

tel. 0-63-10-1-6 11-3144593

# della

## SPIS TREŚCI

NUMERU 12(84)

O krzywych i powierzchniach <i>Prof. dr Roman Duda</i>	str. 1
Gra	str. 5
Figury o stałej szerokości <i>Dr Marek Lassak</i>	str. 6
Kształty cząsteczek chemicznych <i>Doc. dr Michał Świącki</i>	str. 8
Konkurs	str. 9
O krzywiźnie, skręceniu i trójnogu Freneta krzywej (I) <i>Doc. dr Andrzej Szybiak</i>	str. 10
Patrz w niebo	str. 13
Mała Delta	str. 14
Regulamin konkursu uczniowskich prac z matematyki	str. 15
Zadania	str. 15

**Rysunki techniczne:**  
*Bogusław Kretkiewicz*

**Nasza okładka:**  
Smoki

**W następnym numerze**  
Również o krzywych  
i powierzchniach



„Delta”  
matematyczno-fizyczno-astronomiczny  
miesięcznik popularny  
Polskiego Towarzystwa  
Matematycznego, Polskiego  
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
Towarzystwa Astronomicznego  
wydawany przy poparciu  
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny:  
doc. dr Jerzy Bartke  
doc. dr Andrzej Bączyński  
doc. dr Bolesław Gleichgewicht  
prof. dr Kazimierz Goebel  
doc. dr Bolesław Grabowski  
dr Jan Hanasz  
doc. dr Bolesław Iwaszkiewicz  
doc. dr Tadeusz Iwiński  
doc. dr Andrzej Januszajtis  
doc. dr Tadeusz Jarzębowski  
prof. dr Leon Jeśmanowicz  
dr Henryk Kaczorek  
prof. dr Marek Kuczma  
mgr Andrzej Mąkowski  
prof. dr Bohdan Paczyński  
prof. dr Zdzisław Pawlak  
prof. dr Arkadiusz Piekara  
doc. dr Sławomir Ruciński  
prof. dr Konrad Rudnicki  
prof. dr Zbigniew Semadeni  
doc. dr Grzegorz Sitariski

prof. dr Józef Smak  
prof. dr Jan Stankowski  
doc. dr Kazimierz Stępień  
prof. dr Mieczysław Subotowicz  
doc. dr Stefan Turnau  
prof. dr Jerzy Wdowczyk  
doc. dr Andrzej Woszczyk  
prof. dr Janusz Zakrzewski —  
wiceprzewodniczący  
prof. dr Wojciech Żakowski —  
przewodniczący

Redaguje Kolegium w składzie:  
Bożena Jaworska-Kordos — ilustracje  
dr Marek Kordos — red. nac.  
dr Andrzej Krasieński  
dr Michał Szurek  
dr Krzysztof Prażmowski — red. techn. graf.  
mgr Krystyna Szypcio — sekr. red.  
doc. dr Michał Świącki — z-ca red. nac.

Adres Redakcji  
ul. Hoża 69 pok. 151,  
00-681 Warszawa

Zakład Narodowy im.  
Ossolińskich — Wydawnictwo  
Wrocław, Oddział w Warszawie  
Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.  
wyd.; 2,50 ark. druk.;  
papier offsetowy III kl. 80 g. 61 x 86  
Wydrukowano w Drukarni im.  
Rewolucji Październikowej  
Warszawa, ul. Mińska 65  
Nr zam. 1114/12/80 O-132

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60—, cena prenumeraty półrocznej  
zł 30—

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach:  
— do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i cały rok następny  
— do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego.  
Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienie w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”.  
Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW, oraz prenumeratorzy indywidualni zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.  
Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTA”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.  
Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.  
Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Konto PKO I OM W-wa 1531-912

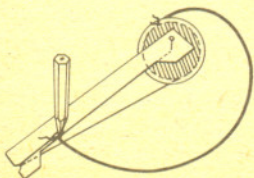
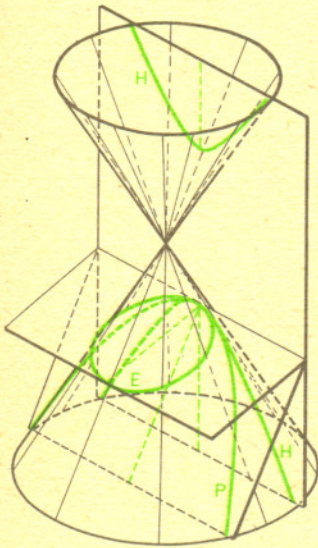
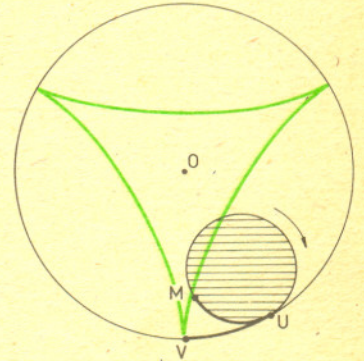
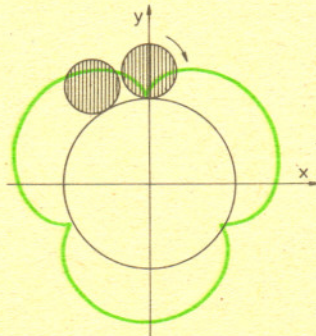
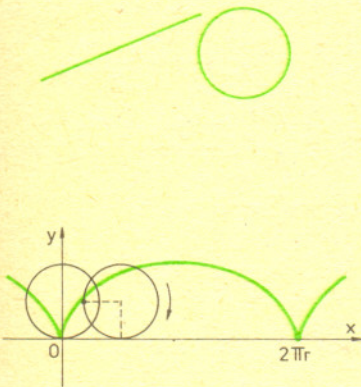
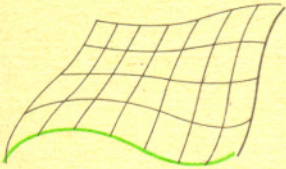
w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław  
w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa  
w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7  
00-068 Warszawa, Poland or with  
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68,  
Bundesrepublik Deutschland.  
— Earls Court Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain,  
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia

Cena 1 egzemplarza zł 5— nr indeksu 35723/35550

# O krzywych i powierzchniach

Prof. dr Roman DUDA



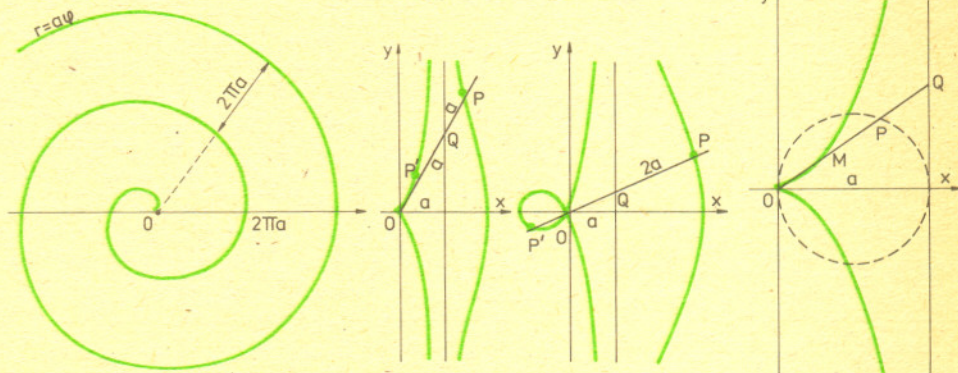
Powiadają niektórzy, że matematyka jest podobna do muzyki. To podobieństwo w każdym razie przyszło mi na myśl, kiedy zasiadłem do pisania tego artykułu i zdałem sobie sprawę, że jest to temat, który można — jak dobry temat w muzyce — rozwinąć wieloma sposobami i w każdym z powstałych tą drogą utworów zawrzeć kawałek ciekawej matematyki. Postanowiłem jednak, że miast rozwijać temat, dokonam jakby przeglądu niektórych rozwinąć z nadzieją, że i takie brząkanie może się okazać dla Czytelnika interesujące. Osią tego przeglądu, wprowadzającą pewien ład, będzie historia.

Jak każda niemal historia, także i ta zaczyna się od Greków. W *Elementach* Euklidesa, najbardziej znanej książce naukowej świata, znajduje się czarujące w swej prostocie określenie: *linia to długość bez szerokości* (księga I, definicja 2). I nieco dalej: *krańcem powierzchni jest linia* (definicja 6). Określenia te leżą do dziś u źródeł intuicyjnego rozumienia krzywej i wystarczały jako jej definicja do czasów niemal nam współczesnych (słowo *linia* jest synonimem krzywej). Pierwsze z nich kładzie nacisk na jednowymiarowy charakter krzywej, drugie zaś wiąże ją z powierzchnią mającą (na mocy definicji 5 tamże) tylko długość i szerokość. Ów związek stał się w XX wieku podstawą tzw. indukcyjnego pojęcia wymiaru, z którego rozwinęła się teoria wymiaru — ale to już do tematu nie należy. Nie ma natomiast w *Elementach* rozumienia krzywej jako trajektorii poruszającego się punktu materialnego — co przyjdzie w czasach nowożytnych — wiązanie bowiem matematyki z materialną rzeczywistością było dla Greków czymś zasadniczo obcym.

