

SPIS TREŚCI

NUMERU 3 (87)

Z geometrii głębokiego interioru:
kontinua nierozkładalne
prof. dr Jerzy Mioduszewski str. 1

Elektromagnetyczne
detektory fal
grawitacyjnych
*doc. dr Leonid Griszczuk,
dr Michail Sażin* str. 4

O prostych i płaszczyznach
współstożkowych
Zbigniew Jelonek str. 7

Mała Delta str. 8

Początki metody
aksjomatycznej
dr Jan Waszkiewicz str. 10

Zadania str. 11

Gdzie zbudować sklep str. 12

Patrz w niebo str. 13

Deszcz
prof. dr Krzysztof Haman str. 14

Wstecz w czasie
doc. dr Michał Świącki str. 17

W następnym numerze:
Czego nie wiemy

„Delta”
matematyczno-fizyczno-astronomiczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny:
doc. dr Jerzy Bartke
doc. dr Andrzej Bączyński
doc. dr Bolesław Gleichgewicht
prof. dr Kazimierz Goebel
doc. dr Bolesław Grabowski
dr Jan Hanasz
doc. dr Bolesław Iwaszkiewicz
doc. dr Tadeusz Iwiński
doc. dr Andrzej Januszajtis
doc. dr Tadeusz Jarzębowski
prof. dr Leon Jeśmanowicz
dr Henryk Kaczorek
prof. dr Marek Kuczma
mgr Andrzej Mąkowski
prof. dr Bohdan Paczyński
prof. dr Zdzisław Pawlak
prof. dr Arkadiusz Piekara
doc. dr Sławomir Ruciński
prof. dr Konrad Rudnicki
prof. dr Zbigniew Semadeni
doc. dr Grzegorz Sitarski

prof. dr Józef Smak
prof. dr Jan Stankowski
doc. dr Kazimierz Stępień
prof. dr Mieczysław Subotowicz
doc. dr Stefan Turnau
prof. dr Jerzy Wdowczyk
doc. dr Andrzej Woszczyk
prof. dr Janusz Zakrzewski —
wiceprzewodniczący
prof. dr Wojciech Żakowski —
przewodniczący

Redaguje Kolegium w składzie:
mgr Tomasz Chlebowski
mgr Maciej Jędrzejczak
dr Marek Kordos — red. nac.
dr Krzysztof Prażmowski — red. techn. graf.
mgr inż. arch. Kamila Staszko — ilustracje
dr Michał Szurek
mgr Krystyna Szypcio — sekr. red.
doc. dr Michał Świącki — z-ca red. nac.

Adres Redakcji
ul. Hoża 69 pok. 151,
00-681 Warszawa

Zakład Narodowy im.
Ossolińskich — Wydawnictwo
Wrocław, Oddział w Warszawie
Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.
wyd.; 2,50 ark. druk.;
papier offsetowy III kl. 80 g. 61 × 86
Wydrukowano w Drukarni im.
Rewolucji Październikowej
Warszawa, ul. Mińska 65
Nr zam. 1408/12/80 L-30

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60—, cena prenumeraty półrocznej zł 30—

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach:
— do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i cały rok następny
— do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego.
Jednostki gospodarki społeczno-politycznej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienie w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”.
Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW, oraz prenumeratorki indywidualni zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.
Prenumeratę ze złozeniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTA”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.
Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.
Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Konto PKO I OM W-wa 1531-912

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław
w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa
w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7 00-068 Warszawa, Poland or with
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland.
— Earls Court Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain,
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia

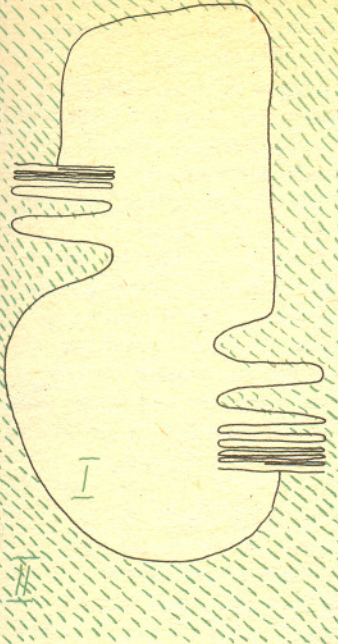
Cena 1 egzemplarza zł 5— nr indeksu 35723/35550

Z geometrii głębokiego interioru: kontinua nierozkładalne

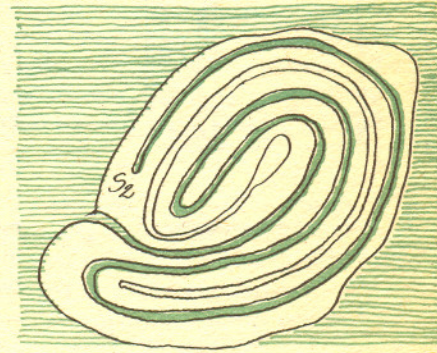
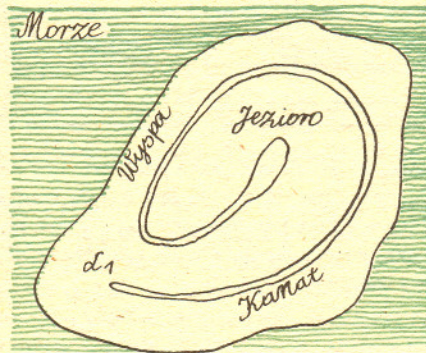
Prof. dr Jerzy MIODUSZEWSKI

Jeszcze w r. 1908, pisząc o wspólnym brzegu dwu obszarów płaskich (z których jeden jest ograniczony), Schönflies uważał, że można ten brzeg rozłożyć na dwa łuki krzywe (przez łuk krzywy rozumiał w tym przypadku kontinuum nie rozcinające płaszczyzny lub, co na jedno tu wychodzi, kontinuum różne od całego brzegu). Był to błąd, który sprostował Brouwer w pracy „*Zur Analysis Situs*” (Mathematische Annalen 68 (1910), 422—434). Przez *analysis situs* rozumiano wtedy topologię w klasycznym dla nas teraz zakresie, gdzie bada się te „własności utworów geometrycznych, które nie znikną, gdy twory przekształcimy w dowolny sposób ciągle i jednoznaczny, czyli takich, które nie znikną po dowolnym wygięciu i rozciągnięciu bądź skurczeniu się figury (bez rozdarcia i bez zlepiania w jakimkolwiek miejscu)”, jak o tym pisał Janiszewski w artykule „*Topologia*”, str. 387—401, tomu I Poradnika dla samouków, Warszawa 1915. Rozprawa Schönfliesa uważana jest dotąd za dzieło, które nadało kierunek topologii, chociaż Brouwer wyliczył w niej pięć błędów (była mowa o jednym), a o dwu stwierdzeniach wyraził się jako o niepewnych.

Konstrukcja Brouwera dwu obszarów o wspólnym brzegu nie dającym się rozłożyć na dwa kontinua różne od całości weszła do literatury i do folkloru matematycznego w anegdotycznej formie jezior Wady (od nazwiska autora pomysłu), znanej z pracy Yoneyamy (1917): „Wyobraźmy sobie wyspę, na niej jezioro i następujący program budowy kanałów nawadniających. Pierwszego dnia ma być poprowadzony ślepo kończący się kanał wychodzący z jeziora tak, aby od każdego miejsca pozostawionego lądu było nie dalej niż 1 km do wody z jeziora (jak na rysunku po lewej; przez L_1 oznaczone jest zakończenie kanału). Drugiego dnia ma być poprowadzony kanał wychodzący z morza, kończący się ślepo i prowadzony tak długo, aby od każdego miejsca pozostawionego lądu było nie dalej niż 1/2 km do wody morskiej (rysunek po prawej; przez S_2 oznaczone jest zakończenie kanału).



Rys. 1. Błąd Schönfliesa: wspólny brzeg tych dwu obszarów (I i II) jest sumą dwu łuków krzywych (A i B); okazuje się, że nie zawsze tak bywa.



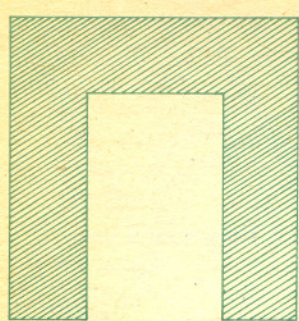
Rys. 2. Jeziora Wady; rysunki z pracy Yoneyamy.

Trzeciego dnia ma być przedłużony pierwszy kanał poczynając od miejsca L_1 , i ma być prowadzony tak długo, aby od każdego miejsca pozostawionego lądu nie było dalej niż 1/3 km do wody z jeziora.

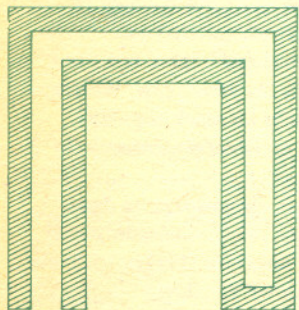
Postępując tak w nieskończoność, na przemian z wodą morską i z jeziora, dojdziemy do tego, że z wyspy pozostanie jedynie pewien podzbiór (domknięty) rzadki i taki, że dowolnie blisko każdego jego punktu będzie można znaleźć zarówno wodę morską jak i wodę z jeziora: będzie to wspólny brzeg dwu obszarów, morza i jeziora”.

Nie było to dosłowne tłumaczenie z Yoneyamy; np. odległości nie były tam mierzone w kilometrach. W książce Aleksandrowa „*Kombinatorna topologia*” kolejne etapy budowy kanałów mają trwać 1, 1/2, 1/4, ... godziny, przez co praca nie potrwa za długo. W książce Hockinga i Younga „*Topology*” kanały budowane w kolejnych dniach mają być tak wąskie, że zajmą 1/10, 1/100 etc. powierzchni wyspy, przez co pozostały wspólny brzeg będzie miał pole dodatnie; szkoda, że w sensie Lebesgue’a.

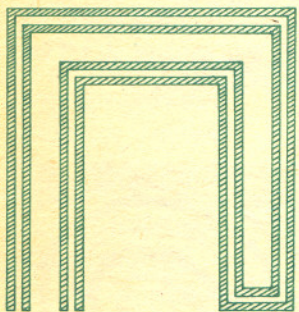
Dowód, że ten wspólny brzeg jest nierozkładalny, tj. że nie ma rozkładu na dwa kontinua różne od całości, jest nie do przeprowadzenia, jeśli się ma jedynie taki anegdotyczny opis, który zresztą nie jest jednoznaczny. Urysohn w „*Cantorsche Mannigfaltigkeiten*” (1926) wprost pisze, że instrukcja Yoneyamy nie wystarcza dla przeprowadzenia takiego dowodu; można np. nie wykonywać jej w ten idealny sposób, jak to zrobił Brouwer i jak podpowiada najprostsza wyobraźnia (Brouwer, mimo że dał jednoznaczny opis, nie podał dowodu nierozkładalności swego kontinuum).



a)



b)



c)

Rys. 3. Pierwsze kroki konstrukcji Janiszewskiego.

Poprzedzamy na uwagach (poprzezają na nich również Brouwer i Yoneyama), że mając wyspę i na niej dwa jeziora można podobnym sposobem otrzymać wspólny brzeg trzech obszarów, i że podobnie, dla każdego naturalnego $n \geq 1$, można zbudować wspólny brzeg n obszarów, oraz że można podobnie zbudować wspólny brzeg nieskończenie wielu obszarów.

Prace Kuratowskiego (1924 i 1928) wyjaśniły, czym może być brzeg jezior Wady: jeśli jest to wspólny brzeg trzech obszarów, to jest to kontinuum nierozkładalne lub suma dwu kontinuinów nierozkładalnych. Przykłady Knastera (1927) pokazały, że obie możliwości się realizują.

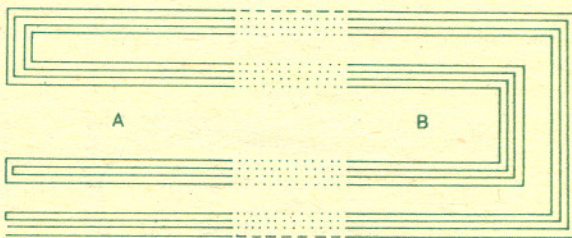
Janiszewski w swojej Tezie (1911) opisał kontinuum nierozkładalne, które stanowi esencję przykładu Brouwera. Nie rozspaja ono płaszczyzny (w przekładzie na język z pracy Yoneyamy znaczyłoby to, że nie ma jeziora na wyspie i prowadzi się kanały jedynie z morza).

Aby zbudować to kontinuum, z kwadratu C_1 podzielonego na 9 równych kwadratów (tak jak w konstrukcji Peany) usuwamy dwa kwadraty bez brzegu z dołu środkowego pionowego pasa (rys. 3a). Każdy kwadrat pozostałości C_2 , która przypomina wstęgę, dzielimy znowu na 9 równych kwadratów i usuwamy z tej wstęgi środkowe pasmo kwadratów otwartych (pasma o szerokości $1/9$) zaczynające się na brzegu w lewym dolnym kwadracie wstęgi C_2 i kończące się w prawym dolnym kwadracie (ostatnim) tej wstęgi, nie dochodząc wszakże do jej brzegu, tak, że pozostałość C_3 jest również wstęgą (rys. 3b). Tę pozostałość rozcinamy podobnie jak przedtem wstęgę C_2 ; powstaje wstęga C_4 (rys. 3c).

Otrzymane kolejno wstęgi C_n dają w przekroju kontinuum.

Dowód nierozkładalności tego kontinuum da pojęcie o innych takich dowodach.

Dla jego przeprowadzenia przyjrzymy się podkontinuum różnym od całości. Dla każdego takiego podkontinuum istnieje wstęga C_n , a w niej kwadrat wolny od punktów takiego podkontinuum; taki kwadrat rozcina wstęgę C_n (na rysunku pokazana jest w formie rozprostowanej) lub wstęgę następną C_{n+1} . Dopełnienie takiego kwadratu składa się z dwu części: przekrój każdej z nich z kontinuum Janiszewskiego jest wiązką odcinków nad zbiorem Cantora, prostych (jak w części B na rys. 4), lub zgiętych (jak w części A). W obu przypadkach podkontinuum musi być podzbiorem jednego z odcinków wiązki. Jest więc rzadkie w całości.



Rys. 4. Po usunięciu jednego kwadratu ze wstęgi C_n kontinuum Janiszewskiego rozpada się na dwie wiązki odcinków rzadkich w tym kontinuum.

Teraz widać, że kontinuum Janiszewskiego jest nierozkładalne, bo skoro każde jego podkontinuum różne od całości jest w nim rzadkie, to nie może być ono sumą dwu takich podkontinuinów (rzecz jest elementarna: nie ma nic wspólnego z twierdzeniem Baire'a, które m.in. orzeka, że przeliczalnie wiele zbiorów rzadkich nie może dać w sumie całości, jeśli ta jest zwarta).

*

Jeśli by continua nierozkładalne nie zostały odkryte jako wspólne brzegi obszarów na płaszczyźnie, to zostałyby odkryte przez algebraików. Oto ich opis solenoidu, odkrytego przez Victorisa (1927) i zbadanego dokładniej przez van Dantzigą (1930), kontinuum nierozkładalne będące jednocześnie grupą zwartą.

