

hp-653-101's 11-9344593

delta

SPIS TREŚCI

NUMERU 1 (85)

Powierzchnie stałych ruchu
w dynamice

Doc. dr Antoni Kuszell str. 1

Zadania str. 4

O krzywiznie, skręceniu
i trójnogu Freneta (II)

Doc. dr Andrzej Szybiak str. 5

Co widzimy patrząc
na krzywą

Mgr Krzysztof S. Nowiński str. 8

Czego nie widzimy, patrząc
na krzywą?

Dr Michał Szurek str. 10

Powierzchnie

Dr Juliusz Ołędzki str. 12

Płaszczyzna rzutowa

Iwona Grzegorzczak str. 14

Mała Delta

str. 15

Patrz w niebo

str. 15

Z Nowym Rokiem

str. 16

Rysunki techniczne:

Bogusław Kretkiewicz

W następnym numerze:

O gwiazdach nowych

Komunikat jury konkursu prac maturalnych z matematyki

Dnia 18 września 1980 roku odbył się finał konkursu prac maturalnych z matematyki. Do publicznej obrony dopuszczonych było sześć prac. Autor jednej z nich R. Gut z Wrocławia nie wziął udziału w finale. Biorąc pod uwagę przebieg publicznej obrony oraz poziom przedstawionych prac jury konkursu w składzie: prof. L. Jeśmanowicz — przewodniczący oraz członkowie: prof. R. Duda, prof. W. Żakowski, dr A. Derkowska, dr M. Kordos — przedstawiciel redakcji Delt, dr W. Wierzbicki — przedstawiciel MOiW i dr J. Waszkiewicz postanowiono przyznać następujące nagrody: Złoty medal i I nagrodę Ministra Oświaty i Wychowania *Zbigniewowi JEŁONKOWI*, absolwentowi II LO w Krakowie, za pracę pt „*Pewna analogia*”. Srebrny medal i II nagrodę Ministra Oświaty i Wychowania *Robertowi COZASIOWI* (V LO w Krakowie) za pracę pt „*Pewne równania rekurencyjne i ich zastosowanie w teorii ułamków łańcuchowych*”. Brązowy medal i II nagrodę Ministra Oświaty i Wychowania *Waldemarowi HOŁUBOWSKIEMU*, absolwentowi LO w Mysłowicach za pracę pt „*Inwersja*”. Autorów pozostałych prac: *Bogusława ŁOPUCHA* (III LO we Wrocławiu) za pracę pt „*Inwersja*” oraz *Jacka BRODZKIEGO* (XIV LO we Wrocławiu) za pracę pt „*Teoria grup w algebrze i fizyce*” postanowiono wyróżnić dyplomami. Opiekunom prac: mgr *Ewie CHOJNACKIEJ*, mgr *Zbigniewowi GLANOWSKIEMU* (II LO w Krakowie), dr *Zdzisławie DYBIEC* (Instytut Matematyki UJ), mgr *Józefowi PIETRYKOWSKIEMU* (LO w Mysłowicach), mgr *Zdzisławowi SŁOMIANOWI* (III LO we Wrocławiu) oraz mgr *Aleksandrowi DOBRZYCKIEMU* i mgr *Augustynowi KALUŻY* (XIV LO we Wrocławiu) przyznano nagrody Ministra Oświaty i Wychowania.

„Delta”

matematyczno-fizyczno-astronomiczny

miesięcznik popularny

Polskiego Towarzystwa

Matematycznego, Polskiego

Towarzystwa Fizycznego i Polskiego

Towarzystwa Astronomicznego

wydawany przy poparciu

Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny:

doc. dr Jerzy Bartke

doc. dr Andrzej Bączyński

doc. dr Bolesław Gleichgewicht

prof. dr Kazimierz Goebel

doc. dr Bolesław Grabowski

dr Jan Hanasz

doc. dr Bolesław Iwaszkiewicz

doc. dr Tadeusz Iwiński

doc. dr Andrzej Januszajtis

doc. dr Tadeusz Jarzębowski

prof. dr Leon Jeśmanowicz

dr Henryk Kaczorek

prof. dr Marek Kuczma

mgr Andrzej Mąkowski

prof. dr Bohdan Paczyński

prof. dr Zdzisław Pawlak

prof. dr Arkadiusz Piekara

doc. dr Sławomir Ruciński

prof. dr Konrad Rudnicki

prof. dr Zbigniew Semadeni

doc. dr Grzegorz Sitarski

prof. dr Józef Smak

prof. dr Jan Stankowski

doc. dr Kazimierz Stępień

prof. dr Mieczysław Subotowicz

doc. dr Stefan Turnau

prof. dr Jerzy Wdowczyk

doc. dr Andrzej Woszczyk

prof. dr Janusz Zakrzewski —

wiceprzewodniczący

prof. dr Wojciech Żakowski —

przewodniczący

Redaguje Kolegium w składzie:

Bożena Jaworska-Kordos — ilustracje

mgr Maciej Jędrzejczak

dr Marek Kordos — red. nac.

dr Michał Szurek

dr Krzysztof Prażmowski — red. techn. graf.

mgr Krystyna Szypcio — sekr. red.

doc. dr Michał Świącki — z-ca red. nac.

Adres Redakcji

ul. Hoża 69 pok. 151,

00-681 Warszawa

Zakład Narodowy im.

Ossolińskich — Wydawnictwo

Wrocław, Oddział w Warszawie

Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.

wyd.; 2,50 ark. druck.;

papier offsetowy III kl. 80 g. 61 × 86

Wydrukowano w Drukarni im.

Rewolucji Październikowej

Warszawa, ul. Mińska 65

Nr zam. 1222/80 L-30

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60—, cena prenumeraty półrocznej zł 30—

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach:

— do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i cały rok następny

— do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego.

Jednostki gospodarki społecznej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienie w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”.

Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW, oraz prenumeratorzy indywidualni zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw,

ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej

prenumeraty krajowej

Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.

Sprzedż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.

Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Konto PKO I OM W-wa 1531-912

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7

00-068 Warszawa, Poland or with

— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68,

Bundesrepublik Deutschland.

— Earls Court Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain,

— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia

Cena 1 egzemplarza zł 5— nr indeksu 35723/35550



Na różnych lekcjach
Z różnych książek
Od różnych ludzi
Dowiadujemy się wielu ciekawych rzeczy

Zdobywamy informacje
„z matematyki”, „z biologii”, „z historii”, „z geografii”,
„z języka polskiego”, „z astronomii”, „z fizyki”, „z chemii”
i wiele takich
których nie umiemy w ten sposób sklasyfikować
a które wcale nie mniej nas ciekawią

I z tych informacji powstaje
nasza wiedza o świecie
który jest JEDEN
i na żadne przedmioty, dyscypliny czy nauki
NIE JEST PODZIELONY

Nie znaczy to
że nie musimy uczyć się dzielenia informacji

Musimy mianowicie
umieć podzielić uzyskiwane informacje
na PRAWDZIWE i NIEPRAWDZIWE
bo bez tej umiejętności
nie będziemy wiedzieli zupełnie nic

Nabycia wprawy w takim dzieleniu
Życzy Wam

DELTA

Powierzchnie stałych ruchu w dynamice

Doc. dr Antoni KUSZELL

Rozważmy ruch układu dynamicznego opisywanego równaniami ruchu Newtona w postaci

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_j &= p_j \\ \frac{d}{dt} p_j &= F_j; \quad j = 1, \dots, f; \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie x_j , p_j i F_j oznaczają odpowiednio j -tą składową położenia, pędu i siły, f zaś oznacza liczbę stopni swobody. Na przykład w trójwymiarowej przestrzeni ruch punktu materialnego (cząstki) jest opisany w pełni przez podanie trójwymiarowych wektorów położenia i pędu w każdej chwili czasu t . To znaczy, że w tym przypadku $f = 3$. Podobnie dla układu dwóch cząstek punktowych liczba stopni swobody $f = 6$, itd.

W dalszych rozważaniach będziemy przyjmowali, że siły F_j są potencjalne. Oznacza to, że istnieje funkcja zmiennych przestrzennych $V(x_1, \dots, x_f)$, zwana potencjałem, dla której zachodzi związek:

$$F_j = - \frac{\partial}{\partial x_j} V; \quad j = 1, \dots, f.$$

Ruch układu dynamicznego można także opisywać w przestrzeni położeniowej (f -wymiarowej). Trajektoria jest wtedy rozwiązaniem równania Newtona drugiego rzędu

$$\frac{d^2}{dt^2} x_j = F_j; \quad j = 1, \dots, f.$$

Przez każdy punkt w przestrzeni położeniowej przechodzi nieskończenie wiele trajektorii odpowiadających różnym prędkościom w tym punkcie. W przestrzeni fazowej przez każdy punkt przechodzi dokładnie jedna trajektoria. Wyjątkiem są punkty równowagi niestabilnej.

Jak wiadomo z teorii równań różniczkowych (jest to zresztą fizycznie oczywiste) równania (1) uzupełnione odpowiednimi warunkami początkowymi wyznaczają w sposób jednoznaczny rozwiązanie zwane *trajektorią* (torem) układu. Jednakże rozwiązanie to jest znane w postaci analitycznej jedynie w niewielu prostych przypadkach. Dlatego tak ważna jest możliwość uzyskania informacji o ruchu bez konieczności znajdowania trajektorii. W tym celu możemy posłużyć się tzw. *całkami ruchu* oraz analizą geometrii ruchu w *przestrzeni fazowej*. Przestrzenia fazową nazywać będziemy $2f$ -wymiarową przestrzeń położeni i pędów. Na przykład przestrzeń fazowa układu składającego się z jednej cząstki punktowej jest sześciowymiarowa. Trajektoria układu jest krzywą w przestrzeni fazowej, parametryzowaną czasem t . Łatwo można się przekonać, że dla ustalonych warunków początkowych trajektoria nie może przechodzić przez wszystkie punkty przestrzeni fazowej; są punkty niedostępne dla układu. Wynika to z istnienia wielkości fizycznych, które nie zmieniają się w trakcie ewolucji (ruchu). Do wielkości takich (o ile siły są potencjalne) należy całkowita energia układu

$$E = \sum_{j=1}^f \frac{p_j^2}{2m_j} + \Phi,$$

gdzie Φ jest energią potencjalną.

Równanie $E = E_0 = \text{const.}$ wyznacza $2f-1$ wymiarową powierzchnię w przestrzeni fazowej. Warunek zachowania energii oznacza geometrycznie prosty fakt, że trajektoria układu leży na powierzchni stałej energii. Tak więc ze względu na tę zasadę zachowania dostępny obszar jest $2f-1$ wymiarowy.

Widać stąd jak ważne jest pytanie, czy istnieją inne, niezależne powierzchnie, na których musi leżeć trajektoria. Dla prostoty przyjmijmy na chwilę, że układ nasz składa się z n cząstek w przestrzeni trójwymiarowej. Wtedy $f = 3n$.

Przyjmijmy ponadto, że jest on izolowany, czyli na cząstki nie działa żadna siła zewnętrzna. Wtedy, jak łatwo wykazać, środek masy układu X określony wzorem:

$$X = M^{-1} \sum_{s=1}^n m_s x_s$$

$$\left(M = \sum_{s=1}^n m_s \text{ oznacza całkowitą masę układu} \right)$$

porusza się ruchem jednostajnym

$$X = X_0 + V_0 t.$$

We wzorze tym wielkości wektorowe X_0 oraz V_0 są stałe (warunki początkowe), które podobnie jak energia mogą być traktowane jako stałe ruchu. Wprowadzają one sześć nowych ograniczeń (w tym przypadku płaszczyzn). Tak więc obszar przestrzeni fazowej dostępny dla układu izolowanego i potencjalnego ma $2f-7$ wymiarów. Dalsze ograniczenie tego obszaru możemy uzyskać nakładając warunki na siły F_j . Załóżmy mianowicie, że są one centralne, co oznacza, że zależą jedynie od odległości między cząstkami i są skierowane wzdłuż wektora łączącego te cząstki (mogą być przy tym odpychające bądź przyciągające). Dla układu oddziaływającego takimi siłami znamy dodatkową wektorową stałą ruchu (lub jeśli ktoś woli, trzy stałe skalarnie); a mianowicie całkowity moment pędu:

$$M = \sum_{s=1}^n x_s \times p_s,$$

gdzie znak \times oznacza iloczyn wektorowy.

Łącznie mamy więc do dyspozycji dziesięć ogólnych stałych ruchu (zwanymi *całkami pierwszymi* równań ruchu). Mają one dwie wyróżniające cechy. Po pierwsze są związane z niezmienniczościami układu. Związek ten jest treścią bardzo głębokiego twierdzenia, zwanego *twierdzeniem Noether*, zgodnie z którym niezmienniczości względem przesunięć w czasie (ruch) odpowiada stałość energii, niezmienniczości względem transformacji Galileusza odpowiadają stałe ruchy środka masy, a niezmienniczości względem obrotu całego układu — stałość momentu pędu. Po drugie, są to prawdopodobnie jedyne *całki rozdzielające* tj. takie, które wyznaczają powierzchnie w przestrzeni fazowej. Dowód tego faktu nie jest jednak znany. Jest to ważny problem, ponieważ znajomość maksymalnej ilości całek rozdzielających pozwala wyznaczyć dostępny w trakcie ewolucji obszar przestrzeni fazowej.

Zauważmy, że układ równań (1) ma dokładnie $2f$ stałych całkowania, które są stałymi ruchu. Już dla $f = 6$ (np. dwie cząstki w przestrzeni trójwymiarowej) liczba tych stałych jest większa niż liczba opisanych wyżej całek rozdzielających. Dla lepszego zrozumienia sytuacji rozważmy kilka bardzo prostych układów dynamicznych.