Jakie krzywe Grecy znali? Znali ich sporo i wszystkie one brały początek z powabnych matematycznie konstrukcji. Za najpiękniejsze uznawali linię prostą i okrąg oraz ich pochodne jak *cykloida*, *epi-* i *hipocykloidy*, zaś przyrządom służącym do ich rysowania — *liniałowi* i *cyrklowi* — przypisywali uprzywilejowane znaczenie w geometrii.

Odbiło się to na ich kosmologii, w stworzonym bowiem przez nich systemie świata Ziemia znajdowała się w środku, a wokół niej po okręgach krążyły Słońce, Księżyc i planety. Nie zgadzało się to z obserwacjami, więc z czasem rozbudowano ten system tworząc skomplikowany mechanizm, którego zasadniczymi elementami były okręgi toczące się po innych okręgach. Wszystkich tych okręgów u Ptolemeusza (II wiek n.e.) było aż 41, ale z uprzywilejowania tej krzywej Grecy nie zrezygnowali nigdy.

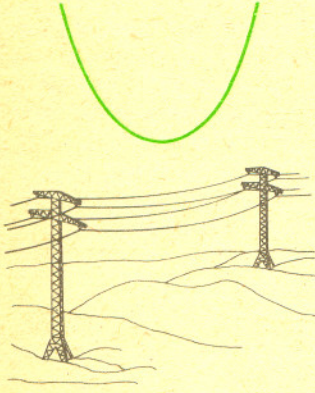
Drugą kategorię krzywych stanowiły *elipsa*, *parabola* i *hiperbola*, określane jako przekroje stożkowe (stąd ich nazwa: *stożkowe*). Apoloniusz (ok. 262 — 190 p.n.e.) napisał o nich wspaniały traktat, matematycznie tak doskonały, że praktycznie zamknął przed badaczami ten obszar, przynajmniej z czysto geometrycznego punktu widzenia. Do trzeciej, najniższej i raczej niechętnie widzianej kategorii należały takie krzywe jak *spirala Archimedesesa*, *konchoida Nikomedesa* czy *cissoida Dioklesa*.



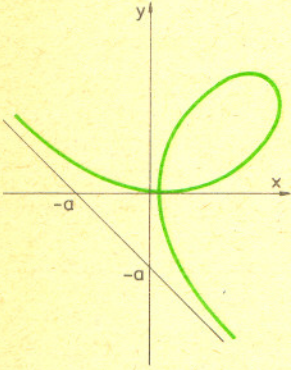
Znacznie mniej niż krzywe interesowały Greków powierzchnie. Zajmowali się tylko kilkoma najprostszymi — płaszczyzną, stożkiem, walcem, sferą — i to bardziej jako miejscem, gdzie są ciekawe rzeczy do badania, jak stożkowe, linia śrubowa itp. niż nimi samymi.



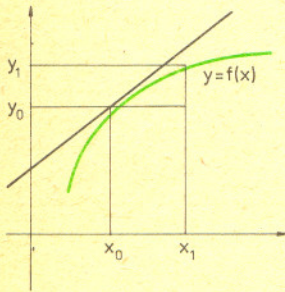
Niezwykły triumf przeżył stożkowe w 1600 lat z górą po swym odkryciu. Kopernik (1473—1543), który przeniósł środek świata do Słońca, a Ziemi i pozostałym planetom kazał obiegać Słońce (oczywiście po okręgach), stworzył teorię matematycznie znacznie prostszą, ale mało dokładną, a nawet dającą wyniki gorsze od greckiej. Poprawił ją Kepler (1571—1630), który pod wpływem lektury traktatu Apoloniusza wpadł na myśl, że planety krążą po elipsach, a Słońce znajduje się we wspólnym ognisku tych elips. Zgodność z obserwacją była tym razem doskonała i w ten sposób konstrukcja matematycznie piękna okazała się także użyteczna. Był to wielki impuls dla badań nad krzywymi, a że zbiegł się on w czasie z otwarciem przez analizę Newtona (1642—1727) i Leibniza (1646—1716) oraz geometrię analityczną Kartezjusza (1596—1650) nowych horyzontów w matematyce, więc w rezultacie na jakieś dwieście lat krzywe znalazły się w samym centrum matematyki, ogromnie wiele od niej otrzymując, ale i silnie na nią w zamian wpływając.



Przed wszystkim pojawiły się dwa obfite źródła dopływu nowych krzywych i dotyczących ich pytań. Jednym było przyrodoznawstwo i powstające na jego terenie zagadnienia. Pod wpływem Galileusza (1564—1642), wspomnianego już Keplera, Huygensa (1629—1695) i wielu innych, zaczęto śmiało sięgać po krzywe będące trajektoriami punktów lub w inny sposób związane z fizyką. Przykładem niech będą dwa słynne niegdyś zagadnienia. Problem *brachistochrony*: znaleźć krzywą przechodzącą przez dwa nieleżące na jednej pionowej punkty  $A$  i  $B$ , wzdłuż której punkt materialny pod wpływem ciężenia przebiegnie drogę  $AB$  w najkrótszym czasie (pomija się tarcie i opór powietrza). Problem *tautochrony*: znaleźć krzywą, wzdłuż której punkt materialny dokonuje wahań (znów pod wpływem ciężenia i z pominięciem tarcia i oporu powietrza) w tym samym czasie niezależnie od punktu startu. W obu przypadkach rozwiązaniem okazała się cycloida, a znalezienie tego rozwiązania stało się początkiem rozwoju rachunku wariacyjnego (co znów nie należy do tematu). Innym przykładem krzywej „fizycznej” jest *linia łańcuchowa*, której kształt przybiera łańcuch podwieszony za dwa końce pod wpływem siły ciężkości.



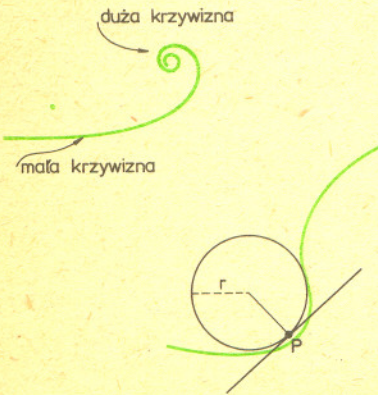
Drugim obfitym źródłem nowych krzywych stała się geometria analityczna Kartezjusza. Dzięki układowi współrzędnych na płaszczyźnie każda krzywa opisuje się za pomocą jakiegoś równania i na odwrót, równania z dwiema niewiadomymi opisują krzywe. W przestrzeni układ współrzędnych pozwala identyfikować równania z dwiema i trzema niewiadomymi z powierzchniami, układy zaś takich równań — z krzywymi jako częściami wspólnymi odpowiadających tym równaniom powierzchni. Nieoczekiwanie przy takim podejściu najprostszymi krzywymi okazują się linia prosta, okrąg i trzy stożkowe, im bowiem i tylko im odpowiadają równania stopnia 1 lub 2. Rysunek obok przedstawia jedną z krzywych stopnia 3, tzw. liść Kartezjusza. Krzywe nie lubiane przez Greków okazały się przestępne, tzn. nie odpowiadają im równania wielomianowe. Znałe Grekom powierzchnie mają stopień 2, ale nie są to wszystkie powierzchnie tego stopnia.

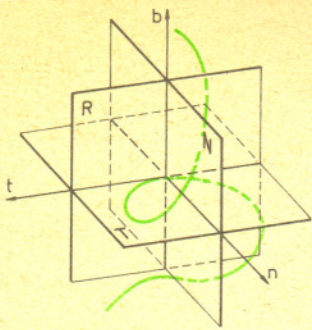


Jednocześnie pojawiły się także nowe, bardzo skuteczne metody badania krzywych dostarczone przez analizę, u której źródeł leżało proste geometryczne pytanie o styczną do krzywej (jeśli krzywa jest wykresem przebytej drogi w zależności od czasu, to tangens nachylenia stycznej wyraża chwilową prędkość ruchu).

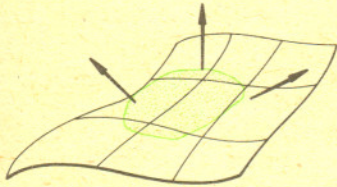
Odpowiedzią analizy było pojęcie pochodnej. Z połączenia geometrii analitycznej i metod analizy wyłoniła się geometria różniczkowa, a pierwszym obiektem jej badań stały się krzywe, których równania miały ciągle pochodne. Sam termin geometria różniczkowa jest późny (wprowadził go Bianchi (1856—1928)), ale badania zaliczane dziś do tego obszaru zostały zapoczątkowane jeszcze przez twórców analizy. Szły one zrazu w kierunku klasyfikacji (sam Newton napisał ciekawy traktat o krzywych stopnia trzeciego), ale obfitość krzywych jest tak olbrzymia, a trudności narastały tak wielkie, że szybko poniechano badania krzywych każdego kolejnego stopnia, podjęto natomiast, inspirowane przez ducha analizy, badanie podstawowych własności krzywych.