W grupie $C \times E$, gdzie C jest zbiorem Cantora traktowanym jako grupa liczb 2-adycznych i gdzie E jest prostą traktowaną jako grupa ze zwykłym dodawaniem, rozważmy podgrupę G złożoną z elementów (ne, n) , gdzie n jest całkowite (e jest jednością 2-adyczną). Przez solenoid rozumiemy grupę ilorazową $(C \times E)/G$, w której zbiory otwarte (topologię) określa się przez zbiory otwarte w C i E ogólnie przyjętym sposobem.

Jest to ten sam solenoid, który znamy z opisów geometrycznych (p. Delta 8/1979). Nic tu nie jest niedopowiedziane. Opisy algebraiczne są chłodne, pozbawione kolorytu takiego jak w opisie jezior Wady. Algebraizuje się wszakże niewielki zakres geometrii: cały jej interior pozostaje w istocie nietknięty.

Solenoidu nie da się zbudować nie wychodząc z płaszczyzny, ale jego obraz powstały przez zlepianie ze sobą punktów algebraicznie przeciwnych jest już spłaszczałny: jest homeomorficzny z kontinuum Janiszewskiego (p. wzmianka w Delcie 8/1979, str. 3, gdzie to kontinuum było opisane w formie danej przez Knastera).

*

W latach 1909—1912 Brouwer ogłosił kilka prac, w których dowiódł, że homeomorfizm płaszczyzny nie zmieniający jej orientacji i nie mający punktów stałych jest (topologicznie) przesunięciem. Niektóre z tych pojęć na pewno wymagałyby wyjaśnień; poprzestaśmy na jednym: przez punkt stały odwzorowania f rozumiemy każdy punkt p taki, że $f(p) = p$.



Rozwiązanie zadania M 255. Niech $1000 = k + (k+1) + \dots + (k+m)$,

czyli $1000 = \frac{1}{2}(m+1)(2k+m)$, czyli

$(m+1)(2k+m) = 2000$. Ponieważ $(2k+m) - (m+1) = 2k-1$, więc jedna z liczb $m+1$ i $2k+m$ jest parzysta, druga — nieparzysta. Równocześnie $2k+m > m+1$.

Mamy następujące rozkłady:
 $2000 = 2000 \cdot 1 = 400 \cdot 5 = 80 \cdot 25 = 125 \cdot 16$

Odpowiednie wartości k i m to:

$m = 0, \quad k = 1000 \quad (1000 = 1000)$

$m = 4, \quad k = 198 \quad (1000 = 198 +$

$+ \dots + 202)$

$m = 24, \quad k = 28 \quad (1000 = 28 +$

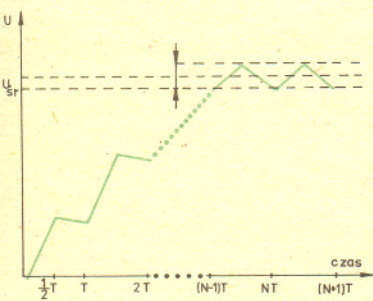
$+ \dots + 52)$

$m = 15, \quad k = 55 \quad (1000 = 55 +$

$+ \dots + 70)$.



Rozwiązanie zadania F 91. Dokonajmy jakościowej analizy zjawisk zachodzących w obwodzie w trakcie procesu przejściowego. Podczas zetknięcia przełącznika z zaciskiem 1 odbywa się ładowanie kondensatora, w drugim przypadku — rozładowywanie. W ogólności procesy te opisywane są zależnościami wykładniczymi. Kiedy jednak zmiany ładunku podczas ładowania i rozładowywania są niewielkie napięcie na kondensatorze zmienia się w czasie każdego zwarcia liniowo, a natężenie prądu jest stałe. Podczas kolejnych cykli: ładowanie-rozładowywanie, przyrosty napięcia maleją, ubytki zaś wzrastają (dlaczego?). Należy więc oczekiwać, iż po odpowiednio dużej ilości cykli wystąpi stan ustalony, w którym napięcie na kondensatorze (a wraz z nim i ładunek) drgać będzie piłokształtnie z niewielką amplitudą. Średnia wartość funkcji opisującej drgania ładunku jest poszukiwaną odpowiedzią do zadania. Napięcie średnie, przy ustalonej sile elektromotorycznej ϵ , powinno zależeć od stosunku oporności R_1/R_2 i leżeć w przedziale $(0, \epsilon)$. Wyniki przedstawionej analizy obrazuje poglądowy rysunek.



Zauważmy, że wskutek założonej równości czasów ładowania i rozładowywania średnie prądy płynące w stanie ustalonym przez każdą z gałęzi obwodu są równe. Mamy więc sytuację, w której dzięki kondensatorowi w obwodzie ϵ, R_1, R_2 płynie prąd, z tym że przez różne elementy przepływ następuje niejednocześnie. Nie przeszkadza to, aby uznać średnie napięcie na kondensatorze za równe napięciu na R_2 w obwodzie powstałym przez zwarcie ze sobą zacisków 1 i 2. Można je łatwo znaleźć z praw Ohma:

$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \epsilon.$$

Przyjmując, że średnie napięcie na kondensatorze $U_{sr} = U_2$, ze wzoru na pojemność kondensatora otrzymujemy ostateczną odpowiedź:

$$Q_{sr} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} C \epsilon.$$

Brouwer pomylił się w pierwszym dowodzie. Opierając się na obalonych później przez siebie wyobrażeniach Schönfliesa o wspólnych brzegach obszarów, zredukował dowód do stwierdzenia (uważał je za oczywiste), według którego homeomorfizm płaszczyzny nie zmieniający jej orientacji i odwzorowujący na siebie pewne kontinuum nie rozcinające płaszczyzny ma w tym kontinuum punkt stały. W drugim, poprawnym, dowodzie dowiódł po drodze twierdzenia (skromniejszego) orzekającego, że homeomorfizm płaszczyzny nie zmieniający jej orientacji i odwzorowujący na siebie pewien jej podzbiór domknięty (niepusty) ma punkt stały, niekoniecznie należący do tego podzbioru. Brouwer miał twierdzić w rozmowach (p. komentarz redaktora *Collected Works* Brouwera na str. 218 tomu II; wydawnictwo North Holland 1976), że jego pierwszy dowód powinien dać się uratować, ale sam tego nigdy nie zrobił.

Dużo później (1951) Cartwright i Littlewood dowiedli, że każdy homeomorfizm kontinuum nie rozcinającego płaszczyzny dający się przedłużyć do homeomorfizmu płaszczyzny nie zmieniającego jej orientacji ma w tym kontinuum punkt stały (Bell (1978) pokazał, że założenie o orientacji można pominąć). O „Translationssatz” mało już kto wtedy pamiętał. Punkty stałe odwzorowań ciekawiły same przez się. Już wyniki uzyskane w latach trzydziestych pozwoliły na postawienie hipotezy głoszącej, że każde odwzorowanie ciągłe kontinuum (nie rozcinającego płaszczyzny) w siebie powinno mieć punkty stałe. Ta hipoteza nie została dotąd potwierdzona nawet dla homeomorfizmów. Jak dotąd wynikiem najdalej idącym w jej kierunku jest następujące twierdzenie, którego dowiedli niezależnie od siebie Bell, Iliadis i Sieklucki (1967; Iliadis 1970): jeśli f jest odwzorowaniem ciągłym odwzorowującym w siebie kontinuum nie rozcinające płaszczyzny i nie mającym punktów stałych, to brzeg tego kontinuum zawiera kontinuum nierozkładalne niejednopunktowe C takie, że $f(C) = C$. Przeszkodą dla potwierdzenia hipotezy są więc już tylko kontinua nierozkładalne zawarte w brzegach kontinuum nie rozcinających płaszczyzny, np. brzegi kanałów Wady. Kontinua, które tak jak kontinuum Janiszewskiego są przekrojami wstęg, nie są przeszkodą: na nich odwzorowania ciągłe mają zawsze punkty stałe. Błędy Schönfliesa i Brouwera przyspieszyły rozwój całego działu topologii; tego, w którym później topologia w Polsce przeżywała swoje złote lata. Brzmi to jak przyznawanie błędów, a przynajmniej niektórym, roli twórczej. Coś może w tym jest, ale w dużej mierze tolerancja ta może być wynikiem tego, że błędy są dawne i nie nasze.

Opisane zagadnienia pojawiły się na obrzeżu analizy: wspólne brzegi obszarów w teorii funkcji analitycznych, a punkty stałe w teorii równań różniczkowych, gdzie homeomorfizmy płaszczyzny pojawiają się w naturalny sposób przy rozpatrywaniu układów równań $dx/dt = u(x, y), dy/dt = v(x, y)$, dając punkt wyjścia dla całej dyscypliny matematycznej, *topologii dynamicznej*. Mimo tego rodowodu, nie można służyć wątpliwości co do rzeczywistości tak osobliwych zjawisk. Zastanówmy się nad tym.

Interior geometryczny płaszczyzny, jak wszystko w matematyce (nawet liczby i figury, które wrosły w nią przed tysiącami lat), istnieje na mocy przyjętych konwencji. Należy do nich od ponad stu lat konwencja ciągłości zbioru liczb rzeczywistych utożsamianego z prostą. Choć i ta konwencja przystaje do wielu zjawisk przyrody i odpowiada naszym usposobieniom tak, że gotowiliśmy ją nieraz przyjąć za naturę rzeczy, to ta natura rzeczy na pewno nie jest aż tak idealna. Matematycy-konstruktywisci odrzucają pełną konwencję ciągłości: poszerzając zbiór liczb wymiernych, zapewniają byt liczbom takim jak $\sqrt{2}, e$ i π , ale nie dopuszczają do istnienia liczb rzeczywistych, które nie są granicami ciągów dających się określić, np. rekurencyjnie. Prowadzi to do zanegowania istnienia wielu punktów również i na konwencjonalnej (ciągłościowej) płaszczyźnie, a w rezultacie i wielu podzbiorów tej płaszczyzny, m.in. kontinuum nierozkładalnych.

Ale to właśnie odkrywca kontinuum nierozkładalnych, L. E. J. Brouwer (1881—1966), twórca intuicjonizmu, był prekursorem konstruktywizmu. W serii prac (pierwsza z r. 1918) ratował topologię kierunku Schönfliesa przed naporem własnych wątpliwości, nie pisząc jednak (według wiedzy autora artykułu) bezpośrednio nic o kontinuum nierozkładalnych; może nie zdążył, a może nie musiał się bronić?

W matematyce bada się bezpośrednio świat jej konwencji. Mimo to nie zapomina się o rzeczywistości, dla której poznania te konwencje zostały powołane. Jeśli do tej samej rzeczywistości zastosujemy inne konwencje, to powinniśmy tę rzeczywistość zobaczyć inaczej, co jedynie naszą wiedzę o niej może wzbogacić. Nigdy nie znajdziemy się w krainie jezior Wady, która jest tworem konwencji matematycznej. Ale możemy się znaleźć na wyspie, opracować program budowy kanałów według wskazówek Yoneyamy, a potem wypełniać ten program dzień po dniu; możemy użyć do tego odpowiednio zaprogramowanego automatu. Wtedy, już nawet nie jako konstruktywisci, zrozumiemy, że jeziora Wady istnieją nie tylko w naszej wyobraźni.

Elektromagnetyczne detektory fal grawitacyjnych

Doc. dr Leonid

GRISZCZUK,

dr Michaił SAŻIN

(Moskwa)

(Artykuł napisany

specjalnie dla „Deltę”)

Przejawy sił ciężkości obserwujemy w życiu codziennym bardzo często. Idący człowiek nie ulatuje w niebo, ponieważ przyciąga go Ziemia, Ziemia utrzymuje się na orbicie dzięki sile przyciągania Słońca. W polu sił ciężkości spadają wszystkie ciała i wszystkie z jednakowym przyspieszeniem. Ten podstawowy fakt odkrył już Galileusz. Ciała materialne nie tylko podlegają ciężnieniu, lecz także same są źródłem własnego pola grawitacyjnego. Pole grawitacyjne Ziemi jest stałe w czasie. Istnieją jednak i pola zmienne. Dwie gwiazdy, krążące wokół wspólnego środka masy (tak zwana gwiazda podwójna) są źródłem zmiennego pola grawitacyjnego. Gdyby kosmonauci chcieli utrzymać się w stałej odległości od środka masy gwiazdy podwójnej, musieliby cyklicznie zmieniać moc silników rakiety. Zgodnie z teorią grawitacji Newtona zmiany pola grawitacyjnego rozprzestrzeniają się z nieskończoną prędkością. Innymi słowy, jeśli ciała wytwarzające pole grawitacyjne zmieniły swoje położenie, to związana z tą zmianą nowa wartość natężenia pola pojawia się momentalnie w całej przestrzeni, w dowolnej odległości od owych ciał. Jednakże zgodnie ze szczególną teorią względności Einsteina prędkość rozchodzenia się dowolnych oddziaływań nie może przekraczać prędkości światła. Znaczący to, że prawa teorii Newtona mogą być spełnione tylko w przybliżeniu. Do opisanych pól zmiennych potrzebna jest nam inna teoria, w której zmiany pola grawitacyjnego rozchodzą się ze skończoną prędkością c , przy czym teoria Newtona jest jej granicznym przypadkiem przy $c \rightarrow \infty$. Taką teorię stworzył Einstein w r. 1916; nazwano ją ogólną teorią względności.

Nieuniknioną konsekwencją równań pola tej teorii okazuje się istnienie fal grawitacyjnych. Są one pod wieloma względami podobne do fal elektromagnetycznych. Rozchodzą się z prędkością światła i mają cechy charakterystyczne dla wszystkich fal, takie jak amplituda, faza, częstotliwość. Fale grawitacyjne unoszą energię układu promieniującego i mogą przekazywać ją ciałom leżącym na ich drodze. Oddziaływanie tych fal z materią jest jednak tak słabe, że dotychczas nie udało się zaobserwować ich w sposób nie budzący wątpliwości. Są one nie tylko trudne do zarejestrowania, ale i trudne do wytworzenia w jakiegokolwiek znaczniejszej ilości. Jeśli dwa ciała naładowane elektrycznie, na przykład proton i antyproton, krążą wokół siebie z częstotliwością 10^{10} sek⁻¹, to ich promieniowanie grawitacyjne jest 10^{46} razy słabsze niż promieniowanie elektromagnetyczne. Typowa gwiazda podwójna, wypromieniowująca ok. 10^{33} ergów energii na sekundę w postaci fal elektromagnetycznych, będzie promieniować tylko 10^3 ergów na sekundę w postaci fal grawitacyjnych.

W dalszym ciągu potrzebny nam będzie wzór na natężenie promieniowania grawitacyjnego dwu ciał o masach m oddalonych od siebie na odległość a i okrążających się z częstotliwością ω . Podamy wzór przybliżony, słuszny tylko przy rozmiarach układu a małych w porównaniu z długością promieniowanych fal $c/2\pi\omega$:

$$L_g = \frac{32^2}{5} \frac{G}{c^5} m^2 a^4 \omega^6,$$

gdzie G jest newtonowską stałą grawitacyjną, a c prędkością światła. Wielkość G/c^5 jest bardzo mała, jej wartość wynosi $2,5 \cdot 10^{-60}$ sek/erg. Z tej przyczyny promieniowanie grawitacyjne układów o rozmiarach laboratoryjnych i nawet astronomicznych jest tak słabe. Ale właściwie do czego jest nam ono potrzebne? W jakim celu już od ponad 10 lat ludzie próbują wykryć promieniowanie grawitacyjne z Kosmosu? Informacja, którą może nam przynieść, jest bezcenna. Świadczenia o procesach zachodzących w pobliżu tajemniczych czarnych dziur, o chwilach odległych o 10^{-43} sekundy od początku ekspansji Wszechświata to tylko część wiadomości, które mamy nadzieję uzyskać dzięki nieuchwytnemu promieniowaniu grawitacyjnemu. Żadne inne promieniowanie, czy to elektromagnetyczne, czy neutrinowe, nie pozwoli nam dowiedzieć się niczego o tych procesach. Te rodzaje promieniowania oddziałują z materią nieporównanie silniej i w drodze do nas rozpraszają się, co powoduje, że niesiona przez nie informacja o unikalnych zjawiskach jest zatarta przez późniejsze oddziaływanie.