Na początek zajmijmy się układami jednowymiarowymi (np. cząstka poruszająca się po prostej). Przestrzeń fazowa jest wtedy dwuwymiarowa. Ruch w przestrzeni fazowej odbywa się po powierzchni jednowymiarowej (krzywej), wobec czego może istnieć tylko jedna całka rozdzielająca. Na to, by przykład nie był trywialny, cząstka musi oddziaływać z siłami



Rozwiązanie zadania F 87. Cząstki występujące w zadaniu, różnią się jedynie znakiem ładunku. Energie potencjalne w polu elektrostatycznym o potencjale $\varphi(x)$ wynoszą:

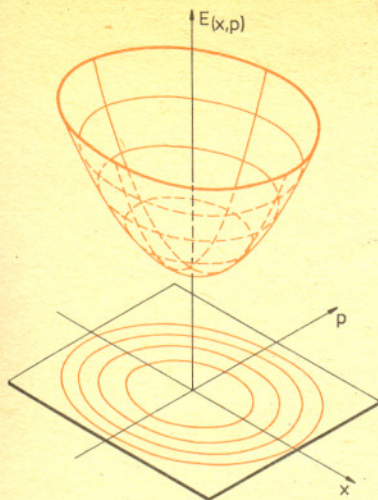
$$E_p = \pm e\varphi(x).$$

Znak „+” dotyczy pozytonu, „-” elektronu, e jest ładunkiem elementarnym. Stąd wniosek, że elektron jest na początku przyspieszany, a potem hamowany, zaś pozyton na odwrót. I chociaż prędkości obu cząstek przed wejściem i po wyjściu (zasada zachowania energii) z obszaru pola są takie same, to w obrębie pola zmieniają się one w różny sposób. Prędkość elektronu jest tu zawsze większa, pozytonu zaś zawsze mniejsza od prędkości początkowej. Oznacza to, że elektron musi (przy równych prędkościach początkowych) szybciej pokonać odcinek AB. Wynik ten nie zależy od postaci funkcji $\varphi(x)$. Zauważmy na koniec, że początkowa prędkość cząstek nie może być zbyt mała. Dlaczego?

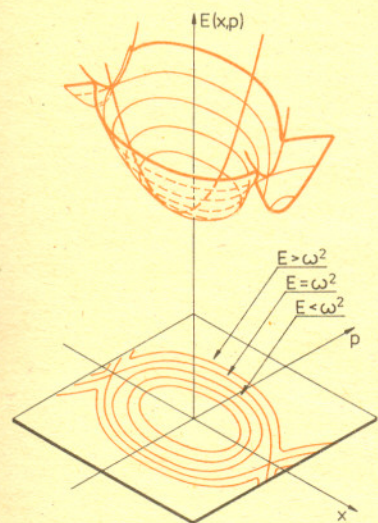
Transformacja Galileusza opisuje zmianę współrzędnych punktu przy przejściu od inercjalnego układu odniesienia do układu poruszającego się względem niego ze stałą prędkością. Jeśli x opisuje położenie punktu w starym układzie, to w nowym jego położenie opisane będzie wektorem

$$x' = x - V \cdot t,$$

gdzie V jest prędkością względną układów. Czas w obu układach płynie tak samo. Jest to transformacja nierelatywistyczna tj. zakres jej stosowności jest ograniczony do prędkości dużo mniejszych od prędkości światła.



Rys. 1. Powierzchnia energii i krzywe izoenergetyczne oscylatora harmonicznego.



Rys. 2. Powierzchnia energii i krzywe izoenergetyczne dla wahadła fizycznego.

zewnątrznymi. Dlatego też całki środka masy nie są przydatne. Podobnie przy jednym wymiarze nie można mówić o obrotach. Wobec tego pozostaje tylko całka energii, która wyznacza trajektorię. Rozważmy kilka przypadków szczególnych.

1. Oscylator harmoniczny o masie $m = 1$.

Równanie ruchu oscylatora ma postać

$$\frac{d}{dt} p = -\omega^2 x; \quad \frac{d}{dt} x = p,$$

energia zaś może być zapisana w postaci

$$E = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} \omega^2 x^2.$$

Ostatnie równanie opisuje, w przestrzeni (E, x, p) paraboloidę eliptyczną. Rzuty jej przecięć z płaszczyznami $E = E_0 = \text{const.}$ na przestrzeń fazową (płaszczyznę $E = 0$) są powierzchniami rozdzielającymi. Mają one postać współosiowych elips (porównaj rys. 1).

2. Wahadło fizyczne o masie $m = 1$.

Wahadło fizyczne opisywane jest układem równań w postaci

$$\frac{d}{dt} x = p, \quad \frac{d}{dt} p = -\omega^2 \sin x,$$

energię zaś można zapisać następująco:

$$E = \frac{1}{2} p^2 + \omega^2 (1 - \cos x).$$

Powierzchnia energii ma teraz postać dużo bardziej złożoną. Po pierwsze x oznacza tutaj kąt wychylenia wahadła i powinno być zawarte w przedziale $-\pi \leq x \leq \pi$. Dla prostoty graficznej rozważmy jednak tę powierzchnię w całym zakresie zmienności $(-\infty, \infty)$. Wykres interpretować będziemy (jak to mówią matematycy) modulo 2π , to znaczy będziemy utożsamiać punkty odległe o $2n\pi$ z punktami przedziału podstawowego. Tak więc przecięcie powierzchni energii z płaszczyzną $p = 0$ jest cosinusoidą, a przecięcie z płaszczyzną $x = 0$ parabolą. Przecięcia z płaszczyznami stałej energii mają bardziej skomplikowaną postać. Dla energii $E < \omega^2$, obraz jest podobny do obrazu w przypadku oscylatora. Krzywa odpowiadająca energii $E = \omega^2$ zwana jest *separatryszą*. Ma ona bardzo ciekawe własności. Po pierwsze oddziela obszar ruchów oscylacyjnych od obrotów. Po drugie zawiera punkty przecięcia dwóch różnych krzywych opisujących oscylacje w różnych kierunkach (rys. 2). Punkt przecięcia odpowiada stanowi równowagi nietrwałej, w górnym położeniu wahadła. Tak więc separatrysa przedstawia sobą trzy różne trajektorie układu, a mianowicie dwie oscylacje i jeden stan stacjonarny (niestabilny). Drugi stan stacjonarny $x = 0, p = 0$ jest stabilny. Na rys. 2 widzimy wyraźną różnicę między tymi stanami. W otoczeniu punktu stabilnego krzywe stałej energii mają kształt elips (odpowiada to lokalnemu minimum), zaś w otoczeniu punktu niestabilnego kształt hiperbol (odpowiada to punktowi siodłowemu).

Jak widać z omówionych przykładów analiza powierzchni energii mówi bardzo dużo o dynamice układu. Rozważmy teraz prosty układ o dwóch stopniach swobody, a mianowicie dwuwymiarowy oscylator harmoniczny o masie $m = 1$ opisany równaniami:

$$\frac{d}{dt} x_j = p_j, \quad \frac{d}{dt} p_j = -\omega_j^2 x_j; \quad j = 1, 2. \quad (2)$$

Ponieważ ruchy w kierunkach prostopadłych są niezależne, więc energia każdego drgań z osobna jest dobrą stałą ruchu

$$E_j = \frac{1}{2} p_j^2 + \frac{1}{2} \omega_j^2 x_j^2; \quad j = 1, 2.$$

Równania (2) mają bardzo proste rozwiązanie, które można wyrazić następująco:

$$x_j = A_j \cos(\omega_j t + \varphi_j), \quad p_j = -A_j \omega_j \sin(\omega_j t + \varphi_j); \quad j = 1, 2,$$

gdzie A_j jest *amplitudą* j -tych drgań a φ_j ich *fazą*. Oczywiście można te cztery wielkości traktować jako stałe ruchu. Amplitudy są bezpośrednio związane z energiami, mamy bowiem związki

$$E_j = \omega_j^2 A_j^2; \quad j = 1, 2,$$

natomiast z fazami sprawa jest bardziej złożona. Możemy łatwo wyrazić φ_j jako funkcje zmiennych fazowych i czasu:

$$\varphi_j = \arctg \left(-\frac{p_j}{\omega_j x_j} \right) - \omega_j t; \quad j = 1, 2. \quad (3)$$

Niestety, pomimo, że fazy zachowują stałą wartość w czasie ewolucji układu, to są one zależne od zmiennej czasowej w sposób jawny. Oznacza to, że jeżeli w pewnej chwili czasu t_0 równania

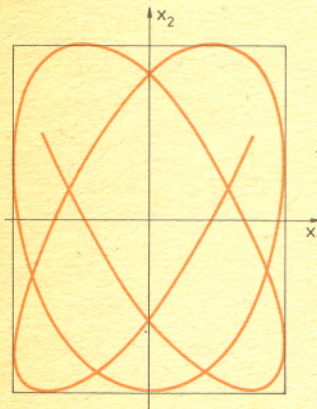
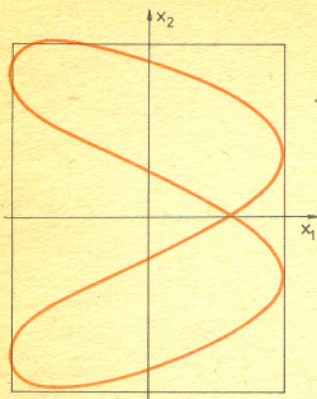
$$\varphi_j(x_j, p_j, t_0) = \varphi_j^0 = \text{const.}$$

wyznaczają powierzchnie w przestrzeni fazowej, to powierzchnie takie nie mogą pozostawać niezmiennione w czasie ewolucji. Ze stałych ruchu określonych wyrażeniem (3) można jednak skonstruować jedną stałą postaci

$$\psi = \omega_2 \varphi_1 - \omega_1 \varphi_2.$$



Rozwiązanie zadania M 248. Ponieważ trójmian $p(x) - x$ nie ma pierwiastków rzeczywistych, więc funkcja $p(x) - x$ zachowuje stały znak. Niech np. $p(x) - x > 0$ dla każdego rzeczywistego x . Kładąc teraz $x = p(t)$ dla dowolnego t otrzymamy: $p(p(t)) > p(t)$, a ponieważ $p(t) > t$, więc $p(p(t)) > t$ czyli $p(p(t)) - t > 0$.



Rys. 3. Figury Lissajous
 a) częstości współmierne $\omega_1 = 2\omega_2$
 b) częstości niewspółmierne $\omega_1 \approx \omega_2$.

Stała ta nie zależy już od czasu a jedynie od zmiennych fazowych x_1, x_2, p_1, p_2 . Jednakże funkcja $\arctg x$ jest funkcją wieloznaczną (ma nieskończenie wiele gałęzi oddalonych od siebie o π). Z tego względu funkcja ψ nie reprezentuje sobą określonej powierzchni w przestrzeni fazowej. Wyjątek stanowi przypadek, gdy częstości ω_1 i ω_2 są współmierne, to znaczy, gdy zachodzi związek

$$n\omega_1 = m\omega_2; n, m \text{ całkowite.}$$

Dowód tego faktu pozostawiamy Czytelnikowi. My ograniczymy się jedynie do spojrzenia na fizykę tego faktu. Przypomnijmy sobie doświadczenie z figurami Lissajous. Obserwujemy w nim ruch dwuwymiarowego oscylatora. Zupełnie inny jest tor cząstki, gdy częstości są współmierne niż gdy są niewspółmierne. W pierwszym przypadku ruch układu odbywa się po krzywej zamkniętej (na przykład na rys. 3a przedstawiona jest figura Lissajous dla $\omega_1 = 2\omega_2$). W drugim natomiast omawiana krzywa nie zamyka się, a co więcej, po odpowiednio długim czasie przejdzie dowolnie blisko dowolnego punktu należącego do dostępnego (ograniczonego przez energię) prostokąta leżącego na płaszczyźnie (x_1, x_2) . Związek figur Lissajous z ruchem dwuwymiarowego oscylatora w przestrzeni fazowej stanie się całkiem jasny, gdy uświadomimy sobie, że całki energii można wykorzystać do wyeliminowania zmiennych pędowych. Wtedy dostępna dla układu przestrzeń fazowa może być utożsamiona z prostokątem na płaszczyźnie (x_1, x_2) . Tak więc własności figur Lissajous potwierdzają fakt, że dla częstości niewspółmiernych nie istnieje dodatkowa powierzchnia ograniczająca ruch układu. Oznacza to, że całka ruchu ψ nie jest rozdzielająca.

Widzieliśmy więc, że istnieją stałe ruchu o różnych własnościach i w związku z tym różnej przydatności do analizy ruchu. Oczywiście dla całkowitego rozwiązania problemu konieczna jest znajomość wszystkich całek pierwszych (to znaczy znajomość rozwiązań równań (1)). W wielu jednak przypadkach rozważany układ jest tak złożony, że nie mamy co marzyć o rozwiązaniu. Równie często znajomość rozwiązania nie wnosiłaby niczego do naszej wiedzy o układzie. Na przykład jaką wartość może mieć dla nas informacja, że w litrze gazu w chwili $t = t_1$ cząstka N° 2845715 znajduje się w punkcie x_1 i ma pęd p_1 ? Potrzebne nam są wtedy charakterystyki globalne, a nie informacje szczegółowe. Wtedy całki rozdzielające odgrywają bardzo istotną rolę.



Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 247. Znaleźć wszystkie pary kolejnych liczb naturalnych, z których jedna jest potęgą dwójki a druga potęgą trójki.

Rozwiązanie na str. 7

M 248. Wykazać, że jeżeli równanie $p(x) = ax^2 + bx + c = x$ nie ma pierwiastków rzeczywistych, to również równanie $p(p(x)) = a(p(x))^2 + bp(x) + c = x$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.

Rozwiązanie na str. 3

M 249. Łamana zamknięta $L = A_1 A_2 \dots A_n$ ma wszystkie wierzchołki różne a wszystkie jej boki mają długość 1. Wykazać, że jeżeli średnica \bar{L} jest równa 1, to n jest nieparzyste.

Rozwiązanie na str. 6

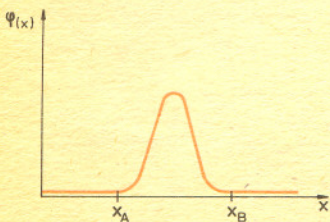
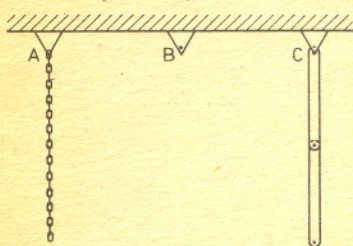
Redaguje mgr Tomasz TRATKIEWICZ

F 86. Z punktów A i C zwisają swobodnie: łańcuch oraz pręty połączone ze sobą w sposób przegubowy (patrz rysunek). Wiszące ciała są jednorodne, mają identyczne masy oraz długości. Dolne końce ciał przenosi się do punktu B ($AB = BC$). Zaniedbując tarcie rozstrzygnąć: w którym przypadku należało wykonać mniejszą pracę?

Rozwiązanie na str. 7.

