

SPIS TREŚCI

NUMERU 2 (86)

O Grekach, Trojanach i wybuchach gwiazd nowych <i>Doc. dr Antoni Kuszell</i>	str. 1
Jak odkryć coś ciekawego na zdjęciu reakcji jądrowej <i>Doc. dr Edward Siwek</i>	str. 4
Rachunek różniczkowy na co dzień <i>Mgr Bronisław Rudak</i>	str. 6
Jeszcze o Hipotezie Wielkich Liczb <i>Mgr Bronisław Rudak</i>	str. 6
O powierzchniach i liniach geodezyjnych <i>Dr Witold Mozgawa</i>	str. 7
Patrz w niebo	str. 9
O początkach metody aksjomatycznej <i>Dr Jan Waszkiewicz</i>	str. 10
Mała Delta	str. 12
Czego się można nauczyć obserwując młotki litowe <i>Doc. dr Joanna Stepaniak</i>	str. 14
Jak napisać podręcznik fizyki <i>M-me Pipsztycka</i>	str. 15
Zadania	str. 17

„Delta”
matematyczno-fizyczno-astronomiczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny:

doc. dr Jerzy Bartke
doc. dr Andrzej Bączyński
doc. dr Bolesław Gleichgewicht
prof. dr Kazimierz Goebel
doc. dr Bolesław Grabowski
dr Jan Hanasz
doc. dr Bolesław Iwaszkiewicz
doc. dr Tadeusz Iwiński
doc. dr Andrzej Januszajtis
doc. dr Tadeusz Jarzębowski
prof. dr Leon Jeśmanowicz
dr Henryk Kaczorek
prof. dr Marek Kuczma
mgr Andrzej Mąkowski
prof. dr Bohdan Paczyński
prof. dr Zdzisław Pawlak
prof. dr Arkadiusz Piekara
doc. dr Sławomir Ruciński
prof. dr Konrad Rudnicki
prof. dr Zbigniew Semadeni
doc. dr Grzegorz Sitarski

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60—, cena prenumeraty półrocznej

zł 30—

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach:

— do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i cały rok następny

— do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego.

Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienie w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”.

Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW, oraz prenumeratorki indywidualni zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw,

ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XVO1 W-wa 1153-201045-139-11 w terminach

podanych dla prenumeraty krajowej

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać

„DELTE”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.

Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem

lub za zaliczeniem pocztowym.

Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Konto PKO I OM W-wa 1531-912

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście

00-068 Warszawa, Poland or with

— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68,

Bundesrepublik Deutschland.

— Earls Court Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain,

— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia

Cena 1 egzemplarza zł 5— nr indeksu 35723/35550

prof. dr Józef Smak
prof. dr Jan Stankowski
doc. dr Kazimierz Stępień
prof. dr Mieczysław Subotowicz
doc. dr Stefan Turnau
prof. dr Jerzy Wdowczyk
doc. dr Andrzej Woszczyk
prof. dr Janusz Zakrzewski —
wiceprzewodniczący
prof. dr Wojciech Żakowski —
przewodniczący

Redaguje Kolegium w składzie:

Bożena Jaworska-Kordos — ilustracje

mgr Maciej Jędrzejczak

dr Marek Kordos — red. nac.

dr Michał Szurek

dr Krzysztof Prażmowski — red. techn. graf.

mgr Krystyna Szypcio — sekr. red.

doc. dr Michał Świącki — z-ca red. nac.

Adres Redakcji

ul. Hoża 69 pok. 151,

00-681 Warszawa

Zakład Narodowy im.

Ossolińskich — Wydawnictwo

Wrocław, Oddział w Warszawie

Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.

wyd.; 2,50 ark. druk.;

papier offsetowy III kl. 80 g. 61 × 86

Wydrukowano w Drukarni im.

Revolucji Październikowej

Warszawa, ul. Mińska 65

Nr zam. 1317/12/80 L-30

O Grekach, Trojanach i wybuchach gwiazd nowych

Doc. dr Antoni KUSZELL

Nim będziemy mogli odpowiedzieć na pytanie, co mają ze sobą wspólnego pojęcia wymienione w tytule, zajmiemy się sprawami bardziej przyziemnymi, a mianowicie rozważymy tak zwane *zagadnienie trzech ciał*. Polega ono na badaniu ruchu trzech ciał izolowanych od świata zewnętrznego i przyciągających się wzajemnie siłami grawitacji. Problem ten, choć pozornie bardzo prosty, do dziś nie został w pełni rozwiązany. Przyczynę tego faktu łatwo sobie uświadomić — liczba stopni swobody wynosi w tym przypadku 18, zaś dostępnych rozdzielających stałych ruchu (por. Delta 1/1981) jest 10. Trajektoria jest więc krzywą w 8-wymiarowej podprzestrzeni przestrzeni fazowej i, jak łatwo sobie wyobrazić, jej wyznaczenie jest problemem bardzo złożonym; praktycznie wręcz niewykonalnym.

Dlatego w dalszych rozważaniach zajmiemy się problemem znacznie uproszczonym, zwanym *ograniczonym zagadnieniem trzech ciał*. Uproszczenie polega na tym, że będziemy rozpatrywać układ składający się z dwóch masywnych ciał o masach M_1 i M_2 zwanych centrami oraz bardzo lekkiego ciała próbnego o masie m . Dla takiego układu możemy dokonać przybliżenia polegającego na zaniedbaniu wpływu ciała próbnego na ruch centrów. W ten sposób ruch centrów sprowadza się do zagadnienia dwóch ciał, czyli odbywa się zgodnie z prawami Keplera.

Następnym uproszczeniem będzie wybranie specjalnego typu ruchu centrów, a mianowicie ruchu po orbitach kołowych. W układzie środka masy centrów jest on opisany wzorami (patrz rys. 1)

$$\begin{aligned}x_1 &= R_1 \cos \omega t, & x_2 &= R_2 \cos(\omega t + \pi), \\y_1 &= R_1 \sin \omega t, & y_2 &= R_2 \sin(\omega t + \pi), \\z_1 &= 0, & z_2 &= 0,\end{aligned}$$

gdzie x_k, y_k i z_k ($k = 1, 2$) są współrzędnymi centrów, a ω prędkością rotacji. Równania ruchu cząstki próbnej w układzie środka masy centrów można zapisać w postaci

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2} \xi &= -\mu \frac{\xi - x_1}{r_1^3} - (1 - \mu) \frac{\xi - x_2}{r_2^3}, \\ \frac{d^2}{dt^2} \eta &= -\mu \frac{\eta - y_1}{r_1^3} - (1 - \mu) \frac{\eta - y_2}{r_2^3}, \\ \frac{d^2}{dt^2} \zeta &= -\mu \frac{\zeta}{r_1^3} - (1 - \mu) \frac{\zeta}{r_2^3},\end{aligned}$$

gdzie μ jest masą zredukowaną centrów. Równania te są trudne do rozwiązania, ponieważ zawierają współczynniki zależące w sposób jawny od czasu. Możemy pozbyć się tej trudności przechodząc do układu współrzędnych współrotujących z centrami. Stanowi to jednak przejście z układu inercyjnego do układu nieinercyjnego, co powoduje pojawienie się nowych sił (sił bezwładności) działających na ciało próbne. Siły te to dobrze wszystkim znana siła odśrodkowa oraz siła Coriolisa.

W rotującym układzie współrzędne ciała próbnego oznaczmy przez (x, y, z) . Spełniają one układ równań

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2} x - 2 \frac{dy}{dt} &= x - \mu \frac{x - R_1}{r_1^3} - (1 - \mu) \frac{x - R_2}{r_2^3}, \\ \frac{d^2}{dt^2} y + 2 \frac{dx}{dt} &= y - \mu \frac{y}{r_1^3} - (1 - \mu) \frac{y}{r_2^3}, \\ \frac{d^2}{dt^2} z &= -\mu \frac{z}{r_1^3} - (1 - \mu) \frac{z}{r_2^3};\end{aligned}$$

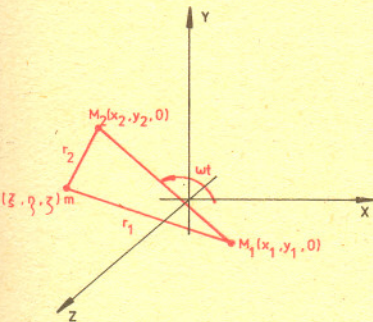
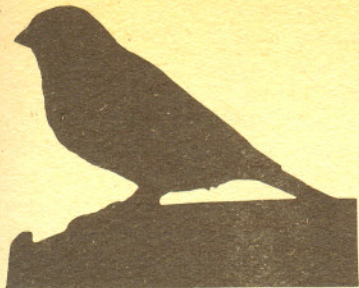
Dodatkowy człon zawierający pierwszą pochodną względem czasu opisuje siły Coriolisa, zaś człon proporcjonalny do rzutu wektora wodzącego na płaszczyznę obrotu — siłę odśrodkową. Łatwo możemy się przekonać, korzystając z (1), że funkcja

$$\Psi = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 - 2\Phi \quad \text{jest stałą ruchu.}$$

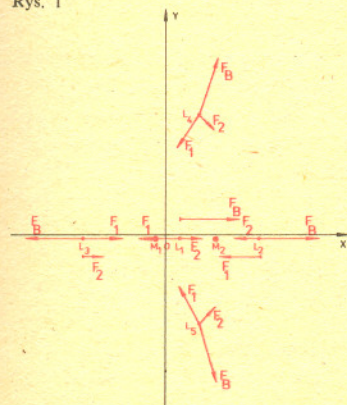
(v_x, v_y, v_z) oznacza tutaj wektor prędkości, a Φ jest określone wzorem:

$$\Phi = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + \frac{\mu}{r_1} + \frac{1 - \mu}{r_2} + \frac{1}{2} \mu (1 - \mu).$$

Funkcję Ψ nazywamy *stałą (całką) ruchu Jacobiego*.



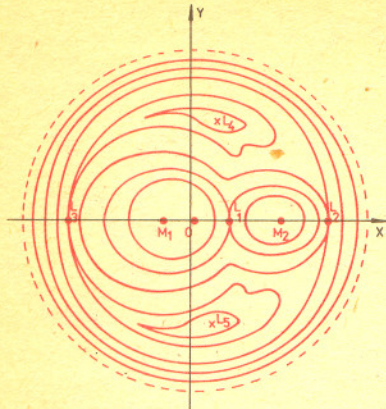
Rys. 1



Rys. 2

W punktach stacjonarnych siła wypadkowa działająca na ciało próbne znika. Korzystając z tego faktu możemy w prosty sposób wykazać, że w ograniczonym problemie trzech ciał jest pięć punktów stacjonarnych (patrz rys. 2). W grę wchodzi jedynie siły przyciągania grawitacyjnego przez centra (F_1 i F_2) oraz siła odśrodkowa (F_B). Siła Coriolisa jest równa zeru, ponieważ w punktach stacjonarnych ciało próbne spoczywa.

Siła Coriolisa jest siłą bezwładności występująca w układzie odniesienia obracającym się względem układu inercyjnego. Powoduje ona jedynie zmianę kierunku wektora prędkości (zakrzywienie toru) bez zmiany jego długości. Działanie siły Coriolisa można zilustrować następującym doświadczeniem. Na obracającym się talerzu adaptera pokryty białym papierem rzućmy kulkę zamoczoną uprzednio w farbę. W układzie obserwatora (laboratoryjnym) ruch kulki będzie prostoliniowy, ponieważ tarcie można pominąć. Zakrzywienie toru zakreślonego przez kulkę na papierze to wynik działania siły Coriolisa.



Rys. 3

Badając własności całki Jacobiego możemy uzyskać bardzo dużo informacji o dynamice układu. Jak zwykle, najciekawsze daje nam badanie stanów stacjonarnych układu. Możemy wtedy w całce Jacobiego położyć wszystkie prędkości równe zero i ograniczyć się w ten sposób do badania własności funkcji Φ w przestrzeni położeń. Ma ona 5 punktów stacjonarnych. Łatwo się przekonać, że wszystkie one muszą leżeć w płaszczyźnie $z = 0$. Na rysunku 3 przedstawiamy wykres linii ekwipotencjalnych całki Jacobiego w tej płaszczyźnie. Oznaczone są tam punkty stacjonarne L_1, L_2, \dots, L_5 . Punkty L_1, L_2 i L_3 leżą na osi x , zaś L_4 i L_5 w wierzchołkach trójkątów równobocznych opartych na odcinku łączącym centra masy M_1 i M_2 . Badając własności punktów stacjonarnych widzimy od razu, że L_1, L_2 i L_3 są punktami siodłowymi, a punkty L_4 i L_5 to minima.

Rozważmy teraz cząstkę próbną umieszczoną w punkcie siodłowym. Istnieją oczywiście drogi, po których cząstka może spaść do punktów o niższej energii potencjalnej (z przełęczy zawsze jest gdzie spadać), a więc są to punkty równowagi nietrwałej. Jeśli chodzi o pozostałe punkty stacjonarne, to głębsza analiza wykazuje, że są one stabilnymi punktami równowagi jedynie wtedy, gdy masa lżejszego centrum spełnia następującą nierówność:

$$\mu \leq \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{23}{108}} \approx 0,0385 \dots$$

W zjawiskach astronomicznych wyróżnioną rolę odgrywają punkty: L_1 zwany *wewnętrznym punktem Lagrange'a* oraz punkty trójkątne L_4 i L_5 .

Przykładów realizacji rozwiązań stacjonarnych (a ściślej mówiąc ciał oscylujących dookoła tych stanów) możemy w Układzie Słonecznym znaleźć kilka. Najbardziej znanymi są planetoidy znajdujące się w punktach stacjonarnych utworzonych przez Słońce i Jowisz. W pobliżu jednego z nich występuje grupa planetoid nazywana Trojanami. Poszczególne planetoidy należące do tej grupy noszą nazwy trojańskich bohaterów „Iliady”. Grupa planetoid występująca w obszarze symetrycznym nosi nazwę Greków.

Innym, swego czasu głośnym przykładem, są tzw. księżycy Kordylewskiego. Otóż astronom krakowski zaobserwował w punktach L_4 i L_5 układu Ziemia-Księżyc rozjaśnienia tła pochodzące od pyłu kosmicznego zebranego w jamach potencjalnych w otoczeniu tych punktów. Badania satelitarne potwierdziły fakt nieznaczego zwiększenia natężenia światła rozproszonego w otoczeniu tych punktów. Wydaje się jednak nie całkiem oczywiste, czy rozjaśnienia te można obserwować z Ziemi.

Dużo ważniejszą rolę we współczesnej astrofizyce odgrywa jednak wewnętrzny punkt Lagrange'a. Leży on na ekwipotencjalnej mającej kształt dwóch stykających się ze sobą (w punkcie L_1) kropel. Powierzchnia ta nosi nazwę *powierzchni Roche'a*. Powierzchnia Roche'a oddziela orbity okrężające każde z centrów niezależnie od orbit wspólnych dla obu centrów. Można powiedzieć, że powierzchnia Roche'a oddziela indywidualny obszar każdego centrum od obszaru wspólnego. Punkt L_1 jest punktem granicznym między oboma obszarami indywidualnymi.

W astrofizyce bardzo ważną rolę odgrywa układ gwiazd zwany *ciasnym układem podwójnym*. Dla zrozumienia jego roli rozważmy układ dwóch gwiazd, na tyle bliskich sobie, by mogła być możliwa następująca konfiguracja: jedno z ciał jest bardzo zwartym obiektem, na przykład białym karłem, a drugie gwiazdą o dużych wymiarach, tak dużych, że wypełnia ona całe wnętrze swojej części powierzchni Roche'a. Wtedy w otoczeniu punktu L_1 wystarczą bardzo nieznaczne siły zaburzające (na przykład siły przyływu) na to, by materia przelewała się do drugiej części powierzchni Roche'a. Tak więc łatwo sobie wyobrazić sytuację, w której przez punkt L_1 przelewa się w kierunku białego karła strumień materii. Ze względu na to, że układ łączy, materia ta niesie znaczną ilość momentu pędu i dlatego nie może swobodnie opaść na białego karła. Na skutek skomplikowanych procesów zderzeniowych gromadzi się ona w pierścieniowej strukturze dookoła białego karła zwanej *dyskiem*. Moment pędu niesiony przez dysk nie pozwala na spadanie materii na białego karła. Mechanizmem umożliwiającym przekazywanie momentu pędu od warstw wewnętrznych na zewnątrz dysku jest zjawisko zwane lepkością ścinania.

