z wielokrotności jednej ze swoich liczb α , to taki ideał nazywa się głównym ...

Te określenia Dedekinda ostatecznie formalizują pojęcie „idealnego czynnika” Kummera i relację podzielności. Nietrudno sprawdzić, że w pierścieniu liczb całkowitych każdy ideał jest główny, że $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ wtedy i tylko wtedy, gdy element α generujący ideał \mathfrak{a} (tzn. \mathfrak{a} składa się z wielokrotności α) jest podzielny przez element β generujący \mathfrak{b} ; wreszcie, że ideałami pierwszymi są w tym pierścieniu dokładnie ideały generowane przez liczby pierwsze oraz ideał zerowy. Ponadto z każdą waluacją („idealnym czynnikiem”) można związać jej ideał — złożony z tych liczb, na których waluacja przyjmuje wartości dodatnie. Odwrotnie — ideał pierwszy (niezerowy) wyznacza waluację. Zatem mówiąc w gruncie rzeczy o tym samym dochodzimy od mistycznych „idealnych czynników” Kummera (które miały „nieziemski byt” i decydowały o losach „niższych” liczb całkowitych) do sformalizowanego i bardzo prostego pojęcia ideału.

Bardzo łatwe do udowodnienia jest następujące twierdzenie: jeżeli każdy ideał dziedziny całkowitości jest główny, to w pierścieniu tym spełnione jest twierdzenie o jednoznaczności rozkładu. Dla pierścieni postaci $Z[\zeta_p]$ prawdziwe jest także twierdzenie odwrotne: jeśli w pierścieniu takim spełnione jest twierdzenie o jednoznaczności rozkładu, to każdy ideał tego pierścienia jest główny.

Kummerowi potrzebny był jakiś sposób oceny, na ile w danym pierścieniu naruszone jest prawo jednoznaczności rozkładu (dokładniej pisał o tym w Delcie 9/1979 Władysław Narkiewicz). Kummer nazwał ideały I oraz J pierścienia $Z[\zeta_p]$ równoważnymi, o ile istnieją niezerowe elementy r, s tego pierścienia takie, że $rI = sJ$. Wszystkie (niezerowe) ideały główne są więc równoważne. Ilość klas równoważności ideałów stanowi pewien miernik niejednoznaczności rozkładu w danym pierścieniu. Kummer udowodnił, że dla pierścieni $Z[\zeta_p]$ liczba klas równoważności ideałów jest skończona, a klasy te stanowią grupę (skończoną) ze względu na naturalne działanie mnożenia.



Liczby Bernoulliego pojawiają się w wielu innych sytuacjach, zanotujemy tu tylko następujące wzory prawdziwe dla $|x| < \pi/2$ oraz dla dowolnych liczb naturalnych m, n

$$\operatorname{tg} x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} B_{2n} 2^{2n} (2^{2n}-1) \frac{x^{2n-1}}{2n!},$$

$$1^m + 2^m + 3^m + \dots + n^m = \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{n^m}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2} B_2 \binom{m}{1} n^{m-1} + \frac{1}{4} B_4 \binom{m}{3} n^{m-3} +$$

$$+ \frac{1}{6} B_6 \binom{m}{5} n^{m-5} + \dots; \text{ ostatni wyraz po}$$

prawej stronie zawiera n lub n^2 w zależności od tego, czy m jest parzyste, czy nieparzyste. Oto wartości niektórych liczb Bernoulliego: $B_0 = 1, B_1 = -1/2, B_2 = 1/6, B_4 = -1/30, B_{16} = -3617/510, B_{32} = -7709321041217/510, B_{120} = -c_{113}/c_{10}, B_{122} = c_{107}/6$, gdzie c_{113}, c_{10} i c_{107} oznaczają pewne liczby naturalne o 113, 10, 107 cyfrach rozwinięcia dziesiętnego. Wiadomo, że $|B_4| < |B_6| < |B_8| < \dots$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} \{(-1)^{n-1} B_{2n} / [\sqrt{4\pi n} (n/\pi e)^{2n}]\} = 1$.

Analizując bardzo głębokie własności pierścieni $Z[\zeta_p]$ Kummer udowodnił wielkie twierdzenie Fermata dla tych liczb pierwszych p występujących jako wykładniki, które nie dzielą liczby klas ideałów pierścieni $Z[\zeta_p]$. Takie liczby pierwsze są dziś nazywane regularnymi. O tym właśnie rezultacie wspominał w liście do Liouville'a.

Kummer znalazł wzory na liczbę klas ideałów pierścieni $Z[\zeta_p]$ oraz podał kryterium pozwalające rozstrzygać, czy dana liczba pierwsza jest regularna, czy nieregularna. Kryterium to wykorzystuje własności tzw. liczb Bernoulliego B_0, B_1, B_2, \dots . Ten ciąg liczb określił Jacob Bernoulli (1713) jako kolejne współczynniki w szeregu potęgowym

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6} \cdot \frac{x^2}{2!} - \frac{1}{30} \cdot \frac{x^4}{4!} + \frac{1}{42} \cdot \frac{x^6}{6!} - \dots$$

Łatwo zauważyć, że $0 = B_3 = B_5 = B_7 = \dots$, oraz wyprowadzić następujące wzory, pozwalające bezpośrednio wyliczyć kolejne wyrazy tego ciągu

$$B_0 = 1$$

$$\binom{2}{0} B_0 + \binom{2}{1} B_1 = 0$$

$$\binom{3}{0} B_0 + \binom{3}{1} B_1 + \binom{3}{2} B_2 = 0$$

$$\dots$$

$$\binom{n+1}{0} B_0 + \binom{n+1}{1} B_1 + \dots + \binom{n+1}{n} B_n = 0$$

(w tablicy tej można oczywiście opuścić składniki zawierające B_3, B_5, B_7, \dots jako równe zeru); liczby Bernoulliego są więc wymierne. Zapowiedziane kryterium Kummera orzeka, że liczba pierwsza p jest regularna wtedy i tylko wtedy, gdy p nie dzieli liczników liczb Bernoulliego $B_2, B_4, B_6, \dots, B_{p-3}$. Istnieje więc metoda pozwalająca sprawdzić, czy dana liczba pierwsza jest, czy nie jest regularna. W ten sposób sprawdzono, że np. wśród liczb pierwszych < 100 tylko 37, 59 i 67 nie są regularne (licznik liczby B_{32} jest równy $-37 \cdot 208360028141$). Istnienie nieskończenie wielu liczb pierwszych nieregularnych wykazał Jensen w 1915 roku, a dotychczas nie wiadomo, czy liczb pierwszych regularnych jest nieskończenie wiele.

Choć nie należy to do głównego tematu, wspomnijmy prosty, ale ciekawy wynik Grunerta z 1856 roku: jeżeli dodatnie liczby całkowite x, y, z spełniają równanie Fermata $x^p + y^p = z^p$, to x, y i z są większe od p . Można założyć, że $x > y$. Mamy oczywiście $z > x$, więc $x^p + y^p = z^p = [(z-x) + x]^p = x^p + px^{p-1}(z-x) + \dots + (z-x)^p > x^p + px^{p-1}$, więc $y^p > px^{p-1} > py^{p-1}$, skąd $y > p$. Ponieważ $x > y$, więc także $x > p$, zatem $z > p$. Nierozwiązalność równania Fermata wykazana jest dziś dla wszystkich wykładników $p \leq 125000$ (Samuel Wagstaff, 1978). Jeżeli zatem jakieś rozwiązanie w ogóle istnieje, to $x > 125000$, a więc dla dojścia do tego rozwiązania musielibyśmy działać na liczbach co najmniej równych $125000^{125000} > 10^{637113}$. Mała jest wobec tego szansa, by na ewentualne rozwiązanie trafić przypadkiem lub przez systematyczne próby, nawet przy użyciu największych komputerów.

Jak to zwykle w matematyce bywa, wprowadzone przez Kummera i Dedekinda pojęcia pierścienia, ideału i grupy klas ideałów zaczęły żyć własnym życiem i — co rzadsze a ważniejsze — znalazły szerokie zastosowanie w innych działach matematyki. Przede wszystkim aż do początku XX wieku wszystkie rozpatrywane pierścienie i ciała były w gruncie rzeczy podciałami lub podpierścieniami ciała liczb zespolonych, bądź ciałami skończonymi. Rolę katalizatora w procesie dalszej (niezbędnej, jak dziś jasno widzimy) abstrakcji odegrały liczby p -adyczne (Delta pisała o nich np. w nr. 9/1978) wprowadzone przez Hensela, szeroko stosowane w teorii liczb. Pojęcie ideału stało się podstawowe dla nowoczesnej geometrii algebraicznej.

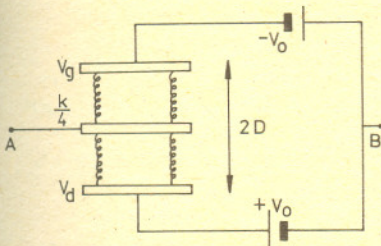
Przy badaniu pierścieni $Z[\zeta_p]$ Kummer natrafił na szczególnie prostą sytuację. Mówiąc współczesnym językiem powiedzielibyśmy, że rozpatrywał pewne pierścienie Dedekinda. Tak nazywamy dziś te dziedziny całkowitości A , w których: (1°) dla każdego ideału I istnieje skończony zbiór generatorów (tzn. takie elementy $b_1, \dots, b_s \in I$, że każdy element należący do I ma postać $a_1 b_1 + \dots + a_s b_s$ dla pewnych $a_1, \dots, a_s \in A$), (2°) żaden niezerowy ideał pierwszy (tzn. taki ideał I , że jeśli $a, b \in A \setminus I$ to $ab \in A \setminus I$) nie jest zawarty w ideale większym, różnym od A , (3°) jeżeli ułamek a/b ($a, b \in A$) jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach z A , którego współczynnik przy najwyższej potędze jest równy 1, to ułamek a/b należy do A . Te trzy warunki, okazuje się, decydują o tym, że w takich pierścieniach można „uratować” nieco z własności jednoznaczności rozkładu.

Teza twierdzenia Grunerta była tematem zadania nr 4 zawodów III stopnia XXII Olimpiady Matematycznej.

Kondensator o ujemnej pojemności

Co to jest kondensator — każdy wie.

Pojemność kondensatora jest większa od zera, gdyż ładunek i potencjał jednocześnie zmieniają znak. To oczywiste. Tak jednak być nie musi. Można skonstruować kondensator o ujemnej pojemności, tyle, że nie jest to już tak proste urządzenie. Oto ono



Nasz kondensator składa się z trzech płytek połączonych sprężynami, skrajne płytki są zamocowane, środkowa może się poruszać. Dwie baterie zapewniają różnicę potencjałów $V_g - V_d = 2V_0$. Tym samym pole między

płytkami ma natężenie $\frac{V_0}{D}$. Jeśli teraz z końcówki A dopłynię na płytkę środkową ładunek $+Q$, to płytka ta dotąd będzie przesuwać się w górę, aż sprężyny zrównoważą siłę elektrostatyczną:

$$k \cdot z = \frac{QV_0}{D} \quad \text{więc} \quad z = \frac{QV_0}{kD}$$

Wtedy punkt A będzie miał względem B potencjał

$$V_A = -zE = -\frac{V_0^2}{kD^2} Q.$$

Czyli

$$C = -\frac{kD^2}{V_0^2} < 0.$$

Proponuję, by Czytelnik rozważył następujące problemy:

1. Jak zachowują się obwody RC, LC, RLC, gdy $C < 0$?
2. Jak zależy ruch środkowej płytki od częstości zmian napięcia V_A ? Może warto dodać tłumik oscylacji?