F 87. Elektron i pozyton przelatują przez pole elektrostatyczne, poruszając się wzdłuż prostej (osi „ x ”). Potencjał pola dany jest wykresem przedstawionym na rysunku. Która cząstka szybciej pokona odcinek AB , jeśli ich prędkości początkowe są równe? Cząstki należy traktować jako obiekty klasyczne.

Rozwiązanie na str. 2.



O krzywiznie, skróceniu i trójnogu Freneta (II)

Doc. dr Andrzej SZYBIAK

Streszczenie części I

Krzywizna krzywej to odwrotność promienia okręgu ściśle stycznego. A okrąg ściśle styczny w punkcie p to graniczne położenie okręgów przechodzących przez punkty bliskie p . Jest to „najlepiej” styczny ze wszystkich okręgów stycznych do krzywej. Jeżeli C jest krzywą przestrzenną, to płaszczyzną ściśle styczną w punkcie p nazywamy graniczne położenie płaszczyzn przechodzących przez punkty bliskie p . Jest to ta płaszczyzna, w której „leżałaby krzywa, gdyby była płaska”.

W części II jest mowa o wektorach, które (gdy się dobrze przyjrzeć) sterczą z każdego punktu krzywej.

Opis naturalny krzywej — to taki jej opis parametryczny, że parametr może być interpretowany jako długość łuku od pewnego ustalonego punktu krzywej.

Przez \vee autor oznacza iloczyn wektorowy $h|0$ znaczy „ h dąży do zera”

Zajmujemy się w dalszym ciągu krzywą w E^3 opisaną przez odwzorowania naturalne pewnego przedziału L w przestrzeni euklidesowej $E^3: x \mapsto (w_1(x), w_2(x), w_3(x))$. Zakładamy, że w_1, w_2 i w_3 mają ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu. Gdy h jest małą liczbą, punkty $w(x-h), w(x), w(x+h)$ leżą też blisko siebie. Niech $a(x, h) = w(x) - w(x-h)$, $b(x, h) = w(x+h) - w(x)$, $c(x, h) = w(x+h) - w(x-h)$.

Oznaczmy przez $q_h(x)$ środek okręgu przechodzącego przez punkty $w(x-h), w(x)$ i $w(x+h)$ a przez $r_h(x)$ wektor $\overrightarrow{w(x)q_h(x)}$. Oczywiście mamy $r_h(x) = |r_h(x)| \perp a(x, h) \vee b(x, h)$. Wobec tego wektor graniczny $\lim_{h|0} r_h(x)$ będzie prostopadły do wektora $-w'(x) \vee w''(x)$, jak również do wektora $w'(x)$. Wynika stąd, że

$$\lim_{h|0} \overrightarrow{w(x)q_h(x)} = \lim_{h|0} r_h(x) = \frac{1}{|w''(x)|} N(x),$$

gdzie $N(x)$ oznacza wektor o długości 1 prostopadły do wektorów $w'(x)$ oraz do $-w'(x) \vee w''(x)$ i mający zwrot zgodny ze zwrotem wektora $w''(x)$. Wektor $N(x)$ nazywamy *wektorem normalnym* naszej krzywej w punkcie $w(x)$. Wektor normalny i płaszczyzna ściśle styczna krzywej są określone w punktach, w których wektor w'' jest niezerowy. Przy tym warunku płaszczyzna ściśle styczna jest rozpięta na wektorach $T(x)$ i $N(x)$.

Stwierdzamy teraz, że środek $q(x) = \lim_{h|0} q_h(x)$ okręgu granicznego jest końcem wektora mającego początek w punkcie $w(x)$ a kierunek i zwrot wyznaczony przez wektor normalny $N(x)$. Długość jego wynosi $|w''(x)|^{-1}$. Okrąg ten istnieje, o ile $w''(x)$ nie jest wektorem zerowym. Okrąg ten nazywa się *okręgiem ściśle stycznym* do naszej krzywej w jej punkcie $w(x)$. Izolowane punkty krzywej, w których okrąg ściśle styczny nie istnieje, nazywamy jej *punktami wyprostowania*.

Przyjmujemy, że w punktach wyprostowania krzywizna jest równa 0.

Podamy przykład. Weźmy krzywą opisaną odwzorowaniem φ określonym na całej osi

liczbowej, takim, że $\varphi_1(t) = t$, $\varphi_2(t) = \frac{\sqrt{2}}{3} t^3$, $\varphi_3(t) = \frac{1}{5} t^5$. Wektor o składowych $\varphi_1'(t)$,

$\varphi_2'(t)$, $\varphi_3'(t)$, a więc wektor $e_1 + \sqrt{2}t^2e_2 + t^4e_3$, jest styczny do krzywej w punkcie $\varphi(t)$. Aby otrzymać jednostkowy wektor styczny podzielimy go przez jego długość równą $1+t^4$. A więc jednostkowy wektor styczny, który poprzednio oznaczaliśmy przez $w'(\sigma(t))$ jest równy $(1+t^4)^{-1}e_1 + \sqrt{2}t^2(1+t^4)^{-1}e_2 + t^4(1+t^4)^{-1}e_3$.

Obliczymy pochodną odwzorowania $t \rightarrow w'(\sigma(t))$. Na podstawie wzoru na pochodną funkcji złożonej mamy

$$\frac{d}{dx} \Big|_t w'(\sigma(x)) = w''(\sigma(t)) \sigma'(t).$$

Zaś $\sigma'(t)$, pochodna długości łuku względem parametru t , w naszym przykładzie jest równa $1+t^4$; wynika to ze wzoru (1) zastosowanego do naszego przykładu. Wyliczamy więc

$$\begin{aligned} w''(\sigma(t)) &= \frac{1}{\sigma'(t)} \frac{d}{dx} \Big|_t w'(\sigma(x)) = \frac{1}{1+t^4} \frac{d}{dx} \Big|_t ((1+t^4)^{-1}e_1 + \sqrt{2}t^2(1+t^4)^{-1}e_2 + t^4(1+t^4)^{-1}e_3) = \\ &= \frac{1}{(1+t^4)^3} (-4t^3e_1 + 2\sqrt{2}(t-t^5)e_2 + 4t^3e_3). \end{aligned}$$

Jedynym punktem wyprostowania tej krzywej jest punkt $\varphi(0) = (0, 0, 0)$. Promień okręgu ściśle stycznego zmierza do nieskończoności, gdy punkt krzywej zmierza do $\varphi(0)$. Płaszczyzna ściśle styczna w tym punkcie jednak istnieje. Jest nią płaszczyzna o równaniu $x_3 = 0$.

równoskrętny = tak samo zorientowany układ wektorów jest ortonormalny, jeżeli wektory te są parami prostopadłe i każdy z nich ma długość 1

reper w E^3 — to ortonormalny układ trzech wektorów

Wróćmy do ogólnych rozważań. W każdym punkcie nie będącym punktem wyprostowania krzywej zaczepiliśmy dwa wektory jednostkowe i wzajemnie prostopadłe: wektor styczny $T(x) = w'(x)$ i wektor normalny $N(x) = \kappa(x)w''(x)$, przy czym przez $\kappa(x)$ oznaczyliśmy krzywiznę w punkcie $w(x)$. Oznaczmy przez $B(x)$ iloczyn wektorowy $T(x) \wedge N(x)$. Trójka wektorów $[T(x), N(x), B(x)]$ stanowi układ normalny, równoskrętny z ustalonym na początku układem bazowym $[e_1, e_2, e_3]$. Układ ten nazywamy reperem Freneta albo też *trójnogiem Freneta* rozważanej krzywej w danym punkcie. Wykażemy teraz, że wektor $N'(x)$ jest prostopadły do wektora $N(x)$, a wektor $B'(x)$ jest prostopadły do $B(x)$. Istotnie, różniczkując tożsamości $\langle N(x), N(x) \rangle = 1$ i $\langle B(x), B(x) \rangle = 1$ otrzymamy po prostych przekształceniach $\langle B(x), B'(x) \rangle = 0$ i $\langle N(x), N'(x) \rangle = 0$, a więc warunki prostopadłości. Wynika stąd, że koniec wektora $B'(x)$ należy do płaszczyzny rozpiętej na wektorach $T(x)$ i $N(x)$, a koniec wektora $N'(x)$, do płaszczyzny rozpiętej na wektorach $B(x)$ i $T(x)$. Możemy więc napisać

$$N'(x) = \alpha(x)T(x) + \tau(x)B(x),$$

$$B'(x) = \gamma(x)T(x) + \eta(x)N(x).$$

Mnożąc skalarnie pierwszą z powyższych równości kolejno przez $T(x)$ i przez $B(x)$ a drugą kolejno przez $T(x)$ i przez $N(x)$ i uwzględniając ortonormalność układu $[T, N, B]$ otrzymamy

$$\alpha(x) = \langle N'(x), T(x) \rangle, \quad \beta(x) = \langle N'(x), B(x) \rangle,$$

$$\gamma(x) = \langle B'(x), T(x) \rangle, \quad \eta(x) = \langle B'(x), N(x) \rangle.$$

Dalej, różniczkując tożsamości $\langle N(x), T(x) \rangle = 0$, $\langle N(x), B(x) \rangle = 0$ i $\langle T(x), B(x) \rangle = 0$ otrzymamy

$$\langle N'(x), T(x) \rangle = -\langle T'(x), N(x) \rangle,$$

$$\langle N'(x), B(x) \rangle = -\langle B'(x), N(x) \rangle,$$

$$\langle B'(x), T(x) \rangle = -\langle T'(x), B(x) \rangle,$$

a stąd

$$\alpha(x) = -\kappa(x), \quad \eta(x) = -\tau(x), \quad \gamma(x) = 0.$$

Teraz możemy napisać razem otrzymane równości

$$(9) \quad \begin{aligned} w'(x) &= T(x), & T'(x) &= \kappa(x)N(x), \\ N'(x) &= -\kappa(x)T(x) + \tau(x)B(x), & B'(x) &= -\tau(x)T(x). \end{aligned}$$

Nazywają się one równaniami ruchomego repere Freneta, albo krótko *równaniami Freneta*. Występujący w nich współczynnik $\tau(x)$ nazywa się *skreśleniem krzywej* w punkcie $w(x)$. Można go zinterpretować następująco: wektor $B(x)$ jest wektorem o długości 1 prostopadłym do płaszczyzny ściśle stycznej w punkcie $w(x)$, a wektor $B(x+h)$ takimż wektorem w punkcie $w(x+h)$. Mamy

$$|\tau(x)| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{|h|} |B(x+h) - B(x)|.$$

Licznik powyższego ilorazu różnicowego jest równy $2 \sin \frac{\alpha(x, h)}{2}$, gdzie $\alpha(x, h)$ jest kątem między wektorami $B(x+h)$ i $B(x)$. Jest to zarazem kąt między płaszczyznami ściśle stycznymi w punktach $w(x+h)$ i $w(x)$. A więc

$$|\tau(x)| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\alpha(x, h)}{2}}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(x, h)}{h}.$$

Jeżeli krzywa leży w pewnej płaszczyźnie, to $B(x+h) = B(x)$ stale i wtedy skreślenie znika. Możemy więc powiedzieć, że skreślenie charakteryzuje odchylenie krzywej od płaskości. Stosując wzory na transformację układu współrzędnych nietrudno się przekonać, że postać wzorów (9) nie ulegnie zmianie, gdy układ współrzędnych zastąpimy innym. Co więcej, funkcje κ i τ pozostaną nie zmienione. Wartości krzywizny i skreślenia pozostaną nie zmienione również wtedy, gdy zmienimy parametryzację. (Zauważmy, że parametryzacja naturalna nie jest wyznaczona jednoznacznie, lecz zależy od ustalonego na początku punktu x_0). Dlatego krzywiznę i skreślenie nazywamy niezmiennikami różniczkowymi krzywej, a długość łuku — jej niezmiennikiem całkowitym.

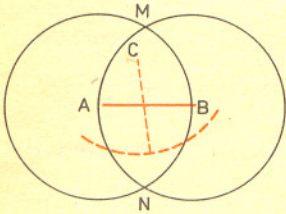
Zachodzi teraz pytanie, czy zadając z góry na pewnym przedziale (a, b) dwie funkcje ciągłe, μ i ν możemy znaleźć krzywą, dla której funkcje te będą odpowiednio krzywizną i skreśleniem. A jeśli znajdziemy, to w jakim stopniu zadanie tych funkcji określa krzywą jednoznacznie?

Odpowiedź na to pytanie daje nam następujące

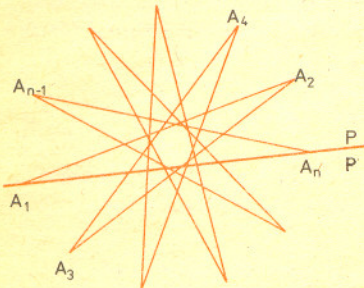
Twierdzenie. Dla każdych dwu funkcji ciągłych μ i ν na pewnym przedziale (a, b) istnieje taka krzywa o przedstawieniu parametrycznym φ określonym na (a, b) , że $\mu(t)$ jest jej krzywizną a $\nu(t)$ skreśleniem w punkcie $\varphi(t)$. Ponadto krzywa ta jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do położenia w E^3 (precyzyjniej: z dokładnością do izometrii tej przestrzeni).



Rozwiązanie zadania M 249. Dla $n = 3$ teza jest oczywista. Dla $n > 3$ niech \overline{AB} i \overline{CD} będą dwoma niekolejnymi odcinkami L . Ponieważ średnica L jest równa 1, punkty C i D muszą leżeć w przecięciu kół o promieniu 1 i środkach w A i B .



Łatwo teraz zauważyć, że gdy C leży w „trójkącie” ABM , D musi leżeć poza tym zbiorem, czyli w „trójkącie” ABN , a więc odcinki \overline{AB} i \overline{CD} przecinają się.



Oznaczmy przez P i P' półpłaszczyzny, na które prosta $A_n A_1$ dzieli płaszczyznę. Gdy teraz $A_2 \in P'$, z powiedzianego wyżej wynika, że $A_3 \in P$, $A_4 \in P'$ itd. Ponieważ $A_1 A_2$ i $A_{n-1} A_n$ przecinają się, A_{n-1} musi leżeć w P' . Wynika stąd, że $n-1$ jest parzyste, czyli, że n jest nieparzyste c.b.d.o.