Pierwsze próby wykrycia promieniowania grawitacyjnego były związane ze źródłami astronomicznymi. Badania takie prowadzi dziś grupy naukowców, którzy usiłują odebrać fale grawitacyjne z Kosmosu. Sygnałów, docierających do detektora nie można jednak wyjaśnić jednoznacznie. Na przykład strumienie cząstek elementarnych lub zaburzenia w magnetosferze Ziemi mogą symulować sygnał fali grawitacyjnej.

Niejednoznaczność interpretacji sygnałów ze źródeł kosmicznych, a także możliwości przyszłego zastosowania fal grawitacyjnych do celów praktycznych, zachęcają do rozważenia eksperymentu laboratoryjnego zmierzającego do wykrycia promieniowania grawitacyjnego. Moc nadajnika laboratoryjnego jest znacznie mniejsza od mocy źródeł astronomicznych, ale źródła astronomiczne są daleko, zaś nadajnik laboratoryjny można postawić obok detektora. Dokładnie znany czas włączenia nadajnika znacznie zmniejsza niejednoznaczność interpretacji sygnału. Monochromatyczność generatora pozwala ponadto zastosować akumulację rezonansową dla zwiększenia wielkości sygnału.

Niemniej ważną zaletą eksperymentu laboratoryjnego jest możliwość interferencyjnego ogniskowania fal grawitacyjnych. Ogniskowanie takie można zrealizować następująco. Nadajniki rozstawia się na okręgu, przy czym wszystkie działają w zgodnej fazie.

Kącik Czytelniczy

— Przyjrzyj się dobrze Ulrichowi.

Za kogo byś go wzięła? Czy wygląda na lekarza, kupca, malarza czy dyplomata?

— Ale on nie jest tym wszystkim — trzeźwo zauważyła Klarysa.

— No to może wygląda na matematyka?

— Tego nie wiem, bo przecież nie wiem, jak ma wyglądać matematyk.

— Powiedziałaś teraz coś bardzo słusznego. Matematyk na nic nie wygląda, to znaczy, że ma wygląd człowieka w ogóle inteligentnego, tak że nie wiąże się to z żadną ściśle określoną treścią. Z wyjątkiem księży rzymskokatolickich nikt już dzisiaj nie ma wyglądu takiego, jaki mieć by powinien, gdyż głową posługujemy się jeszcze bardziej anonimowo niż rękami. A matematyk to szczyt wszystkiego, to ktoś, kto już tak mało wie o sobie, jak ludzie, którzy w przyszłości zamiast mięsem i chlebem żywić się będą pigułkami, będą mało wiedzieć o łąkach, cielecach czy krowach.

Robert Musil, *Człowiek bez właściwości*, przekł. Krzysztof Radziwiłł, Kazimierz Truchanowski, Janina Zeltzer; PIW 1971.

Wtedy amplituda fali w środku okręgu jest równa sumie amplitud wszystkich nadajników. Jakie warunki powinien spełniać nadajnik fal grawitacyjnych, aby najlepiej nadawał się do celów eksperymentu laboratoryjnego? Aby odpowiedzieć na to pytanie, skorzystajmy z podanego wcześniej wzoru na moc promieniowania grawitacyjnego dwu ciał. Widać, że moc ta zależy od częstotliwości obiegu. Jest jasne, że im większa częstotliwość, przy ustalonych pozostałych parametrach, tym większe promieniowanie. Pomińmy trudności techniczne związane z tym, że przy zwiększaniu prędkości kątowej pojawiają się siły odśrodkowe, które usiłują rozerwać obracające się ciała, i zwiększamy częstotliwość obiegu. Z początku promieniowanie wzrasta, lecz poczynając od pewnej prędkości już się nie zwiększa. Jest to związane z tym, że gdy długość emitowanych fal grawitacyjnych zrówna się z rozmiarami układu, wypromieniowane przez dwa ciała fale nie będą już zgodne w fazie i częściowo będą się nawzajem tłumić. Wówczas nasz wzór nie jest słuszny. Okazuje się jednak, że samotłumienie fal nie będzie zachodziło jeśli charakterystyczna prędkość ruchu nadajnika będzie równa prędkości światła, tzn. nadajnik będzie źródłem fal spójnych. Najlepszym materiałem na nadajnik są więc fale elektromagnetyczne.

Swobodna fala elektromagnetyczna nie wysyła promieniowania grawitacyjnego. Aby mógł zachodzić proces przekształcania fal elektromagnetycznych w grawitacyjne, niezbędna jest obecność stałego pola elektrycznego lub magnetycznego albo dwu jednakowych fal biegnących symetrycznie w przeciwnych kierunkach, tzn. fali stojącej. Fala stojąca — to taki stan pola elektromagnetycznego, w którym w pewnych punktach przestrzeni natężenie pola elektrycznego jest stale równe zero (węzły), zaś w innych punktach oscyluje. Punkty, w których amplituda oscylacji jest największa, nazywają się strzałkami fali stojącej. Strzałki te można sobie wyobrazić jako masy drgające tam i z powrotem i wysyłające promieniowanie grawitacyjne. „Waga” strzałek jest znikomo mała, lecz prędkość, z którą drgają, wielka. Dlatego też wysyłają one znaczne promieniowanie.

Można wykazać liczbowo, co jest dogodniejsze: nadajniki elektromagnetyczne czy mechaniczne. Weźmy dwa elementarne generatory fal grawitacyjnych, wysyłające fale tej samej częstotliwości. Jeden z nich niech będzie mechaniczny, drugi elektromagnetyczny. Niech gęstość materii w nadajniku mechanicznym wynosi 1 g/cm^3 , prędkość dźwięku w nim $V_s = 10^5 \text{ cm/s}$, a amplituda drgań $A = 10^{-3} \lambda_s$, gdzie λ_s — długość fali dźwiękowej. Gęstość pola elektromagnetycznego w drugim nadajniku (określona na podstawie wzoru Einsteina $m = E/c^2$) niech wynosi $\rho = 10^{-18} \text{ g/cm}^3$. Wtedy amplituda fali grawitacyjnej wypromieniowanej przez generator elektromagnetyczny jest 10^{10} razy większa niż w generatorze mechanicznym. Objętość nadajnika jest przy tym znacznie mniejsza od objętości nadajnika elektromagnetycznego. W objętości zajętej przez jeden nadajnik elektromagnetyczny można zmieścić $N = (c/V_s)^3 \approx 10^{15}$ nadajników mechanicznych. Gdy nadajników jest dużo, to aby otrzymać maksymalny efekt, muszą one pracować w zgodnej fazie, tzn. w miejscu, gdzie znajduje się odbiornik, fale od wszystkich nadajników powinny mieć jednakową fazę i dodawać się. Uzgodnienie faz 10^{15} nadajników mechanicznych stanowi trudność techniczną nie do przewyżczenia. Nadajniki elektromagnetyczne są wygodniejsze przez to, że, jak powiedziano wcześniej, spójność jest w nich zapewniona automatycznie.

Elektromagnetyczny nadajnik fal grawitacyjnych można zrealizować na przykład w postaci rezonatora. Jest to pudło o nadprzewodzących ścianach, które zatrzymują fale elektromagnetyczne. W pudle takim tworzy się fala stojąca, która wytwarza promieniowanie grawitacyjne. Jego częstotliwość jest dwa razy większa od częstotliwości fal elektromagnetycznych w rezonatorze.

Jeden rezonator o szerokości 10 m i natężeniu pola magnetycznego wewnątrz 10^5 gaussów wytwarza promieniowanie grawitacyjne, którego amplituda na granicy strefy falowej wynosi $h \approx 10^{-33}$ (amplituda fali grawitacyjnej h jest wielkością bezwymiarową, która pokazuje, o ile zmieni się odległość między dwiema swobodnymi cząstkami, $\delta l = h \cdot l$, jeśli przed nadejściem fali odległość ta wynosiła l). Odpowiada to niezmiernie małemu strumieniowi.

$$I_g \approx 10^{-13} \text{ erg/cm}^2 \text{ s.}$$

Takiego strumienia energii nie można zarejestrować odbiornikami mechanicznymi. Trzeba sporządzić detektor, który pozwoli uchwycić znikomo słaby sygnał nadajnika. Detektor ten można zrealizować również w postaci rezonatora elektromagnetycznego.

W odróżnieniu od rezonatora-nadajnika, w rezonatorze-odbiorniku nie jest konieczne zmienne pole elektromagnetyczne. Pole może w nim być stałe. Fale grawitacyjne działając na pole elektromagnetyczne w detektorze wywołują jego zaburzenia. Proces ten najłatwiej można sobie wyobrazić jako zmienną przenikalność elektryczną i magnetyczną w obszarze zajęтым przez pole. Jeśli są spełnione warunki rezonansowe, to zaburzenia wywołane promieniowaniem grawitacyjnym stają się rzeczywistymi fotonami, których liczba narasta w czasie.

Częstotliwość drgań wzbudzonych ω_{ex} zależy od częstotliwości niezaburzonego pola elektromagnetycznego w detektorze, ω_{in} , i częstotliwości fali grawitacyjnej ω_g . Wyraża się ona wzorem $\omega_{ex} = \omega_g \pm \omega_{in}$, w zależności od tego, czy warunki rezonansowe są spełnione dla sumy czy dla różnicy.





Rozwiązanie zadania F 90. W rozumowaniu pominięto efekt elektrochemicznej polaryzacji elektrod, towarzyszący procesowi elektrolizy. Każde z naczyń elektrolitycznych staje się źródłem siły elektromotorycznej „pracującej” przeciwko prądowi płynącemu z kondensatora. Kondensator nie może rozładować się całkowicie, a nawet przy odpowiednio dużej ilości elektrolizerów wydzielenie gazu jest w ogóle niemożliwe. Nie jest wtedy spełniony warunek stałości przepływającego ładunku, na którym oparty był wniosek o proporcjonalności ciepła i ilości naczyń elektrolitycznych.

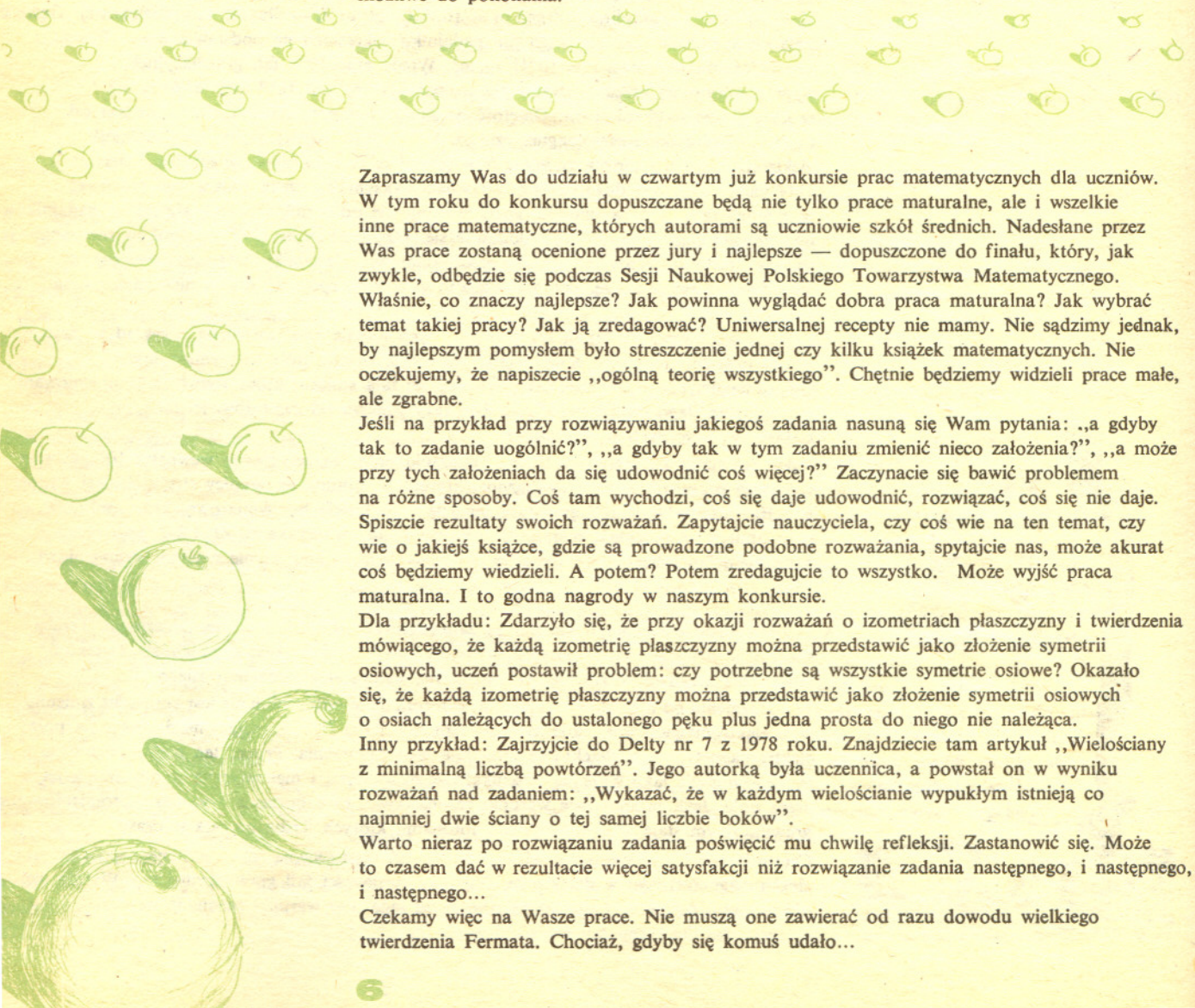
Zauważmy, że częstotliwość pola niezaburzonego może być równa zero (pole jest wtedy stałe), ale jest ono niezbędne!

Pojawiające się fotony (kwanty pola elektromagnetycznego) będą utrzymywane w rezonatorze przez nadprzewodzące ścianki i będą się tam gromadzić. Gdyby ścianki całkiem nie pochłaniały fal elektromagnetycznych, to fotonów można by nabierać w ten sposób dowolnie dużo. Rzecz jednak w tym, że fotony mimo wszystko są pochłaniane — częściowo przez ścianki, a częściowo przez dielektryk wewnątrz rezonatora. Charakterystyką tego, ile można ich zgromadzić, jest wielkość nazywana dobrocią. Wielkość ta, Q , pokazuje, ile razy średnio jeden foton odbija się od ścianek rezonatora, zanim zostanie przez nie pochłonięty. Czas narastania sygnału jest określany przez Q/ω_{ex} . Po tym czasie sygnał już nie narasta i dalsze gromadzenie fotonów staje się bezcelowe.