Jednakże jeśli materia w dysku jest w stanie równowagi termodynamicznej, to przekaz momentu pędu poprzez tarcie lepkie jest bardzo mały i ilość materii spadająca na karła jest znikoma. Tak więc materia będzie się powoli gromadziła w dysku. Na to, by mogła spaść na białego karła, potrzebny jest bardziej efektywny mechanizm transportu momentu pędu.



Co na temat Leonarda da Vinci powinien wiedzieć

każdy: że namalował Mone Lize, *człowiek wykształcony:* że namalował Damę z lalczką, Madonnę ze szczygłem i inne mniej ważne obrazy. Pamiętniki pisał lustrzanie, a wśród jego rysunków znajdują się projekty maszyn latających a także dość fałszywe wyobrażenia na temat budowy anatomicznej człowieka, *specjalista:* nie wiemy, nie jesteśmy specjalistami.

Lepkość ścinania (zwana czasami tarciami wewnętrznymi) spowodowana jest wymianą cząsteczek między sąsiednimi, poruszającymi się z różnymi prędkościami warstwami gazu. Cząsteczki warstwy szybszej, przechodząc w wyniku ruchu cieplnego do warstwy wolniejszej zwiększają średni pęd cząsteczek tej warstwy. Jednocześnie cząsteczki przechodzące do warstwy szybszej powodują jej zwolnienie. W analogiczny sposób w wirującym gazie może być przekazywany moment pędu.

Zjawisko turbulencji występuje w układach o dużej liczbie stopni swobody. Jak wiemy, układy takie dążą do stanu równowagi termodynamicznej. Jeśli jednak w układzie pojawi się niestabilność (wywołana np. istnieniem dużych zmian gęstości, prędkości czy ciśnienia), to fluktuacje narastają i układ dochodzi do stanu o wysokim poziomie tych fluktuacji. Stan taki nosi nazwę stanu turbulentnego w odróżnieniu od stanu spokojnego (laminarnego). Najbardziej znanym przykładem ruchu turbulentnego jest zjawisko turbulencji hydrodynamicznej. Występuje ono często w instalacji wodociągowej i powoduje hałaśliwe drgania rur. W przepływie turbulentnym ma miejsce silne mieszanie się płynu, wskutek czego wzrasta intensywność transportu pędu, domieszek, ciepła itp.

Mechanizm taki może być związany ze zjawiskiem turbulencji. Choć nikt nie może przeczyć istnieniu tego zjawiska, to dalecy jesteśmy jednak od pełnego ilościowego jego opisu. W szczególności cechą charakterystyczną turbulencji jest próg wyraźnie oddzielający stan laminarny od stanu turbulentnego. Mechanizm progowy jest w oczywisty sposób związany z nieliniowością równań. Do dzisiejszego dnia sprawą otwartą jest problem matematycznej struktury progu. Istnieje kilka konkurujących propozycji, ciągle jednak niewiele wiemy na temat powstawania i rozwoju turbulencji.

Wracając do naszego układu podwójnego, wyobrażamy sobie, że w pewnym (bliżej nieokreślonym) momencie, gdy materii w dysku nagromadzi się dostatecznie dużo, pojawi się niestabilność i dysk stanie się turbulentny. Transport momentu pędu od warstw wewnętrznych na zewnątrz dysku stanie się wtedy efektywny i duża porcja materii spadnie na białego karła. Spadkowi takiemu towarzyszyć będzie wydzielenie energii potencjalnej oraz ewentualnie jądrowej ze świeżo dostarczonego paliwa. Uwolnienie tej energii będzie widoczne jako silny rozbłysk. Mechanizm taki zdaje się dobrze tłumaczyć rozbłyski gwiazd tak zwanych *nowych karłowatych*. Podobne mechanizmy w układzie z bardziej masywnym centrum też odgrywają istotną rolę w zrozumieniu zjawisk astrofizycznych.

W ten sposób badając własności stosunkowo prostego i wyidealizowanego układu potrafimy zbudować model zjawisk pozornie bardzo odległych.

Jak odkryć coś ciekawego na zdjęciu reakcji jądrowej

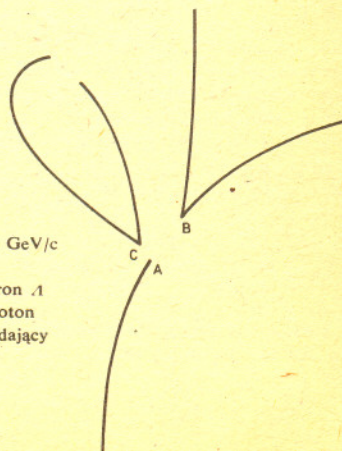
Cząstki elementarne mają, jak sądzimy, rozmiary nie większe niż 10^{-13} cm. Ponieważ oddziaływania silne i słabe, w których cząstki te biorą udział mają zasięg działania również nie przekraczający 10^{-13} cm, więc jedynie długozasięgowe oddziaływania elektromagnetyczne mogą być podstawą wszelkich metod detekcji cząstek. Wyciągamy stąd wniosek, że tylko cząstki obdarzone ładunkiem elektrycznym mogą pozostawiać bezpośrednio zauważalne ślady swej obecności. Cząstki obojętne nie są widoczne, a o ich istnieniu wnioskujemy na podstawie wywołanych przez nie reakcji, w których produkują się obserwowalne cząstki naładowane. Naładowana cząstka poruszająca się wewnątrz jakiegokolwiek materiału wywołuje jonizację znajdujących się w nim atomów i cząsteczek. Droga cząstki zostaje w ten sposób utrwalona na jakiś czas w postaci ciągu zjonizowanych atomów. Jeżeli materiałem detekcyjnym jest klisza fotograficzna, to po jej wywołaniu otrzymujemy fotografię toru cząstki. W innych detektorach wykorzystuje się zjawisko kondensacji pary przesyconej na zjonizowanych cząsteczkach, wrzenia cieczy przegrzanej, powstawania wyładowań elektrycznych w obszarach zjonizowanych, skoku oporności półprzewodników podczas przejścia naładowanej cząstki. W ten sposób możemy uzyskać obraz toru każdej cząstki obdarzonej ładunkiem. Przelatująca przez materiał detekcyjny cząstka traci stopniowo swą energię na jonizację sąsiednich atomów i po chwili zatrzymuje się. Im większa energia cząstki, tym dłuższy jej tor. Zależność między energią i długością toru znana jest dla wszystkich stosowanych detektorów i pozwala na wyznaczenie energii cząstek. Z drugiej strony im szybciej porusza się cząstka, tym mniej czasu spędza w otoczeniu pojedynczego atomu, a w konsekwencji tym mniejsze jest prawdopodobieństwo zajścia jonizacji. Jest to okoliczność szczególnie ważna dla klisz fotograficznych, w których można stosunkowo dokładnie mierzyć stopień jonizacji (grubość toru i liczbę przerw na nim). Umożliwia to wyznaczenie prędkości, a więc i pędu cząstki. Wszystkie podstawowe detektory cząstek dostarczają stosunkowo dokładnych informacji na temat energii i pędu cząstek. Znając zaś te dwie wielkości możemy ze związku $m^2 = c^{-4}(E^2 - p^2c^2)$ obliczyć masę cząstki i sprawdzić w tablicach, czy przypadkiem nie odkryliśmy nowej. Pozostaje jeszcze sprawa wyznaczenia wartości ładunku i spinu cząstki. Kwestię tę pozostawmy specjalistom, a sami zajmijmy się pytaniem: jak odkryć coś ciekawego na zdjęciu reakcji jądrowej.

Pomaga w tym często przypadek. Pochodzące z promieniowania kosmicznego lub z akceleratora (przyspieszacza) cząstki od czasu do czasu wywołują reakcje w wystawionym na ich działanie detektorze, np. w kliszy. W reakcjach tych powstaje często kilkadziesiąt cząstek i typowe zdjęcie wygląda tak, jak na rysunku.

Przeglądając tysiące takich zdjęć natrafiono kilkadziesiąt lat temu na obraz, który zdaniem oglądającego kliszę nie był typowy (patrz rysunek).

Powstała litera V mogła być rezultatem reakcji rozpraszania niewidocznej cząstki obojętnej utworzonej w reakcji pierwotnej bądź też wynikiem rozpadu takiej cząstki. W tym drugim przypadku suma pędów cząsteczek tworzących V (produktów rozpadu) powinna celować w środek gwiazdy pierwotnej. Tak też i było. Postanowiono więc sprawdzić hipotezę istnienia nowej cząstki obojętnej rozpadającej się na dwie cząstki naładowane. Zaczęto przeglądać zdjęcia wybierając tylko takie, na których zauważono łatwo widoczne V. Na wybranych zdjęciach zmierzono długości torów i jonizację „produktów rozpadu” wyznaczając stąd energię i pęd cząstek. Jeżeli suma pędów nie była skierowana do środka gwiazdy, to zdjęcie odrzucano. W przeciwnym wypadku obliczano masę cząstki niewidocznej i masę cząstek tworzących literę V. Dla cząstek niewidocznych otrzymywano zawsze dwie jedynie wartości masy: ok. 1100 MeV oraz ok. 500 MeV. W pierwszym przypadku produktami rozpadu były zawsze proton (masa ok. 940 MeV) oraz mezon π (masa ok. 140 MeV), zaś w drugim dwa mezony π . Odkryto w ten sposób dwie nowe cząstki obojętne: hiperon Λ i mezon K^0 .

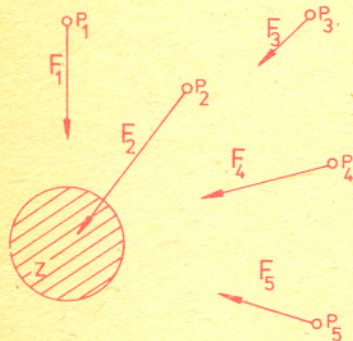
Opisana historia liczy już sobie wiele lat. Od tego czasu metody przeglądania i pomiaru w znacznym stopniu zautomatyzowano. Jednak podstawowa idea nie uległa zmianie. Tyle tylko, że w historii współczesnej brak przygody owego badacza, któremu litera V wydała się nietypowa.



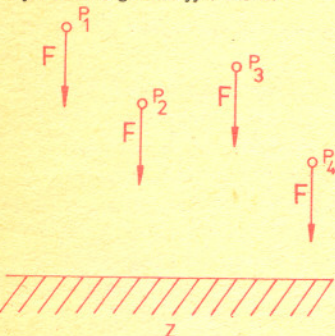
W punkcie A mezon π^- o pędzie 4 GeV/c oddziałuje z protonem w komórce pęcherzykowej dając w wyniku hiperon Λ (rozpadający się w punkcie B na proton i mezon π^-) oraz mezon K^0 (rozpadający się w punkcie C na π^+ i π^-).

Rachunek różniczkowy na co dzień

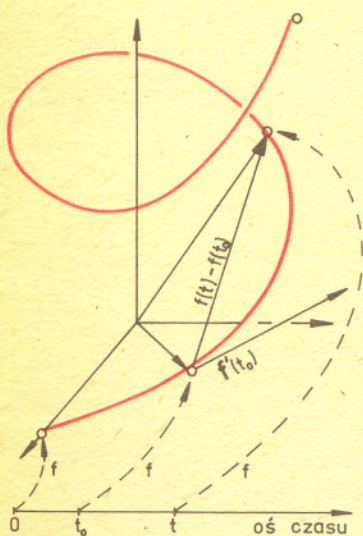
Jaki związek ma rachunek różniczkowy z piłką nożną? Czy powinni się go uczyć trenerzy miotaczy i instruktorzy prowadzący kursy spadochronowe? Czy rachunek różniczkowy może się przydać w czasie weekendu nad jeziorem? Oto temat, który Ci proponuję, Czytelniku, gdy odrywając się od prac codziennych sięgniesz po Deltę, by zażyć intelektualnej rozrywki. Naszą zabawę w dużej mierze zawdzięczamy Izaakowi Newtonowi. On bowiem nauczył potomnych, że każde dwa ciała przyciągają się wzajemnie siłą, której wielkość jest wprost proporcjonalna do iloczynu ich mas, a odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości ich środków.



Rys. 1. Pole grawitacyjne Ziemi.



Rys. 2. Stałe pole sił.



Rys. 3. Tor i pochodna ruchu.

Punkty przestrzeni R^3 można utożsamiać z ich wektorami wodzącymi względem początku układu (rys. 3), a dzięki temu można na nich wykonywać takie działania, jakie wykonujemy na wektorach. To umożliwia określenie pochodnej wzorem (1). Dzięki pominięciu siły Coriolisa ruch odbywa się w jednej płaszczyźnie.

Funkcję tę wyrażają odpowiednio poziomą i pionową składową prędkości ruchu.

Nietrudno stąd wynioskować, że ustalone ciało, jakim jest kula ziemską Z , jednoznacznie przyporządkowuje każdemu punktowi P otaczającej je przestrzeni wektor F , wyrażający siłę, jaką Z przyciąga masę jednostkową umieszczoną w tym punkcie. To przyporządkowanie jest funkcją, zwaną polem grawitacyjnym Ziemi. Ponieważ człowiek znajdujący się na jej powierzchni (np. na boisku lub łące) obserwuje tylko mały kawałek przestrzeni otaczającej kulę ziemską, więc wektory pola grawitacyjnego w punktach tego kawałka prawie nie różnią się ani kierunkiem, ani zwrotem, ani długością. Mówimy wówczas o stałym polu sił.

Aby opisać matematycznie ruch punktu materialnego wywołany stałym polem sił, zauważmy, że zjawisko ruchu polega na przyporządkowaniu każdej chwili t z pewnego przedziału czasowego $[0, a]$, jednoznacznie określonego położenia rozważanego punktu materialnego w przestrzeni. Matematycznie rzecz traktując, ruch punktu materialnego jest więc funkcją $f: [0, a] \rightarrow R^3$. Jej przeciwdziedzina (zbiorem wartości) jest pewna linia położona w przestrzeni R^3 , zwana torem tego ruchu. Pochodną w ustalonej chwili $t_0 \in [0, a]$ funkcji f jest wektor

$$(1) \quad f'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0},$$

który jest wektorem stycznym do toru ruchu w jego punkcie $f(t_0)$ (por. rys. 3). Fizycznie wektor ten wyraża chwilową prędkość ruchu w chwili t_0 , o czym łatwo się przekonać porównując równość (1) z określeniem prędkości chwilowej. Wykorzystując znane określenie przyspieszenia Czytelnik może się w podobny sposób przekonać, że druga pochodna $f''(t_0)$ funkcji f w chwili t_0 jest wektorem wyrażającym przyspieszenie naszego ruchu w chwili t_0 .

W czasie ruchu punktu materialnego w stałym polu grawitacyjnym na punkt ten działają następujące siły: stała (w czasie) siła grawitacji F , zmienna siła oporu $H(t)$ oraz siła Coriolisa i siła odśrodkowa, których źródłem jest ruch obrotowy kuli ziemskiej. Ponieważ te ostatnie siły wywierają niewielki wpływ, zwłaszcza na ruch krótkotrwały, a istotnie komplikują matematyczny opis ruchu, więc pominiemy je w naszych rozważaniach (por. rys. 4) podobnie, jak pomijamy np. przyciąganie naszego punktu przez inne ciała niebieskie.

Na podstawie drugiej zasady dynamiki (pochodzącej znów od Izaaka Newtona, podobnie jak pochodna i jej związek z prędkością i przyspieszeniem), iloczyn masy m naszego punktu materialnego i jego przyspieszenia jest w każdej chwili równy wypadkowej wszystkich sił działających na ten punkt. Przy naszych oznaczeniach zasadę tę wyraża następująca równość

$$(2) \quad mf''(t) = H(t) + F \quad \text{dla } t \in [0, a].$$

Wykorzystując kolejne prawo fizyczne orzekające, że na ciało będące w ruchu działa ze strony ośrodka siła oporu proporcjonalna do wektora prędkości, lecz przeciwnie skierowana, otrzymujemy równość

$$(3) \quad H(t) = -mcf'(t) \quad \text{dla } t \in [0, a],$$

gdzie $c \geq 0$ oznacza współczynnik oporu zależny od poruszającego się ciała i rodzaju ośrodka. Wyrażając jeszcze siłę grawitacji F w postaci $F = mg$, gdzie g jest wektorem przyspieszenia grawitacyjnego i uwzględniając (2) oraz (3) otrzymujemy następujące równanie różniczkowe

$$(4) \quad f''(t) = -cf'(t) + g \quad \text{dla } t \in [0, a],$$

w którym f jest funkcją niewiadomą.