Otóż najbardziej charakterystyczną własnością krzywej jest jej zakrzywanie się. Jakkolwiek mglista może się wydawać ta własność, każdy się zgodzi, że linia prosta nie zakrzywia się wcale, zaś okrąg o promieniu  $r_1$  zakrzywia się mniej od okręgu o promieniu  $r_2 < r_1$ . Jeśli chcemy wyrazić krzywiznę krzywej (w danym punkcie) liczbą, trzeba się to starać tak zrobić, by prosta miała krzywiznę 0, a okrąg o promieniu  $r$  krzywiznę  $1/r$ . I to okazuje się możliwe, a jeden z kilku (równoważnych) sposobów jest taki: bierzemy na krzywej  $K$  w otoczeniu punktu  $p$  trzy punkty  $p_1, p_2, p_3$  i prowadzimy przez nie okrąg (jak wiadomo, trzy punkty niewspółliniowe wyznaczają okrąg, a trzy punkty współliniowe wyznaczają prostą, którą traktujemy tu jako okrąg o promieniu  $\infty$ ). Jeśli teraz punkty te uruchomimy i każemy im dążyć do punktu  $p$ , to dla krzywej, której równania mają dwie pierwsze pochodne ciągłe (standardowe założenie geometrii różniczkowej), okręgi wyznaczone przez te punkty będą dążyć do pewnego położenia granicznego. Ten okrąg graniczny najlepiej aproksymuje krzywą  $K$  w otoczeniu punktu  $p$  i jego środek nazywa się *środkiem krzywizny*, a odwrotność jego promienia — *krzywizną* krzywej  $K$  w punkcie  $p$  (pisze o tym dokładnie A. Szybiak). Inny sposób, pochodzący jeszcze od Newtona, wyraża krzywiznę jako prędkość zmiany kierunku wektora stycznego. Podstawowe twierdzenie głosi, że dla scharakteryzowania krzywej płaskiej niezawierającej odcinków (z dokładnością do jej położenia na płaszczyźnie) wystarczy określenie krzywizny w każdym jej punkcie.

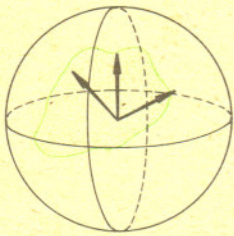




W przypadku krzywej przestrzennej (np. linii śrubowej) postępowanie jest bardziej skomplikowane. Na krzywej przestrzennej  $K$  ustalamy punkt  $p$  i bierzemy w nim styczną  $t$ . Wśród płaszczyzn zawierających  $t$  wyróżnia się taka, która najlepiej przylega do krzywej w otoczeniu punktu  $p$ ; nazywa się ją *plaszczyną ściśle styczną*. Prostopadła względem  $t$  w punkcie  $p$ , która leży w płaszczyźnie ściśle stycznej, nazywa się *normalną główną*, a prosta przechodząca przez  $p$  i prostopadła zarówno do stycznej jak i do normalnej głównej nazywa się *binormalną*. Podobnie jak na płaszczyźnie, zmiany kierunku normalnej głównej (lub, co na to samo wychodzi, zmiany kierunku stycznej) opisują krzywiznę, a zmiany kierunku binormalnej — tzw. *skręcenie*, tj. miarę intensywności odchylenia się krzywej od płaszczyzny ściśle stycznej. Obie te wielkości, *krzywizna* i *skręcenie*, charakteryzują krzywe przestrzenne z dokładnością do ich położenia w przestrzeni (por. artykuł A. Szybiaka).



Z chwilą znalezienia tych eleganckich charakterystyk ciężar badań w geometrii różniczkowej przesunął się na powierzchnie, gdzie trudności były znacznie większe. Podobnie jak krzywa, także powierzchnia się zakrzywia, ale matematyczne uchwycenie tego zakrzywienia okazało się trudne. W miarę postępów badań nad krzywymi próbowano je przenosić na powierzchnie poprzez analizowanie przekrojów płaszczyznami (każdy taki przekrój jest oczywiście krzywą płaską, ma więc swoją krzywiznę etc.) i choć uzyskano wyniki ciekawe, nie były one w pełni zadowalające. Trudności przełamał dopiero Gauss (1777—1855) tworząc piękną koncepcję krzywizny przestrzeni i wprowadzając całkowicie nowe metody, pozwalające na uzyskanie wielu znakomych wyników.



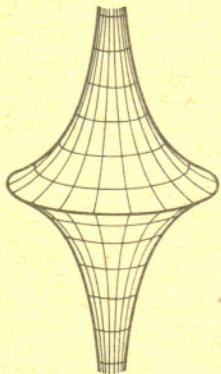
Przyjmijmy, że powierzchnia  $M$  leży w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej. Wystawiając w każdym jej punkcie  $p$  wektor  $\vec{n}(p)$  prostopadły do  $M$  i mający długość 1 otrzymujemy odwzorowanie

$$n: M \rightarrow S^2: p \rightarrow \vec{n}(p),$$

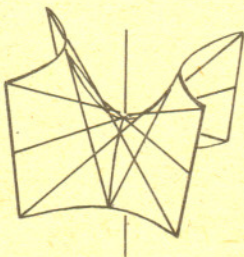
które każdemu punktowi  $p$  powierzchni  $M$  przyporządkowuje ten punkt sfery jednostkowej  $S^2$ , na który wskazuje koniec wektora  $\vec{n}(p)$ , jeśli go przenieść równoległe do środka tej sfery. Z pomocą tego odwzorowania wartość bezwzględna krzywizny  $k(p)$  powierzchni  $M$  w punkcie  $p$  określa się jako granicę stosunku

$$\frac{\text{pole obszaru } n(A)}{\text{pole obszaru } A}$$

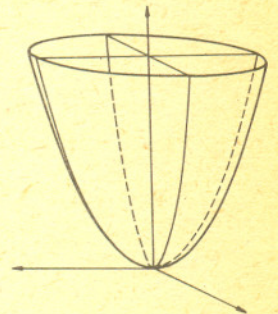
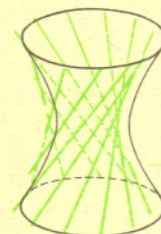
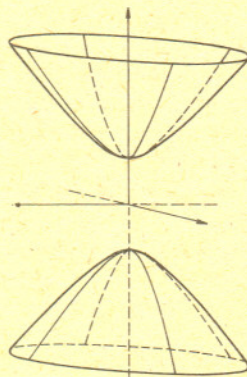
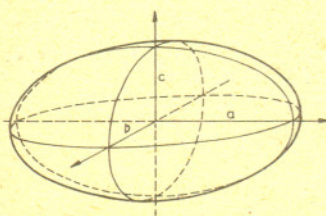
względem obszarów  $A$  zawierających punkt  $p$  i o polach zmierzających do 0. Np. dla płaszczyzny  $P$  odwzorowanie Gaussa  $n: P \rightarrow S^2$  jest oczywiście stałe, a zatem  $k(P) = 0$ , zaś dla sfery  $S^2$  odwzorowanie Gaussa  $n: S^2 \rightarrow S^2$  jest identycznością, skąd  $k(S^2) = 1$ . Płaszczyzna i sfera są więc powierzchniami o stałej krzywiznie. Warto zauważyć, że tę samą wartość bezwzględną

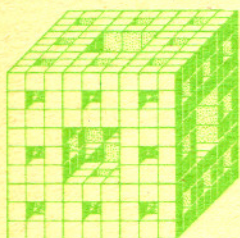
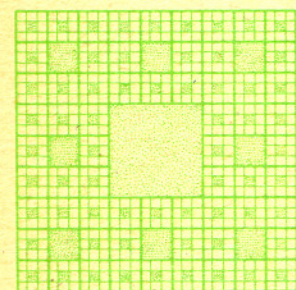
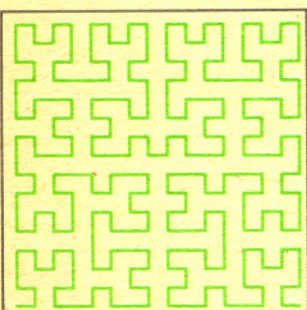
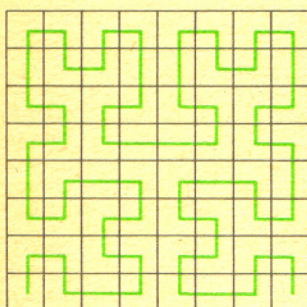
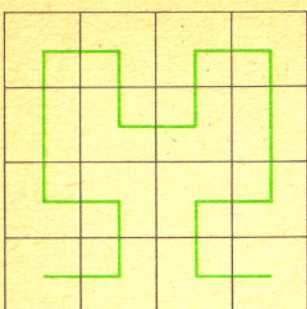


krzywizny, co dla sfery otrzymamy dla tzw. pseudosfery  $|z| = \ln \frac{1 + \sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$  — tu jednak przyjmujemy  $k = -1$ , gdyż powierzchnia ta zakrzywia się „w obie strony”. Na ogół jednak krzywizna zmienia się od punktu do punktu. Jednym z najpiękniejszych wyników Gaussa była słynna *theorema egregium*, na mocy którego krzywizna nie zmienia się przy przekształceniach zachowujących długości krzywych na powierzchni. Był to bardzo ważny wynik i od Gaussa zaczęła się właściwa geometria różniczkowa powierzchni, której rozwój trwa do dziś i silnie wpływa na fizykę, analizę i topologię.