P. Amsterdamski

Choć nie jest prawdą, że każdy element pierścienia Dedekinda rozkłada się jednoznacznie na iloczyn elementów nierozkładalnych, to jednak *każdy ideał pierścienia Dedekinda można jednoznacznie przedstawić w postaci iloczynu ideałów nierozkładalnych* (są nimi niezerowe ideały pierwsze). (Iloczynem ideałów I, J jest ideał IJ składający się z sum elementów postaci ab gdzie $a \in I, b \in J$). Grupy klas pierścieni Dedekinda pojawiających się w teorii liczb były skończone — jak widzieliśmy, znaczy to, że „odchylenie” tych pierścieni Dedekinda od pierścieni z prawem jednoznaczności rozkładu nie jest duże. W pewnym sensie końcową odpowiedź na pytanie, jak mogą się rozkładać elementy pierścienia Dedekinda, zawiera następujące twierdzenie L. Claborna z 1965 roku:

każda przemienna grupa abelowa jest grupą klas ideałów pewnego pierścienia Dedekinda.

Choć wiele na ten temat wiedzieli już Kummer, Dedekind, Kronecker oraz Gauss, dopiero niedawno wyjaśniono do końca, dla jakich liczb pierwszych p pierścienie $Z[\zeta_p]$ mają własność jednoznacznego rozkładu. Jedynymi takimi liczbami są mianowicie 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.

Chociaż ani Kummerowi, ani nikomu innemu do tej pory nie udało się rozstrzygnąć wielkiego problemu Fermata, to jednak stworzone w tym celu pojęcia i metody przydały się i przydadzą się w całej niemal matematyce, a sztuczne z pozoru określenia wyrosły na bardzo konkretnej problematyce. Jest to jedyna właściwa droga rozwoju pojęć matematycznych.

Czego nie wiemy o neutrinach? (II)

Mgr Roman JUSZKIEWICZ

CZY NEUTRINA MAJĄ MASĘ?

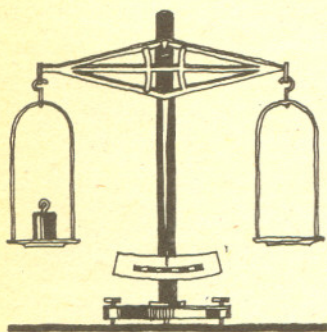
Przekonanie o tym, że neutrina są cząstkami, pozbawionymi masy spoczynkowej, powstało w latach trzydziestych, kiedy to Wolfgang Pauli, aby uratować bilans energetyczny w reakcji



wprowadził hipotezę o ich istnieniu. Przekonanie to dotrwało praktycznie w stanie nienaruszonym do wiosny roku 1980, mimo że nikomu nie udało się podać doświadczalnego dowodu na to, że masa neutrina jest ściśle równa zero. W roku 1958 Bruno Pontecorvo wysunął przypuszczenie, że jeżeli masa choćby jednego rodzaju neutrin, np. ν_e , jest różna od zera, to powinny wystąpić „oscylacje neutrinowe”, tj. przemiany typu $\nu_e \rightleftharpoons \nu_\mu$, czy $\nu_e \rightleftharpoons \nu_\tau$. Dobrą analogię takiego hipotetycznego procesu stanowią przejścia $K^0 \rightleftharpoons \bar{K}^0$, opisane w artykule M. Świąckiego (Delta nr 5/1978). Okres oscylacji zależy od różnicy mas neutrin (z zasady nieoznaczoności wynika, że powinien być on odwrotnie proporcjonalny do tej różnicy). Obserwując takie oscylacje można byłoby zatem zmierzyć różnice mas poszczególnych gatunków neutrin. Całkowity brak oscylacji świadczyłby natomiast o tym, że wszystkie neutrina są cząstkami bezmasowymi. Istnieje również metoda, pozwalająca na bezpośrednie „zważenie” neutrina. Aby tego dokonać, należy zbadać rozkład energii kinetycznej elektronów, uwolnionych w reakcji typu (1). Badając ten rozkład, wyznaczyć można „brakującą” w bilansie energię, która została zużyta na wyprodukowanie masy spoczynkowej neutrina. Latem ubiegłego roku pojawiły się wiadomości, które wywołały prawdziwą sensację. Okazało się mianowicie, że wyniki badań, opartych na obu omówionych metodach, prowadzą do wniosku, że masa neutrina elektronowego jest różna od zera!

Doniesienia te pochodziły od F. Reinesa i C. Cowana z Uniwersytetu Kalifornijskiego, którzy stwierdzili występowanie oscylacji w strumieniu ν_e z reaktora jądrowego, oraz od W. Lubimowa i jego współpracowników z Instytutu Fizyki Teoretycznej i Doświadczalnej w Moskwie, którym udało się wyznaczyć masę neutrina elektronowego z rozkładu energii kinetycznej elektronów, uwolnionych podczas rozkładu trytu (tryt jest izotopem wodoru o jądrze zbudowanym z dwóch neutronów i jednego protonu). Wartość masy ν_e , wyznaczona przez Lubimowa, wynosi $m(\nu_e) = 30$ eV. Wyniki tych doświadczeń należy jednak traktować z dużą ostrożnością. Zdaniem specjalistów, na ich powtórzenie (i ewentualne potwierdzenie) w innych laboratoriach oraz na usunięcie wszystkich wątpliwości potrzeba co najmniej dwóch lat. A na razie w wyniku naszej niepewności co do masy neutrina „na rozdrożu” znalazły się aż trzy dziedziny fizyki: teoria struktury wewnętrznej gwiazd, kosmologia i teoria oddziaływań cząstek elementarnych. Jeżeli oscylacje neutrinowe rzeczywiście występują w przyrodzie, to „problem neutrin słonecznych” może uzyskać nieoczekiwane proste wyjaśnienie. Mianowicie, jest możliwe, że strumień ν_e , rejestrowany przez detektor Davisa stanowi 1/3 wartości przewidywanej przez

teorię po prostu dlatego, że $2/3$ neutrin, które opuszczają Słońce jako ν_e dzięki oscylacjom zamienia się w ν_μ i ν_τ (oscylacje te zachodziłyby w ciągu 8 minut, których te cząstki potrzebują, aby dotrzeć na Ziemię). Trzydzieści elektronowoltów to bardzo mało. Jest to ponad sto tysięcy razy mniej od masy elektronu (równiej 511000 eV) — cząstki, jeszcze do niedawna uznawanej za najlżejszą spośród wszystkich cząstek elementarnych o niezerowej masie spoczynkowej. Jednak neutrina, mające nawet tak nikłą masę, mogą w sposób decydujący wpływać na globalne własności Wszechświata. Przyczyną tego jest ich ogromna liczebność; na każdy atom wodoru we Wszechświecie przypada bowiem około miliarda neutrin. Istniejące obecnie oszacowania średniej gęstości „zwykłej” materii, wypełniającej Wszechświat (jest to w $3/4$ wodór i w $1/4$ hel) wskazują na to, że jest ona mniejsza od tzw. gęstości krytycznej. Oznacza to, że materia jest tak rozrzedzona, iż wytwarzane przez nią pole grawitacyjne jest zbyt małe na to, aby zahamować proces ekspansji. Jeżeli neutrina są cząstkami o zerowej masie spoczynkowej, to ich wpływ na proces hamowania ekspansji (podobnie jak wpływ pola grawitacyjnego, pochodzącego od promieniowania relikowego) jest jeszcze słabszy niż wpływ materii „zwykłej”. Tak więc, gdyby okazało się, że $m(\nu_e) = m(\nu_\mu) = m(\nu_\tau) = 0$, oznaczałoby to, że mieszkamy we Wszechświecie „otwartym”, tj. takim, w którym proces ucieczki galaktyk będzie trwał wiecznie. Wystarczy jednak, aby $m(\nu_e) \geq 10$ eV (przy założeniu, że $m(\nu_\mu) = m(\nu_\tau) = 0$), by „domknąć” Wszechświat. Gęstość kosmicznej „zupy neutrinowej”, złożonej z cząstek o takich masach, byłaby większa od gęstości krytycznej, a wytwarzane przez nią pole grawitacyjne — dostatecznie silne, aby po pewnym czasie wyhamować obserwowany obecnie proces ekspansji i zapoczątkować proces „cofania się” galaktyk z powrotem ku nam. Podstaw do podejrzeń, że neutrina obdarzone są niezerową masą spoczynkową, dostarczają nie tylko wyniki doświadczeń. Rozwijana obecnie teoria Wielkiej Unifikacji oddziaływań słabych, elektromagnetycznych i silnych wymaga, aby ν_e , ν_μ i ν_τ miały niejednakowe masy, zawarte między 10^{-5} a kilkudziesięcioma eV. Teoria ta w sposób jednolity opisuje wszystkie fundamentalne oddziaływania występujące w przyrodzie, pomijając jedynie grawitację. Teoria Wielkiej Unifikacji ma już na swoim koncie szereg efektownych sukcesów. Teoria tego typu powinna oczywiście dostarczać również poprawnego opisu neutrin. Dlatego też wyniki doświadczeń Reinesa i Lubimowa mają dla tej teorii ogromne znaczenie: gdyby wyniki te zostały w przyszłości potwierdzone, oznaczałoby to następny sukces teorii, natomiast w przypadku, gdyby np. udowodniono doświadczalnie, iż oscylacje neutrin nie występują w ogóle — mógłby to być początek końca tej teorii (przynajmniej w obecnym sformułowaniu). Sądzę, iż udało mi się przekonać Czytelnika o tym, że stan naszej niewiedzy o neutrinach jest rzeczywiście imponujący. Nie wiemy, czy neutrina mają masę. Nie wiemy, co dzieje się z $2/3$ strumienia neutrin słonecznych. Nie wiemy, czy ucieczka galaktyk będzie trwała wiecznie. Nie wiemy wreszcie, czy teoria Wielkiej Unifikacji dostarcza poprawnego opisu zachowania neutrin. Istnieją jednak podstawy do optymizmu. W ciągu najbliższych lat powinniśmy uzyskać odpowiedź na pierwsze spośród powyższych pytań, a wtedy być może „automatycznie” uzyskamy odpowiedzi na trzy pozostałe.



Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 259. W punktach 0 i 1 wielomian $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ o współczynnikach całkowitych przyjmuje wartości nieparzyste. Wykazać, że wielomian p nie ma pierwiastków całkowitych.

Rozwiązanie na str. 2

M 260. Na płaszczyźnie dane są proste p , q , r przecinające się w punkcie 0. Zbudować trójkąt ABC , dla którego proste p , q , r są symetralnymi boków.

Rozwiązanie na str. 14

M 261. Wykazać, że gdy W jest wielokątem wypukłym i $-\frac{1}{2} \leq t < 0$, to istnieje punkt S taki,

że obraz W przy jednokładności J_S^t o środku w S i współczynniku t leży wewnątrz W .