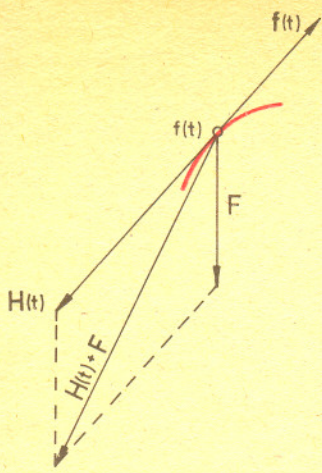
Warto zauważyć, że równanie to opisuje nie jakiś jeden konkretny przypadek ruchu, lecz wszystkie możliwe warianty ruchu w stałym polu grawitacyjnym tak, jak prawa fizyczne, z których zostało ono wyprowadzone. Dlatego też należy się spodziewać bardzo dużej ilości rozwiązań równania (4).

Aby rozwiązać równanie różniczkowe (4) wprowadźmy w płaszczyźnie ruchu układ współrzędnych przyjmując, że jego pierwsza oś s leży w płaszczyźnie terenu (np. płyty boiska), druga zaś jego oś h jest pionowa, skierowana w górę i przechodzi przez punkt początkowy ruchu $f(0)$. Oznaczając przez $(x(t), y(t))$ współrzędne punktu $f(t)$ w tym układzie, możemy równanie (4) zastąpić układem równań różniczkowych

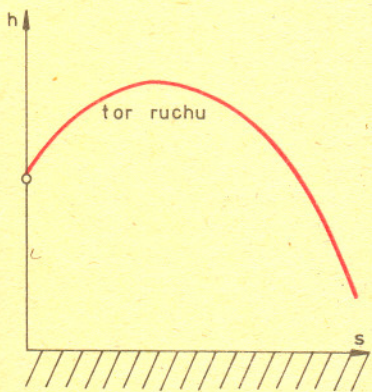
$$(5) \quad \begin{cases} x''(t) = -cx'(t), \\ y''(t) = -cy'(t) - g, \end{cases}$$

gdzie g oznacza skalarną wielkość przyspieszenia grawitacyjnego. Wprowadzając nowe funkcje niewiadome

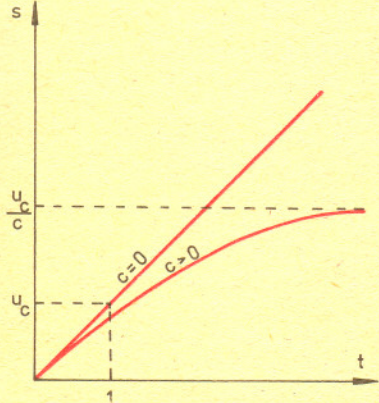
$$(6) \quad u(t) = x'(t), \quad v(t) = y'(t),$$



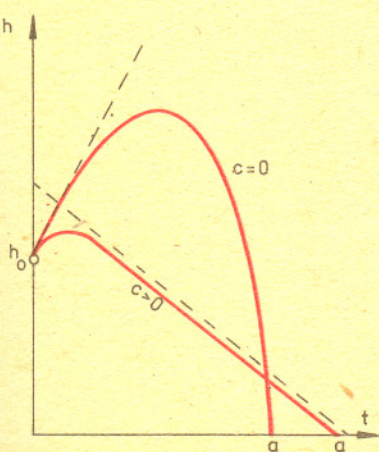
Rys. 4. Wypadkowa sił.



Rys. 5. Wybór układu współrzędnych.



Rys. 6. Wykres funkcji x (składowa pozioma ruchu).



Rys. 7. Wykres funkcji y (składowa pionowa ruchu).

zamiast układu (5) otrzymamy układ

$$(7) \quad \begin{cases} u'(t) = -cu(t), \\ v'(t) = -cv(t) - g. \end{cases}$$

Można od razu zauważyć, że jednym spośród rozwiązań pierwszego równania jest $u(t) \equiv 0$. Z teorii równań różniczkowych wynika zaś, że żadne z pozostałych jego rozwiązań nie może przyjmować wartości 0. Dzięki temu możemy pierwsze spośród równań (7) napisać w postaci

$$\frac{u'(t)}{u(t)} = -c$$

i rozwiązać je porównując funkcje pierwotne obu stron.

Otrzymujemy $\ln u(t) = -ct + A$, gdzie A jest stałą.

Stąd wyliczamy $u(t)$ otrzymując

$$(8) \quad u(t) = e^A e^{-ct} = u_0 e^{-ct}, \quad \text{gdzie } u_0 = u(0),$$

a stąd oraz z pierwszej spośród równości (6), przez kolejne całkowanie (porównanie funkcji pierwotnych obu stron) otrzymujemy ostateczne rozwiązanie pierwszego spośród równań (5):

$$(9) \quad x(t) = \begin{cases} u_0 t, & \text{gd } c = 0 \text{ (brak oporu)} \\ \frac{u_0}{c} (1 - e^{-ct}), & \text{gd } c > 0. \end{cases}$$

Rozwiązanie to, jakkolwiek częściowe, opisuje jednak te ruchy, których torami są odcinki prostych poziomych, a siła grawitacji jest równoważona przez sprężystość podłoża (np. toczenie się piłki po podłożu, ruch łódki odepchniętej od brzegu jeziora i nie napędzanej). Analizując to rozwiązanie i wpływ stałych u_0 (prędkość początkowa) oraz c (współczynnik oporu) na przebieg ruchu można się świetnie bawić i uczyć. Na przykład, można wyjaśnić, dlaczego po odepchnięciu łódki od brzegu jeziora wyraźnie obserwujemy zanik jej ruchu, a nie możemy ustalić momentu jej zatrzymania się, mimo że możemy ustalić odległość, na jaką łódka odpłynęła od brzegu. Czy podobne zjawisko ma miejsce w przypadku ruchu piłki? A może potrafił Czytelniku zaprojektować i wykonać pomiar współczynnika oporu c dla piłki lub łódki?

Przechodząc do rozwiązania drugiego spośród równań (7) i pełniejszego opisu ruchów w stałym polu sił zauważmy, że różni się ono od pierwszego z tych równań tylko o stałą g . Można się więc spodziewać, że rozwiązania tych równań będą się niewiele różnić. Z teorii równań różniczkowych wynika, że różnica ta polega na zastąpieniu stałej u_0 , występującej po prawej stronie równości (8), przez stosownie dobraną funkcję φ zmiennej t . Aby ją znaleźć, podstawmy wyrażenie

$$(10) \quad v(t) = \varphi(t) e^{-ct}$$

do drugiego spośród równań (7). Otrzymamy

$$\begin{aligned} \varphi'(t) e^{-ct} - c\varphi(t) e^{-ct} &= -c\varphi(t) e^{-ct} - g, \\ \varphi'(t) &= -g e^{ct}. \end{aligned}$$

a stąd

Całkując obustronnie wyliczamy

$$\varphi(t) = B - \frac{g}{c} e^{ct}, \quad \text{gdzie } B \text{ jest stałą,}$$

a uwzględniając (10) i przyjmując $v_0 = v(0)$ wyliczamy

$$v(t) = \left(v_0 + \frac{g}{c} \right) e^{-ct} - \frac{g}{c}.$$

Stąd i z drugiej spośród równości (6), przez kolejne całkowanie i przyjęcie $h_0 = y(0)$ otrzymujemy

$$(11) \quad y(t) = \begin{cases} h_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}, & \text{gd } c = 0, \\ h_0 - \frac{g}{c} t + \frac{v_0 c + g}{c^2} (1 - e^{-ct}), & \text{gd } c > 0, \end{cases}$$

jako ostateczne rozwiązanie drugiego spośród równań (5).

W tym miejscu kończę swój udział, proponując Czytelnikowi samodzielne kontynuowanie. Polegać ono będzie na wszechstronnej analizie otrzymanych rozwiązań (9) i (11) układu (5), opisujących wszelkie ruchy swobodne w stałym polu grawitacyjnym. Wyjaśnić należy rolę każdego spośród następujących parametrów ruchu: wysokość początkowa h_0 , składowa pozioma u_0 i pionowa v_0 prędkości początkowej, współczynnik oporu c . Posługując się wzorami (9) i (11) oraz wykresami (rys. 6 i 7) można wyjaśnić na przykład, dlaczego użycie stosownego spadochronu zapewni miękkie lądowanie przy spadaniu z dowolnej wysokości. Warto wyrugować ze wzorów (9) i (11) zmienną t i uzyskać w ten sposób równanie toru ruchu oraz narysować go i zauważyć, jak zależy on od wymienionych parametrów. Może uda się dokonać pomiaru współczynnika c dla piłki szybującej w powietrzu i nie tylko jakościowo, ale i ilościowo zanalizować jej ruch (choć na poziom meczów piłkarskich to nie wpłynie). Pytania można mnożyć, tematów jest więc mnóstwo.

Jeszcze o Hipotezie Wielkich Liczb

Mgr Bronisław RUDAK

Istnienie korelacji między wielkimi bezwymiarowymi liczbami, o których pisałem w Delcie 7/1979, jest dla współczesnej fizyki zagadką. Nie potrafimy podać żadnych przyczyn, które mogłyby w naturalny sposób problem wyjaśnić. Źródłem pomysłu Diraca, by liczby odnieść w prosty sposób do czasu kosmicznego, nie była żadna naukowa koncepcja z pogranicza fizyki i filozofii, ani tym bardziej samej fizyki. Dirac wierzy po prostu, że zbieżność tych liczb z obecnym wiekiem Wszechświata nie jest przypadkiem. Przeciwnicy tej idei mają naturalnie swoje kontrargumenty, ale, prawdę mówiąc, niezbyt ciężkiego kalibru. Pamiętajcie, że konsekwencją HWL są dwa „dziwne” efekty: stałe zwiększanie się liczby nukleonów we Wszechświecie (czyli kreacja materii) oraz malenie stałej grawitacji G w czasie. Dla modeli kosmologicznych budowanych z pomocą HWL nie jest obojętne, w jaki sposób powstaje nowa materia. Dlatego rozważa się dwa krańcowo odmienne obrazy tego zjawiska. Możemy sobie pomyśleć najpierw, że materia kreuje się jednorodnie w całej przestrzeni kosmicznej (z jednakową ochotą w każdym miejscu). W drugim wypadku powstawanie nowych cząstek jest niejako wymuszone przez już istniejące w danym miejscu przestrzeni. Tam, gdzie jest większe skupisko materii (gwiazda), proces będzie wydajniejszy niż w obszarach ubogich w materię. Pierwszy proces nazwano kreacją addytywną, drugi — multiplikatywną, z uwagi na analogie z działaniami dodawania i mnożenia. W dalszych rozważaniach będę mieć na uwadze jedynie tę drugą.

Wróćmy teraz do problemu stałej grawitacji G . Teoria grawitacji Einsteina, wykluczająca jakiegokolwiek zmiany G , wystawiana na niezliczoną ilość prób ogniowych i ataków (fizycy to wyjątkowo twardy i bezkompromisowy ludek) potrafiła je wszystkie odeprzeć. Czy można w takim razie pogodzić jej warunki z ewentualną zmianą stałej grawitacji w czasie? Tak.

Wyobraźmy sobie, że we Wszechświecie obowiązują dwa rodzaje metryk. (Metryka to funkcja przyporządkowująca każdej parze punktów ich odległość. Za jej pomocą można opisać w pełni geometrię przestrzeni). Oznaczmy je E i A . Niech metryka E manifestuje się jedynie poprzez równania teorii Einsteina. Natomiast metryka A (atomowa) niech objawia się nam bezpośrednio we wszelkich obserwacjach prowadzonych z naszego laboratorium (pomiar czasu, odległości etc.). Wszelkie wielkości będą od tego miejsca oznaczać literą A bądź E , w zależności od metryki jakiej używam. Związki wypisane w poprzednim artykule były odniesione w takim razie do metryki A . Zażądaliśmy wtedy, by stałe atomowe nie zmieniały się z czasem, tzn.:

$$e_A = \text{const}, \quad h_A = \text{const}, \quad m_A = \text{const}$$

(m — masa cząstki)

W konsekwencji dostaliśmy $G_A \sim t^{-1}$. Natomiast w metryce E powinniśmy zachować to, co daje teoria grawitacji:

$$G_E = \text{const.}$$

oraz masy klasycznych obiektów (np. Słońca) $M_E = \text{const}$. Pamiętajcie, że liczba nukleonów rośnie jak kwadrat czasu kosmicznego, z łatwością otrzymamy ewolucję czasową parametrów atomowych wyrażonych w metryce E :

$$e_E^2 \sim t^{-3}, \quad \hbar_E \sim t^{-3}, \quad m_E \sim t^{-2}.$$

Z ostatniej proporcjonalności wynika, że nowo kreowane nukleony powinny być coraz to mniej masywne.

Popatrzmy teraz, jaki wpływ ma multiplikatywna kreacja na zachowanie naszego Układu Słonecznego. Dla prostoty rozważmy jedynie orbitę Ziemi, przyjmując, że jest kołowa. Umówmy się jeszcze, że będziemy używać takich jednostek fizycznych, w których prędkości są bezwymiarowe, a maksymalna (prędkość światła) z nich $c = 1$. Potrzebne nam będzie równanie opisujące ruch planety wokół Słońca

$$(1) \quad \frac{G_A \cdot M_A}{r_A} = v_A^2,$$

gdzie M_A — masa Słońca, v_A — prędkość liniowa Ziemi na orbicie, r_A — promień orbity.

Bezwymiarowa liczba v_A jest stałą mniejszą od jedności, można więc napisać: $v_A = \text{const}$.

Niech N będzie liczbą nukleonów w Słońcu. Wtedy $M_A = m_A \cdot N$. Skoro $N \sim t^2$ i $m_A = \text{const}$, to z (1) dostaniemy natychmiast zachowanie się r_A w czasie: $r_A \sim t$.

Orbita Ziemi w następstwie przyjętej kreacji multiplikatywnej ekspanduje. To samo będzie się dziać z pozostałymi planetami. Układ Słoneczny „rośnie”. Spróbujcie pokazać, że odwrotne zjawisko zachodzi w wypadku kreacji addytywnej.

Na zakończenie jeszcze o pewnej potencjalnej korzyści, jaka zarysowuje się, jeśli zaakceptujemy istnienie dwóch różnych metryk we Wszechświecie.

Siły natury grawitacyjnej oraz elektromagnetycznej są siłami dalekiego zasięgu. W obu wypadkach taka sama jest ich zależność od odległości. Ale to wszystko, co je łączy.

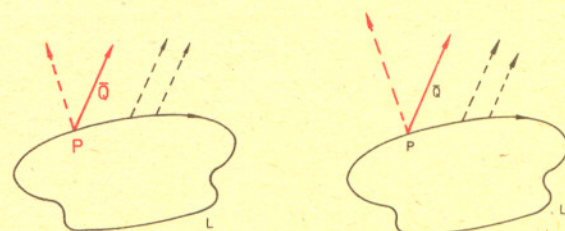
Teoria Einsteina traktuje pole grawitacyjne jako konkretną własność przestrzeni (tzw. przestrzeni Riemanna), mianowicie jej zakrzywienie. Natomiast pole elektromagnetyczne zachowuje się jak pewien rodzaj materii wytwarzającej własne pole grawitacyjne. Dlaczego tak jest? Dlaczego pole grawitacyjne miałyby być uprzywilejowane?

Swego czasu Weyl zaproponował prostą i piękną ideę przestrzeni, w której poprzez jej strukturę manifestują się oba rodzaje pól. W teorii Einsteina zakrzywienie przestrzeni, czyli istnienie pola grawitacji, można wyobrazić sobie następująco. Rozważmy wektor a zaczepiony w punkcie P przestrzeni Riemanna. Dokonajmy jego przesunięcia równoległego po pętli L . Okazuje się, że po powrocie do P wektor będzie miał inny kierunek niż przed przesunięciem.

Modyfikacja Weyla polegała na tym, by po takiej transformacji zmieniał się nie tylko kierunek, ale i długość wektora. Ta druga własność może być traktowana jako przejaw obecności pola elektromagnetycznego.

Zauważmy, że w przestrzeni Weyla nie ma już możliwości absolutnego porównania długości wektorów leżących w dwóch różnych miejscach. Wynik porównania będzie zależał od drogi, po jakiej dostaniemy się z jednego punktu do drugiego. Z tych to powodów propozycję Weyla szybko odrzucono. Nie można było pogodzić jej z teorią kwantową, tworzącą absolutny standard długości (niektóre procesy atomowe można traktować jako zegar mierzący absolutny czas). Pomysł dwóch metryk daje ponowne szanse koncepcji Weyla. Metryka atomowa A może zachować swoje absolutne standardy, a własności przestrzeni Weyla wślizgną się do naszego Wszechświata poprzez uogólnienie metryki E .