Obok ogromnego postępu w geometrii różniczkowej trwały badania powierzchni tradycyjnymi metodami geometrii analitycznej. Ważnym tu osiągnięciem była kompletna klasyfikacja powierzchni drugiego stopnia (tj. przedstawialnych równaniem stopnia 2 trzech zmiennych), do których należą elipsoidy, hiperboloidy jednopowłokowe, hiperboloidy dwupowłokowe, paraboloidy eliptyczne, paraboloidy hiperboliczne, stożki i walce, natomiast próby badania powierzchni wyższych stopni nie miały ani większego powodzenia ani większego znaczenia.





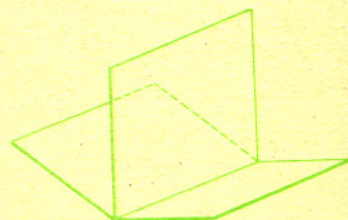
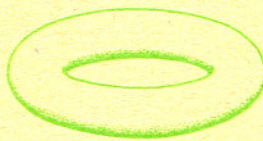
W XIX wieku zasady w matematyce ogromne zmiany, z których bodaj najważniejszą była utrata przez geometrię roli podstawy matematyki. Było to oczywiście skutkiem pojawienia się geometrii nieeuklidesowych, ratunek zaś znaleziono z czasem w teorii mnogości. Dramatyczna ta historia do tematu nie należy, jednakże wynikiem takiego rozwoju wydarzeń było pojawienie się z końcem owego wieku dyscypliny matematycznej zajmującej się najgłębiej leżącymi własnościami przestrzeni, a mianowicie topologii.

Czy krzywa jest także pojęciem topologicznym? Jeśli ma pozostać jednym z podstawowych pojęć matematyki, to powinna być. Z tego jednak punktu widzenia dotychczasowe koncepcje nie nadawały się (były zbyt niejasne jak u Euklidesa, zbyt fizyczne jak u Keplera, zbyt wąskie jak w geometrii różniczkowej) i tak doszło do postawienia pytania: **co to jest krzywa?**

Od postawienia tego pytania do znalezienia nań zadowolającej odpowiedzi minęło lat pięćdziesiąt i historia tego półwiecza oczywiście tu się nie zmieści, wypada jednak wspomnieć o wydarzeniu, które wstrząsnęło całą tą problematyką. W słynnym *Kursie Analizy* Jordan (1838—1922) zdefiniował krzywą jako obraz ciągi przedziału linii prostej. Definicja ta ma wyraźną motywację fizyczną (trajektoria punktu w zależności od czasu), i obejmowała wszystkie dotychczas znane krzywe i w zakresie potrzebnym analizie Jordanowi całkowicie wystarczała. W 1890 roku Peano (1858—1932) zbudował wszakże na odcinku funkcję ciągłą, której obrazem jest pełny kwadrat. Zatem jeśliby przyjąć definicję Jordana, to pełny kwadrat byłby krzywą! A także, jak się później okazało, także pełna kula i każdy w ogóle wielościan! Sam Jordan nie przyjął odkrycia Peano do wiadomości i do końca życia definiował krzywą po swojemu, było jednak jasne, że do ogólnego pojęcia nie tędy droga. Wstrząs wywołany „krzywą Peano” doskonale odzwierciedla uwaga Kleina (1849—1925), że nic nie wydaje mu się bardziej mętne niż pojęcie krzywej.

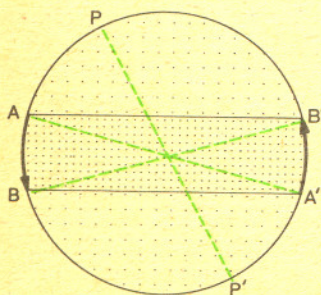
Wyjaśnienie przyszło z mało oczekiwanej strony, a mianowicie poprzez odpowiedź na znacznie ogólniejsze pytanie: **co to jest wymiar?** I to pytanie ma pasjonującą, choć nieco krótszą historię, a znalezienie nań odpowiedzi z początkiem lat dwudziestych naszego wieku przez Urysohna (1898—1924) i Mengera pozwoliło zdefiniować krzywą jako zbiór jednowymiarowy (por. „długość bez szerokości” u Euklidesa) z dodatkowymi i w pełni naturalnymi założeniami zwartości, spójności i metryzowalności. Z tą chwilą badania krzywych stały na solidnych podstawach i nadzwyczaj bujnie się rozwinęły, przy walnym zresztą udziale topologów polskich. Z intuicyjnego punktu widzenia twory wymiarów 1, 2 i 3 są takimi obiektami geometrycznymi, z których każdy ich punkt daje się wyjąć, wraz z pewnym swym otoczeniem, przy pomocy cążek (wymiar 1), nożyczek (wymiar 2) lub piły (wymiar 3). Nieco ściślej, obiekt ma wymiar 1, gdy każdy jego punkt ma dowolnie małe otoczenie, którego ograniczenie składa się z osobnych punktów (miejsca przykładania „cążek”), chociaż punktów tych może być nieskończenie wiele. A jeśli zażądamy ponadto, by obiekt ten leżał w przestrzeni euklidesowej (metryzowalność), był ograniczony i zawierał granice leżących w nim ciągów (zwartość) oraz składał się z jednego kawałka (spójność), to mamy krzywą. Przykłady krzywych płaskich pokazują rysunki obok. Na szczególną uwagę zasługują dwa ostatnie, tzw. *dywany Sierpińskiego*, płaski i przestrzenny. Dywan przestrzenny zawiera w sobie (topologicznie) każdą krzywą, a dywan płaski — każdą płaską.

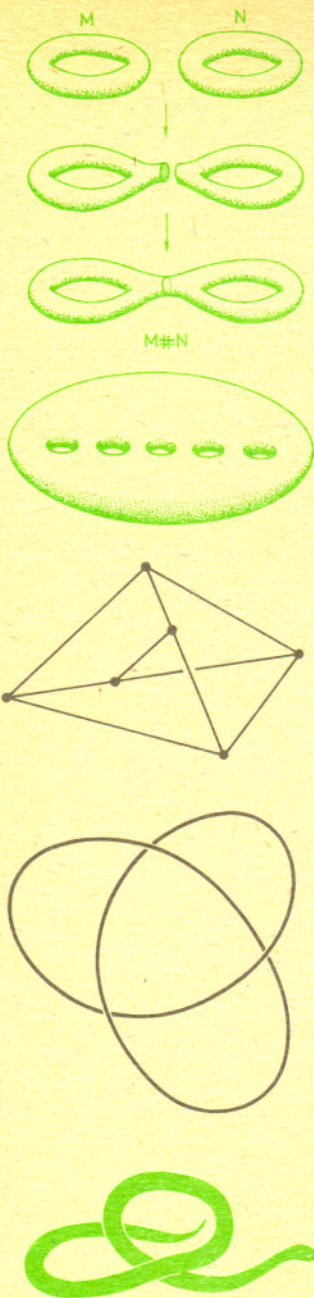
W przeciwieństwie do krzywych, które są wszystkimi tworami jednowymiarowymi (zwartymi, spójnymi i metryzowalnymi), powierzchnie są tworami dwuwymiarowymi (zwartymi, spójnymi i metryzowalnymi) szczególnego rodzaju: każdy ich punkt ma otoczenie takie samo (topologicznie) jak dowolny punkt płaszczyzny. Powierzchnia (ściślej mówiąc, powierzchnia zamknięta) wygląda więc lokalnie jak płaszczyzna i rozumny żuk, wędrujący po niej, ale mający ograniczone pole widzenia — nie potrafi odróżnić jej od płaszczyzny.



Powierzchnią jest sfera i torus, nie jest nią natomiast figura na rysunku wyżej.