Rozwiązanie na str. 2

Redaguje mgr T. TRATKIEWICZ

F 92. Dysponujemy źródłem napięcia o sile elektromotorycznej \mathcal{E} oraz dwoma kondensatorami. Wykazać, że można zestawić z tych kondensatorów baterię naładowaną do napięcia dowolnie bliskiego wartości $3\mathcal{E}$. Źródło SEM nie może wchodzić w skład baterii.

Rozwiązanie na str. 9

Spójność światła

Doc. dr Andrzej KUJAWSKI, dr Jan MOSTOWSKI

W ostatnich latach często słyzy się o spójności światła. Na przykład, mówiąc o laserze zawsze podaje się, że światło lasera jest „spójne”, w przeciwieństwie do światła pochodzącego z innych źródeł, które jest niespójne. W rzeczywistości pojęcie spójności (lub koherencji) dotyczy wszystkich rodzajów fal, jednakże w przypadku fal świetlnych jest ono niezbędne do wyjaśnienia wielu zjawisk optycznych.

Istotę pojęcia spójności można zrozumieć badając interferencję fal na wodzie, wytworzonych przez końce dwóch drgających prętów. Każdy drgający pręt wytwarza falę powierzchniową kolistą rozchodzącą się od swojego źródła. Jeśli pręty drgają równomiernie z jednakową częstością, powstające fale dają trwały obraz interferencyjny; maksima i minima wychyleń występują stale w tych samych miejscach. Takie fale nazywamy spójnymi. Jeśli jednak pręty drgają nieregularnie, to znaczy ich częstości lub amplitudy wychyleń zmieniają się niezależnie w przypadkowych chwilach czasu, maksima interferencyjne powstają w coraz to innych miejscach. O takich falach mówimy, że są niespójne.

Ten poglądowy obraz nie daje jednak precyzyjnej odpowiedzi na pytanie, kiedy dwie fale możemy uważać za spójne? Zanim dokładnie odpowiemy na to pytanie w przypadku fal świetlnych, przypomnijmy, że w konwencjonalnych źródłach, zwanych też źródłami termicznymi (na przykład żarówka, płomień, ale nie laser!), światło powstaje w wyniku pobudzenia do świecenia niezależnie od siebie znacznej liczby atomów. Powstająca fala świetlna jest wynikiem nałożenia się olbrzymiej liczby fal pochodzących od każdego świecącego atomu.

Aby opisać fakt, że światło nie jest falą monochromatyczną, posługujemy się następującym wyrażeniem dla wartości natężenia pola elektrycznego fali świetlnej w punkcie określonym wektorem położenia \mathbf{r} i w chwili t

$$E(\mathbf{r}, t) = \varepsilon(\mathbf{r}, t) \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \alpha(t)). \quad (1)$$

Funkcje $\varepsilon(\mathbf{r}, t)$ i $\alpha(t)$ są nazywane amplitudą i fazą fali; $\omega = 2\pi\nu$, gdzie ν jest częstością fali, a \mathbf{k} wektorem falowym. Na przykład, jeśli $E(\mathbf{r}, t)$ opisuje światło emitowane przez pojedynczy atom, to amplituda $\varepsilon(\mathbf{r}_0, t)$ w ustalonym punkcie \mathbf{r}_0 jest funkcją malejącą w czasie, opisującą zanik świecenia po wzbudzeniu atomu. W tym przypadku $\varepsilon(\mathbf{r}_0, t) = \varepsilon_0 \exp[-(t-t_0)/t_a]$, gdzie t_0 opisuje czas, w którym atom został pobudzony do świecenia, a ε_0 jest stałą. Charakterystyczny czas zaniku świecenia dla większości atomów wynosi $t_a \approx 10^{-8}$ s. Fazę $\alpha(t)$ w tym przypadku można przyjąć za stałą. Przypomnijmy, że w dziedzinie optycznej ω jest rzędu 10^{15} s $^{-1}$.

W przypadku źródła termicznego pełne pole elektryczne wytworzone przez dużą liczbę niezależnie świecących atomów jest sumą pól emitowanych przez poszczególne atomy. Na skutek chaotycznego ruchu atomów i ich zderzeń każdy z nich emituje światło w nieco inny sposób.

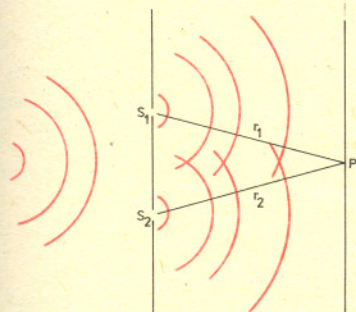
Całkowite pole, pochodzące od układu atomów, może być także scharakteryzowane wzorem (1). Nie można jednak w tym przypadku podać ogólnej dokładnej postaci $\varepsilon(\mathbf{r}, t)$ i $\alpha(t)$, gdyż zmiany ich mają charakter przypadkowy. Możemy jedynie stwierdzić, że istotnie zmieniają się one w czasie rzędu $t_s \approx 10^{-12}$ s. Czas ten nazywa się czasem spójności.

Rozważmy prosty przykład doświadczenia ukazującego interferencję światła, jakim jest doświadczenie Younga. Mamy tutaj (rys. 1) dwa źródła światła S_1 i S_2 , którymi są szczeliny lub otwory w nieprzezroczystym ekranie. W wyniku oświetlenia pola elektryczne w otworach S_1 i S_2 wynoszą odpowiednio $E(t, S_1)$ i $E(t, S_2)$. Każde z nich można opisać wzorem (1). Pole elektryczne w punkcie P powstaje w wyniku propagacji fali z otworów S_1 i S_2 do ekranu. Jeśli założymy, że odległości r_1 i r_2 punktu obserwacji P od źródeł S_1 i S_2 są znacznie większe od długości fali świetlnej, to pole dochodzące do ekranu możemy traktować jako superpozycję fal kulistych wychodzących z S_1 i S_2 . Mamy więc

$$E(t, P) = E_1 + E_2 = \frac{A_1}{r_1} E\left(t - \frac{r_1}{c}, S_1\right) + \frac{A_2}{r_2} E\left(t - \frac{r_2}{c}, S_2\right).$$

Stałe A_1 i A_2 zależne są od kształtu otworów, a ich dokładna postać nie będzie nam potrzebna; c jest prędkością światła. Każdy ze składników w powyższym wzorze określa stan pola w punkcie P pochodzącego od pól w S_1 i S_2 opóźnionych odpowiednio o czasy r_1/c i r_2/c . Zakładamy także dla uproszczenia, że obydwie fale są tak samo liniowo spolaryzowane.

W doświadczeniach rejestrujemy obraz interferencyjny na kliszy fotograficznej. Klisza zaczernia się proporcjonalnie do natężenia światła. W czasie naświetlania kliszy natężenie światła zmienia się, tak że klisza rejestruje jedynie pewną średnią wartość natężenia światła $I(P) = \varepsilon_0 \langle E^2(P, t) \rangle$, gdzie $E(P, t)$ jest natężeniem pola w punkcie P , ε_0 przenikalnością dielektryczną próżni, a nawiasy ostre oznaczają uśrednianie. Oznaczając natężenia każdej z wiązek przez I_1 i I_2



Rys. 1

mamy $I_1(P) = c \epsilon_0 \langle E_1^2(P, t) \rangle$, $I_2(P) = c \epsilon_0 \langle E_2^2(P, t) \rangle$ i po wstawieniu do wzoru $I = c \epsilon_0 \langle (E_1 + E_2)^2 \rangle$ otrzymujemy

$$I(P) = I_1(P) + I_2(P) + \frac{2c\epsilon_0 A_1 A_2}{r_1 r_2} \langle \epsilon_1(t_1) \epsilon_2(t_2) \cos[\omega t_1 + \alpha_1(t_1)] \cos[\omega t_2 + \alpha_2(t_2)] \rangle \quad (2)$$

Aby obliczyć średnią wartość występującą we wzorze (2) musimy uwzględnić trzy charakterystyczne czasy: 1) okres drgań fali świetlnej $T = 2\pi/\omega \approx 10^{-15}$ s, 2) czas, w którym istotnie zmieniają się ϵ i α , czyli czas spójności $t_s \approx 10^{-12}$ s, 3) czas obserwacji obrazu interferencyjnego $t_0 \approx 10^{-2}$ s. Za czas obserwacji przyjęliśmy typowy czas naświetlania kliszy w aparacie fotograficznym. Może być on jednak krótszy przy innych metodach pomiaru natężenia. Po skorzystaniu ze wzoru na iloczyn cosinusów wyrażenie uśrednione we wzorze (2) przyjmuje postać

$$\frac{1}{2} \langle \epsilon_1 \epsilon_2 \cos[2\omega t + (r_1 + r_2)\omega/c + \alpha_1 + \alpha_2] \rangle + \frac{1}{2} \langle \epsilon_1 \epsilon_2 \cos[(r_1 - r_2)\omega/c + \alpha_1 - \alpha_2] \rangle,$$

gdzie α_1 i α_2 zależą odpowiednio od $t_1 = t - r_1/c$ i $t_2 = t - r_2/c$. Pierwszy uśredniany składnik jest funkcją szybko oscylującą w czasie, bowiem funkcja $\cos[2\omega t + (r_1 + r_2)\omega/c + \alpha_1 + \alpha_2]$ przyjmuje wielokrotnie wartości dodatnie i ujemne w czasie obserwacji ($\omega \approx 10^{15}$ s⁻¹, $t_0 \approx 10^{-2}$ s!), a zatem jej średnia czasowa jest równa zero. Wzór (2) przybiera więc postać

$$I = I_1 + I_2 + \frac{A_1 A_2}{r_1 r_2} c \epsilon_0 \left\langle \epsilon_1 \left(t - \frac{r_1}{c} \right) \epsilon_2 \left(t - \frac{r_2}{c} \right) \cos \left[(r_1 - r_2) \frac{\omega}{c} + \alpha_1 \left(t - \frac{r_1}{c} \right) - \alpha_2 \left(t - \frac{r_2}{c} \right) \right] \right\rangle \quad (3)$$

Wykazaliśmy w ten sposób, że wypadkowe natężenie obserwowane w typowym eksperymencie Younga jest sumą natężeń I_1 i I_2 pochodzących od poszczególnych źródeł oraz członu interferencyjnego.

Wartość członu interferencyjnego zależy od sposobu zrealizowania doświadczenia. Jeśli źródła S_1 i S_2 świecą zupełnie niezależnie, to funkcja $\alpha_1(t_1)$ przyjmuje wartości nie związane z wartościami $\alpha_2(t_2)$. W rezultacie różnica $\alpha_1(t_1) - \alpha_2(t_2)$ zmienia się istotnie w czasie rzędu 10^{-12} s. Czas obserwacji $t_0 \approx 10^{-2}$ s obejmuje znaczną liczbę „istotnych zmian”, a zatem na skutek obecności funkcji cosinus wyrażenie uśredniane wiele, wiele razy zmienia znak i wartość średnia wynosi zero. W tym przypadku znika człon interferencyjny i $I = I_1 + I_2$. O falach wychodzących z S_1 i S_2 mówimy, że są niespójne. Z powyższej analizy możemy wyciągnąć wniosek, że znikanie obrazu interferencyjnego nie jest jakąś wewnętrzną cechą światła. Jest to wynik określony możliwościami aparatury pomiarowej, która uśrednia szybkie fluktuacje natężenia światła. Stwierdzenie, że fale świetlne są niespójne, czyli że nie mogą interferować, w istocie oznacza, że aparatura pomiarowa nie rejestruje obrazów interferencyjnych w czasach odpowiednio krótkich.