Detektor taki, przy następujących parametrach: niezaburzone pole wewnątrz 10^5 gaussów, dobroć 10^{12} i częstotliwości 10^9 s⁻¹ będzie miał czułość $h \approx 10^{-27}$, co odpowiada minimalnemu wykrywalnemu strumieniowi

$$I_g \approx 10 \text{ ergów/cm}^2 \text{ s.}$$

Rozbieżność między możliwościami nadajnika i detektora wynosząca „tylko” milion razy wzbudziła znaczny optymizm. We wszystkich wcześniejszych projektach rozbieżność ta wynosiła 10^{13} lub więcej. Generator fal grawitacyjnych mający kształt torusa produkuje znacznie silniejsze promieniowanie, ponieważ ogniskuje on interferencyjne fale grawitacyjne. I tak, przy parametrach takiego układu: długość fali elektromagnetycznej $\lambda_e = 10^3$ cm, natężenie pola elektromagnetycznego $H = 3 \cdot 10^5$ gaussów, dobroć $Q = 7 \cdot 10^{13}$, fale grawitacyjne zostałyby wykryte, lecz przy tym całkowita objętość układu musiałaby wynosić około 25000 m³, zaś czas narastania sygnału — 5 dób. Detektor i generator w takim eksperymencie trzeba by przechowywać w niezwykle niskiej temperaturze (kilka tysięcznych kelwina), aby usunąć termiczne promieniowanie fal elektromagnetycznych przez materię aparatury. Niestety, obecnie nie można jeszcze spełnić równocześnie wszystkich wymienionych warunków. Trudności na drodze do tego eksperymentu jest wiele, lecz mamy nadzieję, że będą one możliwe do pokonania.



Zapraszamy Was do udziału w czwartym już konkursie prac matematycznych dla uczniów. W tym roku do konkursu dopuszczane będą nie tylko prace maturalne, ale i wszelkie inne prace matematyczne, których autorami są uczniowie szkół średnich. Nadesłane przez Was prace zostaną ocenione przez jury i najlepsze — dopuszczone do finału, który, jak zwykle, odbędzie się podczas Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Właśnie, co znaczy najlepsze? Jak powinna wyglądać dobra praca maturalna? Jak wybrać temat takiej pracy? Jak ją zredagować? Uniwersalnej recepty nie mamy. Nie sądzimy jednak, by najlepszym pomysłem było streszczenie jednej czy kilku książek matematycznych. Nie oczekujemy, że napiszecie „ogólną teorię wszystkiego”. Chętnie będziemy widzieli prace małe, ale zgrabne.

Jeśli na przykład przy rozwiązywaniu jakiegoś zadania nasuną się Wam pytania: „a gdyby tak to zadanie uogólnić?”, „a gdyby tak w tym zadaniu zmienić nieco założenia?”, „a może przy tych założeniach da się udowodnić coś więcej?” Zaczynacie się bawić problemem na różne sposoby. Coś tam wychodzi, coś się daje udowodnić, rozwiązać, coś się nie daje. Spiszcie rezultaty swoich rozważań. Zapytajcie nauczyciela, czy coś wie na ten temat, czy wie o jakiejś książce, gdzie są prowadzone podobne rozważania, spytajcie nas, może akurat coś będziemy wiedzieli. A potem? Potem zredagujcie to wszystko. Może wyjść praca maturalna. I to godna nagrody w naszym konkursie.

Dla przykładu: Zdarzyło się, że przy okazji rozważań o izometriach płaszczyzny i twierdzenia mówiącego, że każdą izometrię płaszczyzny można przedstawić jako złożenie symetrii osiowych, uczeń postawił problem: czy potrzebne są wszystkie symetrie osiowe? Okazało się, że każdą izometrię płaszczyzny można przedstawić jako złożenie symetrii osiowych o osiach należących do ustalonego pęku plus jedna prosta do niego nie należąca. Inny przykład: Zajrzyjcie do Deltę nr 7 z 1978 roku. Znajdziecie tam artykuł „Wielościanny z minimalną liczbą powtórzeń”. Jego autorką była uczennica, a powstał on w wyniku rozważań nad zadaniem: „Wykazać, że w każdym wielościannie wypukłym istnieją co najmniej dwie ściany o tej samej liczbie boków”.

Warto nieraz po rozwiązaniu zadania poświęcić mu chwilę refleksji. Zastanówić się. Może to czasem dać w rezultacie więcej satysfakcji niż rozwiązanie zadania następnego, i następnego, i następnego...

Czekamy więc na Wasze prace. Nie muszą one zawierać od razu dowodu wielkiego twierdzenia Fermata. Chociaż, gdyby się komuś udało...

O prostych i płaszczyznach współstożkowych

Niech Q będzie krzywą stopnia drugiego, położoną w pewnej płaszczyźnie H . Stożkiem o wierzchołku $p \notin H$ nazywamy zbiór wszystkich prostych przechodzących przez p i przecinających Q . W szczególności Q może być parą prostych przecinających się lub równoległych, a p — punktem w nieskończoności. Wtedy stożek składa się z dwu płaszczyzn przecinających się albo równoległych.

Przez stożek dualny będziemy rozumieć zbiór wszystkich płaszczyzn stycznych do pewnej krzywej płaskiej drugiego stopnia, przechodzących przez ustalony punkt nie należący do tej płaszczyzny. Sześć prostych $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6$ nazwiemy współstożkowymi, gdy są równoległe do tworzących pewnego stożka. Analogicznie sześć płaszczyzn nazwiemy współstożkowymi, kiedy są równoległe do płaszczyzn pewnego stożka dualnego.

Twierdzenie 1. Proste $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6$ o wektorach kierunkowych $(a_{1x}, a_{1y}, a_{1z}), \dots, (a_{6x}, a_{6y}, a_{6z})$ są współstożkowe wtedy i tylko wtedy, gdy wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a_{1x}^2 & a_{1y}^2 & a_{1z}^2 & 2a_{1x}a_{1y} & 2a_{1y}a_{1z} & 2a_{1x}a_{1z} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{6x}^2 & a_{6y}^2 & a_{6z}^2 & 2a_{6x}a_{6y} & 2a_{6y}a_{6z} & 2a_{6x}a_{6z} \end{vmatrix}$$

jest równy zeru.

Dowód. Możemy założyć, że proste l_1, \dots, l_6 są równoległe do tworzących stożka Γ , którego wierzchołkiem jest $(0, 0, 0)$. Zatem na Γ leżą proste $x_j = ta_{jx}, y_j = ta_{jy}, z_j = ta_{jz}$, gdzie t jest parametrem. Napiszmy równanie stożka Γ w postaci

$$(1) \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fzx = 0.$$

Podstawiając, mamy dla $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$:

$$(2) \quad t^2(Aa_{jx}^2 + Ba_{jy}^2 + Ca_{jz}^2 + 2Da_{jx}a_{jy} + 2Ea_{jy}a_{jz} + 2Fa_{jx}a_{jz}) = 0.$$

Traktując to jako równanie jednorodne z niewiadomymi A, B, C, D, E, F dostajemy, że wymieniony w tezie wyznacznik jest równy zeru. Na odwrót, jeżeli wyznacznik jest równy zeru, to układ (2) ma rozwiązania niezerowe i proste l_1, \dots, l_6 są równoległe do tworzących stożka opisanego przez równanie (1).

W bardzo podobny sposób dowodzi się następujące

Twierdzenie 2. Płaszczyzny $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6$ o wektorach normalnych $(a_{1x}, a_{1y}, a_{1z}), \dots, (a_{6x}, a_{6y}, a_{6z})$ są współstożkowe wtedy i tylko wtedy, gdy wyznacznik z twierdzenia 1 jest równy zeru.

Twierdzenie 3. Niech przekształcenie afiniczne T przekształca 6 niewspółstożkowych płaszczyzn na 6 innych tak, że pola na nich nie ulegają zmianie. Wówczas T jest izometrią.

Dowód (szkic). Możemy założyć, że punkt $0 = (0, 0, 0)$ jest wspólnym punktem wszystkich sześciu płaszczyzn π_1, \dots, π_6 . Składając z T jednokładność $J_0^{1/k}$ i ewentualnie translację R otrzymamy przekształcenie $T' = J_0^{1/k} \circ R \circ T$ które zachowuje O a nie zmienia odległości płaszczyzn równoległych do π_1, \dots, π_6 . Niech T' ma przedstawienie

$$\begin{aligned} x' &= a_x x + a_y y + a_z z \\ y' &= b_x x + b_y y + b_z z \\ z' &= c_x x + c_y y + c_z z. \end{aligned}$$

Z warunku zachowywania odległości płaszczyzn równoległych do danych wynika, że macierz utworzona ze współczynników $a_x x, \dots, c_z z$ jest ortogonalna. Wynika stąd, że T jest izometrią.

Przykład. Rozpatrzmy ostrosłup prawidłowy o podstawie będącej sześciokątem foremnym oraz przekształcenie afiniczne S , które na płaszczyźnie podstawy ostrosłupa jest jednokładnością o środku w środku sześciokąta i współczynniku $1/2$, zaś na prostej zawierającej wysokość ostrosłupa jest jednokładnością o tym samym środku i współczynniku 2 . Przekształcenie to zachowuje pola na wszystkich sześciu płaszczyznach w których leżą ściany ostrosłupa, ale nie jest izometrią.

Z twierdzenia 3 wynika kilka wniosków.

Wniosek 1. Ponumerujemy w czworobocianie $ABCD$ krawędzie liczbami $1, 2, 3, 4, 5, 6$ i niech S_i oznacza pole trójkąta zbudowanego na i -tej krawędzi i wierzchołku będącym środkiem krawędzi przeciwległej do i -tej. Niech S'_i mają podobne znaczenie w czworobocianie $A'B'C'D'E'F'$. Wówczas $ABCD$ jest podobny do $A'B'C'D'E'F'$ wtedy i tylko wtedy gdy $S_1 : S_2 : S_3 : S_4 : S_5 : S_6 = S'_1 : S'_2 : S'_3 : S'_4 : S'_5 : S'_6$.

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że płaszczyzny w których leżą opisane trójkąty nie są współstożkowe.

Wniosek 2. Przekształcenie afiniczne T jest podobieństwem, gdy przekształca pewną sferę na sferę.

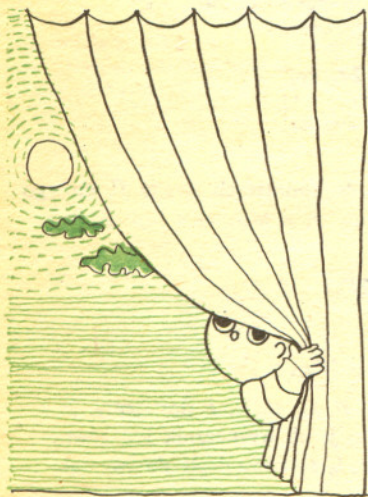
Wniosek 3. Elipsoida jest sferą wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje 6 płaszczyzn współstożkowych, przechodzących przez jej środek i wycinających z niej przekroje o równych polach.

Skrót pracy, która uzyskała I nagrodę na konkursie prac maturalnych z matematyki w 1980 roku.



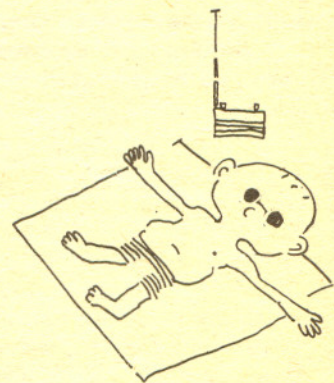
Rozwiązanie zadania M 253. Badając parzystość kolejnych cyfr naszego ciągu łatwo sprawdzimy, że ma on postać $nnpnnnnp.pnnnnp \dots$ (n — cyfra nieparzysta, p — parzysta). Nie może się więc znaleźć w nim 1982, zawierające pod rząd dwie cyfry parzyste. Zauważmy teraz, że ponieważ wszystkich możliwych grup czterocyfrowych jest 10000, więc pewna czwórka cyfr powtórzy się wśród pierwszych 10004 cyfr. Niech np. $c_k c_{k+1} c_{k+2} c_{k+3} = c_l c_{l+1} c_{l+2} c_{l+3}$, $k < l$. Łatwo sprawdzić, że również $c_{k-1} = c_{l-1}$, $c_{k-2} = c_{l-2}$ itd. i wobec tego $c_{l-k+1} c_{l-k+2} c_{l-k+3} c_{l-k+4} = 1981$.

delta mata delta

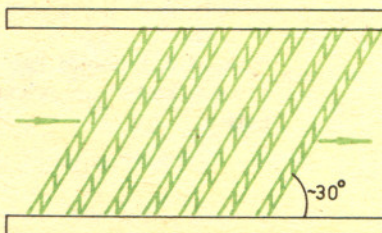
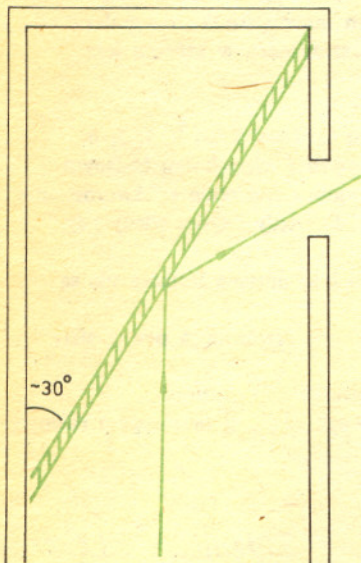


Czym różni się światło odbite od powierzchni wody, szkła, trawy czy liści od bezpośredniego światła słonecznego? Oczywiście natężeniem, bo część światła jest przy odbiciu pochłaniana, i barwą, bo to pochłanianie zależy od długości fali. Jest jednak różnica, której nie potrafimy zaobserwować gołym okiem — to *polaryzacja*. Jeżeli nie wiecie, co to jest — spojrzcie na falującą wodę. Wszystkie cząsteczki poruszają się prostopadłe do kierunku przesuwania się fali — fala jest *poprzeczna*. Co więcej, wszystkie drgają w jednym kierunku (w górę i w dół). Mówimy, że fale na wodzie są całkowicie spolaryzowane. Może się jednak zdarzyć, że fala poprzeczna nie ma żadnego wyróżnionego kierunku drgań. Tak jest np. dla bezpośredniego światła słonecznego czy światła żarówki. Mówimy wtedy o braku polaryzacji. Możliwa jest także sytuacja pośrednia, polaryzacja częściowa, kiedy to istnieje wyróżniony kierunek drgań, ale występują również drgania w innych kierunkach.

Większość światła, które dociera do naszych oczu, to światło odbite lub rozproszone. Jest ono na ogół częściowo spolaryzowane. Żeby się o tym przekonać, musicie się jednak uzbroić w *polaryzator*. „Odcedza” on drgania we wszystkich kierunkach poza jednym. Promień spolaryzowany w tym wyróżnionym kierunku przechodzi przez polaryzator bez osłabienia, a spolaryzowany prostopadłe do niego jest całkowicie pochłaniany.