Mimo tego ograniczenia, powierzchnie jest nieskończenie wiele (ściślej: przeliczalnie wiele, tj. tyle, ile liczb naturalnych) i stanowią one wdzięczny przedmiot analiz i badań. Na powierzchniach występują ciekawe zjawiska, których nie ma wśród krzywych, np. nieorientowalność. Jeśli nasz żuk ma dwa zegarki i jeden z nich zostawia w domu, a z drugim chodzi na spacer, to może się zdarzyć, iż po powrocie zjeżdżą mu się z wrażenia czułki: zegarki chodzą w różne strony! Najprostszy przykład takiej powierzchni stanowi *płaszczyzna rzutowa*, która powstaje z krążka kołowego przez sklejenie każdej pary przeciwległych punktów na jego obwodzie. Sklejenie to nie daje się do końca wykonać w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej, jeśli jednak ograniczymy się do paska  $ABB'A'$ , to otrzymamy wstęgę Möbiusa (która jest przykładem powierzchni z brzegiem, czego tu nie definiujemy), na której zjawisko nieorientowalności można łatwo zademonstrować posuwając się wzdłuż linii środkowej  $CC'$  (por. artykuł I. Grzegorzcyk w następnym numerze).







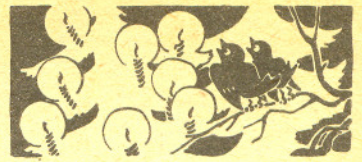
Sfera, torus i płaszczyzna rzutowa są powierzchniami najbardziej, w pewnym sensie, podstawowymi, można z nich bowiem otrzymać każdą inną z pomocą prostej operacji: wycinając w powierzchniach  $M$  i  $N$  okrągłe otwory i sklejając razem ich brzozy otrzymujemy powierzchnię  $M \# N$  zwaną sumą spójną powierzchni  $M$  i  $N$ . Rysunek obok pokazuje sumę spójną dwóch torusów, a twierdzenie klasyfikacyjne mówi, że każda powierzchnia jest topologicznie identyczna bądź ze sferą, bądź z sumą spójną torusów, bądź z sumą spójną płaszczyzn rzutowych. Twierdzenie nie jest banalne: z którą z wyliczonych powierzchni jest identyczna suma spójna torusa i płaszczyzny rzutowej? (por. artykuł J. Olędzkiego w następnym numerze Delt). I tak doszliśmy do czasów zupełnie już nam współczesnych, co skłania do zakończenia tego przeglądu paru słowni komentarza o obecnych badaniach nad krzywymi i powierzchniami oraz roli tych badań we współczesnej matematyce. Wypowiadam tu pogląd bardzo osobisty, wydaje się jednak, że w zakresie krzywych geometria syntetyczna, geometria analityczna i geometria różniczkowa nie mają już wiele do dodania, a choć rozwija się jeszcze topologiczna teoria krzywych, to i ona ma prawdopodobnie największe dni za sobą. Żywe są jednak badania nad niektórymi szczególnymi rodzajami krzywych jak *grafy* i niektórymi szczególnymi rodzajami zagadnień jak *położenie*. Grafem nazywa się skończoną sumę łuków zlepionych końcami i poza nimi rozłącznych, a teoria grafów znalazła liczne i poważne zastosowania w wielu dziedzinach działalności ludzkiej. Na terenie tej teorii zostało w 1976 roku rozstrzygnięte głośne zagadnienie czterech barw (o malowaniu map na płaszczyźnie), stanowiące zresztą zaledwie wierzchołek góry lodowej wielu podobnych, ważnych i trudnych problemów. Najlepszą ilustracją zagadnienia położenia stanowią węzły i pytanie: kiedy dwa węzły są równoważne (jeden daje się przeprowadzić na drugi bez rozplątywania). Matematycznie węzeł jest krzywą zamkniętą, tj. „gumowym” obrazem okręgu w 3-wymiarowej przestrzeni euklidesowej, a dwa węzły są równoważne, gdy istnieje topologiczna transformacja przestrzeni na siebie, przy której jeden z nich przechodzi na drugi. W tym sensie koniczynka i węzeł ósemkowy (na rysunku obok) nie są równoważne. Podobnie jak teoria grafów, także teoria węzłów jest dziś w pełni rozkwitu, ale i ona wykracza poza ten artykuł. Nieco inna jest sytuacja powierzchni, stanowią one bowiem najniższą, „źródłową” warstwę różnorodności, tj. takich przestrzeni (zwartych, spójnych, metryzowalnych), których każdy punkt ma otoczenie takie same (topologicznie) jak dowolny punkt przestrzeni euklidesowej ustalonego wymiaru  $n$  (zwanego wymiarem różnorodności). Jak kiedyś krzywe, tak dziś różnorodności znajdują się w samym centrum matematyki i wszystko wskazuje na to, że długo tam pozostaną.

Brząkanie czas kończyć. Trwało długo, a przecież dotknęliśmy tylko niektórych strun pomijając wiele innych. Pominęliśmy różne krzywe znane i ważne dla zastosowań jak *loksodroma* i *ortodroma*, krzywe balistyczne, trajektorie ciał niebieskich i ich osobliwości (bez ich znajomości niemożliwa by była eksploracja kosmosu), ciekawe krzywe w biologii, krzywe trygonometryczne i opartą na nich analizę harmoniczną zajmującą się badaniem zjawisk periodycznych, XIX-wieczną modę na krzywe i konstruowane podówczas rozmaite aparaty do ich rysowania (np. piękne „krzywe Lissajous”), krzywe jako granice łamanych (z wyjątkiem krzywej Peano), krzywe jako obwiednie, krzywe biegunowe, krzywe jednobieżne i wiele, wiele innych. Podobnie pominęliśmy także różne ciekawe zjawiska na powierzchniach jak *prostokreślność*, *jednostronność*, *zawężlenie* (podobnie jak obraz topologiczny okręgu  $S^1$  może być zawężony w  $R^3$ , tak obraz topologiczny sfery  $S^2$  może być zawężony w  $R^4$ ), punkty siodłowe i inne, a także bliższe omówienie wielu powierzchni szczególnych jak *butelka Kleina*, *katenoidea* itp. Na to wszystko nie starczyło już czasu ni miejsca, bo matematyka to taki osobliwy skarbiec, że im więcej się zeń czerpie, tym więcej skarbów się odkrywa.

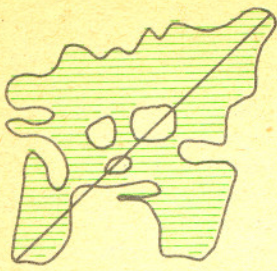


Planszę do naszej gry widzimy na rysunku poniżej. Tworzy ją kwadrat  $6 \times 6$  z dorysowanymi z każdej strony trzema uchami. Gracze wykonują ruchy na przemian, stawiając w poszczególnych kwadratach  lub . Gdy plansza jest już zapelniona, powstaje rysunek, który możemy interpretować jako krzywą przestrzenną. Pierwszy z graczy stara się w ciągu gry, by była ona jak najbardziej „zawężona”, wysiłki drugiego idą w kierunku jej „rozplątywania”, tak, by przy końcu gry krzywa miała jak najmniej „skrzyżowań”, a jak najwięcej niezawężonych pętli. Oto przykład w którym pierwszy z graczy dostał 4 punkty (za każde ze skrzyżowań), a drugi z graczy dostał 1 punkt za izolowaną pętlę. Po każdej partii powinna nastąpić zmiana ról graczy. Możemy wprowadzić oczywiście inne sposoby punktowania. W tę grę można grać nawet na szachownicy  $2 \times 2$  (oczywiście nie za długo). Czy możecie znaleźć optymalne strategie dla graczy?

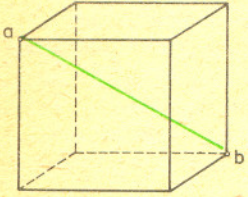
# Figury o stałej szerokości



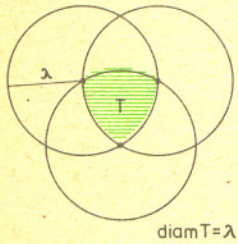
Dr Marek LASSAK



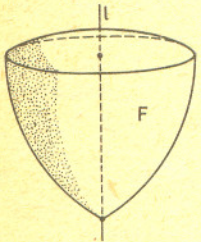
Rys. 1. Tak mierzymy średnicę jeziora Śniardwy.



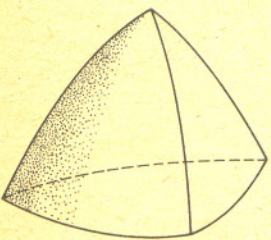
Rys. 2.  $S$  — sześcian o krawędzi długości 1,  $\text{Int } S$  — wnętrze  $S$ . Wtedy  $\text{diam } S = d(a, b) = \sqrt{3}$ ,  $\text{diam Int } S = \sqrt{3}$ .