Może i wilk będzie syty, i owca cała.



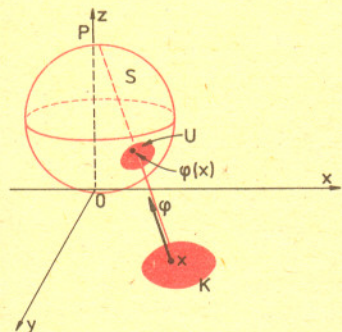
Przesunięcie w przestrzeni Riemanna. Przesunięcie w przestrzeni Weyla.

O powierzchniach i liniach geodezyjnych

Dr Witold MOZGAWA



Na pewno każdy spotkał się z następującym zadaniem: mamy na planie pewnego miasta dwa punkty — jak znaleźć najkrótszą drogę, która je łączy? Zadanie to zwykle bardzo łatwo rozwiązujemy i oczywiście jest, że takich dróg możemy czasem znaleźć wiele. Oczywiście jest też, że zwykle taka droga jest dłuższa od pomyślanej linii prostej łączącej wspomniane dwa punkty. Nieporównanie już trudniej odpowiedzieć na takie pytanie, gdy jesteśmy na „terenie pofałdowanym” np. w górach. Spróbujemy zaprząć matematykę do rozwiązania naszego problemu. Jak to się zwykle czyni w takich wypadkach, musimy stworzyć matematyczny model „pofałdowanej powierzchni” i tam dopiero będziemy badać, które drogi są najkrótsze.



Zbiór S w przestrzeni euklidesowej E^3 będziemy nazywali *powierzchnią*, jeśli dla każdego punktu $m \in S$ istnieje podzbiór $U \subset S$, $m \in U$ (otoczenie punktu m), który może być otrzymany przez rozciąganie, ściskanie, wyginanie, wykręcanie koła bez brzegu K . Możemy też dowolnie rozciąć koło K i wykonać powyższe operacje pod warunkiem, że skleimy otrzymany zbiór dokładnie w miejscu rozcięcia. Zwykle powyższe operacje opisujemy określając funkcje $\varphi: K \rightarrow U \subset S$, które (spełniając pewne warunki) gwarantują nam, że zbiór S jest powierzchnią. Funkcję φ nazywa się parametryzacją otoczenia U punktu $m \in S$. Niestety taka definicja obejmuje zbyt szeroką klasę powierzchni i aby już ostatecznie sprecyzować przedmiot naszych zainteresowań musimy określić, co rozumiemy przez wektor oraz płaszczyznę styczną do powierzchni w punkcie m . Załóżmy, że już wiemy, co to jest krzywa i wiemy, że wektor do niej styczny to pochodna jej opisu parametrycznego.

Załóżmy, że dla parametryzacji φ otoczenia U punktu $m \in S$ mamy $\varphi(x_0, y_0) = m$, $(x_0, y_0) \in K$. Rozważmy odcinki prostych równoległych do osi układu współrzędnych na płaszczyźnie przechodzące przez punkt $(x_0, y_0) \in K$ — mają one następujące opisy parametryczne: $(x_0 + t, y_0)$ i $(x_0, y_0 + t)$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Jeśli złożymy te opisy z parametryzacją φ otoczenia U , to otrzymamy dwie krzywe leżące na powierzchni S , przecinające się w punkcie m : o opisach parametrycznych $\varphi(x_0 + t, y_0)$ i $\varphi(x_0, y_0 + t)$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Jeśli teraz obliczymy pochodne tych opisów w punkcie $t = 0$, to otrzymamy dwa wektory φ_x i φ_y styczne do krzywych w punkcie m , a więc tym samym styczne do powierzchni S :

$$\varphi_x(x_0, y_0) = \frac{d}{dt} \varphi(x_0 + t, y_0) \Big|_{t=0}$$

$$\varphi_y(x_0, y_0) = \frac{d}{dt} \varphi(x_0, y_0 + t) \Big|_{t=0}$$

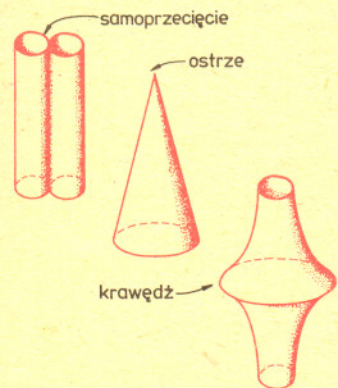
Zauważmy, że jeżeli weźmiemy dowolną krzywą leżącą na powierzchni i wyznaczmy wektor v styczny do niej w punkcie m , to zawsze znajdą się takie dwie liczby rzeczywiste a i b , że $v = a\varphi_x + b\varphi_y$. Wobec tego będziemy mówili, że wektory φ_x i φ_y są wektorami bazowymi płaszczyzny stycznej do powierzchni S w punkcie m , płaszczyznę tę będziemy oznaczali przez $T_m S$. Możemy teraz sformułować ostatni warunek ograniczający klasę powierzchni: będziemy mówili, że powierzchnia S jest *regularna* jeśli wektory φ_x i φ_y istnieją i nie są równoległe ani zerowe w żadnych punktach S . Podsumowując, powierzchnią w trójwymiarowej przestrzeni E^3 będziemy nazywali taki zbiór, który jest otrzymany z otwartych kół, zdeformowanych w wyżej opisany sposób i połączonych ze sobą tak, aby nie było ostrzy, krawędzi, samoprzecięć i żeby można było sensownie mówić o płaszczyźnie stycznej w każdym punkcie. Różniczkowalne przyporządkowanie $m \rightarrow v(m)$ (punktowi \rightarrow wektor styczny w tym punkcie) będziemy nazywali *polem wektorowym*. Aby dalej budować aparat potrzebny do rozwiązania naszego problemu wprowadzimy różniczkowanie zależne od kształtu powierzchni:

Niech v będzie polem wektorów stycznych na U , a w pewnym wektorem stycznym do S w m i $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ krzywą taką, że $\gamma(0) = m$, $\frac{d\gamma}{dt} \Big|_{t=0} = w$ oraz $v(t)$ będzie ograniczeniem pola v do krzywej γ na powierzchni S . Pochodna $\frac{dv(t)}{dt}$ na ogół jest wektorem niestycznym do powierzchni S . Wektor otrzymany przez rzut prostopadły wektora $\frac{dv(t)}{dt} \Big|_{t=0}$ na płaszczyznę styczną $T_m S$ będzie nazywany *pochodną kowariantną* lub *pochodną Levi-Civity* pola wektorowego v względem wektora w . Będziemy tę pochodną oznaczali przez $(\nabla_w v)(m)$. Jeśli wyliczymy $\nabla_w v$ we współrzędnych, to otrzymamy

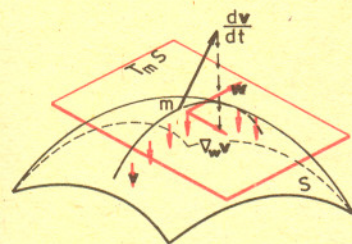
$$\nabla_w v = (a' + \Gamma_{11}^1 \cdot a \cdot k' + \Gamma_{12}^1 \cdot a \cdot f' + \Gamma_{21}^1 \cdot b \cdot k' + \Gamma_{22}^1 \cdot b \cdot f') \cdot \varphi_x + (a' + \Gamma_{11}^2 \cdot a \cdot k' + \Gamma_{12}^2 \cdot a \cdot f' + \Gamma_{21}^2 \cdot b \cdot k' + \Gamma_{22}^2 \cdot b \cdot f') \cdot \varphi_y,$$

gdzie wektor $w = \frac{d\gamma}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d\varphi(k(t), f(t))}{dt} \Big|_{t=0} = k' \varphi_x(m) + f' \varphi_y(m)$, a pole wektorowe $v = a\varphi_x + b\varphi_y$. Współczynniki Γ_{jk}^i zależą od powierzchni i jej parametryzacji i są zwykle nazywane *symbolami Christoffela*.

Rys. 1 Płaszczyzna Oxy odwzorowuje się na $S \setminus \{p\}$ przez tzw. obraz sferyczny w kierunku punktu p — jest to parametryzacja. Płaszczyzna $z = 2r$ (r — promień sfery S) odwzorowuje się na $S \setminus \{0\}$ przez obraz sferyczny w kierunku punktu O — jest to także parametryzacja. Obie te parametryzacje pokrywają całą sferę.



Rys. 2 Tego rodzaju zbiory są poza naszymi zainteresowaniami.



Rys. 3 Konstrukcja pochodnej Levi — Civity.
Tullio Levi — Civita (1873—1941) matematyk włoski. Autor prac z rachunku tensorowego, równań różniczkowych oraz mechaniki ciał niebieskich.
Elwin Bruno Christoffel (1829—1900) — matematyk niemiecki. Zajmował się teorią funkcji i teorią równań różniczkowych.

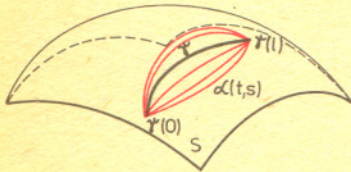
Wiemy, że długość krzywej $\gamma: [0, 1] \rightarrow S$ jest dana wzorem

$$L(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle} dt,$$

Parametryzacja naturalna to taka, że długość łuku krzywej γ od $\gamma(\alpha)$ do $\gamma(\beta)$ jest równa $|\alpha - \beta|$.

Twierdzenie Fermata: Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w przedziale $\langle x_0 - \xi, x_0 + \xi \rangle$ i osiąga ekstremum w punkcie x_0 , to $f'(x_0) = 0$.

Pierre Fermat (1601—1665) — francuski matematyk, prawnik i lingwista. Był jednym z twórców teorii liczb, a także podstaw rachunku różniczkowego i teorii prawdopodobieństwa.

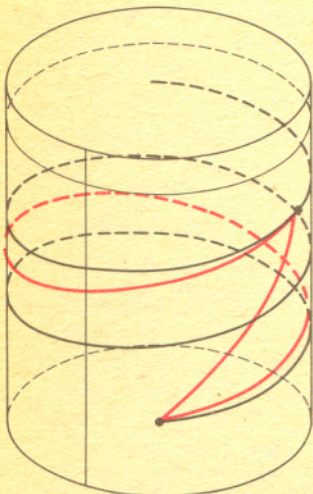


Rys. 4 Wariacje krzywej.

Skutki braku wyobraźni

Kilka lat temu Indianie chcieli (z wiadomym skutkiem) odkupić od rządu USA Manhattan, zwracając otrzymane w 1626 roku od Petera Minueta 39 dolarów. Gdyby jednak wtedy nie kupili za te pieniądze paciorków i wody ognistej, a złożyli do banku na 6,3%, mieliby dziś ponad 100 miliardów dolarów i przynajmniej kawalek z pewnością by wytargowali.

Alexis Claudé Clairaut (1713—1765) — francuski astronom, geodeta i matematyk. Zajmował się równaniami różniczkowymi, wyjaśnił ruch Księżyca.



Rys. 5 Geodezyjne na walcu.

gdzie $\langle \cdot, \cdot \rangle$ oznacza euklidesowy iloczyn skalarny. Załóżmy, że krzywa γ jest sparametryzowana naturalnie. Wprowadzimy teraz pewną rodzinę krzywych na powierzchni S : Jeśli $\gamma: [0, 1] \rightarrow S$ jest dowolną naturalnie sparametryzowaną krzywą, to wariacją (uzmiennieniem) krzywej γ nazywamy takie różniczkowalne odwzorowanie $\alpha: [0, 1] \times [-a, a] \rightarrow S$, że $\alpha(t, 0) = \gamma(t)$ (tzn. jest krzywą γ) oraz dla dowolnego $s \in [-a, a]$ jest $\alpha(0, s) = \gamma(0)$, $\alpha(1, s) = \gamma(1)$ (tzn. wszystkie krzywe mają wspólne końce). Krzywe $\alpha(s, t)$ są nazywane *wariacjami* γ . Wśród wszystkich krzywych $\alpha(s, t)$ będziemy szukać takiej, której długość jest najmniejsza. W tym celu wykorzystamy twierdzenie Fermata — warunek konieczny istnienia ekstremum. Obliczamy pochodną i przyrównujemy ją do zera

$$\frac{d}{ds} L(\alpha(s, t))_{s=0} = \frac{d}{ds} \left(\int_0^1 \sqrt{\left\langle \frac{d\alpha(t, s)}{dt}, \frac{d\alpha(t, s)}{dt} \right\rangle} dt \right) \Big|_{s=0} = 0$$

i po pewnych rachunkach otrzymujemy $\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}(0)} \frac{d\gamma}{dt}(t) = 0$. Wobec tego możemy podać

definicję tytułowej *geodezyjnej*: Krzywą γ nazywamy geodezyjną, jeśli spełnia ona powyższe równanie. Jeśli $\gamma(t) = \varphi(k(t), f(t))$, to równanie geodezyjnej jest postaci:

$$\begin{cases} k'' + \Gamma_{11}^1(k')^2 + 2\Gamma_{12}^1 k' f' + \Gamma_{22}^1 (f')^2 = 0 \\ f'' + \Gamma_{11}^2(k')^2 + 2\Gamma_{12}^2 k' f' + \Gamma_{22}^2 (f')^2 = 0. \end{cases}$$

Jako wniosek z twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań układów równań różniczkowych mamy następujące twierdzenie:

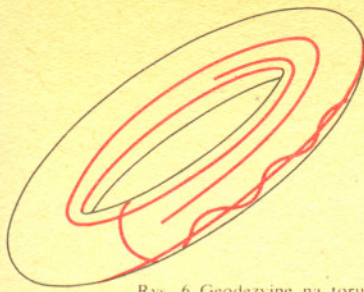
Dla danego punktu $m \in S$ i niezerowego wektora stycznego $v \in T_m S$ istnieje $\varepsilon > 0$ i dokładnie jedna geodezyjna $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ taka, że $\gamma(0) = m$ i $\left. \frac{d\gamma}{dt} \right|_{t=0} = v$. A to znaczy, że przez dany punkt i w danym kierunku możemy wypuścić dokładnie jedną geodezyjną.

Linie geodezyjne na powierzchni grają rolę prostych na płaszczyźnie, tzn. gdy myślimy tylko kategoriami powierzchni i nie możemy np. porównać krzywych z liniami prostymi w E^3 , to geodezyjne są „najprostszymi” z linii, jakie możemy poprowadzić na powierzchni. Gdy wędrujemy po powierzchni wzdłuż linii geodezyjnej, to wydaje się, że kierunek (tu rozumiemy kierunek tak, jak go rozumie dwuwymiarowa istota żyjąca na naszej powierzchni) marszu, czyli kierunek stycznej do krzywej nie zmienia się a więc idziemy prosto. Krzywe geodezyjne możemy w przybliżeniu wyznaczyć na modelach powierzchni — jeśli napiemy na jakiejś powierzchni nierozciągliwą nitkę, to przybierze ona kształt geodezyjnej.

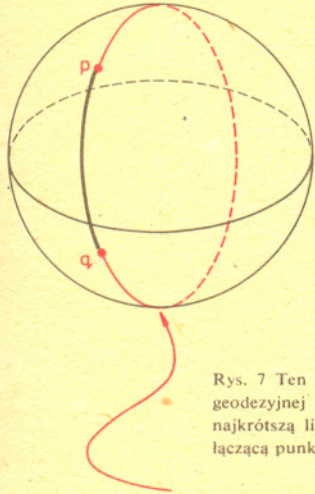
Jeśli mamy daną dowolną krzywą w E^3 , to po obrocie jej wokół osi Oz otrzymamy pewną powierzchnię, którą będziemy nazywali *obrotową*. Taką powierzchnią jest np. torus, sfera, hiperboloida czy paraboloida. Linie otrzymane przez przekroje tych powierzchni płaszczyznami równoległymi do płaszczyzny Oxy będziemy nazywali *równoleżnikami*, a linie wyznaczone przez płaszczyzny prostopadłe do płaszczyzny Oxy i zawierające oś Oz — *południkami*. Własności geodezyjnych na powierzchniach opisuje **twierdzenie Clairaut'a**:

Na powierzchni obrotowej w każdym punkcie geodezyjnej zachodzi tożsamość $\rho \cos \mu = c$, gdzie ρ jest odległością punktu geodezyjnej od osi Oz , μ jest kątem pomiędzy geodezyjną a równoleżnikiem, $0 \leq \mu \leq \frac{\pi}{2}$, a c jest stałą liczbą.