Najprostszy polaryzator możecie wykonać z szybki szklanej. Wykorzystamy tutaj fakt, że światło odblite od szkła pod kątem około 60° jest prawie całkowicie spolaryzowane w kierunku równoległym do powierzchni odbijającej. Umieście szybkę, najlepiej zaczernioną z jednej strony (dobra jest prześwietlona płyta fotograficzna), w prostopadłościennym pudełku tak, żeby światło wchodzące padało na nią pod kątem $58^\circ \dots 60^\circ$ (rysunek). W ścianie pudełka wytnijcie otwór, przez który będzie można obserwować spolaryzowane światło odbite. Wewnątrz pomalujcie je czarną matową farbą. Pozbędziecie się w ten sposób odblasków. Wadą takiego polaryzatora jest niewielkie natężenie odbitego światła; większość padającego światła przechodzi przez szybki i jest pochłaniana wewnątrz obudowy. Okazuje się, że światło przechodzące jest także spolaryzowane, ale tylko częściowo. Dlatego, żeby uzyskać polaryzację światła przechodzącego bliską całkowitej, musicie ustawić równoległe kilka przezroczystych szybek (mogą być szkiełka przedmiotowe do mikroskopu). Zbudowany w ten sposób polaryzator (rysunek) jest znacznie lepszy od poprzedniego, bo pochłania tylko połowę światła padającego.

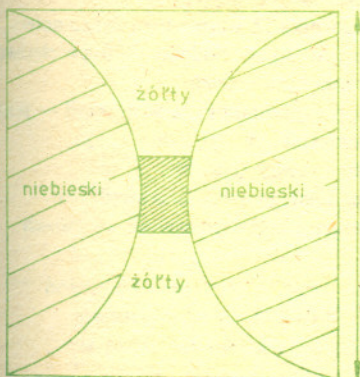
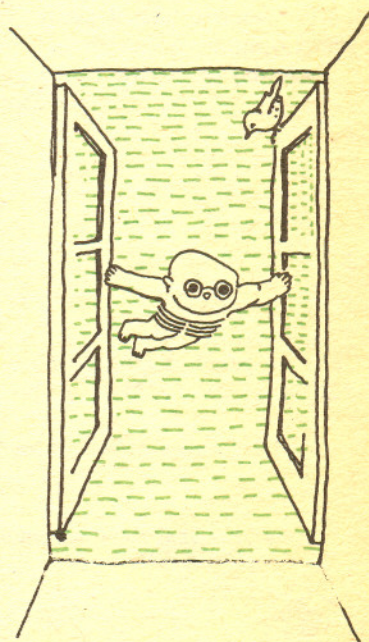


Wypróbujcie Wasze polaryzatory obserwując światło odbite od różnych powierzchni. Spróbujcie, obracając polaryzator, określić kierunek polaryzacji światła.

Zbadajcie, jak jest spolaryzowane światło rozproszone. W tym celu do wody w dużym słoju dodajcie kilka kropli atramentu albo mleka. Postarajcie się o dobre źródło światła. Najlepszy będzie rzutnik do przeźroczy, w którym przysłonicie obiektyw kawałkiem nieprzezroczystego kartonu z wyciętym niewielkim otworem. Wąską smugę światła skierujcie na słój z wodą. Spójrzcie z góry lub z boku na promień biegnący w wodzie. Widzicie go dzięki rozproszeniu światła na cząsteczkach atramentu. Przy pomocy polaryzatora łatwo przekonacie się, że światło rozproszone jest spolaryzowane. Jeśli nie macie rzutnika, możecie to samo zobaczyć wykorzystując światło słoneczne i atmosferę. Wystarczy spojrzeć na niebo prostopadle do biegu promieni słonecznych. Zbadajcie na przykład polaryzację zenitu tuż po zachodzie (lub przed wschodem) Słońca. Jaki jest kierunek polaryzacji w stosunku do położenia Słońca? Czy potraficie wyznaczyć położenie Słońca, kiedy jest skryte za chmurami, a niebo nad głową jest czyste? Sprawdźcie, że światło rozproszone na chmurach nie jest spolaryzowane.



Taki sposób wyznaczania położenia Słońca pomagał Wikingom w nawigacji podczas ich wypraw na Północ, gdzie Słońce bardzo krótko jest widoczne nad horyzontem. Jako polaryzatora używali kryształu kordierytu, który zmieniał barwę od żółtej do niebieskiej w zależności od polaryzacji padającego światła. Podobnie pszczoły i wiele innych owadów wyznaczają kierunek po zachodzie Słońca korzystając z polaryzacji światła rozproszonego. W pierwszych badaniach przeprowadzonych na mrówkach pustynnych umieszczenie przesłony w zenicie powodowało całkowitą ich dezorientację. Początkowo przypuszczano, że kierują się światłem gwiazd. Jednak bardziej szczegółowe badania (użyto w nich układu luster, za pomocą których zmieniano polaryzację światła) dowiodły, że orientują się one według kierunku polaryzacji. Okazało się, że także wiele organizmów wodnych posługuje się tym sposobem nawigacji. Przykładem są dobrze znane wszystkim hodowcom rybek akwariowych, *Daphniae* — rozwielitki. Oświetlając je światłem spolaryzowanym można zmusić je do pływania w określonym kierunku.



Czy polaryzacji nie możemy obserwować gołym okiem, skoro tyle organizmów ma tę umiejętność? Możemy, ale jest to bardzo trudne i wymaga dłuższego treningu. Spójrzcie na jasną chmurę przez polaryzator. Obróćcie go szybko. Czy zauważyliście w polu widzenia niebiesko-żółtą figurę o kształcie przedstawionym na rysunku obok? Figura ta zwykle znika po kilku sekundach. Zaobserwujcie, jak zależy jej położenie od ustawienia polaryzatora. Która oś figury wyznacza polaryzację? Po kilku ćwiczeniach z polaryzátorem spróbujcie dostrzec tę figurę obserwując spolaryzowane światło nieba podczas zachodu Słońca. Napiszcie, czy Wam się to udało.

w krótkiej serii artykułów nie sposób wyczerpać problemów związanych z narodzinami dedukcji i metody aksjomatycznej. Warto jednakże na drodze do wyjaśnienia ich genezy zrobić jeszcze kilka kroków — nawet za cenę stopniowego oddalenia się od matematyki... W poprzednim artykule pisałem o tym, że część aksjomatów Euklidesa można interpretować jako podstawę do selekcji osób, z którymi chciałby on dyskutować na temat przedstawianych wyników matematycznych. Wspomniałem również o szkole filozoficznej eleatów, której członkowie byłiby zapewne wykluczeni z takiej dyskusji. Ze względu na zakres ich zainteresowań, obecność wśród matematyków zwolenników eleackiego sposobu myślenia groziłaby tym, że dyskusja nad własnościami przestrzeni przerodziłaby się w spór o sens najprostszych używanych w geometrii pojęć. Spory tego rodzaju pojawiły się w matematyce (lub raczej — stały się istotnym jej składnikiem) dopiero na przełomie XIX i XX wieku...

W czasach Euklidesa szkoła eleacka należała już do przeszłości. Nie oznacza to wszakże, że tym samym zniknęli potencjalni dyskutanci nie zgadzający się z przyjmowanymi przez niego aksjomatami. Pojawili się inni, a można powiedzieć, że znacznie od eleatów groźniejsi. W piątym i czwartym wieku p.n.e. działała w Grecji liczna grupa nauczycieli i wychowawców, przygotowujących swoich uczniów (nie tylko młodzież) do życia publicznego. Ze względu na olbrzymią rolę argumentacji słownej w publicznym życiu Grecji, poświęcali oni znaczną uwagę doskonaleniu sztuki przekonywania. Trudno zresztą mówić o jednej sztuce. — należy raczej mieć na uwadze kilka, blisko ze sobą powiązanych umiejętności: dyskusji (dialektyki), w skład której wchodziła również sztuka zwyciężania za pomocą chwytów nieczystych (erystyka), przekonywania grupy słuchaczy (retoryka), a nawet elementy aktorstwa... Sofiści, bo tak nazywano owych nauczycieli, zdaniem współczesnego im Platona „tacy się straszni zrobili w walce na słowa i w zbijaniu wszystkiego, co ktoś powie — wszystko jedno, czy to będzie fałsz, czy prawda”, a poza tym „mówią, że w krótkim czasie potrafią i kogoś innego, byle kogo, uczynić mistrzem w tym samym zakresie”.

Paradoks, który u eleatów był trudnością (aporia) — a więc czymś domagającym się przezwyciężenia, dotarcia do głębszych własności danej nam w potocznym doświadczeniu rzeczywistości, u sofistów stał się celem samym w sobie. Za pomocą paradoksalnych rozumowań sofisci uczyli sztuki przekonywania, ale też dobrze zbudowany paradoks był dla nich głównym narzędziem skutecznego prowadzenia sporu. Oto przykład takiego opartego na paradoksie zwycięstwa, wzięty z platońskiego dialogu „Eutydem”. Tytułowa postać — znany sofista — pokazuje swoją sztukę w dyskusji ze znacznie mniej doświadczonym przeciwnikiem — Kleiniasem. Punktem wyjścia jest wspólnie uzgodniona teza, że to mądrzy ludzie, nie zaś głupi, są tymi, którzy się uczą.

Po kilku wstępnych pytaniach, które pomijam z braku miejsca, dochodzi do następującego fragmentu dyskusji.

Eutydem: — „Więc prawda, że kiedyście się uczyli, to jeszcze nie wiedzieliście tego, czegoście się uczyli?”

— Nie — powiada Kleinias.

— Więc czyście byli mądrzy, kiedyście tego nie wiedzieli?”

— Ano nie — mówi.

— Nieprawdaż, więc jeśli nie mądrzy, to głupi?”

— Tak jest.

— Więc wy ucząc się czegoście nie wiedzieli, uczyliście się jako głupi?”

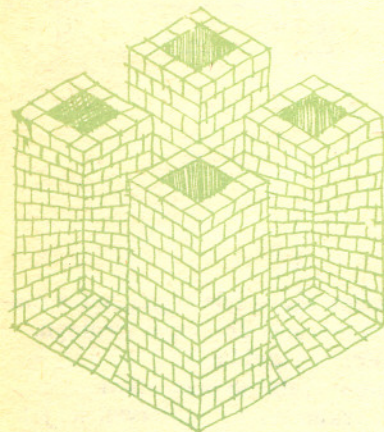
Chłopak skinął głową.

— Więc głupi się uczą na mądrych Kleiniaszu, a nie mądrzy, jak się tobie wydaje”.

Do tego miejsca sprawa jest jeszcze prosta. Wykazano, że chłopak Kleiniasz niesłusznie przyjął na początku sporu, że to mądrzy właśnie są tymi, którzy się uczą. Jednakże Eutydem nie zatrzymuje się w tym miejscu — pokazuje bowiem, że teza przeciwna jest również nie do przyjęcia. (Głupi bowiem to ci, których nie można niczego nauczyć...)

W tym krótkim przykładzie widać różne sofistyczne sztuczki: żonglowanie subtelnymi odcieniami znaczeń, wykorzystywanie niedookreśloności stosowanych pojęć, czy wreszcie — zerowanie na braku wyrobienia i naiwności przeciwnika. Z wytrawnym dyskutantem, Sokratesem, Eutydem ponosi jednak porażkę... Bo w końcu o to tutaj chodziło — o zwycięstwo za wszelką cenę w potyczce, którą była dyskusja (audytorium było gronem sędziów oceniających walczących przeciwników). Tymczasem, przypomnijmy, że w dyskusji — jaką stanowi dialog matematyka z czytelnikiem dowodu jego twierdzenia, chodzi o coś innego. Nie pokazanie przewagi jest istotne, ale wspólne dojście do prawdy (choćby fragmentarycznej) w interesującym obie strony przedmiocie. Dlatego właśnie stwierdziłem, że sofisci byli dla ewentualnych dyskusji o matematyce znacznie niebezpieczniejsi od swoich poprzedników, eleatów.

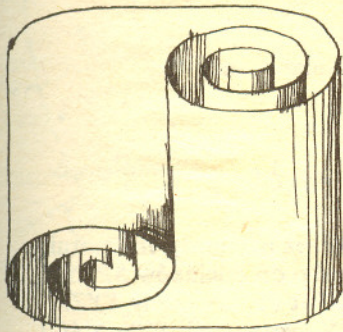
Toteż pomimo pewnego pozytywnego wkładu w rozwój matematyki (doskonalenie metod rozumowania — zwłaszcza ulubionej przez matematyków redukcji do absurdu, rozwój logiki formalnej jako próby obrony przed sztuczkami sofistów...) sofisci nie cieszą się w historii matematyki dobrą opinią. To na ich cześć sofistmatami nazwano „dowody”



falszywych twierdzeń, w których subtelne błędy przemycane są na tyle zręcznie, że całość rozumowania ma wszelkie pozory poprawności. Oto prosty przykład takiego sofizmu (wiele ich znaleźć można w różnych zbiorach matematycznych rozrywek i ciekawostek).
Twierdzenie. Istnieją okręgi mające dwa różne środki.

Dowód. Pomiedzy dwiema równoległymi prostymi p i q oberzmy dowolny punkt M . Z punktu tego poprowadźmy odcinki MP i MQ prostopadłe do danych prostych ($P \in p$, $Q \in q$). Przez punkty M , P i Q poprowadźmy okrąg, który zadane proste przetnie odpowiednio w punktach R i S (rysunek). Prosty kąt MPQ oparty jest na półokręgu nakształonego koła. W związku z tym, środek okręgu leży w punkcie O' będącym środkiem odcinka \overline{MQ} . Podobnie inny środek O'' leży w połowie odcinka \overline{MP} . Co kończy dowód...
 No dobrze, można zapytać, ale skąd brali się ludzie chcący płacić sofistom za lekcje ich wątpliwych sztuczek? Musiało ich przy tym być немало, jeśli — jak powiedziano — sofisci stanowili liczną grupę w społeczeństwie greckim w okresie powstawania aksjomatycznego systemu geometrii. Jest to pytanie znacznie ogólniejszej natury niż to, które postawiliśmy na początku cyklu artykułów. Toteż i odpowiedź znaleźć można jedynie poprzez odwołanie się do szerszego kontekstu wydarzeń historycznych. Zdaniem historyków, na przełomie VIII i VII wieku p.n.e. w Grecji doszło do wytworzenia swoistej formy organizacji życia zbiorowego — miasta-państwa (polis). Według opinii francuskiego historyka J. P. Vernanta („*Źródła myśli greckiej*”, PWN, Warszawa 1969) „system polis zakłada przede wszystkim niezwykłą przewagę słowa nad innymi narzędziami władzy. Mowa staje się instrumentem *par excellence* politycznym, kluczem wszelkiego autorytetu w państwie, środkiem rządzenia i panowania nad innymi. [...] Mowa [...] staje się starciem, dyskusją, argumentacją. Wymaga ona publiczności występującej jako sędzia, który przez wzniesienie rąk wybiera ostatecznie jedną ze stron przed nim stojących. Ta czysto ludzka decyzja jest właśnie miernikiem siły przekonywania dwu mów, zapewniającą jednemu z mówców zwycięstwo nad przeciwnikiem”.

W takim właśnie kontekście kształtowała się zarówno metoda dedukcyjna, jak i praktyczna działalność sofistów. Taka właśnie była kultura Grecji, zwłaszcza w tych miastach, które (jak np. Ateny) przez następne stulecia doskonalily mechanizmy demokratycznego społeczeństwa. Tak więc, metoda dedukcyjna była „matematycznym zastosowaniem” dialektycznej metody filozofii, ta zaś — wcieleniem demokratycznych mechanizmów sprawowania władzy. Pytanie o źródła metody dedukcyjnej staje się więc pytaniem o źródła greckiej demokracji... Odpowiedzi na to ostatnie pytanie radzimy Czytelnikowi poszukać w książkach omawiających dzieje i kulturę starożytnej Grecji.



Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 253. W ciągu cyfr rozpoczynających się 1981... każda następna cyfra to liczba jedności sumy czterech cyfr poprzednich. Czy w ciągu naszym pojawi się 1982? A 1981 jeszcze raz?
 Rozwiązanie na str. 7

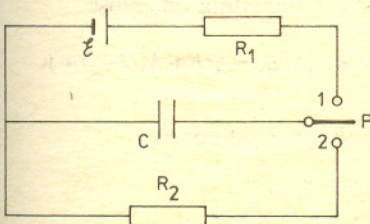
M 254. Pokazać, że koło o promieniu 1 można podzielić na 6 części o średnicy 1 i nie można podzielić na 7 części o średnicy mniejszej niż 1.
 Rozwiązanie na str. 12

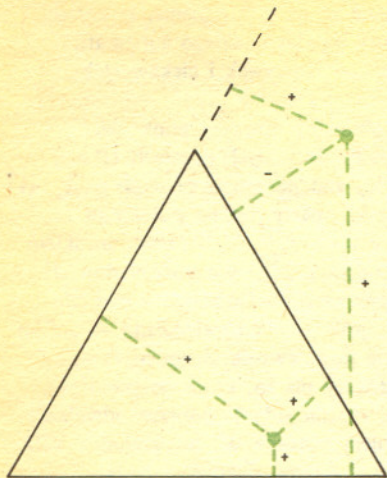
M 255. Na ile sposobów można przedstawić 1000 jako sumę kolejnych liczb naturalnych?
 Rozwiązanie na str. 2

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

F 90. Rozładowując kondensator przez rozcieńczony kwas siarkowy otrzymuje się „mieszanie piorunującą”. Jej masa, zgodnie z I prawem elektrolizy, zależy jedynie od ładunku przepływającego przez roztwór. Używając, zamiast jednego, większej ilości połączonych szeregowo elektrolizerów, można przy pomocy jednego kondensatora wydzielać dowolnie dużą masę gazu. Elektroliza trwać będzie odpowiednio dłużej, mimo to, spalając produkty, otrzyma się nieograniczoną ilość ciepła. Jest to oczywiście sprzeczne z zasadą zachowania energii, gdyż początkowa energia naładowanego kondensatora jest skończona. Wykryć błąd w przytoczonym rozumowaniu.
 Rozwiązanie na str. 6

F 91. Przelącznik P (patrz rysunek) zwierany jest na przemian z zaciskami 1 i 2. Czasy zetknięcia są jednakowe, lecz tak małe, że zmiany ładunku kondensatora podczas operacji stykania są niewielkie. Jaki ładunek zgromadzi się na kondensatorze po bardzo dużej ilości przełączzeń? Parametry elementów umieszczone na schemacie potraktować jako dane.
 Rozwiązanie na str. 3





Planowana jest budowa sklepu spożywczego S , który zaopatrywany będzie przez piekarnię P , mleczarnię M i browar B . Gdzie należy zbudować sklep, by samochody dostawcze zaopatrujące go w pieczywo, mleko i piwo pokonywały w sumie najmniejsze odległości?

Pytanie to postawił francuski matematyk Fermat włoskiemu fizykowi Torricellemu w następującej wersji geometrycznej: mając dany trójkąt znaleźć punkt, którego suma odległości od wierzchołków tego trójkąta jest najmniejsza. Torricelli rozwiązał to zadanie kilkoma sposobami. Najprostszy z nich opiera się na następującym twierdzeniu Vivianiego.

Suma trzech odległości dowolnego punktu płaszczyzny od boków danego trójkąta równobocznego nie zależy od położenia tego punktu.

Uwaga: odległość punktu O od boku trójkąta uznajemy za dodatnią, o ile punkt i trójkąt leżą w tej samej półpłaszczyźnie wyznaczonej przez prostą l zawierającą ten bok, a ujemną w przeciwnym przypadku. Wartość bezwzględna tej odległości przyjmujemy za równą odległości punktu O od prostej l .

Dowód:

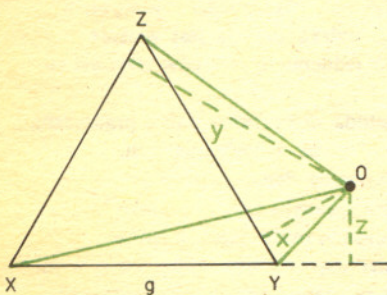
Niech ΔXYZ będzie równoboczny, g niech oznacza długość jego boku, J — pole, a x, y, z odpowiednio odległości danego punktu O od boków $\overline{YZ}, \overline{ZX}, \overline{XY}$.

Wówczas

$$\frac{1}{2}gx + \frac{1}{2}gy + \frac{1}{2}gz = J \quad (\text{uwzględniamy znaki!}).$$

Zatem

$$x + y + z = \frac{2J}{g}, \quad \text{co kończy dowód.}$$



Niech teraz ΔPMB będzie trójkątem wyznaczonym przez piekarnię, mleczarnię i browar. Wybierzmy punkt S tak, by proste prostopadłe do odcinków SP, SM, SB odpowiednio w punktach P, M, B wyznaczały trójkąt równoboczny XYZ .

Niech $S' \neq S$ będzie jakimkolwiek innym punktem. Wówczas, jeśli $S'P', S'M', S'B'$ są prostopadłymi opuszczonymi odpowiednio na boki trójkąta XYZ , to mamy $S'P' \leq S'P, S'M' \leq S'M, S'B' \leq S'B$, gdzie jedna przynajmniej nierówność musi być ostra. Zatem $S'P' + S'M' + S'B' < S'P + S'M + S'B$. Jednakże stosując twierdzenie Vivianiego do ΔXYZ otrzymujemy $SP + SM + SB \leq S'P' + S'M' + S'B'$, przy czym, ponieważ S jest wewnątrz trójkąta XYZ , znak $=$ zachodzi, gdy S' jest również wewnątrz tego trójkąta, a $<$, gdy jest on na zewnątrz. Ostatecznie mamy więc $SP + SM + SB < S'P' + S'M' + S'B'$, co dowodzi, że S jest poszukiwanym punktem.

Z konstrukcji wynika, że S jest punktem przecięcia łuków kołowych o cięciwach $\overline{PM}, \overline{MB}, \overline{BP}$ i kącie rozwarcia 120° . Taki punkt istnieje, o ile wszystkie kąty ΔPMB są mniejsze niż 120° . O ile jeden z nich, np. $\sphericalangle PBM \geq 120^\circ$, wówczas poszukiwanym punktem S jest B .

Dowód:

Wystarczy wykazać, że $PB + MB < PU + MU + BU$ dla dowolnego U . Oznaczmy

$$\gamma = \sphericalangle PBM, \varphi = \sphericalangle PBU, \psi = \sphericalangle MBU.$$

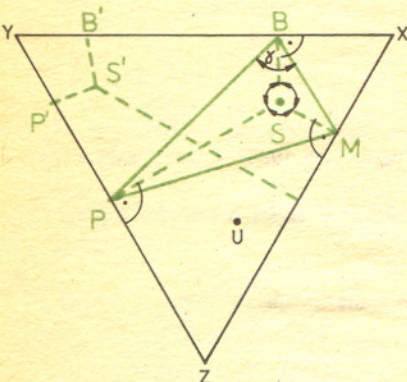
Niech F będzie rzutem punktu U na prostą zawierającą PB , a G — rzutem punktu U na prostą zawierającą BM . Wówczas, jeśli x, y są odpowiednio odległościami B od F i G , to

$$x = BU \cdot \cos \varphi, \quad y = BU \cdot \cos \psi$$

(przy czym, jeśli któryś z cosinusów jest ujemny, to odpowiednią odległość traktujemy jako liczbę ujemną).

Otrzymujemy $PB = PF + x, MB = MG + y$, czyli $PB + MB = PF + MG + x + y$. Z drugiej strony

$$\begin{aligned} (*) \quad x + y &= BU \cdot \cos \varphi + BU \cdot \cos \psi = BU(\cos \varphi + \cos \psi) = \\ &= 2BU \cdot \cos \frac{\varphi + \psi}{2} \cdot \cos \frac{\psi - \varphi}{2}. \end{aligned}$$



Rozwiązanie zadania M 254. Podział na 6 równych wycinków po 60° spełnia oczywiście warunki pierwszej części zadania. Rozważmy teraz podział na 7 części. Zachodzi wtedy jedna z dwóch możliwości: albo jedna z części zawiera środek koła i punkt na jego obwodzie i wtedy jej średnica jest większa lub równa 1, albo jedna część zawiera środek, a 6 pozostałych pokrywa cały obwód koła. W drugim przypadku co najmniej jedna z części musi zawierać dwa punkty odległe co najmniej o $1/6$ obwodu. Część ta ma wtedy średnicę ≥ 1 .

Jeden z powyższych cosinusów ma wartość $\cos \frac{\gamma}{2}$ (który z nich — to zależy od tego, czy U leży wewnątrz, czy na zewnątrz $\times MBP$), ale ponieważ $\gamma \geq 120^\circ$, więc $\cos \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{2}$. Zatem maksymalna wartość wyrażenia (*) to BU .

Otrzymujemy

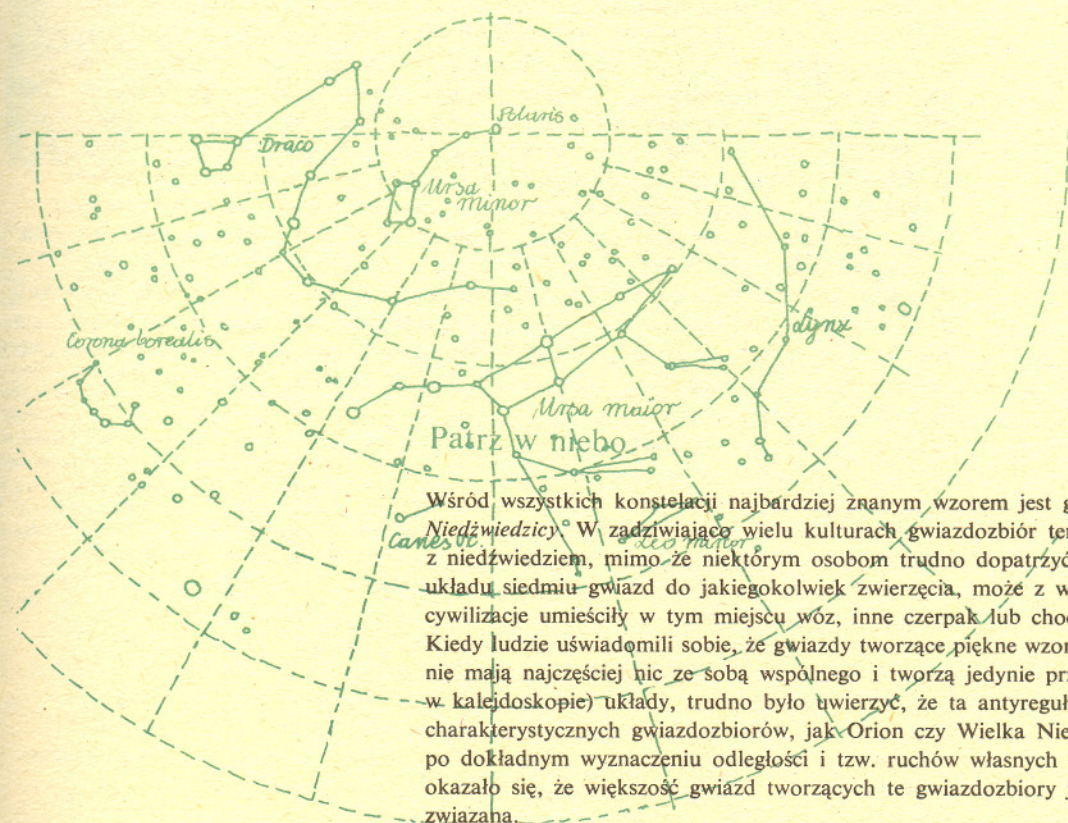
$$PB + MB \leq PF + MG + BU.$$

Ponieważ jednak przyprostokątne PF i GM trójkątów prostokątnych ΔPFU i ΔMGU są krótsze niż ich przeciwprostokątne PU i MU , więc ostatecznie otrzymujemy:

$$PB + MB < PU + MU + BU.$$

Oznacza to, że w rozważanym przypadku poszukiwany punkt S równy jest B , czyli że sklep należy wybudować w obrębie browaru. Ma to tę dodatkową zaletę, że zapewnia regularną dostawę świeżego piwa.

Mgr Andrzej PELC



Wśród wszystkich konstelacji najbardziej znanym wzorem jest gwiazdozbiór *Wielkiej Niedźwiedzicy*. W zaskakująco wielu kulturach gwiazdozbiór ten był związany z niedźwiedziem, mimo że niektórym osobom trudno dopatrzeć się podobieństwa tego układu siedmiu gwiazd do jakiegokolwiek zwierzęcia, może z wyjątkiem kaczki. Niektóre cywilizacje umieściły w tym miejscu wóz, inne czerpak lub chochle.

Kiedy ludzie uświadomili sobie, że gwiazdy tworzące piękne wzory na niebie w rzeczywistości nie mają najczęściej nic ze sobą wspólnego i tworzą jedynie przypadkowe (jak w kalejdoskopie) układy, trudno było twierdzić, że ta antyreguła dotyczy także tak charakterystycznych gwiazdozbiorów, jak Orion czy Wielka Niedźwiedzica. I o dziwo, po dokładnym wyznaczeniu odległości i tzw. ruchów własnych poszczególnych składników, okazało się, że większość gwiazd tworzących te gwiazdozbiory jest ze sobą w pewien sposób związana.

Już w 1869 roku R. A. Proctor stwierdził, że 5 „środkowych” gwiazd Wielkiej Niedźwiedzicy porusza się razem w jednym kierunku. Od tego czasu zidentyfikowano wiele kolejnych składników tej grupy. Jest to najbliższa znana nam gromada gwiazd, prawie dwa razy bliższa niż Hiady w Byku (*Patrz w niebo* 12/1979). Obecnie znamy już około dwudziestu członków *Ursa Maior*. Należą do niej również gwiazdy leżące poza macierzystą konstelacją, np. 21 Małego Lwa (*Leo Minoris*), α Korony Północnej (*Coronae Borealis*) — spróbujcie znaleźć te gwiazdy na niebie według mapki obok.

Do grupy tej należą również słabsze gwiazdy z wymienionych gwiazdozbiorów a także ze *Smoka* (*Draco*) i *Małej Niedźwiedzicy* (*Ursa Minor*).

Środek gromady odległy jest od nas o około 75 lat świetlnych, ma ona kształt elipsy o osi wielkiej ~ 30 lat świetlnych i małej ~ 18 .