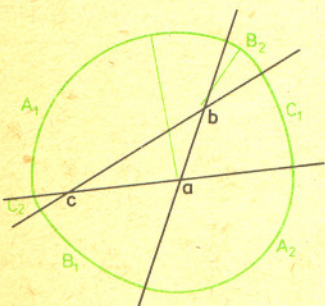
Rys. 3. Trójkąt Reuleaux



Rys. 4. Bryła kompletna.



Rys. 7. Czworoscian Reuleaux nie jest bryłą kompletną.



Rys. 8. Konstrukcja figury kompletnej będącej uogólnieniem zarówno koła, jak i trójkąta Reuleaux.

Średnicą figury nazywamy kres górny odległości  $d(a, b)$  jej punktów. Średnicę figury  $A$  oznaczmy symbolem  $\text{diam } A$ . Na ogół słów „kres górny odległości” nie wolno zamienić na prostsze słowa „największa odległość”. Na przykład koło bez brzegu nie ma pary punktów maksymalnie odległych. Wiadomo jednak, że powyższa zamiana jest poprawna w przypadku figur domkniętych i ograniczonych (zob. np. rys. 2). Takimi właśnie, jak się okaże, będą figury rozważane w tym artykule.

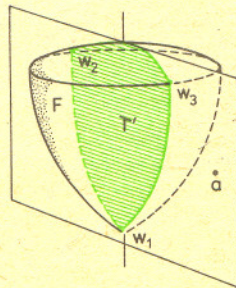
**Definicja.** Ograniczoną figurę nazywamy kompletną, jeżeli dołożenie do niej jakiegokolwiek nowego punktu powoduje zwiększenie średnicy. Czyli.

$$A \text{ jest kompletna} \Leftrightarrow \bigwedge_{a \notin A} \text{diam}(A \cup \{a\}) > \text{diam } A.$$

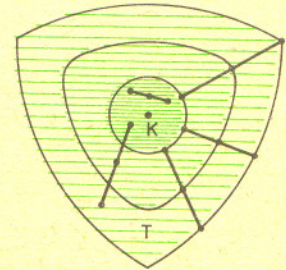
Mówiąc jeszcze inaczej: ograniczona figura  $A$  jest kompletna, jeżeli jest ona maksymalnym zbiorem o średnicy  $\text{diam } A$ .

Najprostszym przykładem figury kompletnej na płaszczyźnie jest koło, natomiast w przestrzeni kula. Inną płaską figurą kompletną jest tzw. trójkąt Reuleaux (zob. rys. 3). Jest on częścią wspólną trzech kół o równych promieniach długości  $\lambda$  i środkach będących wierzchołkami równobocznego trójkąta o średnicy  $\lambda$ . Z rysunku natychmiast odczytujemy, że średnica trójkąta Reuleaux wynosi także  $\lambda$ . Każdy punkt leżący poza trójkątem Reuleaux  $T$  jest więc odległy od jednego z jego „wierzchołków” więcej niż  $\lambda = \text{diam } T$ . Świadczy to o kompletności figury  $T$ .

Jeżeli trójkąt Reuleaux  $T$  obrócimy wokół jednej z osi symetrii  $l$ , to otrzymana bryła obrotowa  $F$  (zob. rys. 4) jest też kompletna. Aby to sprawdzić, weźmy dowolny punkt  $a \notin F$ . Przetnijmy  $F$  płaszczyzną zawierającą  $a$  i oś symetrii  $l$  (zob. rys. 5). W przekroju otrzymujemy trójkąt Reuleaux  $T'$ ! Ponieważ  $a \notin T'$ , więc  $a$  musi być odległy od jednego z jego wierzchołków (który jest oczywiście punktem bryły  $F$ ) więcej niż  $\text{diam } T' = \text{diam } F$ . Z dowolności punktu  $a$  wynika, że bryła obrotowa  $F$  jest kompletna. Ogólniej, jeżeli płaską figurą kompletną mającą oś symetrii obrócimy dookoła tej osi, to otrzymamy przestrzenną figurę kompletną.



Rys. 5. Ilustracja dowodu kompletności bryły obrotowej z rys. 4.



Rys. 6. Tworzenie kompletnej figury pośredniej w zadaniu 2.

**Zadanie 1.** Analogicznie do konstrukcji trójkąta Reuleaux zbudować „wielokąt Reuleaux”. Wykazać, że tylko dla nieparzystej liczby kół jest on kompletny.

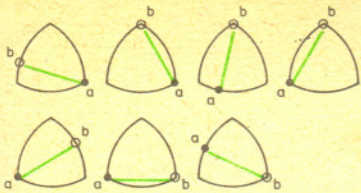
**Zadanie 2.** Z trójkąta Reuleaux  $T$  i koła  $K$  o wspólnych środkach budujemy figurę pośrednią (zob. rys. 6) złożoną z punktów będących środkami odcinków, których jeden koniec leży w  $T$  a drugi w  $K$ . Wykazać kompletność tej figury.

**Zadanie 3.** Analogicznie do konstrukcji trójkąta Reuleaux budujemy w przestrzeni „czworoscian Reuleaux” (rys. 7) jako wspólną część czterech kul o promieniach długości  $\lambda$  i środkach będących wierzchołkami czworoscianu foremego o średnicy  $\lambda$ . Uzasadnić, że otrzymana bryła nie jest kompletna.

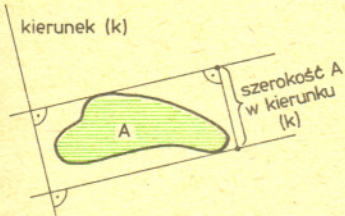
**Zadanie 4.** Podać przykład nieobrotowej przestrzennej figury kompletnej.  
**Wskazówka:** ulepszyć konstrukcję czworoscianu Reuleaux.

Zbudujemy płaską figurę będącą uogólnieniem zarówno trójkąta Reuleaux jak i koła. Weźmy trójkąt o wierzchołkach  $a, b, c$  (rys. 8). Niech  $a$  leży naprzeciwko najdłuższego boku,  $c$  zaś naprzeciwko najkrótszego. Niech  $A_1$  oznacza  $\sphericalangle cab$ ,  $A_2$  zaś kąt wierzchołkowy do  $A_1$ . Podobnie określamy kąty  $B_1, B_2$  i  $C_1, C_2$ . W kącie  $A_1$  kreślimy łuk o środku  $a$  i promieniu  $r \geq d(a, c)$ . Teraz w kącie  $B_2$  kreślimy łuk o środku  $b$  zaczynający się tam, gdzie kończył się poprzedni łuk. Analogicznie, po kolei kreślimy łuki w kątach  $C_1, A_2, B_1$  i  $C_2$  (zob. rys. 8).

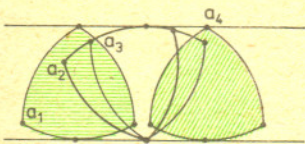
**Zadanie 5.** Wykazać, że skonstruowana powyżej krzywa jest zamknięta i że figura ograniczona tą krzywą jest kompletna.



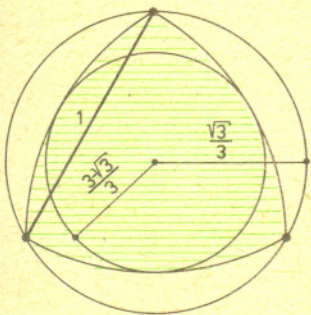
Rys. 9. Przemieszczanie odcinka średnicowego w trójkącie Reuleaux



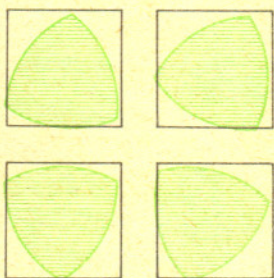
Rys. 10. Szerokość figury w danym kierunku.



Rys. 11. Toczenie figury kompletnej w pasie



Rys. 12. Koło wpisane w trójkąt Reuleaux z opisane na nim.



Rys. 13. Wiertłem, którego przekrój jest trójkątem Reuleaux, można wierceć otwory o kształcie bardzo zbliżonym do kwadratu (tylko na brzegach są niewielkie zaokrąglenia). Odpowiednie urządzenie zbudował i opatentował w 1917 r. (numery patentów 1241175-7) amerykański inżynier Harry J. Watts.

Niektóre zadania można przenieść do  $n$ -wymiarowej przestrzeni euklidesowej, a definicję zbioru kompletnego i pierwsze twierdzenie nawet do przestrzeni metrycznych.

Franz Reuleaux (1829—1905) — matematyk i inżynier, profesor Politechniki w Zurychu, a potem Wyższej Szkoły Technicznej w Berlinie.