Korzystając z twierdzenia Clairaut'a wyznaczmy linie geodezyjne na torusie i na walcu:
1. wałec — niech m będzie dowolnym punktem walca W , a r promieniem równoleżnika L przechodzącego przez punkt m . Rozważmy geodezyjną przechodzącą przez punkt m pod kątem $\mu = 0$ do równoleżnika L . Z twierdzenia Clairaut'a wynika, że $\rho = r$ i $\cos \mu = 1$, czyli w każdym punkcie zachodzi $\mu = 0$ i geodezyjna pokrywa się z równoleżnikiem L . Rozważmy teraz geodezyjną przechodzącą przez punkt m pod kątem $\mu = \pi/2$ do L . Z twierdzenia mamy $\rho \cos \mu = 0$, czyli w każdym punkcie $\mu = \pi/2$ i geodezyjna pokrywa się z południkiem. Niech teraz $0 < \mu < \pi/2$, mamy więc, że $\rho \cos \mu = c$, ale $\rho = r$ w każdym punkcie — wynika stąd, że $\mu = \text{const.}$ w każdym punkcie geodezyjnej. A to znaczy, że geodezyjne to linie spiralne przecinające równoleżniki pod stałym kątem. Są to wszystkie możliwe geodezyjne na walcu. Zauważmy jeszcze jedną ciekawą własność geodezyjnych na walcu: dowolne dwa punkty walca mogą być na ogół połączone nieskończenie wieloma różnymi geodezyjnymi, w odróżnieniu od płaszczyzny, gdzie dwa dowolne punkty możemy połączyć dokładnie jedną prostą.



Rys. 6 Geodezyjne na torusie



Rys. 7 Ten odcinek geodezyjnej nie jest najkrótszą linią łączącą punkty p i q .

2. torus — niech R i r będą promieniami odpowiednio najmniejszego i największego równoleżnika. Podobnie jak wyżej z twierdzenia Clairaut'a wnioskujemy, że geodezyjnymi na torusie są południki, najmniejszy i największy równoleżnik. Niech c będzie promieniem równoleżnika. Jeśli $r < c < R$, to geodezyjna waha się pomiędzy dwoma równoleżnikami o promieniu c mając kształt podobny do sinusoidy. Istnieją także geodezyjne nieskończenie wiele razy zawijające się na torusie, nieograniczenie zbliżające się (z obu stron) do najmniejszego równoleżnika.

Przykład torusa pokazuje, że nie każdy równoleżnik jest geodezyjną, jak to było w przypadku walca. Dłaczego tak jest, wyjaśnia następujące twierdzenie: *równoleżnik na powierzchni obrotowej jest geodezyjną wtedy i tylko wtedy, gdy jest generowany przez obrót punktu na krzywej tworzącej, w którym styczna do krzywej jest równoległa do osi Oz.*

Zauważmy, że „bycie” geodezyjną jest tylko warunkiem koniecznym minimalności długości linii. Oczywiście (patrz przykład walca) nie każda geodezyjna łącząca dwa dane punkty jest najkrótszą spośród wszystkich krzywych łączących te dwa punkty. Możemy zauważyć, że np. na sferze dwa punkty leżące na pewnym kole wielkim (czyli na geodezyjnej), nieantypodyczne, odcinają dwa odcinki geodezyjnej, większy z nich jest nadal geodezyjną, ale wcale nie jest to najkrótszy odcinek łączący te punkty. Za to ten drugi, krótszy odcinek, też geodezyjny, jest dobry — on to realizuje minimum. Stąd intuicyjny wniosek — być może należy zajmować się małymi odcinkami geodezyjnych. I rzeczywiście można udowodnić twierdzenie, że *spośród wszystkich krzywych łączących dwa dane punkty w dostatecznie małym zbiorze je zawierającym najmniejszą długość ma właśnie geodezyjna*. I w ten sposób nasz problem został rozwiązany.

Patrz w niebo

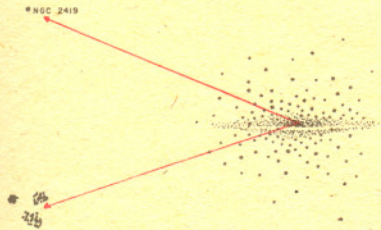
Luty jest miesiącem, w którym piękne zimowe gwiazdozbiory zaczynają coraz wcześniej zachodzić, natomiast charakterystyczne, wiosenne gwiazdozbiory Lwa i Panny są jeszcze nisko nad wschodnim horyzontem. Między nimi — nieciekawe na pierwszy rzut oka lutowe gwiazdozbiory Rysia, Raka i Węża Wodnego. W konstelacji Rysia najjaśniejsza gwiazda jest dopiero trzeciej wielkości gwiazdowej. Jest jednak w tej okolicy przynajmniej jeden obiekt, który zasługuje na uwagę. Zajmiemy się dzisiaj gromadą kulistą NGC 2419. Nazwa, jak zwykle, nic nie mówi. Obiekt ledwo dostrzegalny dopiero przez bardzo dobre lornetki. Jest to tzw. Międzygalaktyczny Włóczęga — najbardziej oddalona od naszej Galaktyki skatalogowana gromada kulista, która jest związana z nią, najprawdopodobniej, siłami grawitacyjnymi, co oznacza, że obiega Galaktykę po orbicie ogromnych rozmiarów. NGC 2419 jest odległa od centrum Drogi Mlecznej o 210 tysięcy lat świetlnych. Jest to odległość większa niż odległość najbliższych niezależnych galaktyk — Obłoków Magellana. Szczegółowe poszukiwania doprowadziły w ostatnich latach do odkrycia wielu bardzo słabych i odległych gromad. Niektóre z nich są niewątpliwie bardziej od nas oddalone niż Obłoki Magellana (oba Obłoki są małymi nieregularnymi galaktykami okrążającymi naszą, dużą Drogę Mleczną). Rodzą się tu duże wątpliwości, czy niektóre z gromad nie są zupełnie niezależnymi, samotnie biegnącymi przez przestrzeń obiektami. Obecnie znamy ok. 100 gromad kulistych należących do naszej Galaktyki (*Patrz w niebo* 6/1979). Ogromna większość zawarta jest w kuli o promieniu ok. 65 tysięcy lat świetlnych i środkiem w Centrum Galaktyki.

Odpowiedz na pytanie, czy istnieją samotne gromady kuliste o zdecydowanie mniejszych masach niż masy galaktyk (największe z gromad nie różnią się wiele swoją strukturą od małych galaktyk eliptycznych) miałyby duże znaczenie dla kosmologów i teoretyków, którzy zajmują się ewolucją galaktyk. Powstałoby oczywiście pytanie — skąd takie obiekty się wzięły — czy powstały jednocześnie z galaktykami (lub wcześniej) i nie wszystkie zostały złapane przez galaktyki. A może wszystkie gromady przez część przynajmniej swojego życia były członkami jakichś galaktyk, ale niektóre z nich na skutek różnych perturbacji i oddziaływań między galaktykami zostały z nich wyrzucone w głęboką przestrzeń.

Ze względu na stosunkowo niewielkie odległości galaktyk między sobą (w porównaniu do ich własnych rozmiarów) „przekrój czynny” na „zderzenie” ewentualnej samotnej gromady z galaktyką jest stosunkowo duży. Zderzenie takie kończyłoby się przeważnie złapaniem gromady na orbitę wokół galaktyki. Wszystkie te czynniki bardzo komplikują obraz.

Obecnie kosmologowie rozwijają wiele teorii, które tłumaczyłyby powstawanie i wczesną ewolucję takich obiektów jak galaktyki i gromady kuliste. Dotychczas nie stworzono modelu, który byłby wolny od wszelkich zarzutów i wychodził zwycięsko z wszystkich konfrontacji z testami obserwacyjnymi. Na pewno jednak potwierdzenie lub odrzucenie istnienia samotnych gromad będzie miało znaczący wpływ na kształtowanie się naszych poglądów na powstawanie i ewolucję galaktyk i ich oddziaływanie między sobą.

mgr Tomasz CHLEBOWSKI



Porównanie wielkości naszej Galaktyki z odległością NGC2419 i Obłoków Magellana



Dr Jan WASZKIEWICZ

Jak już pisałem (Delta 3/1979), metodę dedukcyjną i jej najdoskonalszą postać — metodę aksjomatyczną można wyprowadzić ze zwykłej praktyki dyskusji, niezmiernie rozpowszechnionych w starożytnej Grecji. Warto zobaczyć, co o strukturze pierwszego znanego nam aksjomatycznego wykładu matematyki — „Elementów” Euklidesa może nam powiedzieć taka interpretacja. Euklides podzielił swoje „Elementy” na 13 ksiąg, z których każdą rozpoczyna definicjami nowo wprowadzanych pojęć. W pierwszej księdze po dwudziestu trzech definicjach następują podstawowe stwierdzenia, przyjmowane bez dowodu (a więc aksjomaty, we współczesnym rozumieniu tego słowa). Zostawmy na boku definicje, które warte są osobnego omówienia. Warto może jedynie powiedzieć, że również wśród nich kryją się twierdzenia, dotyczące natury definiowanych obiektów, które we współczesnych ujęciach włączone byłyby raczej do systemu pewników, bądź z pewników wyprowadzone. Tak więc definicje i pewniki należy rozpatrywać łącznie, jako podstawę całego systemu.

Po definicjach następują postulaty i aksjomaty, których listę za chwilę przytoczę. Tutaj jeszcze wspomnę, że w terminologii Euklidesa pierwsza grupa oznaczona jest słowem „wymagania” (słowo „*postulatum*” jest dosłownym łacińskim tłumaczeniem tego terminu), natomiast druga grupa stwierdzeń nazwana jest „*pojęciami ogólnymi*”.

A oto spis postulatów, przytoczony za książką „*O Elementach Euklidesa*”, PWN, Warszawa 1956:

1. Zakłada się, że od każdego punktu do każdego punktu można poprowadzić linię prostą.
2. I że ograniczoną prostą można ciągle przedłużać po prostej.
3. I że z każdego środka każdym rozwarciem można zakreślić koło.
4. I że wszystkie kąty proste są równe między sobą.
5. I jeżeli prosta padająca na dwie proste tworzy po jednej stronie kąty wewnętrzne, które w sumie są mniejsze od dwóch prostych, to te proste przedłużone nieograniczenie schodzą się po tej stronie, po której kąty te w sumie są mniejsze od dwóch prostych”.

Ostatni postulat, słynny „postulat o równoległych” jest już w samej swojej formie wyraźnie różny od pozostałych. Nic więc dziwnego, że to on właśnie budził liczne kontrowersje w ciągu stuleci. Ale nie o tym teraz mowa.

A oto spis aksjomatów:

1. Równe jednemu i temu samemu są między sobą równe.
2. I jeżeli do równych dodaje się równe, to i całe są równe.
3. I jeżeli od równych odejmuje się równe, to reszty są równe.
4. I wzajemnie przystające są między sobą równe.
5. I całe jest większe od części”.

Jak można uzasadnić podział podstawowych założeń systemu na te dwie grupy? Pierwsza, rzucająca się w oczy różnica polega na tym, że wszystkie postulaty bezpośrednio dotyczą obiektów geometrycznych — dotyczą więc samego przedmiotu rozprawy, niejako określają jej przedmiot i zakres. Natomiast aksjomatom można nadać znaczenie znacznie ogólniejsze — nie wspomina się w nich bowiem o żadnych obiektach geometrycznych, a jedyny geometryczny termin „przystawanie” w aksjomacie 4 nie musi być (i tak zapewne było w czasach Euklidesa) interpretowany we współczesny, czysto geometryczny sposób. Druga różnica widoczna jest w sposobie, w jaki obie te grupy używane są w tekście „Elementów”. Otóż z postulatów korzysta się (na ogół) świadomie, otwarcie powołując się na nie w rozumowaniach matematycznych. Natomiast aksjomaty są rejestrem (nie wszystkich!) sądów, które wykorzystuje się z reguły milcząco. Dopiero głębsza analiza pokazuje nam, w których miejscach i jaki użytek z nich uczyniono.

Tak więc, można powiedzieć, że inicjując dyskusję nad geometrią, Euklides rozpoczął ją od stwierdzeń, które można ująć następująco. „Używane przeze mnie pojęcia znaczą dla mnie co następuje (tutaj następowałaby lista definicji)... Od dyskutującego domagam się (postuluję) akceptacji następujących stwierdzeń (tu wymienić należałoby postulaty)... Wreszcie, uważam za oczywiste i będą w dalszym ciągu milcząco wykorzystywał następujące stwierdzenia (i tutaj wymienić należy aksjomaty)...”

Podział pewników na dwie grupy nie jest właściwy jedynie Euklidesowi. Stosuje go również w swoim traktacie „O kuli i walcu” Archimedes (choć nie jest jasne, czy kryterium podziału jest dokładnie to samo co u Euklidesa, o różnicach świadczy choćby inne nazewnictwo obu grup). Pierwszy zaś kodyfikator metody dedukcyjnej, Arystoteles, pisząc o postulatach zestawia je z „hipotezami”. Jedne i drugie przyjmowane są przez nauczyciela (prowadzącego dyskusję) bez dowodu. Hipotezy przyjmowane są chętnie, czy wręcz traktowane za oczywiste, przez obie strony, natomiast takiego wymogu oczywistości nie stawia się postulatowi. Obie strony mogą nie mieć o nich wyrobionego zdania, bądź nawet być zdania przeciwnego.



Rozwiązanie zadania M 250. Przypuśćmy że nasz ułamek ma okres o długości k cyfr, zaczynający się od l -tej cyfry będącej częścią zapisu n -cyfrowej liczby 2^m . Zauważmy teraz, że będą się powtarzać również kn -cyfrowe odcinki naszego zapisu i że istnieją dwie kolejne potęgi dwójki mające dokładnie kn cyfr. (Gdyby tak nie było, mielibyśmy $2^{p-1} < 10^{kn}, 2^{p+1} \geq 10^{kn+1}$, czyli $4 = 2^{p+1}/2^{p-1} > 10$, co jest niemożliwe). Wynika stąd jednak, że dostatecznie daleko mamy dwie sąsiednie kn — cyfrowe grupy cyfr, z których jedna jest zapisem 2^p , a druga — 2^{p+1} . Grupy te są więc różne, co przeczy założeniu istnienia okresu długości kn , a więc i k .



Rozwiązanie zadania F 88. Do rozważań jakościowych można przyjąć, że

$$(\text{Szybkość suszenia}) \sim (P-p),$$

gdzie: P — prężność pary nasyconej w temperaturze cieczy parującej
 p — prężność pary wodnej w powietrzu.

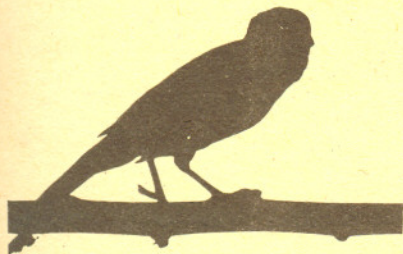
W idealnie szczelnym i stosunkowo niewielkim pomieszczeniu proces suszenia ulega zahamowaniu. Realne mieszkanie zawiera nieszczelności, przez które wypływa powietrze ciepłe, a napływa zimne. To ostatnie, mimo iż zawiera parę nasyconą, przynosi mniej wilgoci, niż jej odpływa na zewnątrz. Bilans: ciepłoty (z uwzględnieniem ciepła doprowadzonego np. przez kaloryfery) oraz materiałowy (zawartości wody w mieszkaniu) ustalają odpowiednią wartość wyrażenia $(P-p)$. Zwykle jest ono małe i suszenie może trwać długo. Otwarcie łufcika jest zamierzonym zwiększeniem nieszczelności, przyspieszającym wysychanie bielizny dzięki wzrostowi różnicy prężności. Ale nie tylko — intensywniejsze prądy konwekcyjne zwiększają prędkość powietrza względem powierzchni suszonej, co również daje pożądaný skutek. Doświadczanie życiowe gospodyni podpowiada jej, jak dalece należy rozhermetyzować mieszkanie. Przesada i tym razem nie jest wskazana. Dlaczego?



Rozwiązanie zadania M 252. Gdy x jest dowolną liczbą parzystą, liczba $P(x) - P(0) = a_n x^n + \dots + a_1 x$ jest parzysta, a więc $P(x)$ jest nieparzyste. Z kolei gdy x jest nieparzyste, mamy

$$P(x) - P(1) = a_n(x^n - 1) + \dots + a_1(x - 1)$$

i ponieważ potęgi x są nieparzyste, również $P(x) - P(1)$ jest parzyste. Wobec tego $P(x)$ jest nieparzyste i wobec tego żadna liczba całkowita nie może być pierwiastkiem $P(x)$.