Aby w omawianym doświadczeniu możliwa była obserwacja interferencji, należy tak skonstruować aparaturę, aby różnica $\alpha_1 - \alpha_2$ nie zmieniała się w czasie obserwacji. Można to uzyskać w ten sposób, że S_1 i S_2 są szczelinami lub otworami oświetlonymi przez punktowe (bardzo mały otwór) pojedyncze źródło. Wówczas fazy $\alpha_1(t_1)$ i $\alpha_2(t_2)$ fal w otworach S_1 i S_2 zmieniają się przypadkowo, jednak $\alpha_1(t) = \alpha_2(t)$. Obraz interferencyjny będzie widoczny, jeśli $\alpha_1 \left(t - \frac{r_1}{c} \right) - \alpha_2 \left(t - \frac{r_2}{c} \right)$ będzie stałe w czasie. Można to uzyskać, jeśli różnica dróg optycznych między punktem obserwacji a dwoma źródłami $\left(\frac{r_1}{c} - \frac{r_2}{c} \right)$ jest co najwyżej rzędu 1 mm. Wówczas

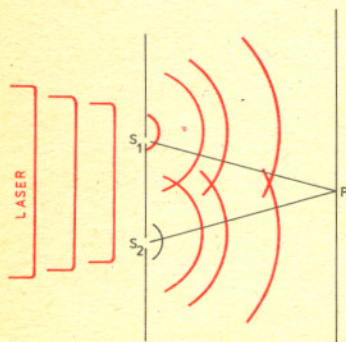
bowiem różnica między czasami $\left(t - \frac{r_1}{c} \right) - \left(t - \frac{r_2}{c} \right)$ jest mniejsza niż czas spójności

i $\alpha_1 \left(t - \frac{r_1}{c} \right) - \alpha_2 \left(t - \frac{r_2}{c} \right)$ jest wielkością prawie stałą w czasie. Gdyby światło było

monochromatyczne, to funkcje $\alpha(t)$ i $\epsilon(t)$ byłyby stałe. W tym przypadku nie mielibyśmy żadnego ograniczenia na rozmiar obrazu interferencyjnego, to znaczy prążki interferencyjne widoczne byłyby w całej płaszczyźnie ekranu. W rzeczywistości skończony czas spójności ogranicza rozmiar obszaru, w którym obserwujemy obraz interferencyjny.

Inną możliwość daje użycie do oświetlenia szczelin S_1 i S_2 światła odpowiedniego lasera (rys. 2). Mechanizm wytwarzania światła w laserze jest zupełnie inny niż w źródłach termicznych, bowiem atomy nie promieniują pojedynczo i niezależnie od siebie. Wprost przeciwnie, istota świecenia lasera polega na zgodnym w fazie promieniowaniu wszystkich atomów. W tym przypadku można teoretycznie uzasadnić, i jest to eksperymentalnie potwierdzone, że amplituda $\epsilon(t)$ i faza $\alpha(t)$ zmieniają się bardzo wolno, bowiem czas, w ciągu którego następują ich istotne zmiany, może osiągać wartość około $t_s \approx 0,1$ s lub nawet większą w przypadku specjalnych konstrukcji lasera. Wzór (3) określający wypadkowe natężenie światła pozostaje słuszny, ale uśrednianie należy przeprowadzić inaczej. Mianowicie w czasie obserwacji $t_0 \approx 10^{-2}$ s wielkości $\epsilon(t)$ i $\alpha(t)$ można uważać za stałe i wzór można przekształcić do postaci

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos[(r_1 - r_2)\omega/c + \alpha_1 - \alpha_2]. \quad (4)$$



Rys. 2

Tak więc przy użyciu światła lasera można łatwo oglądać obrazy interferencyjne w doświadczeniu Younga; nie jest konieczne używanie pojedynczego źródła punktowego. Okazuje się również, że zakres odległości szczelin S_1 i S_2 , dla których obserwuje się obraz interferencyjny, jest znacznie większy niż w przypadku termicznych źródeł punktowych. Przypadek opisany wzorem (4) odpowiada pełnej spójności fal wychodzących ze szczelin S_1 i S_2 . Maksymalna i minimalna wartość natężenia I wynoszą: $I_{\max} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$, $I_{\min} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$. Wzór (3) natomiast w sposób zupełnie ogólny opisuje spójność częściową światła, charakteryzując w granicznych sytuacjach zupełny brak spójności (niespójność) i pełną spójność.

W naszych rozważaniach charakteryzowaliśmy światło czasem spójności t_s , to znaczy czasem, w ciągu którego amplituda i faza fali pozostawały wielkościami stałymi. Czas ten zarówno dla światła termicznego jak i laserowego był dłuższy niż okres drgań fali świetlnej. Przy wyjaśnianiu powstawania prążków interferencyjnych w doświadczeniu Younga skorzystaliśmy z faktu, że czas spójności światła laserowego może być znacznie dłuższy niż czas spójności światła termicznego. Analiza teoretyczna doświadczenia Younga, jaką przeprowadziliśmy, w istocie dotyczyła zachowania się średniej wartości iloczynu dwóch pól elektrycznych $\langle E_1(t)E_2(t') \rangle$. Ta wielkość nazywana jest funkcją korelacji pierwszego rzędu. Istnieją doświadczenia, w których mierzy się uśrednione iloczyny większej niż dwa liczby pól, na przykład $\langle E_1(t_1)E_2(t_2)E_3(t_3)E_4(t_4) \rangle$ — są to funkcje korelacji wyższego rzędu. Na podstawie tych doświadczeń można wykazać, że światło lasera i światło termiczne różnią się nie tylko czasem i obszarem spójności.

W artykule tym przy omawianiu pojęcia spójności pierwszego rzędu wprowadziliśmy uśrednienie, bowiem amplituda i faza fali świetlnej zmieniają się w sposób przypadkowy. W ten sposób uwzględniliśmy statystyczne cechy fali świetlnej. W doświadczeniach, w których mierzy się funkcje korelacji wyższych rzędów wykazuje się, że statystyczne właściwości światła termicznego i laserowego istotnie się różnią.

Na zakończenie podkreśliliśmy jeszcze, że cechy statystyczne pola świetlnego w inny i istotnie głębszy sposób są powiązane z kwantowymi właściwościami światła. Prowadzi to do takiej interpretacji wprowadzonego wyżej pojęcia spójności światła, w której podstawową rolę grają szybkości zliczeń fotonów.



Rozwiązanie zadania F 92. Kolejne ładowanie kondensatorów i połączenie w baterię pozwala uzyskać napięcie $2\mathcal{E}$, zaś ich równoczesne ładowanie tylko \mathcal{E} . Pozostaje więc manipulowanie źródłem i połączonymi kondensatorami. Rozważmy przypadek przedstawiony na rysunku. Napięcie na każdym z kondensatorów wynosi \mathcal{E} , a różnica potencjałów na otwartym wyłączniku równa jest $q_A - q_B = \mathcal{E}$. Dalej też zamknięcie wyłącznika spowoduje przegrupowanie ładunku na kondensatorach. Kondensator 2 doładowuje się i napięcie na nim przekroczy \mathcal{E} , natomiast kondensator 1 ulegnie częściowemu rozładowaniu. Wystarczy teraz ponownie naładować kondensator 1 do napięcia \mathcal{E} i powtórzyć tę operację aż do chwili, gdy napięcie na kondensatorze 2 będzie dostatecznie bliskie wartości $2\mathcal{E}$. Łącząc wtedy kondensatory w szereg różnoimiennymi okładkami otrzymuje się baterię o pożądanym napięciu. Dokonajmy teraz rozważań ilościowych. Niech kondensatory 1 i 2 mają odpowiednio pojemności c_1 i c_2 , napięcia przed i -tym doładowywaniem $u_1^{(i-1)} = \mathcal{E}$, $u_2^{(i-1)}$ oraz ładunki $q_1^{(i-1)} = c_1\mathcal{E}$, $q_2^{(i-1)} = c_2u_2^{(i-1)}$.

Z zasady zachowania ładunku dla zakresowanego obszaru wynika związek

$$q_1^{(i)} + q_2^{(i)} = q_1^{(i-1)} + q_2^{(i-1)} = c_1\mathcal{E} + c_2u_2^{(i-1)},$$

który po wyrażeniu ładunków przez napięcia i pojemności ma postać

$$c_1u_1^{(i)} + c_2u_2^{(i)} = c_1\mathcal{E} + c_2u_2^{(i-1)}. \quad (1)$$

Z rozkładu potencjału wzdłuż obwodu wynika:

$$\mathcal{E} + u_1^{(i)} - u_2^{(i)} = 0. \quad (2)$$

Rozwiązując układ równań (1), (2) uzyskuje się rekurencyjny wzór na napięcie kondensatora 2:

$$\begin{cases} u_2^{(i)} = 2 \frac{c_1}{c_1 + c_2} \mathcal{E} + \frac{c_2}{c_1 + c_2} u_2^{(i-1)} \\ u_2^{(0)} = \mathcal{E}. \end{cases}$$

Ze wzoru tego można wyznaczyć przyrost napięcia podczas i -tego doładowywania

$$\begin{cases} \Delta u_2^{(i)} = u_2^{(i)} - u_2^{(i-1)} = \left(\frac{c_2}{c_1 + c_2} \right) \Delta u_2^{(i-1)} \\ \Delta u_2^{(1)} = \frac{c_1}{c_1 + c_2} \mathcal{E}. \end{cases}$$

Widać stąd, że przyrosty napięć tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $q = \frac{c_2}{c_1 + c_2}$.

Napięcie po N operacjach doładowywania otrzymamy sumując N wyrazów tego ciągu

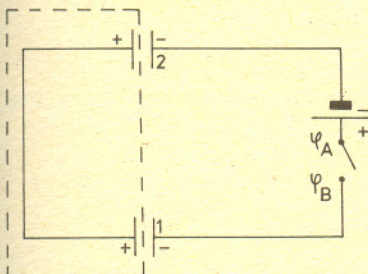
$$u_2^{(N)} = \mathcal{E} + \sum_{i=1}^N \Delta u_2^{(i)} = \left[2 - \left(\frac{c_2}{c_1 + c_2} \right)^N \right] \mathcal{E}.$$

Z zależności tej wynika, że:

1°. $\lim_{N \rightarrow \infty} u_2^{(N)} = 2\mathcal{E}$, co potwierdza rozważania jakościowe,

2°. szybkość narastania jest tym większa, im większa jest wartość ilorazu c_1/c_2 .

W praktyce rzadko zależy nam na wysokim napięciu na baterii kondensatorów. Częściej chodzi o to, żeby energia bądź ładunek wyzwalane podczas rozładowywania były jak największe. Czy wtedy również najlepszy efekt otrzymamy przy dużym stosunku c_1/c_2 ?