Dla dowodu zauważmy najpierw, że opis parametryczny takiej krzywej ma spełniać następujący układ równań różniczkowych

$$(10) \quad \begin{aligned} u'(x) &= T(x), & T'(x) &= \mu(x)N(x), \\ N'(x) &= -\mu(x)T(x) + \nu(x)B(x), & B'(x) &= -\nu(x)T(x), \end{aligned}$$

przy czym wektory T, N, B mają stanowić ortonormalne pole reperów Freneta wzdłuż krzywej opisanej przez u . Zaczniemy od tego, że w (a, b) ustalimy dowolny punkt wewnętrzny x_0 a w E^3 układ ortonormalny $\{e_1, e_2, e_3\}$ o początku w θ . W punkcie θ zaczepimy reper ortonormalny $[\mathring{T}, \mathring{N}, \mathring{B}]$ równoskrętny z $\{e_1, e_2, e_3\}$. Niech h będzie taką liczbą dodatnią, że $(x_0 - h, x_0 + h) \subset (a, b)$. Układ (10) zapiszemy w postaci całkowej

$$(10^*) \quad \begin{aligned} u(x) &= \mathring{\theta} + \int_{x_0}^x T(s) ds, & T(x) &= \mathring{T} + \int_{x_0}^x \mu(s)N(s) ds, \\ N(x) &= \mathring{N} + \int_{x_0}^x (-\mu(s)T(s) + \nu(s)B(s)) ds, & B(x) &= \mathring{B} + \int_{x_0}^x (-\nu(s)T(s)) ds, \end{aligned}$$

Określmy w przedziale $(x_0 - h, x_0)$ funkcje wektorowe

$$u_1(x) = -x\mathring{T}, \quad T_1(x) = \mathring{T}, \quad N_1(x) = \mathring{N}, \quad B_1(x) = \mathring{B}.$$

W przedziale $[x_0, x_0 + h)$ przyjmujemy

$$(11) \quad \begin{aligned} u_1(x) &= \int_{x_0}^x T_1(s-h) ds, & T_1(x) &= \mathring{T} + \int_{x_0}^x \mu(s)N_1(s-h) ds, \\ N_1(x) &= \mathring{N} + \int_{x_0}^x (-\mu(s)T_1(s-h) + \nu(s)B_1(s-h)) ds, & B_1(x) &= \mathring{B} + \int_{x_0}^x (-\nu(s)T_1(s-h)) ds. \end{aligned}$$

Mając funkcje wektorowe T_1, N_1, B_1 określone w przedziale $[x_0, x_0 + h)$ możemy je podstawić do całek po prawej stronie wzorów (11) i otrzymujemy ich przedłużenia na przedział $[x_0 + h, x_0 + 2h]$. Następnie tym samym sposobem przedłużamy je na przedział $[x_0 + 2h, x_0 + 3h]$ i tak dalej, aż określimy je na całym przedziale $[x_0, b]$. Opis u_1 pewnej krzywej określamy teraz na $[x_0, b]$ przyjmując

$$u_1(x) = \int_{x_0}^x T_1(s) ds.$$

Teraz przedłużymy funkcje wektorowe T_1, N_1, B_1 , a następnie u_1 na przedział $[a, x_0]$ przyjmując

$$\begin{aligned} T_1(x) &= \mathring{T} - \int_x^{x_0} \mu(s)N_1(s+h) ds, & N_1(x) &= \mathring{N} - \int_x^{x_0} (-\mu(s)T_1(s+h) + \nu(s)N_1(s+h)) ds, \\ B_1(x) &= \mathring{B} + \int_x^{x_0} \nu(s)T_1(s+h) ds, & u_1(x) &= - \int_x^{x_0} T_1(s) ds \end{aligned}$$

najpierw dla przedziału $[x_0 - h, x_0]$, potem dla $(x_0 - 2h, x_0 - h]$, i tak dalej, aż przedłużymy je na cały odcinek $(a, x_0]$. Następnie wykonujemy analogiczną konstrukcję przyjmując na początku zamiast h liczbę $h/2$. Wyżej opisaną metodą określimy na przedziale (a, b) funkcje wektorowe T_2, N_2, B_2 i u_2 . Biorąc dalej $h/4, h/8, \dots, h/2^n, \dots$ w miejsce h otrzymamy ciągi funkcji wektorowych T_n, N_n, B_n, u_n . Można wykazać, czego tu robić nie będziemy, że istnieją graniczne funkcje wektorowe $u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n, T = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n, N = \lim_{n \rightarrow \infty} N_n, B = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$ i że funkcje te spełniają układ (10*), więc i (10). Korzystając z podstawowych twierdzeń o jednoznaczności rozwiązań układów równań różniczkowych można pokazać, że podanie wyjściowego repera $[\mathring{T}, \mathring{N}, \mathring{B}]$ zaczepionego w określonym punkcie daje rozwiązanie układu (10), a tym samym opis krzywej, jednoznacznie. Stwierdzamy więc, że podanie dwóch podstawowych niezmienników, krzywizny i skrzywienia określa jednoznacznie krzywą z dokładnością do jej położenia w przestrzeni euklidesowej E^3 . Proponujemy Czytelnikowi prześledzenie wyżej pokazanej konstrukcji w przypadku kiedy skrzywienie znika i wykazanie, że wtedy krzywa leży w pewnej płaszczyźnie.

Z tego twierdzenia wypływa ważny wniosek, dotyczący linii śrubowej:

Wniosek: Jeżeli krzywa w przestrzeni E^3 ma stałą krzywiznę i stałe skrzywienie, to jest izometryczna z linią śrubową, określoną wzorem

$$\varphi(t) = (a \cos t, a \sin t, ct).$$

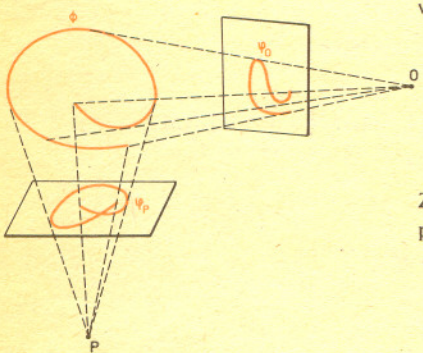
Rozwiązanie zadania M 247. Zauważmy, że jeżeli $n \geq 4$, to reszta z dzielenia 2^n przez 80 jest jedną z liczb 16, 32, 48, 64, a reszta z dzielenia 3^n przez 80 — jedną z liczb 1, 3, 9. Widać już teraz, że 2^n i 3^m dla $m, n \geq 4$ nie mogą być kolejnymi liczbami naturalnymi. Bezpośrednie sprawdzenie dla pozostałych wartości m, n przekona nas, że jedynymi rozwiązaniami mogą być pary (1, 2), (2, 3), (3, 4), (8, 9).

Rozwiązanie zadania F 86. Po przeniesieniu końców do punktu B , pręt przyjmie kształt trójkąta, łańcuch — wielokąta. Zmuszenie łańcucha do odtworzenia kształtu „złożonego” pręta, wymaga pociągnięcia odpowiedniego ogniwa ku dołowi, co wiąże się z wykonaniem dodatkowej pracy. Zatem, minimalna praca podniesienia końca łańcucha jest mniejsza. Bardziej formalny dowód można przeprowadzić wykazując, że środek masy trójkąta leży wyżej. Pozostawiamy to jako ćwiczenie dla Czytelnika.

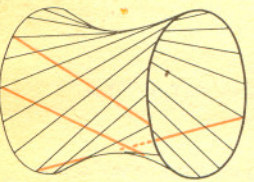
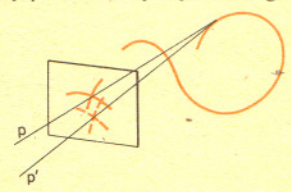
Co widzimy patrząc na krzywą?

Mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

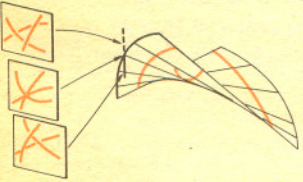
Spójrzmy na zamieszczony obok rysunek toru Marsa na tle gwiazd. Domyślamy się, że to nie planeta nagle zakreśliła, tylko tak to nam się wydaje. Patrząc z boku na śrubę widzimy „ostrza”, choć linia śrubowa ich nie ma. Co jeszcze możemy zobaczyć patrząc na krzywą? Gdy z punktu O patrzymy na gładką krzywą przestrzenną Φ , widzimy „tak naprawdę” krzywą płaską Φ_0 — rzut perspektywiczny krzywej Φ . Rzut ten może nie mieć żadnych punktów „osobliwych”, może jednak mieć np. samoprzecięcie, spowodowane widzeniem jednego łuku krzywej Φ na tle innego.



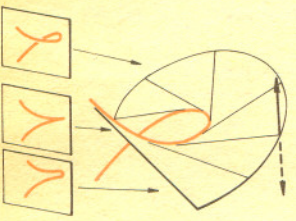
Zauważmy, że samoprzecięcie takie jest stabilne — gdy przeniesiemy się do innego bliskiego punktu, zobaczymy je znów:



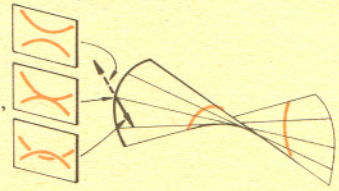
Mogą jednak w pewnych szczególnych przypadkach pojawić się rozmaite punkty osobliwe. Na przykład można niekiedy znaleźć całą rodzinę prostych ślizgających się po trzech parami skośnych łukach i zmiatających pewną powierzchnię — można to zobaczyć na hiperboloidzie jednopowłokowej utkanej z prostych przecinających trzy dane proste skośne.



Patrząc z punktu leżącego na takiej powierzchni zobaczymy oczywiście potrójne samoprzecięcie. Wystarczy jednak opuścić powierzchnię, by nasze przecięcie potrójne rozpadło się na „trójkąt” zbudowany z trzech łuków przecinających się w trzech punktach. Jest to tzw. osobliwość kowymiaru 1.

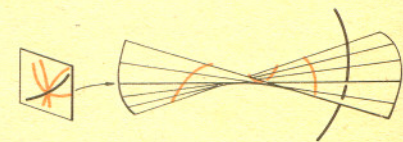


Na rysunku obok widzimy powierzchnię utknaną z prostych stycznych do pewnej krzywej. Gdy nasze oko zbliża się do tej powierzchni widzimy coraz węższą pętelkę, która wreszcie w punkcie osobliwym zamieni się w „dziobek,” aby wreszcie rozwinąć się całkowicie.

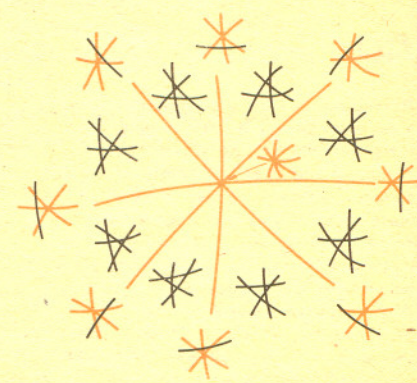


Podobnie jak i poprzednio, mamy tu do czynienia z osobliwością kowymiaru 1. Katalog takich osobliwości zakończy „pozorna styczność” narysowana obok wraz z jej rozwinięciem

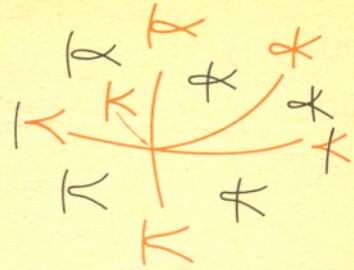
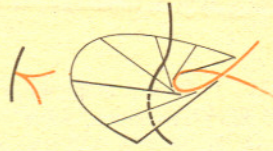
Mogą się jednak przydarzyć i jeszcze bardziej osobliwe sytuacje. Wyobraźmy sobie na przykład, że powierzchnię, z której obserwowaliśmy potrójne samoprzecięcie, przebija jeszcze inny łuk naszej krzywej. Gdy teraz nasze oko znajdzie się na prostej przechodzącej przez ten punkt przebicia, zobaczymy samoprzecięcie poczwórne:



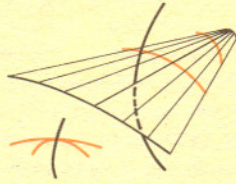
Teraz już nasza osobliwość ma kowymiar 2 i pełny opis jej okolic wymaga rysunku „dwuwymiarowego”. Oto co możemy zobaczyć zmieniając nieco położenie oka (kolorem zaznaczono punkty, z których możemy obserwować samoprzecięcie potrójne).



A oto podobna seria rysunków dla sytuacji, w której krzywa przebija powierzchnię, z której widać „dziobek”:



Tu również na „dwuwymiarowym” rysunku okolic naszej osobliwości widzimy krzywe odpowiadające osobliwościom prostszym — o kowymiarze 1: „pozornej styczności”, „dziobkowi” i trzykrotnemu samoprzecięciu. Możemy wreszcie na tle dwóch pozornie stycznych łuków zobaczyć trzeci łuk „przecinający je”. O tym, jak to się może stać i co możemy zobaczyć z sąsiednich punktów, opowiedzą następujące obrazki:

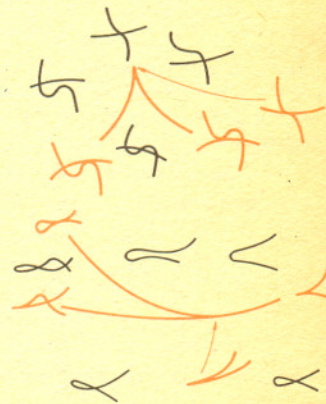


Nasz katalog osobliwości kowymiaru 2 jest jeszcze niekompletny. Brak mu jeszcze dwu pozycji o dość podobnym charakterze. Zauważmy, że „typowa styczność pozorna” dawała obrazek bardzo podobny do styczności prostej i zwykłej paraboli. Może się jednak zdarzyć, że otrzymamy coś, co przypomina wykres funkcji $y = x^3$ styczny do osi x — będzie to też osobliwość kowymiaru 2.

Jak widać, w pobliżu mogą się pojawić zwykle „pozorne styczności”.

Możliwy jest również pewien odpowiednik tej osobliwości w postaci „wyjątkowo ostrego dziobka”, którego otoczenie wygląda tak:

Tu z kolei otoczenie punktu osobliwego zawiera punkty, z których widać „dziobek” lub „pozorną styczność”.



Osobliwości kowymiaru 3 nie są już zbyt ciekawe: może się na przykład zdarzyć, że dwa łuki krzywej zaczną w perspektywie wyglądać podobnie do wykresu $y = x^4$ stycznego do osi x lub też z pewnego punktu wyjątkowego zobaczymy narysowaną powyżej „styczność rzędu 3” na tle innego fragmentu naszej krzywej. A jeśli przypadkiem zobaczymy coś, czego w naszym katalogu brak? Na przykład coś takiego:



lub coś takiego



czy



?