**Twierdzenie.** *Figura A jest kompletna wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona częścią wspólną wszystkich kul, których środki leżą w A, promienie zaś mają długość diam A.*

**Dowód.** Oczywiście każda kula o promieniu długości diam A i środku w figurze A zawiera A, a więc A mieści się w części wspólnej wszystkich kul, których środki leżą w A, a promienie mają długość diam A. Pokażemy, że kompletność figury pozwala słowa „mieści się” zamienić na „równa się”. W tym celu wystarczy pokazać, że dla dowolnego punktu  $a \notin A$  znajdzie się taka kula  $K_a$  o środku leżącym w A i promieniu równym diam A, że  $a \notin K_a$ . Znajdźmy więc tę kulę  $K_a$ . Z kompletności figury A wynika, że diam  $(A \cup \{a\}) > \text{diam } A$ . Oznacza to, że istnieje punkt  $b \in A$ , dla którego  $d(a, b) > \text{diam } A$ . A zatem kula o środku  $b \in A$  i promieniu długości diam A nie zawiera punktu a, możemy więc przyjąć ją jako szukaną kulę  $K_a$ .

Reasumując: figura kompletna A jest częścią wspólną wszystkich kul o środkach leżących w A i promieniach długości diam A. Załóżmy, że figura A jest identyczna z częścią wspólną wszystkich kul o środkach leżących w A i promieniach długości diam A. Weźmy dowolny punkt  $c \notin A$ . Istnieje taka kula K o środku  $p \in A$  i promieniu długości diam A, że  $c \notin K \supset A$ . Stąd  $d(c, p) > \text{diam } A$ . Widać zatem, że dołożenie do figury A dodatkowego punktu powoduje zwiększenie się średnicy. Świadczy to o kompletności figury A.

**Zadanie 6.** Wykazać, że każda figura kompletna jest wypukła i domknięta.

Proste rachunki wykazują, że obwód trójkąta Reuleaux o średnicy  $\lambda$  wynosi  $\pi\lambda$ , a jego pole

$$\frac{\pi - \sqrt{3}}{2} \cdot \lambda^2. \text{ Co więcej ma miejsce następujący zdumiewający fakt.}$$

**Twierdzenie.** *Wszystkie kompletne figury płaskie o średnicy  $\lambda$  mają obwód długości  $\pi\lambda$ . Wśród nich największe pole ma koło, a najmniejsze trójkąt Reuleaux.*

Dowód tego twierdzenia jest trudny. Nie jest ponadto prawdziwy jego przestrzenny odpowiednik. Na przykład pole powierzchni kompletnej bryły obrotowej F (zob. rys. 4) o

średnicy  $\lambda$  wynosi  $\pi \left(2 - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \lambda^2 \approx \pi \cdot 0,93 \cdot \lambda^2$  (co łatwo obliczyć wzorem całkowym na pole

powierzchni obrotowej), zaś pole powierzchni kuli o średnicy  $\lambda$  równa się  $\pi\lambda^2$ .

**Zadanie 7.** Wykazać, że w odległości diam A od dowolnego punktu brzegowego figury kompletnej A leży co najmniej jeden jej punkt brzegowy. Powyższe zadanie ułatwia rozwiązanie trzech następujących.

**Zadanie 8.** Jedyną figurą kompletną mającą środek symetrii jest na płaszczyźnie koło, a w przestrzeni kula. Dlaczego?

**Zadanie 9.** Udowodnić, że przez każdy punkt figury kompletnej A przechodzi co najmniej jeden odcinek o długości diam A zawarty w A.

**Zadanie 10.** Wykazać, że odcinek o długości diam A leżący w płaskiej figurze kompletnej A można tak przemieszczać w tej figurze, aby jego końce zamieniły się miejscami (na rys. 9 pokazano to dla trójkąta Reuleaux).

Szerokością figury A w kierunku (k) nazywamy szerokość najmniejszego pasa zawierającego figurę A i ograniczonego prostymi (a w przestrzeni trójwymiarowej płaszczyznami) prostopadłymi do (k) (rys. 10).

**Zadanie 11.** Każda figura kompletna o średnicy  $\lambda$  ma we wszystkich kierunkach tę samą szerokość  $\lambda$ . Dlaczego?

**Zadanie 12.** Wykazać, że jeżeli domknięta wypukła figura ma stałą szerokość  $\lambda$  w każdym kierunku, to jest ona kompletna i ma średnicę  $\lambda$ .

Dlatego figury kompletne nazywane są często figurami o stałej szerokości. Zadania 10 i 11 mówią, że każda figura kompletna może być „toczona” w pasie mając zawsze punkty wspólne z prostymi lub płaszczyznami ograniczającymi ten pas (zob. rys. 11) i że żadne inne wypukłe domknięte figury własności tej nie mają.

Na zakończenie trzy trudniejsze zadania.

**Zadanie 13.** Na każdej kompletnej płaskiej figurze można opisać koło i wpisać w nią koło. Koła te są współśrodkowe, a suma ich promieni równa się średnicy figury. Ekstremalne wartości stosunku tych promieni osiągane są odpowiednio dla koła i trójkąta Reuleaux.

**Zadanie 14.** Na każdej przestrzennej figurze kompletnej o średnicy  $\lambda$  można opisać kulę, a także wpisać w nią kulę. Kule te są współśrodkowe, suma ich promieni wynosi  $\lambda$ . Największy promień

kuli opisanej wynosi  $\sqrt{\frac{3}{8}} \lambda$ .

**Zadanie 15.** Każdą figurę można dopełnić (często na wiele sposobów) do figury kompletnej nie zwiększając przy tym średnicy.





Doc. dr Michał ŚWIECKI



Atomy są zupełnie puste. Prawie cała ich masa jest skupiona w jądrze zajmującym zaledwie  $10^{-15}$  objętości atomu. Resztę wypełniają nieważkie niemal elektrony, z których każdy tworzy swoistą chmurkę dookoła jądra. A jednak atomy wykazują niezwykłą wprost sztywność. Ulotne chmurki elektronowe wcale niełatwo poddają się ścisłaniu. O tym wszystkim przekonano się już 70 lat temu bombardując cząstkami  $\alpha$  (jądrami helu) cienką blaszkę ze złota. Blaszka okazała się całkowicie przepuszczalna. Niechby jednak ktoś spróbował zmniejszyć objętość kawałka złota przy użyciu największych nawet sił ...

Jeżeli chmury elektronowe w atomach i cząsteczkach chemicznych są takie twarde, to muszą mieć zupełnie określone kształty. Naturalnym więc staje się pytanie: jakie są te kształty? Pytanie to nie jest wcale błahę, gdyż owe chmury elektronowe decydują o własnościach chemicznych atomów i cząsteczek. Zanim jednak zajmujemy się związkiem zachodzącym między kształtami atomów i ich własnościami chemicznymi, musimy zwrócić uwagę na pewną bardzo istotną cechę chmur elektronowych. Jest nią tak zwany zakaz Pauliego, który głosi, że w granicach jednej chmury mogą znajdować się najwyżej dwa elektrony. Tak więc najwyżej dwie chmury jednoelektronowe mogą się wzajemnie przenikać. I często się przenikają, bo na tym właśnie polega istota różnych wiązań chemicznych. Dodatnio naładowane jądra atomowe mają przecież tendencję do odpychania się i dopiero znajdujące się między nimi ujemnie naładowane podwójne chmury elektronowe stwarzają dogodne warunki do powstania trwałego wiązania. Nie wnikając w dalsze szczegóły opiszemy kilka najprostszych sytuacji.

## Atom i cząsteczka wodoru



Atom wodoru zawiera jeden elektron, który tworzy kulistą chmurę o promieniu  $5,29 \cdot 10^{-11}$  m. Chmura ta może zawierać jeszcze jeden elektron i dlatego dwa atomy wodoru łatwo tworzą cząsteczkę o kształcie mniej więcej takim, jak na rysunku obok. Teraz już nie ma miejsca na nowe elektrony i typowy cząsteczkowy gaz wodorowy okazuje się znacznie mniej aktywny niż gaz atomowy.

## Atom helu

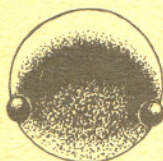
Jest zupełnie podobny do atomu wodoru, tyle, że w kulistej chmurze znajdują się dwa elektrony. Dlatego właśnie hel prawie wcale nie wchodzi w reakcje chemiczne. Podobną własność mają też inne gazy szlachetne.

## Atom azotu i cząsteczka amoniaku



Kolejne atomy układu okresowego pierwiastków zawierają coraz więcej elektronów. Nowe elektrony tworzą chmury znajdujące się coraz dalej od środka atomu. Na przykład atom azotu zawiera siedem elektronów. Dwa z nich tworzą chmurę kulistą, taką samą jak chmura w atomie helu. Dwa następne chmurę w kształcie powłoki sferycznej o promieniu cztery razy większym, zaś trzy ostatnie — trzy pojedyncze chmurki o kształcie prostokątnych rozetek. Chmurki te dosyć łatwo (choć trudniej niż dla atomu wodoru, bo zajmują mniej miejsca) przyłączają inne pojedyncze chmury elektronowe. Połączenia te tworzą oczywiście kąty proste. Tak właśnie powstaje cząsteczka amoniaku składająca się z jednego atomu azotu i trzech atomów wodoru. Całość tworzy czworościan o podstawie równobocznej i niemal prostych kątach między kierunkami od atomu azotu do atomów wodoru. Podobny do azotu kształt mają też znacznie większe cząsteczki fosforu, arsenu, antymonu i bizmutu. Tworzą więc w połączeniu z wodorem podobne, choć większe czworościany.