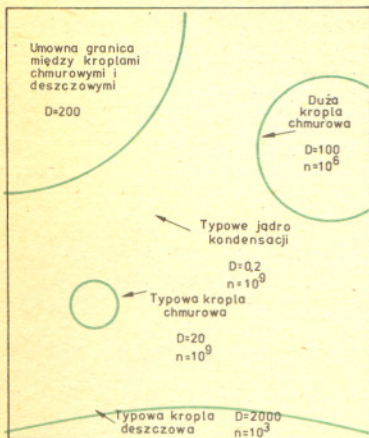
Kiedy odkryto, że prawie wszystkie jasne gwiazdy w Wielkiej Niedźwiedzicy tworzą gromadę — astronomowie zauważyli, że w ogóle wiele bardzo jasnych gwiazd, między innymi *Syriusz*, α *Wężownika*, δ *Lwa*, β *Woźnicy* i wiele innych, porusza się w przestrzeni względem nas mniej więcej w jednym kierunku, pokrywającym się z kierunkiem, w którym zmierza gromada *Ursa Maior*. Obecnie uważa się, że te jasne, bliskie gwiazdy nie są członkami powyższej gromady, ale tworzą coś w rodzaju dużego strumienia gwiazd. Gromada *Ursa Maior* porusza się razem z tym strumieniem. Nasze Słońce jest w nim zanurzone, więc jego składniki mijają nas ze wszystkich stron, co tłumaczy ich obecność w różnych częściach nieba.

mgr Tomasz CHLEBOWSKI

Wiele szczegółów na temat poruszony w tym artykule znajdzie Czytelnik w pasjonującej książeczce Duncana C. Blancharda „*Od kropeł deszczu do wulkanów*” wydanej w serii „Omega”.

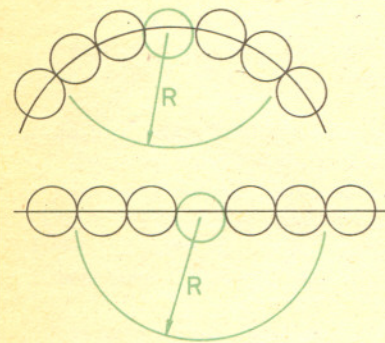
Deszcz

Prof. dr Krzysztof HAMAN



Porównanie średnic (D w μm) i koncentracji (n w m^{-3}) jąder kondensacji, kropli chmurowych i kropli deszczowych. Na uwagę zasługuje duża różnica wielkości typowej kropli chmurowej i deszczowej.

Wpływ napięcia powierzchniowego i substancji rozpuszczonych w wodzie na prężność pary nasyconej możemy sobie wyobrazić następująco. Stan nasycenia występuje wtedy gdy w jednostce czasu na jednostce powierzchni cieczy osadza się tyle samo molekuł wody, co ją opuszcza przechodząc do fazy gazowej. Molekuły opuszczające powierzchnię muszą pokonać siły przyciągania pochodzące od pozostałych molekuł wody (napięcie powierzchniowe). Z rysunku widać, że na powierzchni silnie zakrzywionej siły te będą mniejsze niż na powierzchni płaskiej, bo każda molekula jest w zasięgu działania (R) mniejszej liczby innych molekuł i łatwiej jest jej się „wyrwać” z tej powierzchni



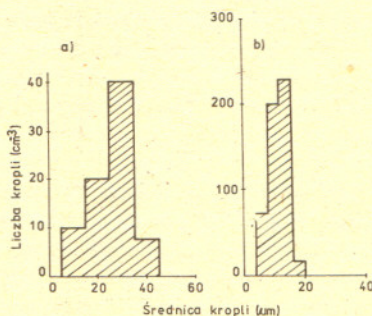
Osiągnięcie równowagi następuje więc przy większym strumieniu molekuł wody dochodzących do powierzchni od strony fazy gazowej, czyli przy większym ciśnieniu pary niż w przypadku powierzchni płaskiej. Z kolei jeżeli część powierzchni cieczy zajmują molekuły substancji rozpuszczonej, to efektywna powierzchnia parującej wody jest mniejsza niż powierzchnia całego roztworu, na której mogą się osadzać molekuły przychodzące od strony fazy gazowej. Oznacza to, że prężność pary, przy której nastąpi równowaga, musi być niższa niż w przypadku czystej wody. Uwagi te dotyczą oczywiście nie tylko wody, ale także wszystkich cieczy i roztworów.

Deszcz jest zjawiskiem tak pospolitym, że na ogół nie zwracamy na niego uwagi..., chyba że psuje nam plany turystyczne lub przeciwnie, gdy jego brak staje się kłeską suszy. Ot, para w powietrzu skrapla się i spada na ziemię. Tymczasem za tym pozornie banalnym zjawiskiem kryją się skomplikowane procesy fizyczne, poznane dokładniej dopiero w ostatnich dziesięcioleciach, a po części stanowiące wciąż zagadkę. Spróbujmy je tu prześledzić — oczywiście w ogromnym skrócie i bez wnikania w szczegóły.

A więc po pierwsze, jeżeli ma padać deszcz, to muszą być najpierw chmury. Powstawanie chmur, tych skupisk mikroskopijnych kropelek wody lub kryształków lodu, następuje w wyniku kondensacji zawartej w powietrzu pary wodnej. Kondensacja może nastąpić wtedy, gdy pojawi się przesylenie, tj. ciśnienie pary wodnej przewyższy pewną wartość krytyczną zwaną prężnością pary nasyconej. Wartość tej prężności maleje z temperaturą, wobec czego oziębianie powietrza wraz z zawartą w nim parą powinno doprowadzić do kondensacji. I rzeczywiście tak jest. Przyczyną oziębiania jest najczęściej ruch wstępujący powietrza i związane z nim adiabaticzne rozprężanie; rzadziej promieniowanie lub inne mechanizmy wymiany ciepła (np. mieszanie czy przewodnictwo). Już od ponad stu lat fizycy wiedzą, że prężność pary nasyconej zależy też od napięcia powierzchniowego i stężenia substancji rozpuszczonych w wodzie. W przypadku mniej niż nanometrowych kropelek, od powstawania których musiałaby się zaczynać kondensacja w atmosferze, wpływ napięcia powierzchniowego jest tak duży, że dopiero przy przesyleniu sięgającym kilkuset procent w stosunku do stanu nasycenia nad płaską powierzchnią wody mogłoby dojść do powstania chmury. Z pomocą przychodzą tu cząstki aerozolu atmosferycznego, a ściślej mówiąc ich rozpuszczalne w wodzie i na ogół higroskopijne części. Na tych tzw. jądrach kondensacji para zaczyna się skraplać czasem już przy 70% wilgotności względnej! Jednakże w miarę jak kropla rośnie stężenie roztworu substancji zawartej początkowo w jądrze kondensacji maleje i prężność pary nasyconej nad kroplą szybko się podnosi. Widać to wyraźnie ze wzoru

$$(1) \quad \delta = \varepsilon - \varepsilon_0 e^{-\frac{L\mu}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) + \frac{2\sigma}{r} \left(1 - \frac{A}{r^3} \right)}$$

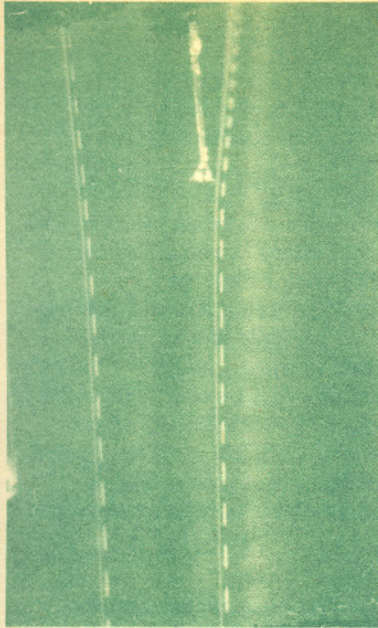
wiążącego z dobrym przybliżeniem przesylenia δ (prędkość kondensacji jest proporcjonalna do przesylenia) z prężnością pary ε , temperaturą absolutną T i promieniem kropli r . ε_0 to prężność pary nasyconej w standardowej temperaturze T_0 , a wielkości R, μ, L, σ i A to odpowiednio: stała gazowa, ciężar cząsteczkowy wody, ciepło utajone parowania, współczynnik napięcia powierzchniowego i stała charakteryzująca wielkość i naturę początkowego jądra kondensacji. Jeżeli wilgotność względna nie różni się zbytnio od 100%, to dla każdego jądra istnieje taki promień kropli r , przy którym $\delta = 0$. W takiej sytuacji kropla znajduje się w równowadze; ani nie rośnie, ani nie maleje. Znacząc liczbę i własności jąder kondensacji oraz wartości ε i T możemy ze wzoru (1) wyznaczyć widmo wielkości kropelek w stanie równowagi.



Widmo wielkości kropli to funkcja mówiąca, jak zależy ilość kropli w jednostce objętości od ich średnicy.

Typowe widmo kropli w chmurach: (a) morskich (mała liczba dużych jąder kondensacji), (b) kontynentalnych (duża liczba małych jąder kondensacji)

Niestety, w naturalnych chmurach nie tylko widmo zależy od ε i T , ale i na odwrót, widmo wpływając na przebieg kondensacji samo wpływa na te parametry. Ponieważ wpływają na nie także czynniki dynamiczne (ciśnienie, mieszanie itp.) zależne w pewnym stopniu od ciepła utajonego wydzielanego przy kondensacji, pojawia się tu cały łańcuch zależności i sprzężeń, który jest dość trudno rozplątać. Podjęto jednak taką próbę uzyskując interesujący rezultat; w zwykłych warunkach atmosferycznych



Fot. dr R. Balcer

Małe swobodnie spadające krople o średnicach poniżej $40\ \mu\text{m}$ mają trudności ze zderzeniem się, ponieważ siły aerodynamiczne pomiędzy nimi działają silnie odpychająco. Przy większych rozmiarach kropli efekt ten jest słabszy, a nawet może zmienić znak. Na zdjęciu: tor kropelki o średnicy ok. $20\ \mu\text{m}$ opływającej zawieszoną na cienkim druciku kropelkę o średnicy ok. $85\ \mu\text{m}$. Zdjęcie wykonano przy oświetleniu dwoma źródłami światła, z których jedno działa pulsacyjnie z częstotliwością $1000\ \text{Hz}$. W rezultacie tor kropelki ma postać dwu równoległych linii, z których jedna jest przerywana. Odległość między liniami jest miarą średnicy kropelki, zaś długość przerwy jest odwrotnie proporcjonalna do prędkości.

Rozwiązanie zadania astrologa. Najmniejsza liczba N o własnościach podanych w zadaniu ma oczywiście postać $N = 2^k \cdot 3^l \cdot 5^m$. Ponieważ $N/2$ jest kwadratem, to k jest nieparzyste, m, l — parzyste. Ponieważ $N/3$ jest sześcianem, więc k, m dzielą się przez 3, a l daje resztę 1. Ponieważ $N/5$ jest piątą potęgą, więc k, l dzielą się przez 5, a m daje z takiego dzielenia resztę 1. Najmniejsze z takich liczb k, l, m to 15, 10, 6, a zatem najmniejszą liczbą spełniającą warunki króla jest $N = 2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^6 = 30233088000000$.

nie można się spodziewać, by w wyniku kondensacji pojawiły się kropelki o średnicach przekraczających $30\ \mu\text{m}$. Pomiarzy przeprowadzone w chmurach w przeważającej części przypadków (ale nie wszystkich!) potwierdziły ten wynik. Dalszy wzrost kropelek do rozmiarów kropli deszczowych musi polegać na ich zderzeniu i łączeniu się z sobą. Okazuje się jednak, że tak małe kropelki praktycznie się nie zderzają i powstawanie z nich deszczu trwałoby kilkadziesiąt godzin lub dłużej. A tymczasem zdarza się, że deszcz pada już w kilkanaście minut po rozpoczęciu kondensacji... Fakt ten można by wytłumaczyć, gdyby przyjąć, że istnieją w chmurze krople o średnicy większej niż $40\text{--}50\ \mu\text{m}$. Taka kropla dość łatwo zderza się z typowymi kropelkami chmurowymi i szybko rośnie ich kosztem. W dostatecznie gęstej i grubej chmurze w ciągu paru minut kropla taka może wyrosnąć do średnicy kilku milimetrów. Tak duże krople łatwo się rozpadają na kilka mniejszych, które z kolei same rosną szybko dalej. Uzyskujemy więc typową reakcję łańcuchową. Wystarczy na początek kilka takich większych kropelek na milion „zwyuczajnych”, by w ciągu kilku minut spowodować całkiem intensywny deszcz.

Spadające swobodnie krople rozpadają się, jeżeli siły aerodynamiczne (rosnące proporcjonalnie do kwadratu prędkości spadania) stają się większe od sił napięcia powierzchniowego utrzymujących spójność kropli. W przypadku wody następuje to dla kropli o średnicy $5\text{--}7\ \text{mm}$. Mniejsze krople ($2\text{--}3\ \text{mm}$) mogą się rozpaść w wyniku zderzenia z inną kroplą o podobnych rozmiarach. Natomiast bardzo małe krople przy zderzeniu na ogół łączą się ze sobą tworząc krople większych rozmiarów. Proces taki nosi nazwę koalescencji.

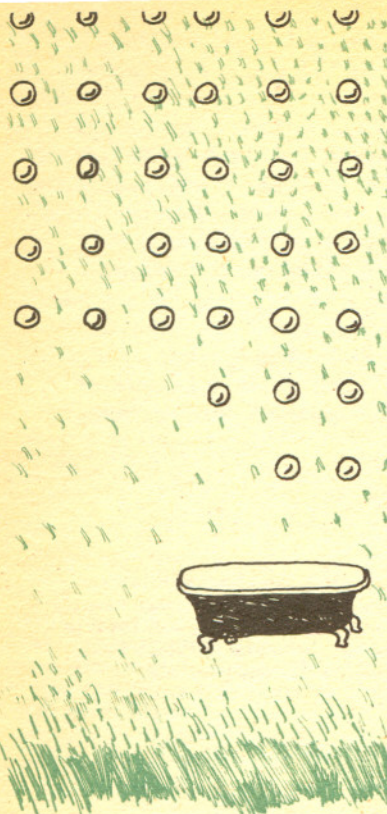


Na rysunku (wykonanym na podstawie zdjęcia z tunelu aerodynamicznego) widoczny jest rozpad ogromnej kropli wody (średnica kuli o tej samej objętości co kropla wynosi $9,4\ \text{mm}$) na dwie duże i trzy małe.

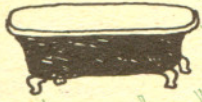
Skąd się jednak mogą brać takie większe krople? Już dość dawno zaczęto podejrzewać, że ich powstawanie może mieć coś wspólnego z zamarzaniem. Jak wiadomo, temperatura w atmosferze spada z wysokością i nawet w lecie na wysokości $3\text{--}4\ \text{km}$ jest niższa od 0°C . Kropelki chmurowe nie zamarzają jednak od razu po przekroczeniu tej temperatury. Na to, żeby zaczął powstawać lód, potrzebne jest najpierw przekroczenie bariery, jaką jest powstanie pierwszych elementów siatki krystalicznej lodu. Jest to na ogół wynik przypadkowego ustawienia się cząsteczek wody w dogodnej konfiguracji, lecz w mikroskopijnej kropelce na takie losowe zdarzenie trzeba bardzo długo czekać, chyba że temperatura jest bardzo niska (w temperaturze -40°C nawet najmniejsze kropelki chmurowe zamarzają niemal natychmiast). Najczęściej proces zamarzania zaczyna się dopiero od kontaktu kropli z tzw. jądrem zamarzania. Jądrami zamarzania bywają unoszące się w powietrzu okruchy różnych minerałów, cząstki organiczne albo po prostu wcześniej powstałe kryształki lodowe. Różne jądra stają się aktywne w różnych temperaturach. Zazwyczaj jednak przy -10° , -20°C znaczna część kropelek chmurowych zamarza.