No cóż — widocznie mamy do czynienia z nietypową krzywą. Kiepski dowcip? Nie — trzeba tylko powiedzieć, co to znaczy, że krzywa jest nietypowa.

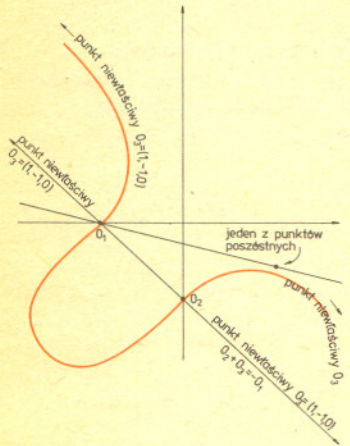
Otóż możemy uznać dwie krzywe ϕ i ψ (rozumiane jako odwzorowania R w R^3) za bliskie, gdy dla każdej wartości parametru t odległości $|\phi(t) - \psi(t)|, |\phi'(t) - \psi'(t)|, \dots, |\phi^{(4)}(t) - \psi^{(4)}(t)|$ są małe (jest to tzw. C^4 — topologia). Gdy tak określimy bliskość, okaże się (co udowodnił C. T. C. Wall), że dowolnie blisko każdej krzywej znajduje się (inna) krzywa, która zademonstruje nam tylko opisane wyżej osobliwości (można ją nazwać krzywą regularną). Co więcej „nietypowe” czyli nieregularne krzywe to tylko nieliczne wysepki w przestrzeni wszystkich krzywych. Inaczej mówiąc: aby wygiąć drut do krzywej nieregularnej musimy się bardzo starać. A gdy dostaniemy do ręki taką krzywą, możemy ją bez wysiłku zdeformować tak, aby otrzymać krzywą regularną — choćby drut był bardzo sztywny. Kowymiar osobliwości to — najprościej mówiąc — liczba parametrów niezbędnych do pełnego opisu jej pobliża.

Dlaczego używa się tylko prądu o napięciu 220 V, 127 V (ZSRR), oraz 110 V (np. USA). Po prostu $220 = 2 \cdot 110$ i urządzenia dostosowane do 110 V łatwo przerobić (przez połączenie szeregowo) na 220 V. Z kolei $110 = 2 \cdot 55$, a 55 V to minimalne napięcie potrzebne do zapalenia łuku węglowego, pierwszego elektrycznego źródła światła. A co ze 127? Otóż 220 V i 110 V to tzw. napięcia skuteczne prądu zmiennego decydujące o jego energii. Napięcie skuteczne dla prądu płynącego między elektrodą o potencjale zmiennym i elektrodą o potencjale stałym (np. ziemią) jest $\sqrt{2}$ razy mniejsze niż napięcie maksymalne. Natomiast dla prądu trójfazowego płynącego między dwiema dowolnymi fazami $\sqrt{2}$ zamienia się na $\sqrt{3}$. Jeżeli napięcie maksymalne wynosi 220 V (to już magia liczb, bo o zapaleniu się łuku decyduje prąd napięcie skuteczne), to skuteczne równa się $220/\sqrt{3} \approx 127$ V.

(J. P.)

Czego nie widzimy, patrząc na krzywą?

Dr Michał SZUREK



Rys. 1. Krzywa o równaniu $x^3 + y^3 + 3xy + 1 = 0$.

W jednym z opowiadań Stanisława Lema dwaj sławni konstruktorzy, Trurl i Klapaucjusz uganiali się za smokiem. Gdy już, już dopadali potwora, ten nagle zniknął i odnajdywał się za ich plecami albo śmiał się z nich zza skały. Dokładniej: chował się do przestrzeni konfiguracyjnej (jako tępawę bydlę czynił to zupełnie instynktownie), zaś Trurl i Klapaucjusz mogli zobaczyć i brali za całość tylko jego nędzne trójwymiarowe ślady. Dziwili się więc, że smok jest jednocześnie w kilku miejscach jakby zapominając, że oni też mają gdzie indziej głowę a gdzie indziej nogi.

Co opisuje równanie $x^2 + y^2 = 0$. Zbiór jednopunktowy? Tak, o ile rozwiązań szukamy tylko wśród liczb rzeczywistych. Jeżeli przypomnimy sobie o liczbach zespolonych, mamy $x^2 + y^2 = (x + yi)(x - yi)$ i widzimy, że $x^2 + y^2 = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y = -ix$ lub $y = ix$.

Co to za zbiór $y = ix$, gdzie x i y są liczbami zespolonymi? Nazywamy go *prostą zespoloną*. Dlatego *prostą*, bo skłonni jesteśmy nazywać tak każde coś opisywane równaniem $y = ax$ (gdzie $a = \text{const}$) czy ogólniej równaniem liniowym $ax + by + c = 0$. Nazywamy — bo do „narysowania” takiego zbioru potrzebowalibyśmy dwóch parametrów zespolonych, czyli czterech rzeczywistych. W czterowymiarowych przestrzeniach trudno o rysunki. A zatem równanie $x^2 + y^2 = 0$ opisuje dwie proste zespolone, z których w naszym „rzeczywistym” świecie widzimy tylko ich punkt przecięcia: $x = 0, y = 0$. Natomiast zbiór opisany równaniem

$$(1) \quad x^3 + y^3 + 3xy + 1 = 0$$

jawi nam się jako krzywa, a nie widzimy tej całej skomplikowanej figury, jaką tworzą zespolone rozwiązania równania (1). Jak wobec tego można badać własności takich figur? Tylko metodami analizy matematycznej, geometrii analitycznej i specjalnie w takim celu stworzonymi metodami geometrii algebraicznej. Czy na naszej (tj. opisanej równaniem (1)) krzywej są jakieś „punkty charakterystyczne”? Oczywiście, np. te, w których krzywa się wyprostowuje (O_1 i O_2 na rysunku 1), czy ten, w którym krzywizna jest największa.

Punkty wyprostowania wykresu funkcji $y = f(x)$ są tam, gdzie zeruje się druga pochodna $f''(x)$ — jeżeli w ogóle ona istnieje (p. artykuł A. Szybiaka). Dla krzywych określonych równaniem wielomianowym $f(x, y) = 0$ punkty wyprostowania są punktami przecięcia krzywej z jej *hesjanem*: gdy f jest wielomianem jednorodnym, hesjan taki jest krzywą opisaną prostym równaniem

$$H \equiv \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = 0;$$

wskaźniki u dołu oznaczają pochodne cząstkowe. Dla niejednorodnych wielomianów równanie hesjanu jest bardziej skomplikowane. Można o tym przeczytać w tych podręcznikach analizy matematycznej, które omawiają funkcje uwikłane. Jeszcze trochę teorii. W artykule I. Grzegorzcyk jest opisane, jak do krzywej płaskiej dołączamy jej punkty niewłaściwe, „punkty w nieskończoności”. Nasza krzywa z równania (1) (rzeczywista, czy zespolona, wszystko jedno) ma jeden punkt niewłaściwy, odpowiadający kierunkowi prostej $x + y = 0$ i równaniem tak uzupełnionej krzywej na płaszczyźnie rzutowej jest

$$(2) \quad x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz = 0.$$

Powstaje ono przez dopisanie „gdzie trzeba” trzeciej zmiennej z . Utworzony z dziewięciu pochodnych cząstkowych wyznacznik opisuje — jak wyżej — hesjan rozpatrywanej krzywej uzupełnionej.

Poprosimy wreszcie Czytelnika, by przyjął bez dowodu twierdzenie, że „hesjanowe” kryterium na punkty wyprostowania krzywej modyfikuje się na takie krzywe w zrozumiały sposób: *Punkty wyprostowania krzywej opisanej na płaszczyźnie rzutowej równaniem jednorodnym $f(x, y, z) = 0$ leżą na hesjanie tej krzywej.*

Możemy teraz potwierdzić rachunkiem to, co widzimy: poza punktami O_1 i O_2 nasza krzywa innych punktów wyprostowania w „widzialnym” zakresie nie ma. Rachunki są proste, trzeba tylko umieć różniczkować. Hesjanem równania (1) jest

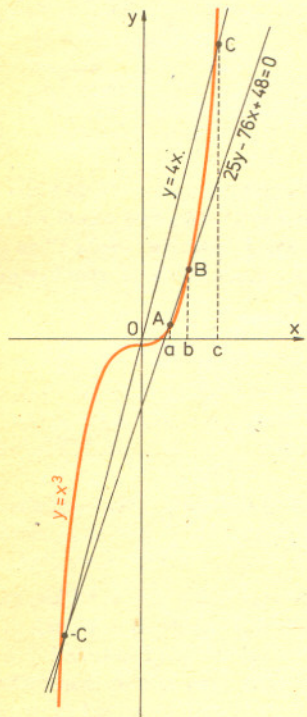
$$(3) \quad H(x, y, z) \equiv 54(5xyz - x^3 - y^3 - z^3) = 0$$

i dodając (3) do (2) dostajemy $xyz = 0$, co po wstawieniu z powrotem do (2) daje

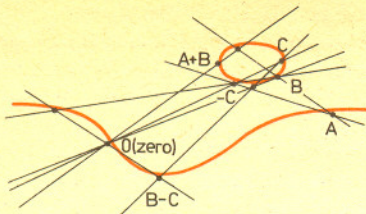
$$(4) \quad x^3 + y^3 + z^3 = 0 \quad \text{i na koniec mamy}$$

$$(5) \quad \begin{cases} \text{jeżeli } x = 0, & \text{to } y^3 + z^3 = 0, & \text{a więc } (y+z)(y^2 - yz + z^2) = 0, \\ \text{jeżeli } y = 0, & \text{to } x^3 + z^3 = 0, & \text{a więc } (x+z)(x^2 - xz + z^2) = 0, \\ \text{jeżeli } z = 0, & \text{to } x^3 + y^3 = 0, & \text{a więc } (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 0. \end{cases}$$

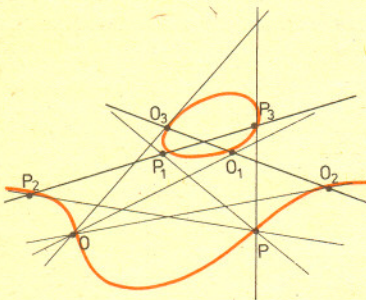
Pamiętając, że x, y i z tworzą współrzędne jednorodne punktu płaszczyzny rzutowej, a więc nie wszystkie są równe zeru i określone są tylko z dokładnością do proporcjonalności, znajdujemy łatwo punkty wyprostowania naszej krzywej: $(0, 1, -1), (1, 0, -1)$ oraz $(1, -1, 0)$. Dołączony,



Rys. 4. Na krzywej o równaniu $y = x^3$ dodawanie punktów to dodawanie ich odciętych: prosta przechodząca przez (a, a^3) i (b, b^3) ma równanie $(y - b^3)/(x - b) = (b^3 - a^3)/(b - a)$ i przecina tę krzywą w punkcie o współrzędnych $(-(a+b), -(a+b)^3)$.



Rys. 2. Operacje arytmetyczne na krzywej trzeciego stopnia.



Rys. 3. Dwa punkty wyprostowania i sześć dalszych punktów poszóstnych na krzywej trzeciego stopnia.

Dokładnie: jeżeli nieosobliwa zwarta powierzchnia Riemanna jest grupą algebraiczną, to jest ona (izomorficzna z) zespoloną „krzywą” trzeciego stopnia, a więc topologicznie jest torusem albo (co na jedno wychodzi) sferą z jedną doklejoną rączką.

Punkty wyprostowania krzywej możemy też określić bardziej algebraicznie. Przypuśćmy, że układ współrzędnych na płaszczyźnie wybraliśmy tak, że nasza krzywa L w otoczeniu początku układu jest wykresem funkcji $y = f(x)$ przy czym $f(x) = 0$ i $f'(x) = 0$ — a więc oś x jest styczna do L . Wówczas krzywizna L w $(0,0)$ jest równa zeru wtedy i tylko wtedy, gdy $f'''(x) = 0$; por. np. artykuł A. Szybiaka. Jest to „algebraiczna” charakterystyka punktów wyprostowania i w ogóle pojęcia krotności stycznej (styczna jest 17-krotna, gdy pierwszych 16 pochodnych jest równych 0). Tak sformułowana charakterystyka może być przeniesiona na zbiory zespolone i ma sens wszędzie tam, gdzie „umiemy” różniczkować, a więc np. gdzie występują tylko funkcje wielomianowe. Do „formalnego” określenia pochodnej wielomianu nie musimy mieć bowiem pojęcia granicy.

a „niewidoczny” punkt w nieskończoności jest trzecim punktem, w którym nasza krzywa jest „lokalnie prosta”. Pamiętając zaś o rozwiązaniach nierzeczywistych (badamy przecież cały zespolony zbiór opisany równaniem (1)) otrzymujemy łatwo wszystkie inne rozwiązania układu (5):

$$(6) \quad \begin{cases} (0, 1, -1), (1, 0, -1), (1, -1, 0) & \text{(znajdzone przedtem)} \\ (0, 1, \alpha), (\alpha, 0, 1), (1, \alpha, 0), \\ (0, 1, \beta), (\beta, 0, 1), (1, \beta, 0), \end{cases}$$

gdzie α i β są pierwiastkami wielomianu $x^2 - x + 1$.

A więc przez „przypomnienie sobie”, że krzywe mają też punkty „w nieskończoności” a równania — pierwiastki zespolone, dotknęliśmy na naszej krzywej siedmiu nowych jej punktów charakterystycznych. No, może nie na „naszej” krzywej, tylko na całym zespolonym smoku, który pokazuje nam tylko swoje przeświecenie — krzywą z rysunku 1. Konfiguracja utworzona przez krzywą i jej punkty wyprostowania ma wiele interesujących własności, z których zwrócimy tu uwagę na jedną, podstawową: *na każdej z prostych łączących dwa punkty wyprostowania leży trzeci taki punkt* (być może „niewidoczny”, zespolony). Można to sprawdzić łatwym rachunkiem dla punktów w (6) a uwierzyć w ogólnym przypadku — lub czytać dalej.