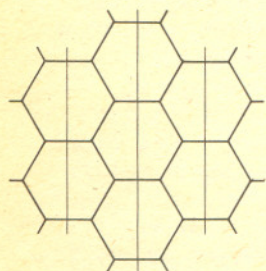




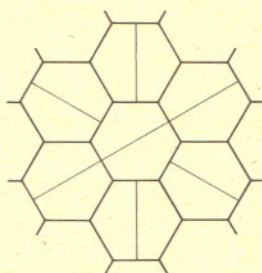
mała delta

Posadzki z pięciokątów

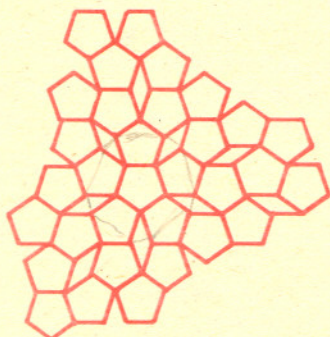
Czy potraficie układać obok siebie kwadratowe kafelki, tak, by zapełniać nimi równomiernie płaszczyznę? Na pewno tak, to żadna sztuka. Nie trzeba też wiele myśleć, aby udało się to z równobocznymi kafelkami trójkątnymi, a nawet z foremnymi sześciokątnymi (rys. 1). Gdy kafelki będą pięciokątne i foremne, zawsze przy układaniu będziemy musieli „sztukować” (np. jak na rysunku 3).



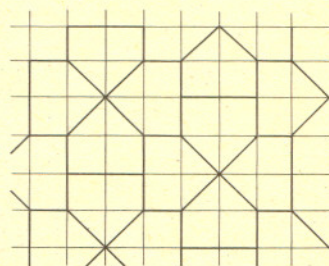
Rys. 1



Rys. 2

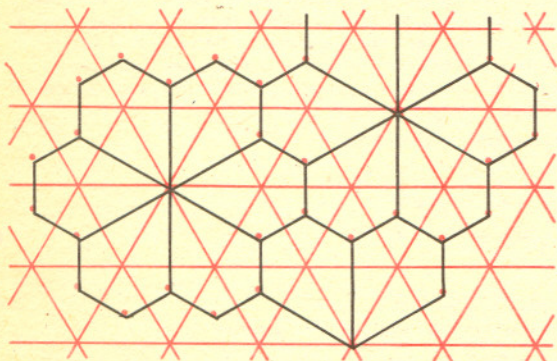


Rys. 3

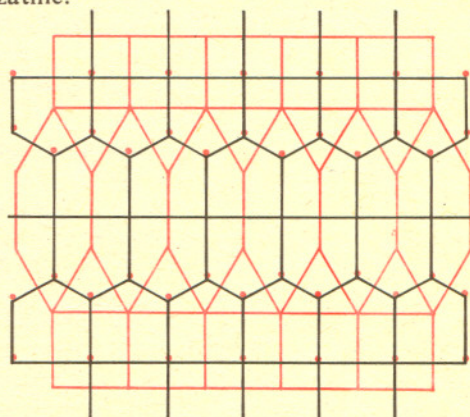


Rys. 4

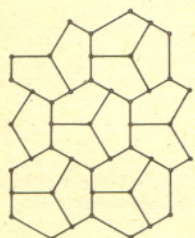
Możemy jednak zapełniać płaszczyznę przystającymi pięciokątami nieforemnymi i otrzymamy też ładne desenie. Na rysunkach 1, 2, 4, 5 i 6 widzicie jak to robić, mając już narysowane siatki kwadratowe, trójkątne czy sześciokątne. Możemy też wypełnić płaszczyznę kwadratami i trójkątami równobocznymi, a uzyskaną tak siatkę przerobić na pięciokątną, tak jak na rysunku 7 albo 8. Nie tak jednak jak na 9; tam zawsze się coś zatnie.



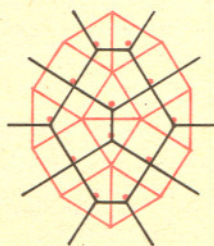
Rys. 5



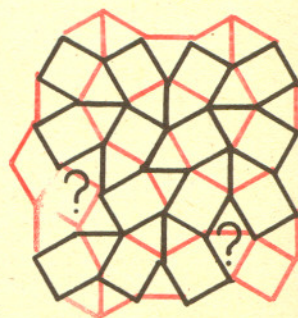
Rys. 7



Rys. 6

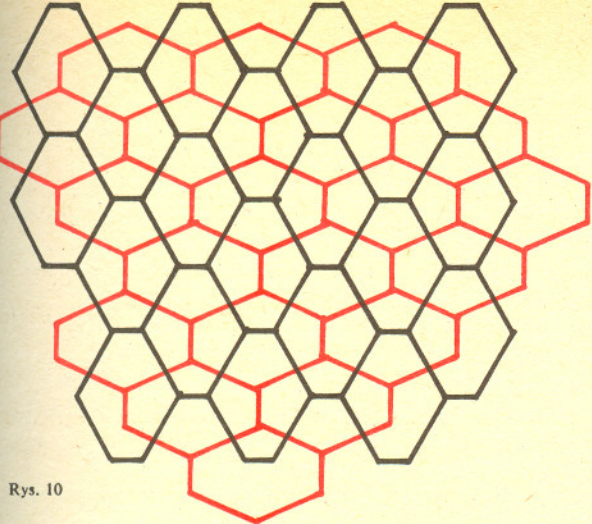


Rys. 8

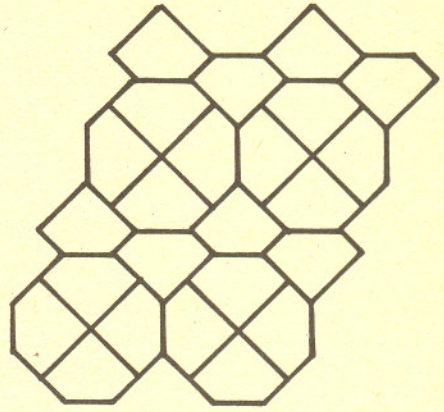


Rys. 9

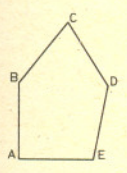
„Posadzka” z rysunku 8 da się otrzymać i w inny ciekawy sposób: przez nałożenie na siebie dwu siatek sześciokątnych (rys. 10).



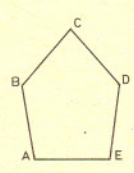
Rys. 10



Rys. 11

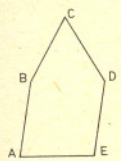


Rys. 12. Kąty tego pięciokąta równobocznego spełniają zależność $2B+C=2\pi$, $2D+A=2\pi$. W przybliżeniu $A=89^{\circ}16'$, $B=144^{\circ}32'30''$, $C=70^{\circ}55'$, $D=135^{\circ}22'$, $E=99^{\circ}54'30''$

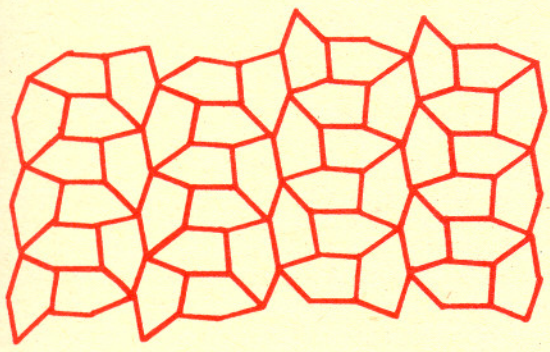


Rys. 13. Tutaj kąty są takie: $2A+B=2\pi$, $2D+C=2\pi$, co w przybliżeniu daje: $A=D=130^{\circ}39'$, $B=C=98^{\circ}42'$, $E=81^{\circ}18'$

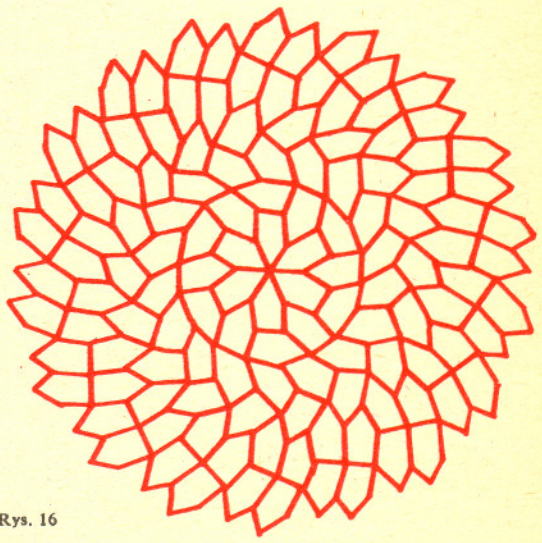
Choć pięciokątami foremnymi zapelnąć płaszczyzny się nie da, możemy użyć równobocznych — nietrudno przerobić tak desenie z rys. 4 i 7. Pomyślcie, jak to zrobić za pomocą pięciokątów z rysunków 12 i 13. Mozaiki złożone z pięciokątów równobocznych o kątach 80° , 160° , 60° , 140° i 100° (rys. 14) widzicie na rysunkach 15 i 16. Zwróćcie uwagę, że niektóre kafelki są odwrócone. Nie umiemy sklasyfikować wszystkich posadzek złożonych z przystających pięciokątów (nawet wypukłych), choć już w 1968 roku R. B. Kershner sądził, że rozwiązał ten problem do końca. W 1975 roku Marjorie Rice, amatorka-matematyczka z Kalifornii, wskazała kilka rozkładów pominiętych przez Kershnera, a potem okazało się, że jego lista ma i większe braki. Lepiej (właściwie do końca) zbadane są posadzki sześciokątne. A może znajdziecie desenie złożone z przystających siedmio-, ośmio-, ..., kątów? Czy dostrzeżecie taki desień na rysunku 17? Nie próbujcie tylko składać posadzki z przystających wielokątów wypukłych o siedmiu czy więcej bokach. Na pewno nie wyjdzie.



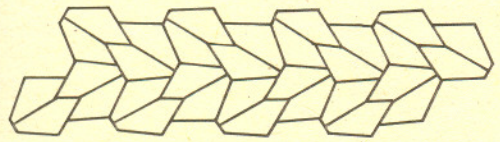
Rys. 14



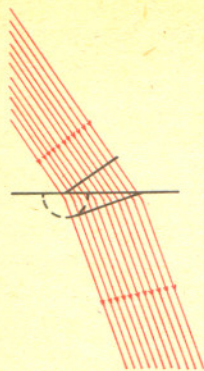
Rys. 15



Rys. 16



Rys. 17



Jednym z najprostszych zjawisk związanych z, tak powszechnym w przyrodzie, ruchem falowym jest załamanie fali. Zjawisko to ma miejsce, kiedy fala pada na granicę dwóch ośrodków, w których fale rozchodzą się z różnymi prędkościami. Dla fali elektromagnetycznej, np. fali świetlnej, zmniejszenie prędkości przy rozchodzeniu się w ośrodku w porównaniu z prędkością w próżni jest wynikiem nałożenia się fal wysyłanych przez pobudzone do drgań czynniki elektronowe atomów, z których zbudowany jest ośrodek i fali padającej. Im większa jest gęstość ośrodka, tym większa modyfikacja fali padającej, a więc mniejsza prędkość. W przypadku fal sprężystych, np. fal dźwiękowych, o prędkości decydują własności mechaniczne ośrodka.