Rozwiązanie zadania F 89. W danym problemie powietrze można traktować jak gaz doskonały. Wobec tego, energia wewnętrzna powietrza zawartego w mieszkaniu równa się iloczynowi liczby cząsteczek i ich średniej energii kinetycznej, bądź, co na jedno wychodzi, proporcjonalna do iloczynu liczby moli gazu i jego temperatury bezwzględnej. W naszym przypadku jest to uśredniona przestrzennie temperatura mieszkania

$$U \sim nT.$$

Włączenie piecyka podwyższa temperaturę gazu, a jednocześnie następuje zmiana jego ilości (część rozgrzanego gazu o większym ciśnieniu przenika do atmosfery przez szczelności). Eliminując liczbę moli n za pomocą równania Clapeyrona $PV = nRT$ otrzymuje się ostatecznie:

$$U \sim \frac{PV}{R}.$$

Wynik nie zależy od temperatury. Jeśli w trakcie nagrzewania wartość wyrażenia stojącego w liczniku nie ulegnie zmianie (w jakich przypadkach może to nastąpić?), energia wewnętrzna powietrza zawartego w mieszkaniu również się nie zmieni. Po cóż ogrzewamy więc mieszkania? Na to pytanie Czytelnik z pewnością sam odpowie. W rozwiązaniu pominięliśmy milczeniem współczynnik proporcjonalności w pierwszej z relacji. Jest nim molowe ciepło właściwe przy stałej objętości. Przyjeliśmy jego stałość w ramach rozpatrywanego modelu. Dokładniej rzecz biorąc, poszczególne składniki powietrza różnią się wartością tego ciepła. Czytelnik zechce sprawdzić, iż nawet po uściśleniu wynik pozostaje słuszny, o ile skład mieszaniny gazowej nie ulega zmianie.

Można więc powiedzieć, że zadaniem hipotez, czy też aksjomatów (w terminologii Euklidesa symptomatycznie nazwanych „pojęciami ogólnymi” czy też „powszechnymi”) byłoby jawne ujęcie pewnych elementów „zdrowego rozsądku”, czy też intuicji wspólnej dyskutantom. Jeśli tak, to powstaje pytanie, jaką rolę mogą pełnić takie ustalenia.

Wydaje się, że pełnią one głównie rolę selekcyjną potencjalnych rozmówców (tak, jak postulaty określały zakres dyskusji). Deklarując je, prowadzący dyskusję stwierdzał, że będzie rozmawiał jedynie z tymi, którzy podobnie jak on akceptują pewne powszechne sądy. Jednakże postępowanie takie ma sens jedynie wówczas, gdy wśród potencjalnych dyskutantów zdarzyć się mogą tacy, którzy nie akceptują sądów oczywistych dla innych i swoimi sprzeciwami paraliżowałoby spór z chwilą, gdy prowadzący go używałby niedozwolonych (ich zdaniem) argumentów.

Czy jednakże można byłoby znaleźć ludzi, którzy wątpiliby w prawdziwość zdania, że „całe jest większe od części”? Tak, byli tacy i bynajmniej nie należeli do rzadkości.

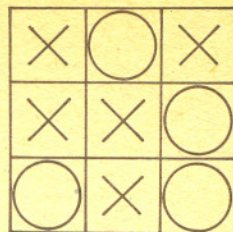
Cała szkoła myślicieli skłonnych do odrzucenia przynajmniej niektórych aksjomatów Euklidesa zapoczątkowana została na przełomie VI i V wieku przed naszą erą przez Parmenidesa. Od nazwy miejscowości, w której urodził się i działał Parmenides (i jego uczniowie), nosi ona nazwę elejskiej. Grupę tę wysuwamy na początek dlatego, że jej pośrednia rola dla rozwoju matematyki jest trudna do przecenienia. Sam Parmenides uchodzi za pierwszego, który uzasadniał wypowiediane przez siebie sądy — a więc za twórcę dialektycznej metody filozofii, a pośrednio — metody dedukcyjnej. W swoim zaufaniu do dedukcji posuwał się Parmenides tak daleko, że w przypadku rozbieżności między wynikami swoich rozumowań (nie zawsze w pełni poprawnych) a świadectwami danych zmysłowych — opowiadał się po stronie tych pierwszych. Prowadziło to wprawdzie do wielu poglądów brzmiących dla nas dziwnie, ale miało dla rozwoju nauk dedukcyjnych daleko idące znaczenie. Postawę zbliżoną do postawy Parmenidesa reprezentują po dziś dzień liczni matematycy (już sam wybór pracy nad badaniem twórczo czysto abstrakcyjnych świadczy o systemie wartości), a i wśród fizyków teoretyków można znaleźć wielu jej zwolenników...

Nas tu interesuje wszakże uczeń Parmenidesa, Zenon z Elei, który zostawił po sobie kilka paradoksów (*aporii* — co w dosłownym znaczeniu oznacza trudności), mających na celu pokazanie, że nie istnieje ruch, ani mnogość (czy też wielość). Wniosek, który stąd wysuwał, był taki, że to, co istnieje naprawdę (a nie tylko w złudnym świecie naszych wrażeń zmysłowych), musi być jedno, niepodzielne i niezmienne. Nie miejsce tu na rozważanie filozoficznych koncepcji Zenona, warto jednakże zauważyć, że jego aporie przez wiele stuleci zaprzętały uwagę filozofów oraz przedstawicieli nauk, które z ruchem i wielością mają do czynienia — matematyki i fizyki. Jeszcze obecnie zdarzają się nowe poświęcone im opracowania, a autorowi tego artykułu znany jest współczesny przypadek, kiedy poważne potraktowanie paradoksów Zenona doprowadziło do przewartościowania podstawowych koncepcji matematyki. Pozwoliło to zbudować alternatywny system teorii mnogości daleko odbiegający od powszechnie przyjmowanego, również akceptowalny z czysto logicznego punktu widzenia, a powodujący istotne zmiany w całym nadbudowywanym nad teorią mnogości gmachu matematyki. (Chodzi tu o tzw. alternatywną teorię mnogości czeskiego matematyka Petra Vopěnki).

Dwa spośród paradoksów Zenona — paradoks strzyla i paradoks Achilleśa ścigającego się z żółwiem — są dobrze znane. Poświęćmy więc nieco uwagi dwóm innym.

Najbardziej znana spośród skierowanych przeciw wielości „aporia miary” doszła do nas w sformułowaniu: „Jeśli istnieje mnogość, to powinna ona jednocześnie być wielka i mała i przy tym wielka bez granic i mała bez granic”. Czytelnika zainteresowanego prawdopodobnym tokiem rozumowania Zenona odesłać muszę do pierwszego tomu „Historii matematyki” (praca zbiorowa pod redakcją A. P. Juszkiewicza), Warszawa 1975, PWN, gdzie znaleźć można analizę zarówno tej, jak i innych aporii. Dla nas w tym miejscu będzie ważne jedynie następujące spostrzeżenie. Jeśli weźmiemy mnogość wielką bez granic, to na mocy aporii miary jest ona jednocześnie mała bez granic. Pierwszy aksjomat Euklidesa daje nam więc równość wielkiego bez granic i małego bez granic. To, że w wielkości wielkiej bez granic znajdziemy część małą bez granic, jest łatwe do pokazania metodami nie odbiegającymi od stosowanych przez Zenona. Część więc będzie równa całości...

Oczywiście można przyjąć tę aporię za prawdziwą i w związku z tym odmówić sobie i innym prawa używania aksjomatów Euklidesa i wniosków, które za ich pomocą otrzymano. Można też odrzucić rozumowanie (nie jest ono w pełni poprawne), bądź stosowane w nim nieostre pojęcia... Nie twierdzę, że wszystkie wyjścia są równie dobre, czy prowadzą do równie interesujących konsekwencji. Wiadomo tylko, że po sformułowaniu aporii trzeba było jakoś do nich ustosunkować się. Można to było zrobić choćby tak, jak Euklides. Ustalając swoje aksjomaty odmówił on po prostu dyskusji nad problemami pasjonującymi Zenona i licznych jego uczniów. Nazwa, jaką nadał swoim aksjomatom — „pojęcia ogólne”, świadczy że uczynił to zgodnie ze swoimi najgłębszymi przekonaniem, nie zaś dla samej przyjemności toczenia sporu w imię zasady „zobaczymy, co z tego wyniknie”...



Kółko i krzyżyk z siłą ciężkości

Wszyscy zapewne znają klasyczny wariant gry w kółko i krzyżyk. Jest to gra mało ciekawa; o ile obie osoby są uważne, to kończy się ona zawsze remisem. Inne warianty tej gry prezentowane już były w Delcie (np. 3/1978).

A oto inna odmiana, ostatnio osiągalna w sklepach z zabawkami. Wyobraźcie sobie przezroczyste pudełko w kształcie prostopadłościanu, które zostało podzielone na siedem identycznych sektorów.

Grają dwie osoby. Jedna ma 21 kulek białych, druga 21 czarnych. Grający kolejno wrzucają po jednej kulce do wybranego sektora. W każdym sektorze mieści się dokładnie 6 kul, układają się one dokładnie jedna nad drugą. Wygrywa gracz, który pierwszy ułoży cztery kule swojego koloru obok siebie tak, by tworzyły linię poziomą, pionową lub nachyloną pod kątem 45° do poziomu, czyli otrzyma jeden z następujących układów



Gra jest bardzo ciekawa i grać w nią można bez specjalnego pudełka z kulkami. Wystarczy kartka papieru i pisak. Rysujemy prostokąt o wymiarach 7 na 6.

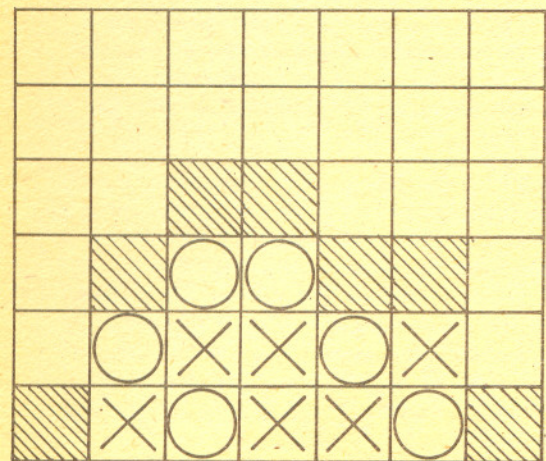
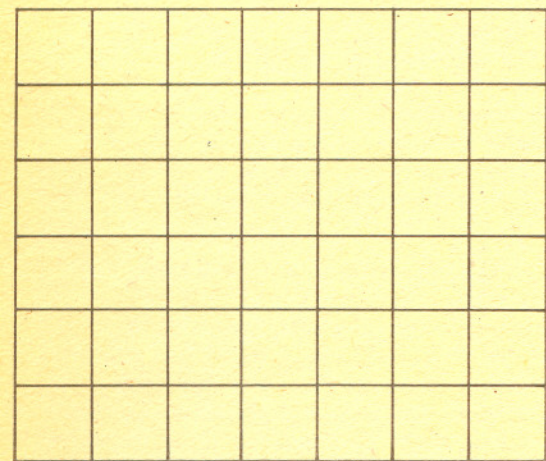
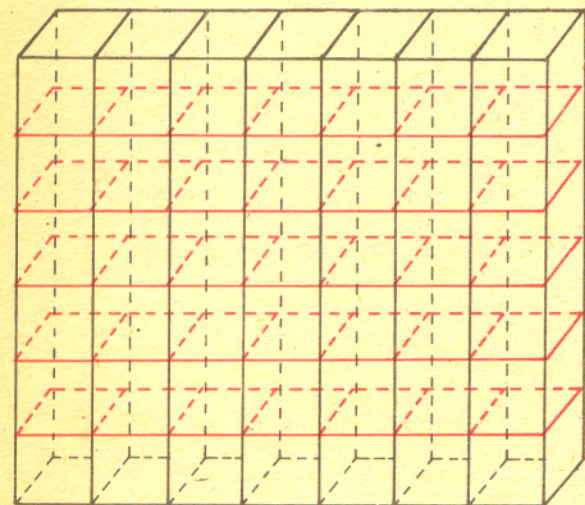
Zamiast wrzucać kule do pudełka, każdy z graczy kolejno zaznacza swój ruch odpowiednim symbolem (jeden „o” drugi „x”), przy czym uwaga: w danym sektorze (są to teraz kolumny prostokąta) możemy postawić znak tylko w najniższej wolnej kratce (kulka spada w najniższe położenie — siła ciężkości). Przykładowo na poniższym rysunku zakreskowano pola, w których można postawić znak.

Wygrywa gracz, który jako pierwszy ustawi cztery swoje symbole obok siebie tak, by tworzyły linię poziomą, pionową lub nachyloną pod kątem 45° do poziomu (analogicznie jak w klasycznym wariacie 3 x 3).

Ciekawy jest problem, czy któryś z grających (zaczynający lub drugi) ma strategię zapewniającą mu

- wygraną,
- remis.

Dr Edward STACHOWSKI



Święte słowa...

Gdy 30 lat temu — często ze Lwowa do Drohobycza w Samborskie przyjeżdżał, pamiętam jak się niecierpliwie na włości, że zamiast mazi, smarowali wozy ropą śmierdzącą, której woń ostra, nieznośna, trula mi wszelką przyjemność podróży.

„Mniejsza panie, że śmierdzi” — odpowiadali mi zwykle biedacy. — „kiedy maż kupowaby trzeba, a ropę darmo pan bóg daje. Kobieta umacza przedziwo w kiernicy [krynicy], wyżmyka ropę do garnka, taj jest smarowidło”.

I tak używano tego daru bożego przez dwadzieścia lat — do smarowania wozów, nim go nazwano naftą, i poznano że śmierdząca ropa jest istotnie wielkim darem bożym, — nowém — bo długo zapoznaném źródłem bogactwa kraju naszego.

Kalendarz Naukowy Karola Langiego, 1865.



Dlaczego mamy 10 palców u rąk?

Może dlatego, że 10 jest jedyną liczbą $n > 3$ taką, że dla każdej nieparzystej liczby pierwszej $p < n$ liczba $n-p$ jest pierwsza?

(The Fibonacci Quarterly 1979, s. 185)



Kącik Czytelniczy

Futbolowe ETO

... Zaraz po przyjeździe do Warszawy odszukałem swego serdecznego przyjaciela i długoletniego współpracownika, inżyniera Wojciecha Skoczka, matematyka, specjalizującego się w dziedzinie informatyki i na komputerze przeliczyliśmy wszystkie możliwości układów w naszej grupie. Dania, Cypr, Polska i Portugalia miały w sumie rozegrać dwanaście spotkań. Z tego odbył się już jeden mecz [...] i pozostawało jeszcze jedenaście [...] Komputer wyliczył, że awansujemy przy zdobyciu 10 punktów na 12 możliwych, pod warunkiem, że nie stracimy tych dwu punktów z drużyną X, która zabierze 3 punkty drużynie Y. (Jacek Gmoch — *Alchemia futbolu*, KAW 1978, s. 140)

Załamanie światła, czyli zmiana kierunku biegu promieni świetlnych przy przejściu przez przezroczysty przedmiot, jest źródłem wielu interesujących zjawisk. Do najciekawszych należą różnego rodzaju tęcze, które powstają, gdy ciała załamujące światło mają bardzo regularne kształty — kuliste w przypadku kropel deszczu, lub małych kropelek mgły i chmur, czy też foremne sześciokątne dla kryształków lodu.

Równoległe promienie słoneczne po odbiciu od wewnętrznych powierzchni kropeł lub po przejściu przez sześciokątne płatki śniegu biegną dalej głównie w jednym określonym kierunku (42° od osi Słońce — obserwator dla kulistych kropeł wody oraz 22° dla kryształków lodu). Te krople (płatki), dla których ów kierunek zmierza do obserwatora są dla niego źródłem tęczy, a symetria osiowa zjawiska powoduje, że odpowiedni łuk tęczy jest większym lub mniejszym fragmentem koła. Charakterystyczne zaś dla tęczy kolory biorą się stąd, że światło o różnej barwie załamuje się niejednakowo. A oto kilka zjawisk tęczyowych, jakie można zaobserwować w Polsce:

1. Zwykła tęcza deszczowa.

Powstaje po przeciwnej do Słońca stronie i jest kołem o promieniu kątowym równym 42° . Największe fragmenty tego koła widać więc z wysokich wzgórz i przy nisko położonym Słońcu. Czasem widać też tzw. tęczę wtórną o większym promieniu i o przeciwnym układzie kolorów.

2. Tęcza z odbicia w wodzie.

Pojawia się nad jeziorem i towarzyszy tęczy zwykłej. Jej źródłem jest obraz Słońca powstający z odbicia w tafli wodnej. Obie tęcze, zwykła i z odbicia, zaczynają się w tym samym miejscu ale ta druga jest fragmentem koła położonego wyżej.