Zdumiewającego opisu punktów wyprostowania dostarcza teoria grup. Wybierzmy jeden taki punkt (razem jest ich 9) jako element zerowy grupy, którą za chwilę zbudujemy. Aby dodać dwa punkty A i B na naszej krzywej — albo na dowolnej krzywej trzeciego stopnia — prowadzimy przez te punkty linię prostą (gdy $A = B$, to styczną). Przecina ona daną krzywą w jeszcze jednym i tylko jednym punkcie A' — choć może to być punkt „w nieskończoności” lub mieć nierzeczywiste współrzędne, nic nie szkodzi. Łączymy A' z uprzednio wybranym za zerowy punktem O . Prosta przechodząca przez te dwa punkty znów przecina krzywą w jednym tylko punkcie. Ten właśnie punkt przyjmiemy za sumę $A+B$ (rys. 2). Od razu zadanie dla Czytelnika: jak obliczyć $-A$?

Dlaczego tak, a nie inaczej? Skąd takie dziwne określenie tego działania?. Na przykład stąd, że po pierwsze „wychodzi” grupa, po drugie działania te są „algebraiczne”, a po trzecie ze wszystkich zupełnych krzywych zespolonych taką grupę można określić tylko na tych, które można opisać równaniem stopnia trzeciego, a są to opisane w artykule J. Ołędzkiego zwarte powierzchnie rodzaju 1. Metodą „rysunkową” możemy się dość łatwo przekonać (a nawet pokusić się o poprawny dowód) o słuszności następującego twierdzenia:

Punkty wyprostowania krzywej to rozwiązania równania $3X = O$ (dokładniej: $X+X+X = O$) w powyżej zdefiniowanej grupie.

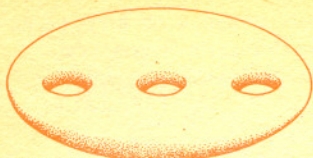
Z tego twierdzenia wynika m.in., że jeżeli A i B są punktami wyprostowania, to $-(A+B)$ też (bo jeżeli $3A = O$ i $3B = O$, to $3(-A-B) = O$). Jeżeli teraz przekonamy się, że punkty A , B i $-(A+B)$ są współliniowe, to tak jakbyśmy udowodnili, że istotnie na każdej prostej łączącej dwa punkty wyprostowania znajdzie się trzeci.

W poszukiwaniu innych punktów charakterystycznych zrobimy następującą obserwację. Przez każdy punkt płaszczyzny można przeprowadzić cztery styczne do danej krzywej trzeciego stopnia. Na rysunku 3 krzywa S składa się z dwu gałęzi: owalu i nieograniczonej krzywej z garbem. Być może będą to tylko styczne nie tyle do S , co do tego dużego smoka zespolonego, którego S jest resztówką. Precyzyjnie: do zbioru określonego w przestrzeni zespolonej takim samym równaniem co S w rzeczywistej. Takie styczne są na ogół jednokrotne, ale jest kilka punktów (zobaczymy, ile), przez które przechodzą cztery styczne w tym jedna trzykrotna (razem 6 stycznych). I takie punkty nazywają się poszóstne (sextatic). Które to punkty? Zupełnie proste rozważania „na ogólnym rysunku” doprowadzą do wniosku, że punkt X jest poszóstny wtedy i tylko wtedy, gdy $6X = O$ i rzeczywiście tak to jest.

Styczna potrójna do krzywej trzeciego stopnia musi przechodzić przez punkt wyprostowania, a więc punkt jest poszóstny, gdy leży na stycznej wyprowadzonej z pewnego punktu wyprostowania. Ponieważ punktów wyprostowania jest 9, a z każdego z nich wychodzą trzy styczne (plus styczna w tym punkcie), więc punktów poszóstnych jest 27. Ułożone są we współliniowe trójki, a Czytelnik może to sobie udowodnić, patrząc na rysunek 3 i rozumując tak: punkty stycznej i tylko one spełniają równanie $2X = O$, a O_1+O_2 spełnia to równanie. Skoro więc $O_1+O_2 \neq O$, to $O_1+O_2 = O_3$, ale $2O_3 = O$, więc $O_1+O_2+O_3 = O$, a to znaczy, że punkty te są współliniowe. Znalezienie punktów poszóstnych tych krzywych, które tu rozpatrywaliśmy, pozostawiamy Czytelnikom. Nie poszukamy też wielu istniejących innych punktów charakterystycznych zarówno krzywej (1) jak i innych zbiorów algebraicznych. Na zbiorach określonych bardziej skomplikowanymi równaniami takich „naprawdę charakterystycznych” punktów jest zatrzęsienie. Wielu z nich nie widzimy, patrząc na wykres sporządzony w przestrzeni euklidesowej.

Powierzchnie

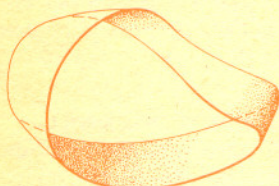
Dr Juliusz OŁĘDZKI



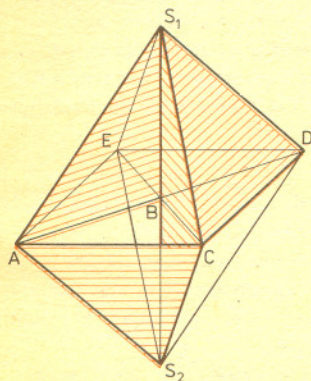
Rys. 1. Powierzchnia rodzaju 3.



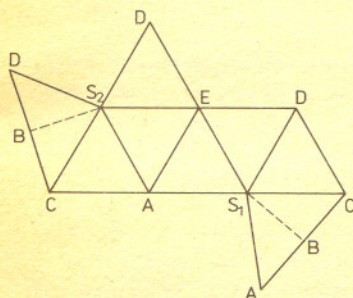
Rys. 2.



Rys. 3. Wstęga Möbiusa.



Rys. 4a. Model B. Tuckermiana wstęgi Möbiusa o płaskim brzegu: wstęga składa się z sześciu ścian ośmiościanu i czterech trójkątów prostokątnych; jej brzegiem jest trójkąt ABC .



Rys. 4b. Jej siatka.

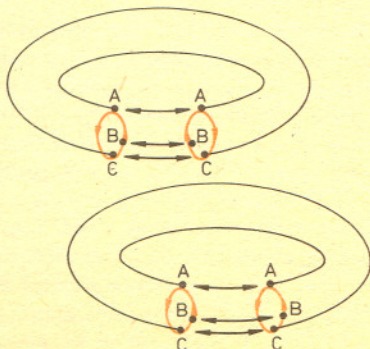
Przez powierzchnię, w szeroko rozumianym, potocznym tego słowa znaczeniu, rozumiemy zbiór dwuwymiarowy oddzielający jedną substancję od innych. Mówimy o powierzchni ziemskiej, mówimy, że powierzchnia wody w naczyniu jest wklęsła lub wypukła, że powierzchnia marmurowej rzeźby jest gładka itp. W niniejszym artykule przedstawimy co rozumiemy przez powierzchnie w topologii i jakie mamy ich rodzaje. Przekształcenie ustalające wzajemnie jednoznacznie odpowiedniość między punktami dwóch zbiorów (dokładniej: przestrzeni metrycznych czy ogólniej topologicznych) tak, by przyporządkowanie punktom jednego zbioru punktom drugiego, a także odwrotne — punktom drugiego zbioru punktom pierwszego, było ciągłe, nazywamy *homeomorfizmem*, a zbiory *homeomorficznymi*. W topologii nie odróżniamy zbiorów homeomorficznych. Na przykład koło jest homeomorficzne z czworokątem; wyobraźmy sobie koło zrobione z elastycznej gumy, po złapaniu go za cztery punkty brzegu i naciągnięciu otrzymujemy czworokąt. Zbiór homeomorficzny z okręgiem nazywamy krzywą zwykłą zamkniętą.

Idealnie płaska powierzchnia morza jest homeomorficzna z pofalowaną, o ile tylko fale nie są tak wzburzone, że krople wody odrywają się od powierzchni lub gdy załamane fale swymi wierzchołkami wcześniej uderzają w powierzchnię tworząc przez chwilę tunele.

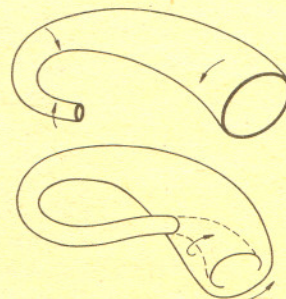
W topologii przyjmuje się następującą definicję powierzchni; *powierzchnią* nazywamy *domkniętą* (wraz z ciągiem zbieżnym punktów do zbioru należy jego granica) i *ograniczoną* (odległości między punktami zbioru są mniejsze od ustalonej liczby) *zbiór*, którego każdy punkt ma w tym zbiorze otoczenie homeomorficzne z otwartym (bez ograniczającego okręgu) kołem na płaszczyźnie, przy czym każde dwa punkty tego zbioru dają się połączyć krzywą leżącą w zbiorze (powierzchnia nie może składać się z osobnych części). Przykładami powierzchni są: sfera, czyli powierzchnia kuli, powierzchnia torusa — zbiór zakreślony przez obracający się okrąg wokół prostej leżącej w tej samej płaszczyźnie co okrąg lecz nie przecinającej go, powierzchnia torusa z większą liczbą dziur (rys. 1).

W myśl tej definicji powierzchniami nie są: płaszczyzna, gdyż nie jest ograniczona, sfera z usuniętym jednym punktem (gdyż nie jest domknięta), otwarte koło, domknięte koło (bo jego punkty brzegowe nie mają otoczeń homeomorficznych z kołami otwartymi). Ostatni z wymienionych przykładów jest tylko powierzchnią z brzegiem. Dokładniej, mówimy, że *zbiór X jest powierzchnią z brzegiem*, jeśli pewne jego punkty mają otoczenia homeomorficzne z otwartymi kołami (tak jak punkty powierzchni), a wszystkie inne (zwane punktami brzegowymi) mają otoczenia homeomorficzne z połową otwartego koła wraz z „brzegowym” łukiem (rys. 2); zakładamy również, że X jest domknięte i ograniczone oraz, że każde dwa punkty z X można połączyć krzywą. Oto inne przykłady powierzchni z brzegiem: domknięta i ograniczona powierzchnia boczna walca (pasek papieru nawinięty na walec i sklejonny), wstęga Möbiusa, (pasek papieru przed sklejeniem przekreślony, rys. 3). Skręcenie przed sklejeniem paska parzystą liczbę razy o 180° daje zbiór homeomorficzny z powierzchnią walca, natomiast nieparzystą — ze wstęgą Möbiusa. Wstęga Möbiusa ma tę własność, że poruszając się po niej bez zbliżania się do brzegu możemy przejść na jej „drugą stronę”, w związku z tym właściwie jest to ta sama strona. Powierzchnie o tej własności nazywamy jednostronnymi. Takie powierzchnie (bez brzegu) nie mogą oddzielać jednej substancji od drugiej; okazuje się, że można je zrealizować (tj. umieścić) dopiero w przestrzeni euklidesowej czterowymiarowej (mieszcząca się w trójwymiarowej przestrzeni wstęga Möbiusa nie jest powierzchnią, tylko powierzchnią z brzegiem).

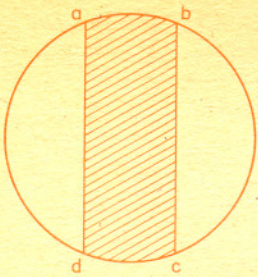
Brzeg wstęgi Möbiusa jest krzywą zwykłą zamkniętą, a więc homeomorficzną z okręgiem. Na rys. 4 widzimy wstęgę Möbiusa o trójkątnym brzegu.



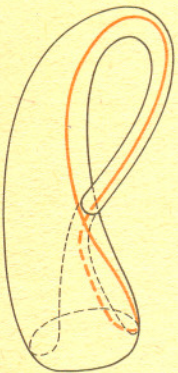
Rys. 10. Torus i butelka Kleina.



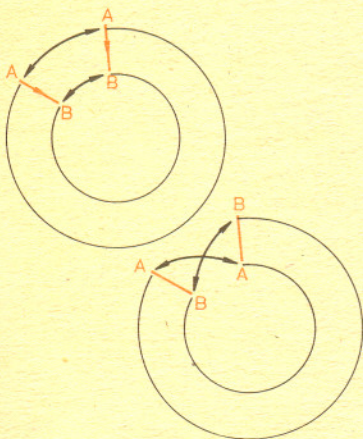
Rys. 12. Jeszcze raz butelka Kleina.



Rys. 5
Prosimy zajrzeć jednak na str. 16, do kącika „Czytelniczki proponują”.



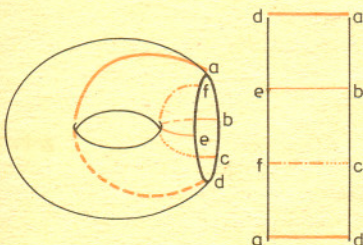
Rys. 6. Butelka Kleina.



Rys. 9. Pasek i wstęga Möbiusa.



Rys. 7. Sfera z trzema rączkami to to samo co torus z trzema otworami z rys. 1.



Rys. 8

Powierzchnię jednostronną bez brzegu można otrzymać z koła przez sklejenie (utożsamienie) punktów antypodycznych (tj. symetrycznych względem środka) na okręgu będącym brzegiem tego koła. Powierzchnię taką nazywamy płaszczyzną rzutową. Jeżeli podzielimy płaszczyznę rzutową krzywą zwykłą zamkniętą na dwie części tak jak na rys. 5, to otrzymamy część zakreskowaną homeomorficzną ze wstęgą Möbiusa (łuk ab jest sklejony z cd) i część niezakreskowaną homeomorficzną z kołem (łuk bc jest sklejony z da). Możemy więc powiedzieć, że płaszczyzna rzutowa powstaje przez dolepienie do koła wstęgi Möbiusa. Innym klasycznym przykładem powierzchni jednostronnej jest butelka Kleina (rys. 6). Oczywiście przeniknięcie szyjki butelki do wewnątrz bez przecinania ścianki nie jest możliwe w przestrzeni trójwymiarowej. Jeżeli rozetniemy butelkę Kleina wzdłuż okręgu leżącego na dnie butelki, to otrzymamy powierzchnię walca, tak samo jak byśmy rozcięli powierzchnię torusa. Tak więc doklejając na różne sposoby okręgi będące podstawami powierzchni bocznej walca możemy uzyskać różne powierzchnie; raz jednostronną, raz dwustronną.