Wzór (1) jest prawdziwy również dla lodu. Prężność pary wodnej nad lodem jest niższa niż nad przechłodzoną wodą, ponieważ L dla lodu jest o blisko $250\ \text{J/g}$ większe niż dla wody. Lód, przechłodzona woda i para wodna nie mogą być równocześnie w stanie równowagi i kryształki lodu zaczynają szybko rosnać. Proces ten najefektywniej przebiega w temperaturze $-10, -15^\circ\text{C}$, toteż jeżeli wierzchołek chmury dosięgnie tej temperatury, pojawiające się w nim kryształki lodowe szybko rosną do rozmiarów tak dużych, że łatwo mogą zapoczątkować powstanie opadu. Zostawiając na inną okazję rozważania nad mechanizmem powstawania różnych form gwiazdek śniegowych i ziarenek gradowych oraz różnych form opadu stwierdzimy tu tylko, że tak powstający opad dochodzi do ziemi w postaci śniegu czy gradu lub deszczu w zależności od tego, czy zdoła stopnieć po drodze, czy nie.

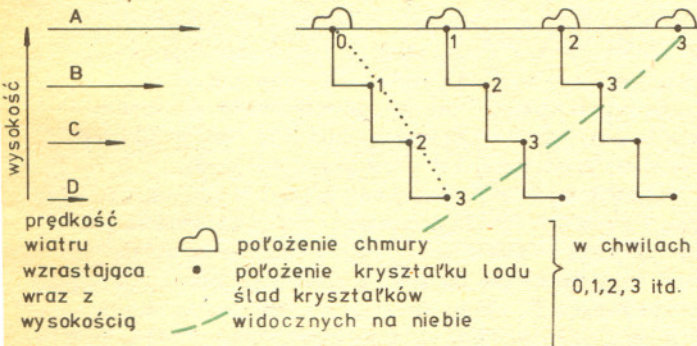
Opisany tu mechanizm dominujący w opadach umiarkowanych szerokości geograficznych został ostatecznie rozszyfrowany przez szwedzkiego fizyka atmosfery Tora Bergerona w roku 1933. Szybko się jednak okazało, że nie jest to mechanizm jedyny. W latach drugiej wojny światowej w czasie lotów w chmurach zaobserwowano intensywne deszcze z chmur tropikalnych, których wierzchołki na pewno nie osiągały temperatury 0°C . W licznych przypadkach udało się stwierdzić, że początek takim opadom dają wyjątkowo wielkie kropelki powstające na tzw. jądrach gigantach o nieprzeciętnie dużej stałej A . Jądra takie powstają z soli morskich w wyniku parowania kropelek pochodzących ze wzburzonych fal morskich. Czasem początek kroplom deszczowym mogą dawać duże cząstki mineralne lub organiczne unoszone z powierzchni ziemi przez wiatr i wciągane do chmur (był przypadek znalezienia w środku gradziny komara). Wiele innych przypadków budzi jednak kontrowersje i wątpliwości. Czy zawodzi nasza teoria kondensacji w chmurach, czy może teoria koalescencji czyli łączenia się kropelek? Stosowane przez nas teorie matematyczne zawierają wiele założeń upraszczających, dotyczących ruchów powietrza, własności



statystycznych zbiorów kropelek itp. co może być źródłem błędów. Z drugiej strony pomimo tych uproszczeń otrzymywane równania są bardzo trudne do rozwiązania, nawet czysto numerycznego. W rezultacie na wiele istotnych pytań ilościowych, a nawet jakościowych wciąż nie umiemy odpowiedzieć i co kilka lat pojawiają się próby przedstawienia w tych sprawach nowych hipotez lub teorii. A rzecz ma bardzo istotny aspekt praktyczny. Już ponad 30 lat temu zauważono, że wprowadzając do chmury sztuczne jądra zamarzania można spowodować wypadanie deszczu z chmur, które skądinąd wcale się do tego nie kwapiły. Natychmiast podjęto próby spożytkowania tego odkrycia do walki z posuchą i gradobiciami i co jakiś czas prasa codzienna przynosi sensacyjne wiadomości o rzekomych sukcesach w tej dziedzinie. Rzecz jednak w tym, że choć sam zabieg „zasiania” chmury nie jest specjalnie skomplikowany, wciąż nie umiemy ustalić, gdzie i kiedy go przeprowadzić, by deszcz spadł tam, gdzie chcemy i w potrzebnej ilości. A trzeba przy tym pamiętać, że np. „przedawkowanie” jąder zamarzania lub ich wprowadzenie w niewłaściwym momencie może dać skutek wręcz przeciwny do zamierzonego; chmura „utrwali się” jako chmura lodowa lub dla odmiany da zwiększony opad gradu. Z drugiej strony coraz obficie wprowadzane do atmosfery zanieczyszczenia przemysłowe zawierają wielkie ilości cząstek aktywnych jako jądra kondensacji i zamarzania. I nikt nie wie, czy i jak może się to odbić na opadach w skali globalnej, a co za tym idzie, na światowej produkcji żywności. Nic więc dziwnego, że badania fizyki chmur i opadów budzą wciąż rosnące zainteresowanie.



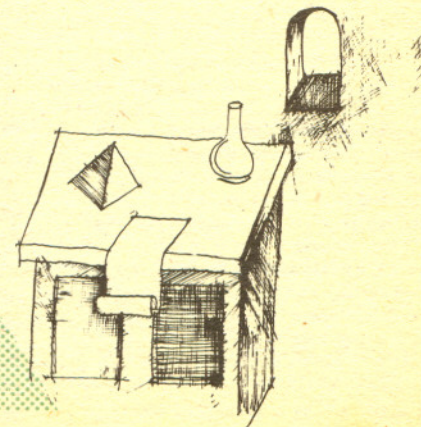
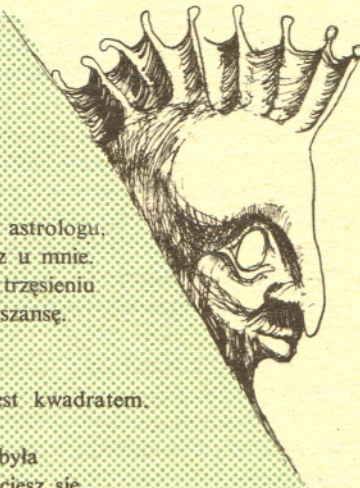
Czy zauważyliście, że niektóre chmury mają włosy? Czasem obserwuje się cienkie kosmyki wysokich chmur nazywanych przez meteorologów chmurami *cirrus* (łacińska nazwa *cirrus* = włosy). Kosmyki te są złożone z kryształków lodu (bo chmura jest wysoko i temperatura jest poniżej 0°C), które spadają w powietrzu poruszającym się z prędkością różną od prędkości chmury. Przypatrzcie się rysunkowi.



Chmura poruszając się na poziomie *A* tworzy w sposób ciągły kryształki lodu, które spadają w dół w obszary, gdzie prędkość wiatru jest mniejsza (poziomy *B*, *C* i *D*). Pojedynczy kryształ będzie się poruszał po trajektorii łączącej punkty 0, 1, 2 i 3 (linia z kropek), natomiast to, co zaobserwujemy w danej chwili na niebie, czyli wszystkie kryształki razem, tworzy linię (w hydrodynamice nazywa się to linią wysnutą) oznaczoną na rysunku kreskami.

Patrząc na wysokie chmury *cirrus* możemy wyznaczyć prędkość wiatru na danym poziomie, a z kształtu haczykowatych, lodowych pasemek włosów możemy znaleźć zmiany prędkości wiatrów górnych wraz z wysokością.

- Wzywałś mnie, Najjaśniejszy Panie?
- A tak, tak. Przyszło mi do głowy, mój nadworny astrologu, że być może nie zasługujesz na ten chleb, który masz u mnie. Horoskopy ci ostatnio nie wychodzą, o wczorajszym trzęsieniu ziemi też mnie nie powiadomiłeś, ale dam ci jeszcze szansę. Znasz arytmetykę?
- Nie ma dla mnie tajemnic, o najlaskawszy!
- No to podaj mi przykład liczby, której połówka jest kwadratem.
- Królu i panie, to zadanie mi uwłacza.
- Takis beczelny? A żeby jeszcze jej jedna trzecia była szóstianem? A widzisz? Co mówisz? Już wiesz? Nie ciesz się, jeszcze twój dalszy chleb na mym dworze nie jest pewny. Na dodatek i jedna piąta tej samej liczby ma być piątą potęgą! No i co powiesz?
- Daj mi trochę czasu do namysłu, przesławny władco!
- Ha, ha, ha, strach cię obleciał, darmożjadzie. No dobrze, wiedz, zem łaskawy. Daję ci czas do jutra rana. Albo przyniesiesz tę liczbę, albo ruszaj precz, a i psami poszczuję. Pomozecie, Czytelnicy?



Doc. dr Michał ŚWIĘCKI

Jeżeli taśmę filmową z zarejestrowanym ruchem rzuconego kamienia puścimy w odwrotnym kierunku (antychronologicznie), to na ekranie ujrzymy inny możliwy rodzaj rzutu — wykonany z poprzedniego miejsca upadku. Symetria taka jest szczególnie łatwo widoczna przy rzucie pionowym, dla którego kolejne fazy wznoszenia się dokładnie odpowiadają ustawionym antychronologicznie kolejnym fazom spadku. Opór powietrza nieco zakłóca ten obraz, ale dla niezbyt silnych rzutów nie ma to większego znaczenia.

Przykład z kamieniem ilustruje pewną ważną zasadę obowiązującą dla wszelkich ruchów pojedynczych obiektów — od takich jak gwiazda do składników jądra atomowego. Zasada ta, zwana symetrią ze względu na odwrócenie biegu czasu, głosi, że dla każdego rodzaju ruchu możemy znaleźć fizycznie realizowalny inny ruch, będący antychronologicznie ustawioną kopią poprzedniego. Tak na przykład dwa satelity wypuszczone z tego samego miejsca i z tą samą wartością prędkości, ale w przeciwnych kierunkach będą obiegały tę samą orbitę, choć w odwrotne strony. Historia każdego z nich będzie ściśle odpowiadała odwróconej w czasie historii innego. Podobnie, jak w przypadku wznoszenia się i spadku rzuconego pionowo kamienia.

Symetria ze względu na odwrócenie w czasie jest na tyle uniwersalna, że obowiązuje nawet dla pojedynczych cząstek elementarnych poruszających się w polu sił jądrowych. Jednak tylko dla pojedynczych lub dla stosunkowo niewielkiej ich liczby. Duże zespoły wielu cząstek elementarnych czy też cząsteczek chemicznych nie wykazują śladu tej symetrii. Przebita piłka szybko traci powietrze — nikt jednak nie widział nigdy powietrza samorzutnie pompującego piłkę. Podobnie, rozbite szklanki nie skleja się, ludzie nie młodnieją, a uschnięte rośliny nie ożywają. We wszystkich tych przypadkach kierunek upływu czasu jest tylko jeden — od młodości do starości. I wprawdzie można sobie wyobrazić zespół 10^{23} pojedynczych cząsteczek powietrza o takich położeniach i prędkościach początkowych, żeby musiały koniecznie nappełnić przebitą piłkę, ale niech kto spróbuje zrealizować taki układ w jednej chwili. Z pojedynczymi cząsteczkami, których stan początkowy możemy przygotowywać dowolnie długo, nie mamy takich trudności.

W świecie cząstek elementarnych symetria ze względu na odwrócenie w czasie ma różne, wcale nie oczywiste konsekwencje. Oznacza ona między innymi, że pewne własności (masa, czas życia dla cząstek nietrwałych) cząstek oraz ich antycząstek są takie same. Bierze się to stąd, że ogólny schemat teorii oddziaływań elementarnych dopuszcza pewien formalny zabieg, przy którym antycząstka staje się tożsama z cząstką o ujemnej masie poruszającą się wstecz w czasie. Symetria ze względu na kierunek upływu czasu oznacza więc symetrię świata cząstek i antycząstek. Atom wodoru składający się z protonu i elektronu powinien mieć identyczne własności z atomem antywodoru złożonym z antyprotonu i pozytonu. Zgodnie z tym nie ma właściwie powodu, żeby Wszechświat zawierał różne ilości materii i antimaterii. W takim jednak razie już dawno powinna była nastąpić totalna jego zagłada.

W 1964 roku J. W. Cronin i V. L. Fritch (Nobel 1980) zauważyli, że cząstki zwane mezonami K^0 rozpadają się w sposób jawnie sprzeczny z wymaganiami symetrii ze względu na odwrócenie w czasie. Zdarzało się to bardzo rzadko i, choć naruszało zupełnie dotąd powszechną zasadę, wydawało się nie mieć żadnych praktycznych konsekwencji. Ot, jeszcze jedno, po odkryciu braku symetrii zwierciadlanej, dziaćwactwo świata cząstek. W świetle dzisiejszych poglądów wydaje się jednak, że odkrycie Cronina i Fritch'a pomoże w rozwiązaniu „zagadki antimaterii” we Wszechświecie. Współczesny zarys teorii cząstek elementarnych dopuszcza możliwość, że wszystkie jądra atomowe (nawet jądro wodoru — proton) są nietrwałe i rozpadają się na pozytony i neutrina, średnio po ok. 10^{32} latach (od początku Wszechświata upłynęło około 10^{10} lat). Ta sama teoria przewiduje, że w warunkach ogromnej gęstości energii, jaka występowała jedynie w pierwszych chwilach rodzącego się Wszechświata, czas życia np. protonów był znacznie krótszy. Część protonów rozpadła się więc na pozytony i neutrina, zaś antyprotonów — na elektrony i neutrina.

Przy naruszonej symetrii ze względu na kierunki czasu antyprotony mogły żyć nieco krócej. Powstała więc nadwyżka protonów, a także elektronów z rozpadu. Następnie materia z antimaterią zniknęły w procesie anihilacji produkując ogromne ilości promieniowania, zaś owa niewielka nadwyżka dała początek naszemu Wszechświatowi, zawierającemu już tylko materię. Łatwo też teraz zrozumieć, dlaczego dzisiejszy Wszechświat zawiera aż 10^9 razy więcej cząstek promieniowania niż cząstek materii.



Z WŁAŚCIWEJ
 PERSPEKTYWY
 WIDAC ŻE
 WSZYSTKIEMU
 SĄ WINNE
 LEGHORNKY!



SEYSZELIŚCIE, KOLEGO
 O WERYFIKACJI
 KADR NAUKOWYCH?
 MUSZE POUTRZYC
 TABLICZKĘ MNOŻENIA.
 GŁOWA DO GÓRY!
 TO MY BĘDZIEMY
 WERYFIKOWAĆ!



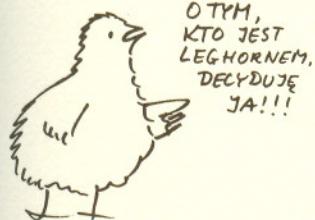
WYGLĄDA NA
 PORZĄDNEGO BROSLERA.

NO WIESZ!
 JEGO BABKA
 TO
 LEGHORNKA!



KTO CIĘ
 TAKICH WYRAZÓW
 NAUZYŁ, PISKLAKU?!

CZY
 "LIBERAL"
 I
 "LIBERTYN"
 TO TO
 SAMO?



OTYM,
 KTO JEST
 LEGHORNEM,
 DECYDUJE
 JA!!!