Kiedy grzbiet fali dobiega do powierzchni, na której następuje nagle zmniejszenie prędkości, jeden jego koniec osiąga tę powierzchnię wcześniej niż drugi (rysunek). Na jednym krańcu prędkość zmniejsza się zatem wcześniej niż na drugim, co spowoduje zmianę kierunku przesuwania się grzbietu, podobnie jak zmienia kierunek kolumna piechurów, kiedy jeden koniec każdego rzędu zwolni marsz.

Z łatwością wyobrazicie sobie teraz, jak przebiega to zjawisko, kiedy między ośrodkami nie ma ostrej granicy i prędkość rozchodzenia fali zmienia się płynnie. Wnioski możecie sprawdzić w prostym doświadczeniu.

Na dno dużego naczynia o przezroczystych ściankach nasypcie równą warstwę cukru, a następnie zalejcie go ostrożnie wodą (tak, żeby cały czas leżał na dnie). Powolne rozpuszczanie się cukru spowoduje, że gęstość roztworu będzie duża na dnie i coraz mniejsza wyżej. Na tak przygotowany roztwór skierujcie wąską wiązkę światła z projektora. Zagięcie promienia w kierunku dna akwarium jest wynikiem ciągłej zmiany gęstości cieczy, a co za tym idzie, prędkości rozchodzenia światła.

Zjawisko to, zwane refrakcją, powoduje wiele, często zaskakujących, efektów. Możemy je zaobserwować w atmosferze, ponieważ temperatura, a więc i gęstość powietrza zależy od wysokości nad powierzchnią Ziemi. A oto niektóre z nich:

1. Na znacznych wysokościach powietrze jest rozrzedzone; jego gęstość rośnie przy zbliżaniu się do powierzchni Ziemi. Wywołane tym zagięcie promieni słonecznych, a także światła innych ciał niebieskich powoduje, że pojawiają się one nad horyzontem przed ich rzeczywistym wschodem i są widoczne przez pewien czas po zachodzie. Wydłuża to dzień o kilka minut. A co jest przyczyną spłaszczenia tarczy słonecznej, gdy o zachodzie zbliża się do horyzontu?

2. Dla niewielkich odległości od powierzchni Ziemi (w troposferze rozciągającej się do 20 km) ze wzrostem wysokości temperatura powietrza zazwyczaj spada. W związku z tym prędkość dźwięku w pobliżu Ziemi jest większa niż w wyższych warstwach atmosfery. Fale dźwiękowe pochodzące ze źródła umieszczonego na niewielkiej wysokości zakrzywiają się ku górze.

Dlatego prawie nigdy odgłosy gromów nie są słyszalne z odległości większej niż 25 km i błyskawicy nie zawsze towarzyszy grzmot.

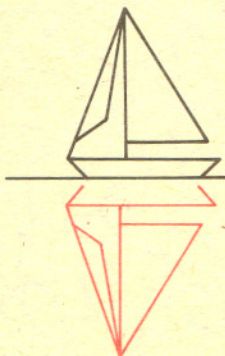
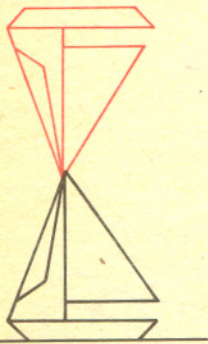
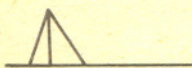
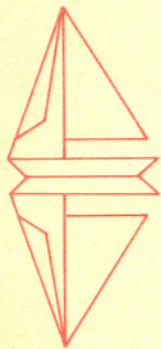
3. Czasami w troposferze temperatura rośnie z wysokością (tzw. inwersja temperatury). W lecie zdarza się to tylko podczas bezchmurnych nocy na wysokościach sięgających kilkudziesięciu metrów. W zimie natomiast temperatura może rosnąć z wysokością także w ciągu dnia, przy czym w nocy wzrost ten sięga kilkuset metrów ponad Ziemię. Powoduje to zaginanie fal akustycznych do dołu, co sprzyja rozprzestrzenianiu się dźwięku na duże odległości. Najłatwiej można zaobserwować to zjawisko nad jeziorem po zachodzie słońca, bo woda parując (wymaga to znacznych ilości ciepła) ochładza otaczające powietrze. Zasięg dźwięku w tym przypadku może się jeszcze zwiększyć w wyniku wielokrotnych odbić od powierzchni wody.

4. Inwersja temperatury odgrywa także dużą rolę w rozchodzeniu się ultrakrótkich fal radiowych i powoduje, że stacje telewizyjne mogą być odbierane daleko poza obszarem „widzianym” z masztu anteny.

5. W kilku miejscach na kuli ziemskiej, nad morzem o zachodzie słońca wyłaniają się zza horyzontu kontury gór czasami tak wyraźne, że można odróżnić poszczególne wierzchołki. Są to obrazy bardzo odległych prawdziwych gór, które stają się widoczne dzięki refrakcji.

6. Innego typu złudzenia powstają w pustyni albo nad rozgrzaną drogą w upalny dzień. W tym przypadku temperatura maleje z wysokością bardzo szybko i promienie idące od błękitnego nieba zaginają się w kierunku obserwatora tak, że widzi on obraz nieba w pewnej odległości przed sobą.

Na rysunku obok widzicie kilka innych, zwielokrotnionych obrazów powstałych na skutek refrakcji w atmosferze. Spróbujcie odgadnąć jak, w każdym przypadku, zmienia się temperatura powietrza z wysokością. Podobnie badając „obrazy” trzęsień ziemi i wywołanych sztucznie wstrząsów podziemnych odgadujemy budowę wnętrza naszej planety.



Pierwszy Rentgen Łabędzia

Mgr Włodzimierz KLUŻNIAK



Łabędź. Czarny, skarłatą trup gwiazdy, która w prehistorii runęła pod własnym ciężarem, pożera swojego gigantycznego sąsiada. Lecz nie doszczętnie. W agonalnych błyskach przepadająca w czeluściach materia zawiadania o swym losie całą Galaktykę. W chwili, gdy strumień twardych fotonów ratując się przed zagładą wyruszył w kierunku Ziemi, otóż w tej właśnie chwili człowiek po raz pierwszy w historii doi zwierzę udomowione — jutro nada nazwę Drodze Mlecznej. Rozpoczął się neolit.

Pięć tysięcy lat później połowę podróży wskazują wycelowane w niebo ostrosłupy piramid. Lecz Łabędzia na niebie dostrzegamy dopiero z grecko-rzymskiego wybrzeża Morza Śródziemnego po dalszych lat dwu i pół tysiącach i tyleż samo przed rozpoczęciem ostatnich przygotowań — a trwały one lat siedemdziesiąt.

W 1895 r. Roentgen stwierdza zaciernienie nie naświetlonej kliszy, Marconi buduje radio, Einstein wstępuje na ETH w Zürichu. Sześć lat później świat poznaje stałą Plancka, rodzi się Heisenberg. W 1939 r. J. Robert Oppenheimer dokonuje syntezy myśli Einsteina i Heisenberga — pokazuje, że gwiazdy neutronowe i czarne dziury mogą istnieć. Sześć lat później świat poznaje inny owoc syntezy Oppenheimera — ginie Hiroshima. Pozostało tylko czekać na dzieła Koroliewa i Wernera von Brauna.

W 1965 roku amerykańska rakietka badawcza odkrywa Pierwszy Rentgen Łabędzia. Sześć lat później z Kenii, kolebki ludzkości, startuje satelita Uhuru (Niepodległość). Stwierdza nagle stwardnienie rentgenowskiego widma Łabędzia, jednocześnie do Ziemi dociera front fali radiowej pozwalający czasom radioteleskopów wskazać dokładne położenie źródła. Na mapach nieba naniesiono pozycję Cygnus X-1.

Czas już przedstawić rozumowanie Oppenheimera dotyczące śmierci i ostatnich dni życia gwiazd. Przedtem wszakże wyjaśnijmy, dlaczego Słońce — olbrzymia kula gorących gazów — nie zapada się pod własnym ciężarem. Dlatego, że w jego sercu zachodzi ciągły wybuch bomby wodorowej; wydziela się bezustannie energia. Ciśnienie promieniowania i ciśnienie kinetyczne gazu wywołane gradientem temperatur dosłownie rozsada od środka gwiazdę równoważąc siły grawitacji. Ale z czasem cały wodór we wnętrzu wypali się pozostawiając po sobie „popioły” helowe. Czy stygnąc Słońce zamieni się w dużego Jowisza, ciało stałe otoczone ciecżą i gazami? W żadnym wypadku. Po pierwsze, gwiazda zapadając się w sobie (po ustaniu podtrzymujących ją reakcji termojądrowych) rozgrzewa się — wyzwala się ogromne zasoby potencjalnej energii grawitacyjnej; jednocześnie rośnie jej gęstość i potężnieją siły ciężenia.

$$\frac{F}{m} = \frac{GM(r)}{r^2}, \quad M(r) = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho.$$

F/m — siła ciężenia oddziałująca na jednostkę masy w punkcie kuli odległym o r od jej środka, $M(r)$ — masa zawarta w kuli o promieniu r , ρ — gęstość gwiazdy.

W końcu ciśnienie i temperatura wzrosną do wartości wystarczających do syntezy węgla z helu — gwiazda odżywa, proces zapadania jest powstrzymany dopóki nie wypali się hel. Lecz wreszcie całe zasoby energii termojądrowej wyczerpią się, wygaśnie ostatnia z możliwych reakcji, co wtedy? Dlaczego gwiazda nie może zamienić się w chłodną kulę węgla, magnezu czy żelaza? Przecież czujemy pod stopami ziemię — nie zapada się ona ani pod własnym, ani pod naszym ciężarem.

Otóż Ziemia składa się z ciasno, w gruncie rzeczy, upakowanych atomów. Rozmiary jej określone są liczbą tych atomów i ich wielkością. Wielkość zaś atomu jest właściwie wyznaczona przez zasadę nieoznaczoności Heisenberga: iloczyn fluktuacji pędu cząstki i fluktuacji jej położenia jest rzędu stałej Plancka, $\Delta p \cdot \Delta x \geq \hbar \approx 10^{-34}$ dżul · sekunda. Istotnie, energia elektronu w atomie wodoru dana jest klasycznym wzorem

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r},$$

p — pęd elektronu, r — jego odległość od jądra; stałe e i m to odpowiednio ładunek i masa elektronu. Czytelnik zechce się przekonać, że E przyjmuje minimalną wartość dla promienia „orbity” elektronu $r = a_0 = \hbar^2 / (m e^2) \approx 0,5 \times 10^{-10}$ m, przy założeniu że pęd i położenie elektronu związane są związkiem zgodnym z zasadą Heisenberga, tzn. $pr = \hbar$ (wszak promień atomu określa zakres możliwych fluktuacji położenia elektronu).