3. Odbicie tęczy.

Można je również zobaczyć nad wodą. Nie jest to jednak zwykle odbicie łuku tęczy w zwierciadle wodnym, gdyż obraz w wodzie powstaje z innych kropełek deszczu. Tęcza odbita jest więc bardziej płaska i usytuowana inaczej względem chmur.

4. Aureola tęczyowa.

Otacza cień samolotu na chmurach lub cień głowy obserwatora stojącego w górach nad chmurami. Tym razem źródłem tęczy są mikroskopijne krople wody. Wtedy promień koła tęczyowego nie równa się już 42° i zależy od rozmiarów kropelek. Z tego samego powodu kolory nie są zbyt wyraźnie widoczne.

5. Tęcza słoneczna na mokrej trawie.

Krople wody nie są teraz rozrzucone w całej przestrzeni, ale znajdują się mniej więcej na płaszczyźnie. Powstająca tęcza nie jest wtedy fragmentem koła ale hiperboli.

6. Tęcza od latarni na mokrej trawie.

Źródło światła jest blisko i promienie nie są równoległe, ale rozbieżne. Tęcza jest więc fragmentem krzywej bardziej złożonej. Można ją oczywiście wykreślić posługując się „prawem 42° ”.

Przejdziemy teraz do zjawisk świetlnych zimowych, wywołanych przez znajdujące się czasem w powietrzu kryształki lodu. Zjawiska te są bardzo rzadkie i w Polsce mogą być zaobserwowane tylko podczas ostrej zimy.

7. Aureola słoneczna (widmo Brockenu).

Łuk tęczyowy dokoła Słońca o promieniu kątowym równym 22° . Powstaje przez załamanie światła w chaotycznie spadających płaskich, sześciokątnych kryształkach lodu.

8. Dwa obrazy Słońca.

W wyniku oporu stawianego przez powietrze większość płaskich sześciokątów lodu spada nie chaotycznie, ale prawie poziomo, podobnie jak spadająca karta pocztowa, czy też tonący w wodzie talerz. Załamaniem światła w tych poziomych kryształkach daje dwa obrazy umieszczone poziomo po obu stronach Słońca w odległości kątowej równej znowu 22° . Obrazy te mogą być widoczne tylko wtedy, gdy Słońce znajduje się nisko nad horyzontem.

9. Słup słoneczny.

Świetlna kolumna pojawiająca się nad i pod Słońcem. Źródłem jej nie jest załamanie światła w kryształkach lodu, ale lustrzane odbicie od płaskich powierzchni poziomo spadających płatków.

W ckoicach podbiegunowych wszystkie te zjawiska występują często równocześnie. Pojawiają się też wtedy słupy poziome, tęcze zenitalne i wiele innych.

Czego się można nauczyć obserwując „młotki litowe”?

Doc. dr Joanna STEPANIAK

Termin „reakcja jądrowa” kojarzy się zwykle absolwentowi współczesnej szkoły średniej z oddziaływaniami nukleonów o energiach rzędu kilku lub kilkunastu megaelektronowoltów z jądrami. Reakcje te prowadzą do rozszczepienia ciężkich jąder. Czy potrafiłbyś jednak Czytelniku odpowiedzieć na pytanie, co się stanie, jeśli uderzy w jądro cząstka, której energia setki czy tysiące razy przewyższa energię wiązania nukleonów w jądrze? Podobne pytanie, zadane przed kilkunastu laty przez jednego z profesorów w czasie egzaminu z fizyki doświadczalnej, wywołało wśród studentów oczekujących na egzamin pewną konsternację. Trzeba dodać, że profesorowi chodziło raczej o sposób podejścia do nowego problemu, niż o wiedzę na poruszany temat — fizyka cząstek elementarnych i fizyka jądrowa wysokich energii nie należały do programu wykładu. Ponadto był to okres, kiedy dopiero zaczęto przyspieszać cząstki w akceleratorach do energii rzędu dziesiątek gigaelektronowoltów i informacje doświadczalne o ich oddziaływaniu z jądrami były jeszcze ubogie.

— Proces może wyglądać podobnie do strzału z karabinu do wielkiej kropli cieczy — powiedział jeden ze studentów.

W pierwszej chwili pocisk wyłobi tunel, a następnie rozdygotana kropla wyrzuci kilka drobnych kropelek.

— Ale przecież jądro składa się z nukleonów i odległości między nimi są wielokrotnie większe od promienia nukleonu. Czy nie powinno się raczej mówić o procesie podobnym do zderzenia kuli bilardowej z gromadą podobnych kul — powiedział ktoś inny. Wtedy należałoby rozważać coś w rodzaju sekwencji kolejnych zderzeń.

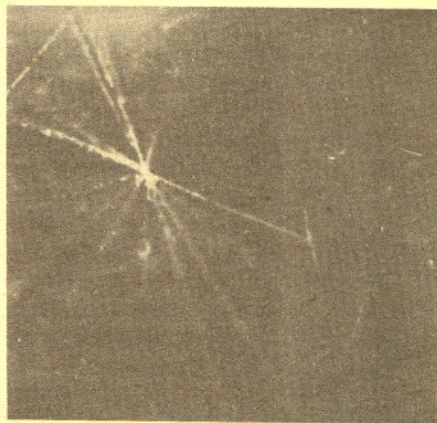
— Od razu widać, że nie słyszeliście o produkcji nowych cząstek. Przecież przy takich energiach w zderzeniu rodzą się mezony i inne nowe cząstki. Może właśnie to jest najważniejsze — powiedział inny student.

— No dobrze, ale skoro w pytaniu jest mowa o jądrze, to pewnie chodzi o to, co się z nim stanie, a nie o to jak wygląda zderzenie pojedynczych nukleonów — nie dawał za wygraną zwolennik kropkowego modelu jądra.

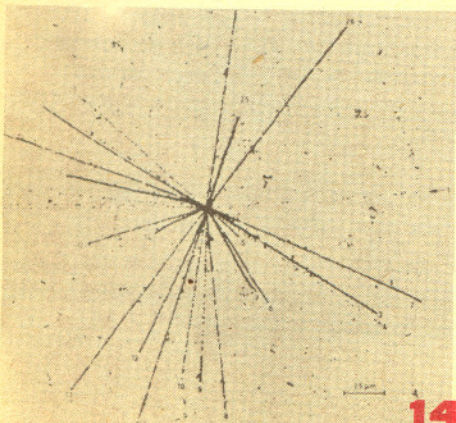
— A może najlepiej byłoby zobaczyć jak jest naprawdę. Przecież chyba robiono takie doświadczenia — pogodził wszystkich ktoś, kto nie lubił spekulacji myślowych.

Kiedy kilka lat później zajmowałam się jako młody pracownik naukowy badaniem oddziaływań cząstek wysokich energii z jądrami, przypomniałam sobie tę dyskusję z czasów studenckich. Zdałam sobie wtedy szybko sprawę, że „zobaczyć jak jest naprawdę” wcale nie jest łatwo. Liczba produktów oddziaływania bywa bardzo duża. W niektórych przypadkach obserwuje się kilkadziesiąt cząstek naładowanych wychodzących z obszaru oddziaływania, nie mówiąc o neutronach i innych cząstkach neutralnych. Przykład takiego właśnie oddziaływania z dużą liczbą cząstek wtórnych przedstawiony jest na zdjęciu.

Zdarzenie zostało zarejestrowane w emulsji jądrowej i zaobserwowane pod mikroskopem optycznym. Wywołał je proton przyspieszony w akceleratorze do energii 24 GeV. Na podstawie obserwacji wielu takich zdarzeń stosunkowo szybko udało się ustalić, że produkty reakcji można podzielić na trzy grupy. Bardzo szybkie, słabo jonizujące cząstki, skolimowane w kierunku lotu cząstki pierwotnej, są w większości mezonami produkowanymi przez szybką cząstkę w jej drodze przez jądro. Prawie ciągle tory cząstek powolnych, rozłożone izotropowo odpowiadają prawdopodobnie produktom rozpadu wzbudzonego jądra. Charakterystyki torów o pośredniej jonizacji świadczyły o tym, że zostały one pozostawione przez nukleony wybite w wyniku rozwijającej się kaskady zderzeń. Jak jednak uzyskać bardziej precyzyjne informacje o wspomnianych procesach? Identyfikacja i pomiar energii wszystkich cząstek wychodzących z jądra były wówczas zadaniem ze sfery fantazji, a i obecnie są praktycznie niemożliwe nawet przy użyciu nowoczesnych technik detekcyjnych. Czy jednak naprawdę jest sens mierzyć „wszystko”? Co właściwie zrobilibyśmy z otrzymaną, ogromną ilością informacji? Na jakie pytanie chcemy dać odpowiedź? Dla zbadania mechanizmu deekscytacji wzbudzonego jądra, poznania jego energii wzbudzenia, najbardziej charakterystyczną wydawała się być emisja większych grup nukleonów. Wykorzystaliśmy do analizy tej emisji obserwację dość szczegółową i na pierwszy rzut oka nie charakterystyczną dla całości oddziaływania. Mianowicie niektóre tory, zwykle o niezbyt długim zasięgu kończą się czymś w rodzaju poprzeczki. Zdjęcie jednego z takich torów możesz Czytelniku obejrzeć na zdjęciu.



Uważny obserwator może zauważyć sekwencję ziaren układającą się w linię celującą w punkt przecięcia toru z „poprzeczką”. Jest to ślad elektronu. Tory takie pozostawia promieniotwórcze jądro ^8Li . W wyniku emisji elektronu zmienia się ono w nietrwały izotop berylu, który z kolei rozpada się na dwie cząstki alfa. W gwarze używanej w laboratorium tor tego typu nazywany jest młotkiem litowym. Zbadanie kilkuset tego typu zderzeń pozwoliło poznać, praktycznie dokładnie rozkłady energetyczne i kątowe jednego, dobrze określonego fragmentu jądrowego. Poza przeprowadzeniem pomiarów zasięgów torów i kątów ich emisji konieczne było oczywiście uwzględnienie szeregu poprawek związanych z mniejszym prawdopodobieństwem obserwacji niektórych konfiguracji kinematycznych. Na przykład tory fragmentów o długim zasięgu, emitowanych pod kątami bliskimi 90° nie zawsze kończyły się w jednej warstwie emulsji. Zauważenie tego typu przyczyn zniekształceń jest jednak podstawowym obowiązkiem każdego doświadczalnika, a wprowadzenie odpowiednich poprawek było możliwe.



Ostatecznie otrzymane widmo energii fragmentów litowych ma kształt bardzo podobny do znanego z termodynamiki klasycznej maxwellowskiego widma energii cząstek wyparowanych z cieczy. Jest tylko nieco przesunięte ku większym energiom, co łatwo można zrozumieć, jeśli zauważyć, że fragment wychodzący z naładowanego jądra musi pokonać barierę kulombowską. Nie było teraz powodu, żeby nie posunąć dalej analogii z parującą kroplą i nie przypisać parametrowi występującemu we wzorze opisującym kształt energii znaczenia temperatury. Znany z termodynamiki związek między temperaturą i energią swobodną układu pozwolił na wyznaczenie energii wzbudzenia jądra. I w tym momencie pojawiła się trudność. Nasz zadziwiająco prosty i intuicyjnie zrozumiały model zaczął się załamywać. Otrzymana energia wzbudzenia okazała się porównywalna z całkowitą energią wiązania jądra. Natychmiast pojawiła się wątpliwość, czy jest wtedy sens mówić o analogii z procesem powolnym, jakim jest parowanie. Może nie ustala się wtedy pełna równowaga termodynamiczna, a może przy tak dużych wzbudzeniach mamy do czynienia ze zjawiskami jakościowo nowymi, tworzeniem się czegoś w rodzaju nowej fazy materii jądrowej. Obecnie, kiedy jesteśmy na etapie poznawania kwarkowej struktury nukleonów, naturalne staje się rozważenie

możliwości zlewania się nukleonów w jedną kroplę materii kwarkowej. Przejście takie mogłoby wystąpić dopiero przy bardzo dużych energiach wzbudzenia, ponieważ jest to stan niewygodny energetycznie. Niezależnie jednak od tego, co nowego zdarzy się w opisywanej dziedzinie badań, wydaje się, że dobrze jest projektować eksperyment mając jakąś roboczą hipotezę, szkic modelu teoretycznego, który dostarczy aparatu matematycznego. Często model taki do pewnego momentu pracuje, czasem zbyt długo staramy się go ratować, aż w pewnym momencie konieczność postawienia nowej hipotezy staje się oczywista. I w tym właśnie momencie zaczyna się postęp. Od czasu, w którym wykonane zostało doświadczenie z „młotkami litowymi”, w technice doświadczalnej wiele się zmieniło. Zmierzone zostały widma energii wielu fragmentów wysyłanych z różnych jąder. Nie spowodowało to jednak jakościowej zmiany w naszym rozumieniu procesu emisji cząstek wysoko wzbudzonego jądra. A jakie są losy modeli teoretycznych opartych na rozumowaniach podobnych do tego, jakie przeprowadzili cytowani na początku studenci? Także te modele osiągnęły w chwili obecnej kres swych możliwości przewidywania i „zestarzały” się. Ale to już inna historia.

Jak napisać podręcznik fizyki

Autorka niniejszego skłonna by była podzielić znane jej (i zapewne nieznane, choć bujna różnorodność panująca we Wszechświecie pozwala dopuszczać możliwość innych rozwiązań) podręczniki na dwie zasadnicze kategorie:

1 — Podręczniki napisane przez kogoś, kto wyobraża sobie, że znana jest mu dana dyscyplina wiedzy lub dany jej poddział, kto dostrzega dojmujący brak podręcznika lub braki podręczników i kto decyduje się takową lukę uzupełnić.

Tego rodzaju podręczniki zasługują sobie rychło na pogardliwe miano dzieł powierzchniowych, a znawcy przedmiotu odradzają ich używania licznym rzeszom uczniów, którzy z przedziwnym uporem pozostają im wierni mimo niechęci nauczycieli, mimo iż nauka idąc naprzód dawno przekroczyła ich ramy, mimo ostrzeżeń.

2 — Podręczniki napisane przez kogoś, kto został zaszczytnym obowiązkiem napisania podręcznika obarczony z zewnątrz, czyli podręczniki napisane na zlecenie.

Te podręczniki zasługują sobie na miano nieudolnych, kiedy, rzecz jasna, minie ich wiośniana świeżość, w której to dobrze budzą jeszcze niejasne nadzieje zarówno w autorze, jak w zleceniodawcy (okres świeżości takiego podręcznika przekracza z reguły nader nieznacznie okres oczekiwania na jego ukazanie się, kiedy to z reguły określany bywa jako świetny).

Autorka nie odważy się kwalifikować istniejących już podręczników, nie ma zamiaru wyrażać swojej opinii na temat zarysowanych tu kategorii (choć, rzecz jasna, swoje zdanie na ten temat posiada), podobnie zawiódł się ci wszyscy, którzy w niniejszym artykule spodziewają się znaleźć odpowiedź na pytanie kluczowe — jak zdobyć zlecenie?

Powiedzmy, że mamy koncepcję zdobycia takiego zlecenia, zapewnienie osób odpowiedzialnych, znajomości, stosunki czy wręcz podpisaną umowę.

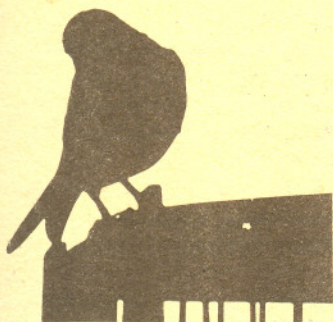
Powiedzmy, że nie niepokoi nas pytanie, czy napisane przez nas dzieło wejdzie istotnie jako obowiązujący podręcznik do praktyki szkolnej, że, powiedzmy, odznaczamy się chorobliwą pewnością siebie, która nie dopuszcza stawiania takich pytań, lub ogólnym brakiem inteligencji, który nie pozwala przewidzieć konsekwencji ewentualnej przegranej lub wygranej w tej dyscyplinie.

Powiedzmy, że handlowa strona zagadnienia w ogóle nas nie dotyczy, na przykład dlatego, że jesteśmy wstępnie bardzo zamożnymi ludźmi.

JAK napisać podręcznik fizyki, oto pytanie!

W tym miejscu pozwólmy sobie na lekką zmianę stylizacji, aby dokonać spostrzeżeń, bez których nie da się przejść do następnej części artykułu, części merytorycznej.