Z powierzchni jednostronnej można zawsze wyciąć wstęgę Möbiusa np. poszerzając do paska drogę potrzebną do przejścia na „drugą stronę” ustalonego punktu powierzchni. Jeśli zaś przetniemy wstęgę Möbiusa wzdłuż linii środkowej, to otrzymamy powierzchnię boczną walca. Jeżeli nasza wstęga była zawarta w pewnej powierzchni, to powyższe rozcięcie nie spowoduje rozdzielenia powierzchni na dwie osobne części.

Rodzajem powierzchni nazywamy maksymalną liczbę zawartych w niej rozłącznych krzywych zamkniętych takich, że rozcięcie wzdłuż tych krzywych nie powoduje rozpadnięcia się powierzchni na osobne części.

Sfera jest rodzaju 0, gdyż każda krzywa zwykła zamknięta rozcina ją na dwa zbiory homeomorficzne z kołem (ten pozornie oczywisty fakt nie jest łatwy do dowodu). Powierzchnia torusa jest rodzaju 1; przez przecięcie wzdłuż odpowiednio położonego okręgu otrzymamy powierzchnię boczną walca, która jest już rozcinana przez każdą następną krzywą zwykłą zamkniętą. Czy wobec tego rodzaj butelki Kleina też wynosi 1? Nie, jest on równy 2. Jeśli przecięcie pierwszą krzywą zwykłą zamkniętą doprowadzi do powierzchni walca, to następnej krzywej nie ma gdzie umieścić. Ale pewne krzywe zwykłe przecinają butelkę Kleina tak, że otrzymujemy wstęgę Möbiusa (linia pomarańczowa na rys. 6), a więc i druga krzywa zwykła zamknięta nie rozcina całkowicie powierzchni.

Bezpośrednio z definicji wynika, że rodzaj powierzchni oraz to, czy jest ona jedno- czy dwustronna, nie zmienia się przy homeomorfizmie. Okazuje się (dowód nie jest prosty), że prawdziwe jest twierdzenie odwrotne.

Jeśli dwie powierzchnie są tego samego rodzaju i obie są jedno- lub obie dwustronne, to są homeomorficzne.

A zatem rodzaj powierzchni plus informacja, czy jest ona jedno- czy dwustronna, określa tę powierzchnię jednoznacznie z topologicznego punktu widzenia. Powierzchnie dwustronne rodzaju $n \geq 0$ można utworzyć dolepiając do sfery n „uch” (rys. 7) i na mocy powyższego twierdzenia innych dwustronnych powierzchni w topologii nie ma. Natomiast powierzchnię jednostronną rodzaju $2n+1$ można skonstruować wycinając w sferze n kół i doklejając wzdłuż brzegów n wstęg Möbiusa (brzeg wstęgi Möbiusa jest krzywą zwykłą zamkniętą). Jaką powierzchnię otrzymamy doklejając do sfery jedno ucho i jedną wstęgę Möbiusa? Będzie to powierzchnia jednostronna rodzaju 3. Doklejenie jednego ucha jest topologicznie tym samym, co doklejenie dwóch wstęg Möbiusa, ale pod warunkiem, że powierzchnia zawiera jeszcze inną wstęgę (rys. 8). Tak więc powierzchnię jednostronną rodzaju n można również otrzymać doklejając do sfery, dla n nieparzystego, jedną wstęgę Möbiusa i $\frac{n-1}{2}$ uch, a dla n parzystego, dwie wstęgi Möbiusa i $\frac{n-2}{2}$ uch. Rys. 8 pokazuje jak sferę z jednym uchem i jedną wstęgą Möbiusa można rozciąć na trzy wstęgi Möbiusa.



Rys. 11

Iwona GRZEGORCZYK

Jeżeli do zwykłej płaszczyzny euklidesowej dołączymy „punkty w nieskończoności”, dostaniemy *plaszczynę rzutową*. Aby zobaczyć na czym polega i jak przebiega ta konstrukcja, wyobraźmy sobie płaszczyznę H i pęk prostych przechodzących przez pewien punkt poza nią. Każda prosta tego pęku nierównoległa do H przecina ją w jednym punkcie. Otrzymane tak przyporządkowanie

prosta pęku nierównoległa do $H \leftrightarrow$ punkt płaszczyzny H

jest wzajemnie jednoznaczne. Jak to często w matematyce bywa, zbiory, między którymi istnieje „naturalna” funkcja wzajemnie jednoznaczna, są utożsamiane. Możemy napisać

(*) punkt płaszczyzny $H =$ prosta pęku nierównoległa do H

i uważać za współrzędne punktu np. wektor kierunkowy odpowiedniej prostej. Oczywiście takie współrzędne punktu (zwiemy je *jednorodnymi* albo *rzutowymi*) zależą, jak i każde inne, od wyboru układu współrzędnych. Gdy za H weźmiemy płaszczyznę $z = 1$, a $p = (0, 0, 0)$, to będą one postaci $[x, y, z]$ i $z = 1$.

Plaszczyznę rzutową określamy jako zbiór *wszystkich* prostych naszego pęku. Przyporządkowanie (*) pokazuje, że dzięki takiemu określeniu do „zwykłej” płaszczyzny euklidesowej rzeczywiście doszły nowe punkty i że zasługują one na nazwę „punktów w nieskończoności”. Każdy taki punkt odpowiada kierunkowi pewnej prostej na płaszczyźnie, a jego współrzędne jednorodne mają postać $[x, y, 0]$. Płaszczyzna rzutowa ma więc dwa rodzaje punktów: *właściwe* (odpowiadające punktom płaszczyzny H ; współrzędne jednorodne takich punktów mają trzecią współrzędną różną od zera) i *niewłaściwe* (odpowiadające kierunkom prostych na H). Widzimy także, że proporcjonalne współrzędne jednorodne opisują ten sam punkt płaszczyzny rzutowej. Pozwala to określić płaszczyznę w inny sposób, może mniej intuicyjny, ale lepszy do posługiwania się nią: *Plaszczyzna rzutowa to zbiór trójek $[x, y, z]$, wśród których*

- 1) nie ma $[0, 0, 0]$,
- 2) trójki proporcjonalne utożsamiamy.

Przy takim podejściu zacierza się zupełnie różnica między punktami właściwymi i niewłaściwymi. Widzimy ponadto, że trójka $[x, y, z]$ jest tym samym punktem płaszczyzny rzutowej co

$$\left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right].$$

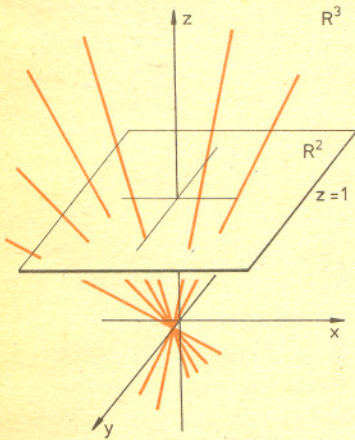
Punkty o analogicznych współrzędnych, ale w przestrzeni euklidesowej, wypełniają sferę o równaniu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Jednak dwa antypodyczne (przeciwległe) punkty sfery mają przeciwne współrzędne euklidesowe i wobec tego wyznaczają *ten sam* punkt płaszczyzny rzutowej. Możemy zatem powiedzieć jeszcze inaczej (zob. też artykuł J. Olędzkiego): *Plaszczyznę rzutową można otrzymać ze sfery, utożsamiając na niej punkty leżące na jednej średnicy.*

Ta uwaga pozwala na wprowadzenie na płaszczyźnie rzutowej pojęcia odległości (rys. 2), co czyni z niej przestrzeń metryczną, tzw. *plaszczynę eliptyczną*.

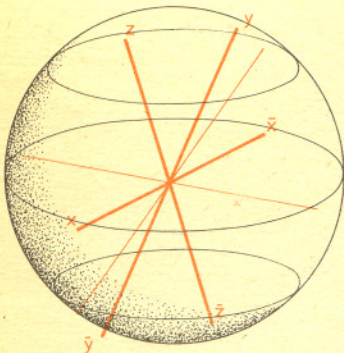
Płaszczyzna euklidesowa jest podzbiorem płaszczyzny rzutowej. Możemy zbiory w niej zawarte domykać w całej płaszczyźnie rzutowej. Choć nie jest to trudne, nie będziemy dokładnie wyjaśniać, dlaczego domknięcie zbioru opisanego na płaszczyźnie euklidesowej równaniem wielomianowym $f(x, y) = 0$ jest na płaszczyźnie rzutowej opisane równaniem $F(x, y, z) = 0$, powstającym przez dopisanie do wszystkich jednomianów w wielomianie f najmniejszej takiej potęgi zmiennej z , by wielomian stał się jednorodny. Tak na przykład domknięcie linii prostej o równaniu $ax + by = c$ ma na płaszczyźnie rzutowej równanie $ax + by = cz$. Gdy położymy $z = 0$, obliczymy jakie punkty „w nieskończoności” doszły do naszej prostej: $x = b, y = -a, z = 0$ (inne układy trójek x, y, z są proporcjonalne do tych).

Otrzymaliśmy coś, co mogliśmy przewidzieć i bez rachunków: domknięcie linii prostej składa się z niej samej i jednego punktu niewłaściwego, odpowiadającego jej kierunkowi. Taka uzupełniona prosta jest homeomorficzna z okręgiem, podczas gdy domknięcie hiperboli składa się z niej samej oraz punktów odpowiadających kierunkom asymptot; przy domknięciu paraboli dojdzie jeden punkt niewłaściwy: kierunek jej osi symetrii.

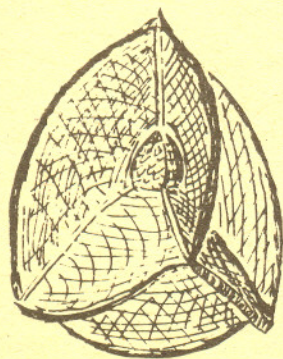
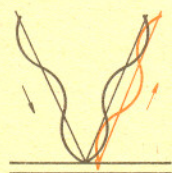
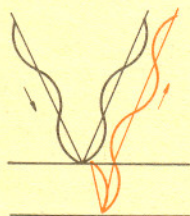
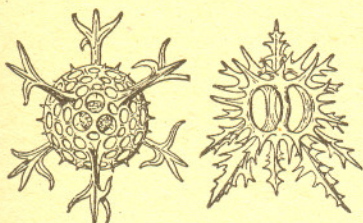
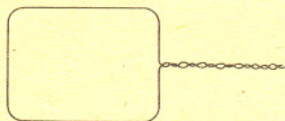
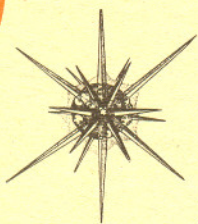
Teoria krzywych i powierzchni domkniętych w przestrzeniach rzutowych jest — wbrew pozorom — łatwiejsza niż ich części euklidesowych, niezwartych. Tylko dla takich „domkniętych” zbiorów możemy jako tako zadowolająco odpowiedzieć na pytanie: jak z postaci wielomianu opisującego zbiór poznać, jak ten zbiór „naprawdę” wygląda, czym zajmuje się modna ostatnio geometria algebraiczna.



Rys. 1. Płaszczyzna rzutowa



Rys. 2. Gdy ze sfery robimy przestrzeń rzutową, utożsamiamy punkty przeciwległe: x i \bar{x} , y i \bar{y} , z i \bar{z} . Długość najkrótszego z łuków wielkich \widehat{xz} , $\widehat{x\bar{z}}$, $\widehat{x\bar{x}}$, \widehat{xz} przyjmujemy za odległość punktów x i z w przestrzeni rzutowej.



Już wiele razy pisaliśmy w Delcie o ciekawych własnościach błonek mydlanych. Jesteśmy jednak dalecy od wyczerpania tematu. Czy, na przykład, zadaliście sobie kiedyś pytanie, jaka jest grubość błonki? Albo, dlaczego bańki mydlane mienia się wszystkimi kolorami tęczy? Może Wam się to wydać dziwne, ale odpowiedzi na te pytania są ściśle powiązane. Zanim je znajdziemy — kilka doświadczeń. Potrzebny Wam będzie miękki drut i roztwór mydła lub płynu do prania. Zegnijcie z drutu płaską ramkę z „rączką” i rozepnijcie na niej błonkę. Następnie ustawcie ją pionowo starając się zaobserwować promienie słoneczne odbite od powierzchni, podobnie jak to się robi puszczać „zajaczki” za pomocą lusterka. Początkowo błonka będzie jednostajnie biała. Po chwili jednak pojawiają się poziome, kolorowe prążki poszerzające się z upływem czasu. Jeśli ręka wam nie drgnie, błonka będzie „żyła” kilkanaście sekund i zaobserwujecie u góry ciemny obszar wypełniający powoli całą ramkę. Zauważyliście już na pewno, że pojawienie się prążków jest związane z siłą przyciągania ziemskiego; prążki są zawsze poziome, a dla poziomo ustawionej ramki nie pojawiają się w ogóle. Siła ciężkości powoduje powolne wyciekanie wody i to, że przekrój poprzeczny błonki ma w przybliżeniu kształt klina. Zgoda, powiecie, ale skąd te kolory? Żeby to zrozumieć przypomnijcie sobie: światło słoneczne jest mieszaniną różnych barw. Odbicie od błonki to jeden ze sposobów ich rozdzielania. Światło możemy traktować tutaj jak falę, pod wieloma względami podobną do fal na wodzie. Każdej barwie odpowiada inna długość fali, natomiast natężenie światła jest tym większe, im większa jest jej wysokość. Zastanówmy się, jak każda ze składowych odbija się od cienkiej błonki. Pewne wyobrażenie o tym da Wam rysunek obok. Odpowiada on sytuacji, gdy grubość błonki jest w przybliżeniu równa połowie długości fali, a kąt, pod którym obserwujemy prążki, jest niewielki. Fala padająca częściowo odbija się od powierzchni zewnętrznej błonki, a częściowo, po załamaniu, od powierzchni wewnętrznej. Zauważcie, że wysokość fali wypadkowej, będącej sumą fal odbitych, jest dużo mniejsza niż fali padającej. W ten sposób niektóre barwy w świetle słonecznym będą osłabiane — jedne bardziej a inne mniej. Wszystko zależy od grubości błonki. W miejscu, gdzie pojawiają się pierwsze od góry prążki będzie ona równa w przybliżeniu długości fal światła widzialnego czyli około jednej dziesięciotysięcznej milimetra. Dla powtarzających się barw będzie dwu, trzy...-krotnie większa. Pozostaje jeszcze do wyjaśnienia sprawa ciemnego obszaru u góry ramki. Zauważcie, że odbicie od zewnętrznej powierzchni (fala pada z ośrodka rzadszego) przebiega inaczej niż od wewnętrznej (fala pada w ośrodku gęstszym). W pierwszym przypadku grzbiet zmienia się w dolinę, w drugim zaś grzbiet przechodzi w grzbiet. Sprawdźcie, że jeśli błonka będzie miała grubość dużo mniejszą od długości fal świetlnych, to wszystkie barwy będą wygaszane. Pomoże Wam w tym rysunek obok. Tak więc ciemny obszar odpowiada bardzo małej grubości błonki. Można ją wyznaczyć innymi metodami. Okazuje się, że jest około sto razy mniejsza niż w obszarze prążków. Czy potraficie na podstawie szerokości prążków wyznaczyć kształt przekroju błonki? Spójrzcie na błonkę pod światło — te same prążki! Potraficie to wyjaśnić?