Widać od razu, że (niemała) praca wykonywana przy ściskaniu atomu idzie na zwiększenie energii kinetycznej elektronu. Ma to kapitalne konsekwencje. Wyobraźmy sobie, że byłoby możliwe takie schłodzenie jądra wygasłej gwiazdy, że zamieniałoby się ono w pęczniący kryształ np. węgla. Niestety nie otrzymamy tą drogą potężnej diamentowej kuli — już wkrótce atomy tego diamentu będą poddane tak wysokiemu ciśnieniu (masa Słońca $\approx 10^30$ mas Ziemi!), że zostaną zmiażdżone; elektrony zamykane w coraz cieńszym obszarze nabiorą tak wielkich

pedów, że uwolnią się od przyciągającego działania jąder — wystrzelą jak z procy. Kryształ atomowy roztopi się w ciecz swobodnych elektronów i jąder. Gwiazda będzie zapadać się dalej, niedługo wszakże napotyka ponownie przeszkodę Heisenberga.

Gaz swobodnych elektronów wywiera, niezależnie od temperatury, nawet w zerze bezwzględny ciśnienie. Już w szkole średniej uczą nas, że ciśnienie gazu doskonałego jest proporcjonalne do n , liczby jego „atomów” w jednostce objętości, do średniej prędkości „atomów” v i ich średniego pędu p :

$$P = kn v p, \text{ gdzie } k \text{ jest liczbą bliską jedności.}$$

W naszym przypadku „atomami” są elektrony. Dla niezbyt wielkich prędkości można stosować nierelatywistyczny wzór $p = m_e v$, skąd znany związek

$$P \approx n \cdot m_e v^2 = n \frac{p^2}{m_e} \approx n \cdot E_{\text{kin}}.$$

(Dla gazów rozrzedzonych średnia energia kinetyczna jest rzędu temperatury pomnożonej przez stałą Boltzmann, co przy uwzględnieniu równości $n = N/V$ daje oczywiście $P_{\text{kin}} V = NkT$; ciśnienie tu występujące nazywamy kinetycznym).

W jednostce objętości jest n elektronów, nieoznaczoność położenia elektronu jest zatem rzędu $n^{-1/3}$ i pęd $p \approx \hbar/r = \hbar n^{1/3}$. Przy niewielkich gęstościach p jest niewielkie, zatem

$$P \approx n \frac{p^2}{m_e} \approx \frac{\hbar^2}{m_e} n^{5/3} \sim \rho^{5/3}.$$

Przy wielkich gęstościach pędy są olbrzymie i elektrony poruszają się praktycznie z prędkością światła ($v = c$). Mamy od razu

$$P \approx ncp \approx \hbar c n^{4/3} \sim \rho^{4/3}.$$

Widzimy, że w obu wypadkach to tzw. ciśnienie degeneracji nie zależy od temperatury i rośnie ze wzrostem ρ szybciej od ciśnienia kinetycznego ($P_{\text{kin}} \sim \rho T$), a więc musi odgrywać przy znaczniejszych gęstościach rolę dominującą.

Dla pewnego zakresu mas gwiazdy ciśnienie degeneracji elektronów równoważy siły grawitacji — powstaje i istnieje biały karzeł, w każdym jego cm^3 mieści się 100 kg materii, Słońce mieści się w rozmiarach Ziemi. Im masywniejszy biały karzeł, tym mniejszy (większe ciśnienie — większa gęstość — mniejsza objętość).

Powyżej 1,4 mas Słońca (ta granica Chandrasekhara nie uwzględnia możliwości bardzo szybkich obrotów ani możliwości występowania bardzo silnych pól magnetycznych) karzeł nie może już znieść własnego ciężaru, zapada się „pod ziemię”. Elektrony, nie mogące istnieć w takim tłoku (zakaz Pauliego) łączą się z jądrami, te zaś łączą się ze sobą, powstaje gęsta zupa neutronowa. Tu po raz ostatni może interweniować Heisenberg, trzeba tylko zastąpić m_e w (1) blisko 2000 razy większą masą neutronu. Gigantyczna kropla zupy przestaje się zapadać w sobie, z wierzchu pokrywa się skorupą.

Gwiazdy neutronowe są małe (promień ~ 10 km), ich gęstość sięga 10^{14} g/cm³.

Obserwowane są jako tzw. pulsary, wirując błyskawicznie wokół swej osi, promieniowaniem wysyłanym z małego obszaru powierzchni omiatają kosmos niczym latarnia morska. Nie ma pewności, jak bardzo mogą być masywne. Górna granica ich masy musi być jednak mniejsza od 3 mas Słońca. I to jest klucz do czarnej dziury. Gwiazdy masywniejszej, o ile nie znajdzie ona sposobu na pozbycie się nadwagi (np. w eksplozji supernowej), nic nie powstrzyma, zapadnie się, skurczy, czernieje. To samo spotka gwiazdę, na której barki spadnie zbyt wielki ciężar przyciąganej przez jej pole grawitacyjne materii — zewnętrznych warstw poruszającej się po ciasnej orbicie sąsiadki, gwiazdy, z którą stanowi układ podwójny. Gdy masa krytyczna zostanie przekroczona, nie pomoże już nic, nawet panczer 10^{17} razy sztywniejszy od stali — czyli krystaliczna skorupa gwiazdy neutronowej. Powstaje czarna dziura.

Przy okazji zastanówmy się, ile energii wyzwala się przy spadku materii na zwarty obiekt, jak to się dzieje w wielu układach podwójnych. Już w wypadku gwiazdy neutronowej GMm/r sięga 30% energii spoczynkowej (mc^2) spadającej masy m ($G \approx 7 \cdot 10^{-11}$ J m/kg², $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s, $M_{\text{Słońca}} \approx 2 \cdot 10^{30}$ kg, $r_{\text{gw. neut.}} \approx 5 \cdot 10^3$ m). Jest to proces wielokrotnie wydajniejszy od dowolnej reakcji jądrowej! Nic dziwnego, że w takich warunkach ma miejsce potężna emisja promieniowania rentgenowskiego.

Czarna dziura jest całkiem nieduża, jej promień to $2,95 \frac{M_*}{M_{\odot}}$ km. Nie pamięta swej

przeszłości, zatraciła tożsamość; wszystkie jej własności są określone trzema liczbami: masą, ładunkiem elektrycznym i momentem pędu.

Wszystko, co zbliży się za bardzo do czarnej dziury, nieknie bezpowrotnie pod jej horyzontem, łącznie ze światłem. Jej samej nie widać nawet z bliska. Trzeba było całego doświadczenia astronomii, by dojrzeć ją z odległości 10 000 lat świetlnych. Oto przesłanki:

1) W znanych już okolicznościach określono położenie na sferze niebieskiej źródła rentgenowskiego Cygnus X-1. Pokrywa się ono z położeniem gwiazdy widocznej w nodze Łabędzia gołym okiem, zaksięgowanej niegdyś pod numerem HDE 226868. Jej widmo



Rozwiązanie zadania M 260. Dowolną prostą prostopadłą np. do p odbijamy symetrycznie względem q i względem r . W przecięciu obrazów znajduje się wierzchołek poszukiwanego trójkąta. Opisany przepis może jednak zawieść (kiedy?). Wówczas zmieniamy p na q i udamy się na pewno.



wskazuje, że to nadolbrzym typu B, gorąca niebieska gwiazda; skoro tak, to jej obserwowana jasność wskazuje na oddalenie podane wyżej. Mogłaby to też być mała gwiazda niedawno odkrytego typu HZ 22 o podobnym widmie, wtedy leżałaby całkiem niedaleko, około 600 lat świetlnych stąd (fatalne dla hipotezy czarnej dziury). Ale nie jest, jej obserwowany kolor jest żółty, zatem jej światło musiało przejść przez znaczną ilość materii, rozpraszającej wszak błękit — efekt widziany codziennie na niebie. Badanie gwiazd leżących w tym samym kierunku co HDE 226868, których typ widmowy i odległość wyznaczono bezspornie, wykazało u nich mniejsze poczerwienienie, a więc są one bliżej nas. HDE 226868 musi być odleglejsza od najdalszej z nich — leżącej w odległości 4500 lat świetlnych — zatem faktycznie jest to nadolbrzym widziany z odległości 10 000 lat świetlnych!

2) Widmo tego nadolbrzyma wykazuje periodyczne przesunięcia Dopplera. Gwiazda ta, o masie 30 mas Słońca krąży wokół niewidocznego towarzysza. Z analizy ruchu wynika, że towarzysz ma masę $5 \div 6$ mas Słońca.

3) Materia nadolbrzyma spada na towarzysza — widać to po liniach emisyjnych wodoru i helu, których przesunięcie dopplerowskie jest inne niż widma samego nadolbrzyma.

4) Widmo rentgenowskie Cygnus X-1 wykazuje zmienność nawet w skali milisekund. Oznacza to, że obszar wysyłający promieniowanie X ma rozmiary najwyżej milisekundy świetlnej, $0,5 \cdot 10^{-3} \text{ s} \times 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 150 \text{ km}$.

5) Według obecnego stanu wiedzy nie ma tak zwartych i zarazem tak masywnych obiektów innych niż czarne dziury.

Trwają poszukiwania krewnych Łabędzia X-1. Jak dotąd — jest tylko paru niezbyt pewnych kandydatów.

Patrz w niebo

Znowu wysoko na niebie wznosi się wieczorami znany już chyba wszystkim Wolarz (który zawsze bardziej przypomina mi maczugę) z jasną gwiazdą Arkturem (która dla mnie oznacza rękojeść), o której pisaliśmy równo rok temu. Obok — diadem tworzący konstelację Korony Północnej (*Corona Borealis*).

W tym bardzo małym gwiazdozbiornie, mając dobry wzrok i odrobinę szczęścia (obiekt jest 6 wielkości gwiazdowej przeważnie) można dostrzec jedną z ciekawszych gwiazd naszego nieba. Najjaśniejsza zmienna gwiazda w danej konstelacji przeważnie nazywa się zwyczajowo *R*, tak więc i ta, o której przed chwilą wspomnieliśmy, odkryta przez Anglika E. Pigotta w 1795 r., została ochrzczone *R Coronae Borealis* (*R CrB*). (Ściśle mówiąc, literę *R* (a potem *S*, *T* itd.) otrzymały najczęściej odkryte gwiazdy zmienne w poszczególnych gwiazdozbiornach)

R CrB co parę lat nagle wielokrotnie słabnie — czasem 10-krotnie, a czasem 10 tysięcy razy.

W swoim minimum nie przebywa przeważnie dłużej niż kilka miesięcy, po czym powoli wraca do swojego normalnego stanu. Gwiazda ta jest często nazywana „zmienną idealnie nieregularną”, ponieważ momenty spadku jasności „nie trzymają się” żadnych zależności, oprócz jednej: długość okresu między dwoma spadkami jasności jest czysto przypadkowa.

Obecnie znamy około 70 gwiazd zachowujących się w podobny sposób oraz mających wiele innych, wspólnych i ciekawych cech. Jedną z takich cech jest fakt, że atmosfera *R CrB* i innych obiektów tej klasy składa się w blisko 70% z węgla (!). Skład chemiczny atmosfery naprowadził w latach trzydziestych włoskiego astronoma E. Loretę na pomysł, który pozwolił mu zbudować „model” *R CrB*, który to model w najgrubszym zarysie utrzymał się do dzisiaj.