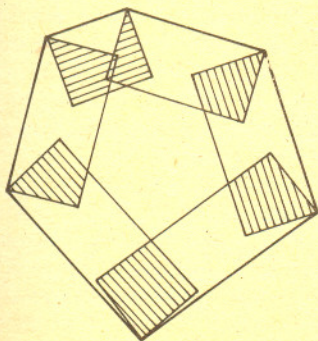
W związku z rozwojem przemysłu i techniki gospodarka państwowa potrzebuje coraz więcej nauki. Szczególnie fizyka zawiera w sobie nieograniczone możliwości coraz nowych zastosowań. Ileż nowych technologii byłoby niemożliwych do zastosowania, weźmy choćby produkcję telewizorów. Jedyne fizyka może dać właściwe podstawy technice i postępowi technicznemu w ogóle. Fizyka jest odporna na działanie słabych kwasów i zasad oraz słone wody morskiej, natomiast rozpuszcza się w toluenie, dwusiarczku węgla i benzenie ... Stop!



Rozwiązanie zadania M 251. Przystawiając do każdego boku wielokąta prostokątny

pasek o szerokości $r = \frac{S}{p}$ tak, jak to

pokazuje rysunek, zauważymy, że sąsiednie paski przecinają się. Wynika stąd, że powierzchnia pokryta paskami jest mniejsza niż $r \cdot p = S$ i wobec tego w wielokącie znajdują się punkty nie należące do żadnego z tych pasków. Dowolny taki punkt może być żądanym środkiem koła.



Palindromiczne kwadraty

Liczba $A = \left(\frac{10^{9n}-1}{10^n-1}\right)^2$ $n = 1, 2, \dots$

zawiera wszystkie cyfry poza zerem i jest palindromiczna, tj. pozostanie sobą, gdy przeczytamy ją wstak. Dla $n = 1$ otrzymujemy

$$A = 12345678987654321.$$

Dla $n = 2$ mamy

$$A = 1122334455667788998877665544332211.$$

W układzie o podstawie numeracji b podobne własności ma

$$A = \left(\frac{b^{(b-1) \cdot n} - 1}{b^n - 1}\right)^2$$

i równie łatwo to sprawdzić.



Oscylator liczbowy

Weźmy dowolną liczbę naturalną, np. 24, i rozłóżmy ją na czynniki pierwsze:

$$24 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2.$$

Dodajmy wszystkie czynniki i zwiększmy tak otrzymaną sumę o 1; otrzymamy $1+3+2+2+2 = 10$.

Z liczbą 10 postąpmy tak, jak z początkowym 24:

$$10 = 2 \cdot 5, \quad 1+2+5 = 8,$$

i dalej tak samo

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2, \quad 1+2+2+2 = 7.$$

7 jest liczbą pierwszą, a więc „już rozłożoną” na czynniki, i jeśli zastosujemy do niej opisaną wyżej procedurę, dostaniemy $1+7 = 8$ i dalej będzie 7, 8, 7, 8, ...

Weźmy na początek inną liczbę, np. 782628 =

$$= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11. \text{ Mamy kolejno:}$$

$$1+2+2+3+7+7+11+11+11 = 55,$$

$$55 = 5 \cdot 11, \quad 1+5+11 = 17,$$

$$1+17 = 18,$$

$$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3, \quad 1+2+3+3 = 9,$$

$$9 = 3 \cdot 3, \quad 1+3+3 = 7,$$

a zatem dalej będzie już 8, 7, 8, 7, 8, 7, ...

Nie tak łatwo (choć można) wykazać, że niezależnie od wyjściowej liczby zawsze dojdziemy do 7 i wobec tego do ciągu 7, 8, 7, 8, ... Dla liczb mniejszych niż 200 ósemkę otrzymujemy nie dłużej niż za siódmym krokiem (i tylko 153, 163 i 166 wymagają aż 7 kroków).

Tu autorka nieco się zagalopowała i musi przyznać że wstydem, że nie będąc specjalnie mocną w tym rodzaju literatury, posłużyła się jako wzorem artykułem o gutaperce („Problemy”, nr 12(69)/1951). Nie ma to większego znaczenia. I tak wiadomo, o co chodzi:

a) — o uzasadnienie, że dana gałąź wiedzy zasługuje na kultywowanie, bo jest szczególnie ważna (tak jakby mniej ważne gałęzie wiedzy były systematycznie likwidowane),

b) — o zaznaczenie, że w danej gałęzi wiedzy zarysował się ostatnimi czasy niebawomy postęp (i tu należy zauważyć, że istotnie w latach 1900—1940 fizyka uczyniła wielki krok naprzód). Wypada, abyśmy pisząc podręcznik mieli na względzie rezultat naszych dydaktycznych poczynań. Ważne jest bowiem, by uczeń nasz „sprawdził się” w świecie, by potrafił poradzić sobie z praktycznymi zagadnieniami, jakie zostaną przed nim postawione. Jakież to zagadnienia? Spróbujmy powołać je w naszej wyobraźni:

Zadanie F 1. Znaleźć ruch punktu materialnego o masie m , podlegającego działaniu siły harmoniczej oraz siły tłumienia proporcjonalnej do prędkości ruchu.

Aby sformułować to zadanie, potrzebne było parę setek lat pracy fizyków, a i to niektórzy z nich musieli się wykazać nie łądą rozumem. Odwrotnie niż nasz pieszczoszek, któremu zbiór zadań ma zastąpić świat, oni mieli świat, nie mieli zaś zadań i nie było dla nich bynajmniej jasne, jakie w ogóle zadania dadzą się, jakie zaś nie dadzą sformułować, powiedzmy, o sprężynie. Stawali wobec sprężyny i sami formułowali ilościowe zależności, posługując się warsztatem matematycznym z różną sprawnością, a częstokroć w nieodpowiedzialny zgola sposób. (Nawet wybór owego warsztatu zdaje się pochodzić z ich ręki, gdyby bowiem wybrali jakiś inny opis, fizykometria byłaby dyscypliną wprowadzoną w fizykę dopiero w drugiej połowie dwudziestego wieku. I jakże tu nie szanować starych mistrzów!)

Dziś polecenie rozwiązania odpowiedniego równania różniczkowego można wydać studentowi czy uczniowi, on rozwiąże lub nie, my mamy czyste sumienie — jest to bowiem najrzetelniejsze zagadnienie fizyczne. Gdybyśmy mu natomiast kazali zagrać na klarncie? Aboż to fizyka?

W dziwnym świecie Lewis Carrolla Alicja znajduje przedmioty opatrzone napisem „Zjedz mnie” lub „Wypij”, lecz że TO jest oscylator harmoniczny, trzeba zdecydować samemu.

Zadanie F 2. Znaleźć ruch kulki stalowej o masie 10 g zawieszony pionowo na sprężynie stalowej o długości 10 cm, gęstości liniowej 0,1 g/cm i współczynniku sprężystości...

Początkowe wychylenie z położenia równowagi wynosi 1—2 cm. Doświadczenie przeprowadzamy w warunkach pokojowych. Dokładność odczytu położenia wynosi 0,1 cm, zaś dokładność pomiaru czasu 0,1 s.

Problem polega na oszacowaniu (na zdrowy rozum), czy przy tych warunkach i dokładności pomiaru mają znaczenie: niejednorodność ziemskiego pola grawitacyjnego (nie), masa sprężyny (tak), odchylenie od prawa Hooke’a (pewnie nie — zależy od wykonania sprężyny), odchylenie od prawa Stokesa dla oporu powietrza (nie), nie licząc wielu czynników (np. wpływ Marsa), które wyeliminowali za nas nasi szanowni przodkowie.

Praca ta, wcale niełatwa, może nas przywieść do wniosku, że w pewnych warunkach (np. przy odpowiednim stosunku masy kulki do masy sprężyny) zagadnienie da się sprowadzić do zadania F 1 — do wiedzy czystej, sprzedawanej u nas przez większość podręczników zarówno szkolnych, jak akademickich.

Logiczna i konsekwentna analiza zjawiska, oddzielenie informacji ważnych od nieistotnych jest kwestią pozostawioną intuicji nauczającego.

W dziwnym świecie Lewis Carrolla są, być może, obiekty opatrzone objaśnieniem „jestem oscylator harmoniczny”, tam też należałoby studiować większość naszych podręczników (wraz z historią Dżambersmoka).

Lecz weźmy taki ciężar przenoszony na linie przez dźwign (wahadło o ruchomym punkcie zawieszenia i zmiennej długości) — Aboż to fizyka?

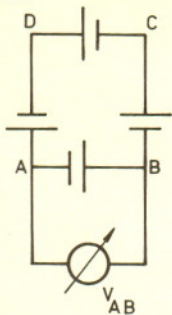
Jest to, jak myślę, zagadnienie czysto inżynierskie, podobnie jak balistyka, podobnie jak zjawiska świetlne znane wyłącznie tym panom, co to kręcą reflektory w teatrze.

A przecież ucząc fizyki kształcimy techników (również na własne potrzeby, dodajmy, choć i samej autorce ta ostatnia uwaga wydaje się ogromnie nieprzyzwoita).

Powiedzmy jednak, że pragniemy czegoś więcej niż wyrobienie sprawności technicznej w rozwiązywaniu zadań, że uczeń — komputer nie całkiem nas urządza, że przynajmniej parę prostych i bardziej zasadniczych zjawisk chcemy wyjaśnić.

Weźmy więc kulkę stalową (jeśli jesteśmy nastawieni bardziej dydaktycznie, będzie to piłeczka pingpongowa — model punktu materialnego, a zarazem jedyny kulisty przedmiot, jaki umiemy wymienić bez zastanowienia). Weźmy długą sprężystą nici, zbudujmy (lub raczej wyobraźmy sobie) monochord. Badajmy małe wychylenia wahadła. Stwórzmy rzeczywistość fizyczną, która do prawdziwej ma się jak pięść do nosa, niech zwyczajny telefon (drgająca membrana, drgający prąd elektryczny) będzie dla naszego milusińskiego zjawiskiem przerażającym w swej bezprzykładnej komplikacji, gdyż powinien on znać amperomierz, woltomierz, cewkę i kondensator, a nie dłużyć w instalacji elektrycznej. (Kto bowiem wie, że taki prąd telefoniczny nikogo nie może porazić? Operujący tak kolosalną wiedzą nauczyciel przeważnie nie korzysta z żadnego podręcznika, a często prowadzi go to do nauki składania i rozkładania telefonu jako takiego, co oczywiście nie jest fizyką, lecz techniką i to mało twórczą. Niebezpieczeństwo istniejące, ale nieczęste. „Złota rączka” z rzadka zostaje nauczycielem).

Jakie napięcie wykaże woltmierz podłączony do dowolnego ogniwa w układzie



zawierającym cztery identyczne ogniwa zgodnie skierowane? Oczywiście zero! Z symetrii bowiem wynika, że wskazania woltmierz podłączonego do punktów AC są dwukrotnie większe niż V_{AB} i dalej $V_{AD} = 3 V_{AB}$ oraz $V_{AA} = 4 V_{AB}$, a to z pewnością równa się zero. Mówiąc inaczej, siła elektromotoryczna każdego ogniwa jest całkowicie zużyta na spadek napięcia na oporze wewnętrznym tego ogniwa.

(J. P.)

Najlepiej więc, ażeby uczeń wiedział z góry, że fizyka to rzecz jedna, zaś rzeczywistość – druga. Modele wyczyszczone z oddziaływań ubocznych mogłyby go nauczyć, że opór powietrza, tarcie i ziemskie pole magnetyczne zaniedbuje się „prawie zawsze”. Lepiej więc, aby tej mądrości nie stosował w realnym świecie, gdzie własności tej natury występują nagle, nieoczekiwanie i mogą sprawić różne paskudne dowcipy, z niebezpiecznymi włączniami.

A znów czy takie radio, czy telefon to fizyka? Telefon jest prostszy niż oparte na tych samych zasadach układy elektroniczne stosowane powszechnie we wszystkich działach fizyki doświadczalnej. Taka, powiedzmy, komora iskrowa... Komora iskrowa przywołuje jednak autorkę do porządku. Sama elektryczność jest wszak niczym wobec własności elektronów znajdujących się wewnątrz kuli Fermiego w przewodnikach. Całą tradycyjnej fizyki warto bowiem uczyć tylko dlatego, iż może ona posłużyć jako model do przedstawiania zjawisk bardziej dla nowoczesnej fizyki fundamentalnych.

Przecież i tak własności sprężyny, reflektora czy telefonu wynikają z własności protonów, neutronów, elektronów i fotonów. Każdy może sobie sam zrekonstruować.

Zresztą okazuje się, że modelowanie cząstek elementarnych za pomocą kulek nie jest wcale właściwe. Poważni fizycy odżegnują się od tych praktyk i słusznie. Elektron nie jest żadną kulką. Naładowana elektrycznie, drgająca kulka wysyła bowiem nieustannie promieniowanie elektromagnetyczne i wkrótce przestaje drgać. Świat złożony z naładowanych kulek przestałby istnieć w ciągu ułamka sekundy.

Lepiej więc weźmy równanie Schrödingera dla elektronu w atomie wodoru

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(r, t) - \frac{e^2}{r} \psi(r, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(r, t)}{\partial t}$$

i starajmy się nie pomylić. Ostatnie osiągnięcia dydaktyki fizyki pozwalają rozwiązać je na poziomie szkoły średniej. W rezultacie ktoś tam musi coś uczniowi i studentowi wyjaśnić, lecz może ... niech to już wykładowca na własną odpowiedzialność. I czy nie byłoby lepiej, gdyby nie wyjaśniał, nie mącąc własnymi prymitywnymi wyobrażeniami jasnych i klarownych struktur matematycznych.

I czy nie jawi się w Waszej wyobraźni, czcigodni potencjalni i aktualni autorzy, klasa przeszłości, klasa, sala wykładowa, po której nie miota się spocony, odrażający agitator, lecz gdzie melodyjny głos odczytuje piękne długie wzory i gdzie kwadrans ciszy między jedną taką projekcją a drugą uczniowie poświęcają głębokiej kontemplacji prowadzącej ku głębszemu zrozumieniu doskonałości struktur, które opisują.

Weźmy więc równanie...

M-me Pipsztycka

Trzeba czy nie trzeba?, czyli rozrywki umysłowe pradziadków

Chiński mur.

Największy mur na świecie.

Widzimy mur na granicach Chin.

Zbudowany on z granitu i innych kamieni.

Co każde trzysta kroków wznoszą się przepyszne wieże.

U dołu grubości dwadzieścia pięć stóp, u góry pół piętej stopy. Wysoki na dwadzieścia. Wspaniały ten mur ciągnie się wzdłuż dolin, gór i po przez strumienie. Od prowincji Edmsi aż do Żółtego morza 1/15 i 1/15 ma długości.

Otacza on wielkie miasto, zaludnione wielce, a mianowicie miasto Pekin; objętość jego wcale nie wielka, może najwyżej obejmować 24 niemieckie mile.

Jeżeli masz chęć, pieniądze i mocne trzewiki i jeżeli pragniesz dowiedzieć się wiele to kroków obejmuje miła niemiecka, a nadto jeśli życzyś sobie obejść cały mur, trzeba zatem z tego korzystać aby przekonać się, jakiej też długości jest ów mur, nazwany dziwem świata?

(Zagadki, Rebusy, Szarady, Lamigłówek, Zagadnienia Arytmetyczne i Zartobliwe Zapytania, Warszawa 1882)

Zamieszczona w tym zbiorku odpowiedź brzmi: Nie trzeba. Mur ten jest długi na 300 mil. Mielśmy (my, redakcja Delty) kłopoty ze zrozumieniem rozwiązania.



Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 250. Wykazać, że liczba 0,1248163264128256... (wypisane kolejno potęgi dwójki) jest niewymierna.

Rozwiązanie na str. 10

M 251. Wykazać, że w wielokącie wypukłym o powierzchni S i obwodzie p można zmieścić

koło o promieniu $\frac{S}{p}$. Rozwiązanie na str. 15

M 252. Wykazać, że jeżeli wielomian $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ o współczynnikach całkowitych przyjmuje wartości nieparzyste przy $x = 0$ i $x = 1$, to równanie $P(x) = 0$ nie ma pierwiastków całkowitych.

Rozwiązanie na str. 11

Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

F 88. Aby przyspieszyć schnięcie wypranej i rozwieszanej w pokoju bielizny, gospodyni uchyliła lufcik. Czy ma to sens, skoro na dworze od dłuższego czasu pada deszcz ze śniegiem? Rozwiązanie na str. 10

F 89. Ocenić zmianę energii wewnętrznej powietrza zawartego w mieszkaniu spowodowaną włączeniem piecyka elektrycznego. Rozwiązanie na str. 11