Podczas zimy na szybach autobusów tworzą się cienkie warstewki lodu zabarwiające na kolor zielonawy wszystko to, na co przez nie patrzymy. Spróbujcie wyjaśnić to zjawisko. Oceńcie, jaka jest grubość tych warstewek. A teraz coś dla relaksu! Na obrazkach pokazujemy skamieniałe szkielety jednokomórkowców o rozmiarach około jednej dziesiątej milimetra zwanych radiolariami. Znalezione je w mule na dnie morza. Skąd te dziwne kształty? Spróbujemy je odtworzyć za pomocą naszego drutu i wody mydlanej. Wgnijcie czworościan foremny i zanurcie go w roztworze. To, co dostaliście, już trochę przypomina szkielet obok, prawda? Brakuje tylko bąbelka w środku. Uderzcie lekko ramką w powierzchnię roztworu. Jest? Skąd to podobieństwo?

Zrobisz sama butelkę Kleina

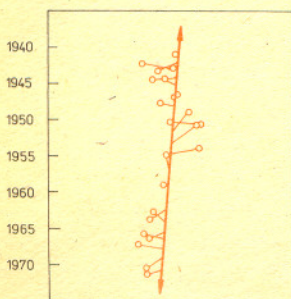
Na 3 druty nr 5 narzucić 90 oczek (po 30 na każdy). Przerabiać ściągaczem naokoło (jak skarpetkę) do wysokości 4 cali. Przerobić na 1 drucie 90 oczek, przewrócić robotę na drugą stronę i przerabiać dalej tak, aby w środku każdego drutu został otwór. Powtarzać te dwa rzędy aż otwór będzie miał $1\frac{1}{2}$ cala. Połączyć naokoło 1 rzędem. Następnie co drugi rząd gubić po 1 oczku z obu końców każdego drutu aż zostanie 27 oczek (po 9 na każdym). Przerobić prosto 12 cali. Przeciagnąć od zewnątrz robotę przez otwór. Teraz dodawać po 1 oczku z obu końców każdego drutu aż do osiągnięcia 90 oczek (po 30 na każdym). Przerobić prosto 6 rzędów. Przerobić razem szydełkiem każde z 90 oczek z oczkami pierwszego rzędu roboty. Można sprezentować mężowi jako tabakierkę.

Sposób wykonania: Janis WANSTALL (wg „Manifold” 1971). Wykonanie: dr Danuta OŁĘDZKA (Politechnika Warszawska). Projekt zastosowania: mgr Antonina SZUREK (Instytut Badań Systemowych PAN).



Fot. T. W. Kur

Patrz w niebo



Co to jest oo?

To miejsce, gdzie dzieją się rzeczy, które się nie zdarzają (the place where things happen that don't).

(The Mathematical Gazette, 1948)

Rozpoczęliśmy właśnie pomyślnie rok 1981. Choć 1981 nie jest liczbą pierwszą, to jednak podzielna jest przez szczęśliwą siódemkę, a iloraz jest już liczbą pierwszą: $1981 = 7 \cdot 283$. Liczby, będące iloczynami dwu liczb pierwszych nazwalimy semipierwszymi (Delta 7/1980). Czeką nas zatem semidobry rok. Rozpoczynamy także nowe dziesięciolecie. Czy będzie ono pomyślnie? Teoriolicezbowcy nie będą nim specjalnie zachwyceni: tylko 1987 jest liczbą pierwszą (a w latach siedemdziesiątych zeszłego wieku mieli aż cztery: 1871, 1873, 1877, 1879, na następne tak pomyślnie muszą czekać jeszcze 100 lat: 2081, 2083, 2087, 2089). Ale nie tak fatalne, jak lata sześćdziesiąte (żadnej liczby pierwszej). Albo jak mroczne średniowieczne lata 1130—1150 albo 1328—1360 (trzydzieści trzy lata bez liczby pierwszej!). Niepomyślnie były także siedemdziesiąte i osiemdziesiąte lata XVII wieku. Specjaliści próbują ustalić przyczynę tych czarnych okresów.... Sądzi się, że największy odstęp pomiędzy kolejnymi liczbami pierwszymi $\leq n$ jest w przybliżeniu równy $(\ln n)^2$ i byłby to wcale nietrywialny wynik. Warto zwrócić uwagę na inną osobliwość roku 1981. W 1800 roku dwudziestotrzyletni wówczas Gauss podał sposób odszukania daty Wielkanocy. Są do tego potrzebne dwie liczby A i B , które podaje poniższa tabela:

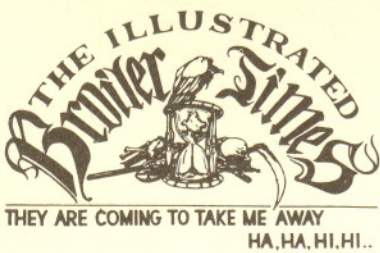
do 1582	$A = 15,$	$B = 6$
1583—1699	$A = 22,$	$B = 2$
1700—1799	$A = 23,$	$B = 3$
1800—1899	$A = 23,$	$B = 4$
1900—2099	$A = 24,$	$B = 5$
2100—2199	$A = 24,$	$B = 6$

Dla wyznaczenia daty Wielkanocy trzeba wykonać następujące działania. Podzielić liczbę roku przez 19 i znaleźć resztę a . Podzielić liczbę roku przez 4 i znaleźć resztę b . Podzielić liczbę roku przez 7 i znaleźć resztę c . Liczbę $19a + A$ podzielić przez 30 i znaleźć resztę d . Liczbę $2b + 4c + 6d + B$ podzielić przez 7 i znaleźć resztę e . Sumę reszt $d + e$ dodać do daty 22 marca a otrzymamy datę Wielkanocy. Jeśli data wypadnie powyżej 31 marca, trzeba ją oczywiście przeliczyć na odpowiedni dzień kwietnia. Jednak trzy razy metoda Gaussa daje zły wynik. W 1609 roku Wielkanoc była 19 kwietnia, choć wzór Gaussa dawał 26 kwietnia. W 1954 roku Wielkanoc obchodziliśmy 18 kwietnia (a nie 25, jak wynikałoby z tych obliczeń). Trzecim — i ostatnim wyjątkiem — jest tu nasz rok 1981... (obliczcie sami i porównajcie z kalendarzem).

Wśród dobrze nam znanych zimowych gwiazdozbiorów: Byka, Oriona, Bliźniąt i Wielkiego Psa góruje w styczniu również kilka mniej znanych. Między innymi Jednorożec (*Monoceros*, *Mon*). Kiedy patrzymy na niebo — na pierwszy rzut oka trudno go nawet znaleźć. Astronomowie nie wiążą tej konstelacji z żadną znaną wszystkim gwiazdą. Jednak nawet szybki przegląd nieba Jednorożca przez teleskop pozwala nam znaleźć kilka pięknych mgławic, m. in. mgławicę Rozetta (z okładki Deltę z lipca 1979). Dzisiaj zajmijmy się dwiema gwiazdami o nazwach Ross 614 i HD 47129 (*gwiazda Plasketta*), które również znajdują się w konstelacji Jednorożca. Obie gwiazdy tworzą układy podwójne, ale na tym właściwie kończy się ich podobieństwo. Są one swoimi przeciwieństwami — leżą na dwóch końcach zakresu możliwych mas gwiazd. Zakres ten jest wyznaczony teoretycznie. Nowo rodząca się gwiazda powstająca przez kontrakcję materii międzygwiazdowej musi mieć masę większą od pewnej „masy krytycznej”, aby mogło w jej wnętrzu wytworzyć się odpowiednie ciśnienie i gęstość, a zatem aby powstała również odpowiednio wysoka temperatura zdolna do rozpoczęcia reakcji jądrowych. Jeśli dojdzie do zapłonu, młodziutka gwiazda zatrzymuje się na ciągu głównym diagramu H-R i rozpoczyna ewolucję jak inne normalne gwiazdy. Jeśli jednak masa jest niewystarczająca, zapadający się rozgrzany do czerwoności obłok (zamiana energii potencjalnej na ciepłą) utworzy kulę gazową, która minie ciąg główny, a potem stygnąc zamieni się może w samotną planetę? Masa krytyczna wynosi $0,08$ masy Słońca (M_{\odot}). Jowisz ma masę ok. $0,001 M_{\odot}$.

Z drugiej strony, jeśli kolapsuje (zapada się) obłok o ogromnej masie, to kondensacje większe niż ok. $100 M_{\odot}$ najprawdopodobniej nie mogą utworzyć gwiazd, bo rozpadają się szybko na drobniejsze składniki.

A więc dozwolona masa młodej gwiazdy $0,08 M_{\odot} < M_{*} < 100 M_{\odot}$. Obie gwiazdy w Jednorożcu leżą w pobliżu tych granic. Ross 614 jest układem dwóch karłowatych gwiazdek. Ich masy wynoszą $0,14$ i $0,08 M_{\odot}$. Mniejszy składnik został odkryty optycznie dopiero w 1955 r. mimo, że jego istnienie zostało przewidziane kilkanaście lat wcześniej, na podstawie obserwacji okresowych (16,5 lat) wahań położenia jaśniejszej gwiazdy, wskazujących na krążenie wokół niej ciemniejszego składnika. Za pomocą takich samych metod szuka się obecnie jeszcze mniejszych towarzyszy — hipotetycznych planet. Odkryto w ten sposób kilka obiektów krążących wokół bliskich gwiazd. M. in. gwiazda Lalande 21185 w Wielkiej Niedźwiedzicy ma towarzysza o masie $0,01 M_{\odot}$, 61 *Cygni C* ma masę $0,008 M_{\odot}$ a hipotetyczna planeta krążąca wokół gwiazdy Barnarda w Wężowniku ma masę $0,0015 M_{\odot}$ (1,57 masy Jowisza!).



Parametry obu składników układu Ross 614 w porównaniu ze Słońcem podane są w tabelce poniżej. *Gwiazda Plasketta* składa się z dwóch olbrzymów typu O obiegających się wzajemnie z okresem 14,414 dni. Suma mas obu składników wynosi 100 M_{\odot} . Gwiazda jaśniejsza jest nieco „lżejsza” (40 M_{\odot}). Przez długi czas uważano, że są to najmaszywniejsze gwiazdy znane nam we Wszechświecie. Sir James Jeans, znany astronom angielski, powiedział kiedyś o tym układzie: „najbardziej masywna i absolutnie najjaśniejsza gwiazda, której parametry znane są z odpowiednią dokładnością. Temperatura 28000°C. Każdy centymetr kwadratowy powierzchni emituje dostatecznie dużo energii, aby poruszać lokomotywę z pełną prędkością przez miliony lat”.

mgr Tomasz CHLEBOWSKI

Parametry układu podwójnego Ross 614

	masa	jasność	promień	temperatura	jasność abs.
Słońce	1	1	1	6000	+ 4,8
Ross 614A	0,14	1/2100	0,3	2700	+ 13,1
Ross 614B	0,08	1/63000	0,1	2000	+ 16,8

Magister Pirożyński opowiada...

W wydanym przez Wydział Matematyki, Mechaniki i Informatyki Uniwersytetu Warszawskiego informatorze dla studentów wybierających dalszą specjalizację znalazłem następującą definicję:

Powiemy, że sfera S^n jest paralelizowalna, gdy istnieje n pól wektorowych stycznych, ortonormalnych w każdym punkcie S^n .

Rozumiem z tej definicji prawie wszystko, ale najbardziej ucieszyłem się terminem „paralelizowalna”. Po pierwsze przypomniało mi to, jak w dzieciństwie (pod wpływem czytanki z Płomyka) szukałem słowa zawierającego zgłoskę ...ly.... Rozbudziło to we mnie pasję badawczą i może dlatego zdecydowałem się zdobyć wyższe wykształcenie. Po drugie, jak pamiętacie, bronie ścisłości i precyzji językowej (Delta 11/1980). W nauce najczęściej właśnie termin obcego pochodzenia oddaje lepiej, ostrzej i dokładniej istotę rzeczy. Oto ułożona przeze mnie tabela

zamiast	znacznie lepiej brzmi
półwalec	semicylinder
wielowskaźnik	polyindeks
przekątna	diagonała
poziom (<i>na tym poziomie</i>)	lewel (<i>na tym lewelu, nie: na tym lewlu</i>)
rodzaj	genus
założenie	asumpcja
odpowiednik	analogon (np. <i>przy asumpcji, że diagonala jest domknięta, otrzymujemy analogon twierdzenia Hausdorffa</i>)
przemienny	komutatywny
wykładniczy	eksponencjalny
wykładać	trzymać wykład (np. <i>na dyferencjalnej i integralnej kalkulacji</i>)
wyprzedzać	adwansować
opóźniać	retardować
zapaść się	skolapsować
przypuścimy, że... i zobaczymy co będzie	popracujemy w reżimie warunku koniecznego
rozszerzać	ekspandować
rozchodzić	propagować (np. <i>proszę się rozpropagować!</i>)
maszyna cyfrowa	kąpiuter
żelastwo	hardware
mięso	software
złożenie	superpozycja
ułożenie obok siebie	dżekstapozycja
upojenie alkoholowe	kontrapozycja

Prawda, że terminy zapożyczone brzmią znacznie poważniej? Nie można tu nie zacytować profesora Antoniego Kępińskiego: „W słownictwie naukowym niekiedy zdecydowanie się na użycie oryginalnego terminu obcego pozwala ostrzej, dobitniej i najkrócej nazwać niektóre treści i pojęcia niż szukanie odpowiedników rodzimych, znaczeniowo niezupełnie równoważnych” („*Z psychopatologii życia seksualnego*”, PZWL, 1973, str. 13).