Otóż węgiel będący w atmosferze gwiazdy jest powoli wyrzucany w przestrzeń dzięki mechanizmowi tzw. wiatru gwiazdowego (znanego nam m.in. ze Słońca). Temperatura oddalającego się od gwiazdy węgla maleje, co pozwala mu w pewnej odległości krystalizować. Powstaje otoczka pyłu grafitowego, która powoli grubieje. Utrzymuje się ona mniej więcej w stałej odległości od gwiazdy dzięki równowadze siły przyciągania grawitacyjnego i ciśnienia wywieranego przez fotony wyświecane przez gwiazdę. W pewnym momencie wewnętrzna część otoczki jest już tak gruba, że nie przepuszcza dostatecznie dużej ilości fotonów potrzebnych do podtrzymania części bardziej odległej. I nagle równowaga sił załamuje się i cały grafit spada na „powierzchnię” gwiazdy, stając się jeszcze bardziej gęstym, nieprzezroczystym i powodując silny spadek jej jasności. Wnętrze atmosfery, nie chłodzone przez opuszczające ją fotony rozgrzewa się, opadły pył zamienia się w gaz, następuje powoli wzrost ciśnienia promieniowania na atomy, między innymi węgla i cały proces zaczyna się od początku.

Model ten w ciągu kilkudziesięciu lat ulegał wielu poważnym i szczegółowym modyfikacjom, jednak jego trzon pozostaje do dzisiaj „linią pertyjną” wyjaśniania zmienności gwiazd typu *R Coronae Borealis*.

mgr Tomasz CHLEBOWSKI

KTO WYMIERZY URSYNÓW?

Po wyłożeniu Geometrii teoretycznej w klasie IV: X. Wolicki Professor Matematyki dla zastosowania teorii do praktycznego wymiaru na gruncie wymierzył z Uczniami za pomocą stolika Wieś Grochów z przyległymi polami. Przekonawszy Uczniów o niedogodności w wielu przypadkach tego narzędzia, okazał w praktyce obszerniejszy użytek Bussoli i Kątomiaru, którymi narzędziami wyznaczył położenie Wsi Goławia, tudzież znakomitsze gmachy Warszawy ze strony Wschodniej widziane. Plany tych trzech działań okazał Uczniowie.
(z programu popisu publicznego uczniów szkoły księży pijarów w Warszawie, 1819 r.)

Zapomniana jednostka

TRALES wódka na 45 tralessów (stopni).
Od nazwiska wynalazcy alkoholometru,
Trallesa.

Julian Tuwim, *Polski słownik pijacki*

Kącik czytelnicy

Rozum ludzki jest substancją i początkiem wszystkich nauk matematycznych, stąd, jeśli człowiek sądzi zdrowo o rzeczach dających się obliczyć i wymierzyć, może przyjść z czasem do pojęcia i wykonywania dzieł mechanicznych.

Daniel Defoe „*Robinson Kruzo*”
przeł. Józef Birkenmajer

Przyjmijmy, że kołarze jadą zwykle z prędkością 40 km/godz. Ten z rozmówców, który oszacował czas przyjazdu kołarzy na 16³⁰ przyjął, że kołarze jadą własnie z taką prędkością (miasteczko było zatem o ok. 40 km od Warszawy). Skoro jednak kołarze pojawili się już o 16¹⁵, a telewizja podala przed chwilą, że w Warszawie będą o 17³⁰. To te 40 km przejadą w około 1¹⁵ godzinny, a więc jadą wolniej.

O DZIELENIU ALBO DYWIZYI

Postaw lewą pod lewą w liczby rozdzielaniu
Naśladując Chrześcian, nie żydów w pisaniu
A od nich poczynając, Kwotusa pierwszego
Szukaj i moltiplikuj przezeń Dzielaćcego
Toż produkt z podzielnego wyjmij: a pódz z Restą
Dla wtórego Dzielnika, pod linijkę prostą
I przystaw notę z której produkt nic nie wyjął
Z podzielnego ze reste, żeby ją w rząd przyjął
Nowy podzielnny: z resty i niejże złożony.
A ten charakter ma być kommą naznaczony.
Pomknij potem Dzielnika jedną liczbę niżej,
Szukaj Kwota wtórego, jakoś czynił wyżej:
Produkt gdy równy wyjdzie, albo blisko mniejszy
Podzielnemu: Wieleraż przypadł najpewniejszy.
Chce Wieleraż produkt większy pomniejszego
Gdy nie możesz produktu wyjąć z podzielnego,
Ilekróć zaś Ostatek jest równy lub większy,
Od Dzielnika samego; Wieleraż jest mniejszy.

$$\begin{array}{r} 399282 : 695 \\ \underline{5} \\ 399282 : 695 \\ \underline{3475} \\ 5 \\ \underline{399282 : 695} \\ 3475 \\ \underline{5178} \\ 574 \quad 352 \\ \underline{399282 : 695} \\ 3475 \\ \underline{5178} \\ 4865 \\ \underline{3132} \\ 2780 \\ \underline{352} \end{array}$$

Powyższy opis zacerpnęliśmy (i uzupełnili przykładem liczbowym) z książeczki „Geometra Polski” Stanisława Solskiego, wydanej w 1683 roku — a właściwie z wydanego w 1863 r. przedruku.

Oto jeszcze algorytm na wyciąganie pierwiastka kwadratowego.

O WYCIĄGANIU ŚCIANY KWADRATOWEJ Z LICZBY DANEJ. RADICIS QUADRATAE.

Geometra chcąc Ścianę wyciągać Kwadratu,

$$\sqrt{213444} = ?$$

Używa na tę trudność, tego apparatusu.
Od prawej ręki dzieli po dwa charaktery;

$$21 | 34 | 44$$

Lewy Wydział, może mieć jedną, dwie litery.
Tego Ścianę najbliższą za Lunetą stawia

$$21 | 34 | 44 \quad | \quad \underline{\quad 4 \quad}$$

Produkt jej bierze z Działu: i Reście przystawia
Drugi najbliższy wydział:

$$\begin{array}{r} 21 | 34 | 44 \quad | \quad \underline{\quad 4 \quad} \\ 16 \\ \hline 5 \quad 34 \end{array}$$

duplikuje Kwota:

Duplę pisze pod nowym Podzielnym, by nota
Prawa, padła pod lewą, wydziału wtórego

$$\begin{array}{r} 21 | 34 | 44 \quad | \quad \underline{\quad 4 \quad} \\ 16 \\ \hline 5 \quad 34 \\ (8) \end{array} \quad \begin{array}{r} \underline{\quad 4 \quad} \\ 2 \cdot 4 = 8 \end{array}$$

Szuka Kwota dalszego

$$53 : 8 = 6$$

w literach górnego

On za lunką i duplą ścianę wypisuje

$$\begin{array}{r} 21 | 34 | 44 \quad | \quad \underline{\quad 4 \quad} \\ 16 \\ \hline 5 \quad 34 \\ (8) \end{array} \quad \begin{array}{r} \underline{\quad 4 \quad} \\ 2 \cdot 4 = 8 \quad | \quad 86 \end{array}$$



Mnoży przezeń Dziеляcy:

$$86 \cdot 6 = 516$$

Produkt odejmuje:

Z Restą łączy dział trzeci:

$$\begin{array}{r|l} 21 \mid 34 \mid 44 & 46 \\ \hline 16 & \\ \hline 5 & 34 \\ 5 & 16 \\ \hline 18 & 44 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} & 46 \\ \hline 4 & 86 \\ 2 & 6 \\ \hline 8 & 516 \end{array}$$

Kwota duplikuje

Całego:

$$2 \cdot 46 = 92$$

cztery wiersze bliższe replikuje,

$$\begin{array}{r|l} 21 \mid 34 \mid 44 & 462 \\ \hline 16 & \\ \hline 5 & 34 \\ 5 & 16 \\ \hline 18 & 44 \\ & (9 \ 2) \\ \hline 18 & 44 \\ & 0 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} & 462 \\ \hline 4 & 86 \\ 2 & 6 \\ \hline 8 & 516 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 184 : 92 = 2 & 922 \\ \hline & 2 \\ \hline & 1844 \end{array}$$

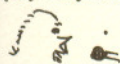
NASZ WYWIAD



Oczywiście, odnowa dokonująca się w naszej brojlerni byłaby niepełna, gdybyśmy nie naprawili krzywd wyrządzonych tym z najbardziej zaangażowanych, którzy padli ofiarą.



Tak, między innymi i 153852.



Trzymano go z dala od jego rodzinnej brojlerni, tucząc najlepszą importowaną paszą treściwą i od czasu do czasu pokazywano publicznie.



Oczywiście, taka dieta i taki tryb życia musi doprowadzić do otłuszczenia imponerabiliów. A poza tym nie pokazywano go ostatecznie często.



Tak, teraz jest szczęśliwy, że jest wśród nas i może służyć swym talentem i oświadczeniem.



Oczywiście, zre to samo, co i przedtem, ale teraz, to całkiem co innego.



Dziękuję w imieniu czytelników IBT za interesujący wywiad.



TERAZ BĘDZIE INACZESJ!

PLACZESKO?

Nasz Słownik Wyrazów Obcych.

Restauracja: łac. restauratio od restaurare - odnowić.

1. Knajsja
2. Odnowa. Patrz np. Restauracja Bourbonów po upadku Napoleona.

Tyle razy, ile jest parzystych wydzielnich, Według geometrycznych Reguł, nieomelnych. Resta cała po Ścianie nad linijką stawa; Dwójściana, z jednym, niby Frakta, pod nią dawa. Próba*) ściany jest pewna, gdy Ścianę wprowadzisz W onęz samą; Rest przydasz, a daną wysadzisz.*)

[* Kolejne cyfry znajdowane mogą być za duże; jeśli odejmowanie („Produkt odejmuje”) nie da się wykonać, to trzeba cyfrę zmniejszyć o 1]

Fascynujący wierszowany opis sposobu wyciągania pierwiastka 3 stopnia zamieścimy w innym numerze.

Współczesna poezja matematyczna nie jest tak piękna. Oto próbki piosenki reklamowanej jako „hymn matematyków”

Oj myślę ja se myślę, aże sam się śmieję
Oj cemu to zbiór syćkich zbiorów nie istnieje.
Byłby to tyż hałas spory, kieby zebrać syćkie zbiory
Oj dana, dana ...

Myślę ja se myślę od samego rana
Cemu całka Lebesgue'a lepsa od Riemanna
Głupio będzie Riemanowi, jak sie w grobie o tym dowi ...

i tak dalej. Jest jednak i poezja użytkowa. Jedna z naszych koleżanek, ucząc się do egzaminu z topologii na III roku studiów matematycznych, ułożyła następujący wiersz służący do zapamiętania tezy twierdzenia Nagaty-Smirnowa o metryzowalności

Warunkiem równoważnym na to, aby przestrzeń cała
Przez pewną się metrykę zmetryzować dała
Jest: by regularną była i taką bazę mieściła,
By baza rzeczona była sigma-lokalnie skończona.

Pierwsze pytanie, jakie otrzymała na tym egzaminie, brzmiało:
„Proszę sformułować twierdzenie Nagaty-Smirnowa”. Wyobraźcie sobie, że postanowiła odpowiedzieć prozą!