## Atom tlenu i cząsteczka wody

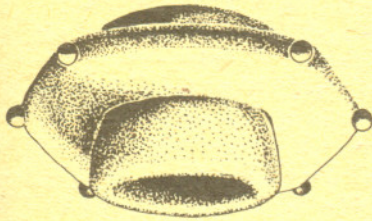
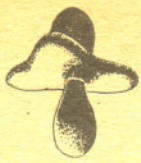


Atom tlenu ma o jeden więcej elektron niż atom azotu. Chmura tego elektronu wypełnia jedną z pojedynczych rozetekowych chmur azotowych. Pozostają dwie niekompletne chmury umieszczone prostopadle do siebie. Z tego powodu w cząsteczce wody, zawierającej jeden atom tlenu i dwa wodoru, odpowiednie kierunki tworzą kąt bliski prostemu. Patrząc na układ okresowy pierwiastków domyślamy się, że podobne są połączenia wodoru z siarką (siarkowodór), selenem, telurem i polonem.

## Węgiel i cząsteczka benzenu



Wydawałoby się, że własności chemiczne wszystkich pierwiastków można bardzo prosto zrozumieć. Wszystkie elektrony z wyjątkiem kilku tworzą kompletną, mniej więcej kulistą chmurę. Kilka zaś ostatnich (ich liczba decyduje o numerze kolumny układu) tworzy najpierw powłokę sferyczną, a następnie coraz bardziej kompletny system rozetekowy. Choć generalnie zasada ta pozostaje słuszna, to jednak odstępstwa od niej są częste i istotne. Najważniejszym bez wątpienia tego przykładem jest atom węgla. Jego wyjątkowe własności grają decydującą rolę w chemii organicznej i biochemii. Atom węgla ma sześć elektronów. Dwa z nich tworzą znowu kulisty układ helowy, ale pozostała czwórka może mieć kilka różnych kształtów, co



prowadzi do wielkiego bogactwa połączeń węglowych. Jedną z możliwości jest układ, w którym osie trzech pojedynczych chmur leżą w jednej płaszczyźnie pod kątem  $120^\circ$ , czwarta zaś chmura tworzy rozetkę prostopadłą do tej płaszczyzny (patrz rysunek). Taka właśnie konfiguracja jest przyczyną powstawania cyklicznych wiązań węglowych. I tak na przykład w benzenie ( $C_6H_6$ ) dwie z trzech chmur współpłaszczyznowych łączą się z odpowiednimi chmurami sąsiednich atomów węgla, trzecia zaś łączy się z chmurą wodorową. Całość tworzy regularny pierścień sześciokątny z naroślami wodorowymi. Pozostają rozetkowe chmury, prostopadłe do płaszczyzny pierścienia. Każda z nich pokrywa się częściowo z odpowiednimi chmurami obu sąsiednich atomów węgla. Powstają dwa pierścienie o przekroju rozetkowym, nad i pod płaszczyzną węglową. Pierścienie te zawierają sześć elektronów, które mogą przemieszczać się cyklicznie. Tak więc wewnątrz cząsteczki benzenu może płynąć prąd elektryczny. Magnetyczne własności tego prądu można zaobserwować w doświadczeniu.

Doszliliśmy w ten sposób do tak złożonych kształtów, że czas już chyba kończyć. Dodajmy jeszcze, że teoria chmur elektronowych powstała na gruncie mechaniki kwantowej. Opisuje ona ogromne bogactwo różnorodnych własności chemicznych ciał. Zdziwiające jest jednak, że wynikające z niej kształty cząsteczek zostały odgadnięte już przeszło sto lat temu przez ... van der Waalsa. W jaki sposób? Przecież wtedy nawet elektron nie był jeszcze znany. Otóż okazuje się, że między obojętymi już prawie chemicznie cząsteczkami i atomami gazów szlachetnych działają pewne niewielkie siły przyciągające o bardzo krótkim zasięgu. Siły te zamieniają się w gwałtowne odpychanie dopiero po zetknięciu się cząsteczek. To właśnie wspomniana poprzednio twardość i nieprzenikliwość skompletowanych już chmur elektronowych. Krótki zasięg sił międzycząsteczkowych powoduje, że maleją one gwałtownie już w niewielkiej odległości od powierzchni cząsteczek. Stąd prosty wniosek, że najsilniej mogą się związać takie cząsteczki, które mają kształty uzupełniające się wzajemnie, to znaczy takie, które do siebie pasują. Takie właśnie założenie było podstawą rozumowania van der Waalsa. Dzisiaj zresztą również, dla bardzo złożonych (np. w biochemii) cząsteczek jesteśmy zmuszeni do wykonania podobnego zabiegu. Nie możemy bowiem przeprowadzić odpowiednich obliczeń i dopiero na podstawie znanych z doświadczenia własności wiązań międzycząsteczkowych wnioskujemy o kształcie samych cząsteczek.



Tak zwany „zimny ogień” wyrzuca wokół piękne, wcale zresztą nie zimne iskierki, dostarczając w ten sposób patrzącym miłej rozrywki. Może jednak dać również okazję do wypróbowania umiejętności w zaprojektowaniu, przeprowadzeniu i zinterpretowaniu eksperymentu. Pytanie

### Z JAKĄ PRĘDKOŚCIĄ WYRZUCANE SĄ ISKRY?

jest niełatwe do rozstrzygnięcia. I to właśnie niełatwe pytanie stanowi temat naszego konkursu.

Uczestnicy powinni do dnia 15.02.1981 r. nadesłać do redakcji opis eksperymentu, który przeprowadzili, uzyskane na tej drodze dane, oraz szkic rozumowania, które te dane zamieniło w odpowiedź na konkursowe pytanie. Komisja konkursowa złożona z

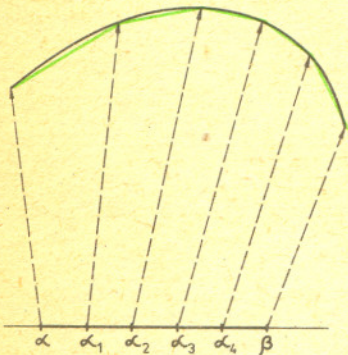
1. doc. dr Michała Święckiego
2. mgr Macieja Jędrzejczaka
3. mgr Andrzeja Branickiego

oceni wszystkie prace, najlepsze wyróżni wartościami nagrodami i opublikuje w Delcie.

Zapraszamy do wzięcia udziału.

# O krzywiznie, skręceniu i trójnogu Freneta krzywej (I)

Doc. dr Andrzej SZYBIAK



Rysunek 1. Długość krzywej obliczamy jako granicę długości łamanych wpisanych w krzywą.

Próba obliczenia długości dowolnego łuku elipsy zadała całej armii matematyków robotę na ponad sto lat; w rezultacie powstała obszerna teoria tzw. funkcji eliptycznych. Przy obliczaniu długości łuku elipsy dochodzimy bowiem do całek postaci  $\int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 s} ds$ , których przy  $0 < k < 1$  nie można wyrazić przez skończoną liczbę funkcji elementarnych.



Najczęściej stosuje się oznaczenie  $\alpha \times \beta$ . Jest to wektor prostopadły do  $\alpha$  i  $\beta$ , o długości równej polu równoległoboku o bokach  $\alpha$  i  $\beta$  i takim, że trójka  $\alpha, \beta, \alpha \times \beta$  jest dodatnio zorientowana (równoskrętna z  $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ ). Gdy  $\alpha$  i  $\beta$  zależą od parametru  $t$  w sposób różniczkowalny, to  $\alpha \times \beta$  też i  $(\alpha \times \beta)' = \alpha' \times \beta + \alpha \times \beta'$ . Podobną regułę można łatwo wyprowadzić i dla każdego iloczynu skalarnego:  $\langle \alpha, \beta \rangle' = \langle \alpha', \beta \rangle + \langle \alpha, \beta' \rangle$ .

Co należy rozumieć przez krzywą w przestrzeni euklidesowej  $E^3$ ? Jak określić styczną do krzywej? Jak scharakteryzować zakrzywienie przy pomocy liczb? Tymi zagadnieniami zajmowano się już od czasów Leibniza, a może i wcześniej, zanim sprecyzowano pojęcie krzywej. Okazało się, że odpowiedź na postawione wyżej pytania najlepiej formułować w języku analizy matematycznej, dokładnie zaś: rachunku różniczkowego. Dlatego też dział matematyki w którym badamy krzywe, ich styczne, krzywizny, skręcenia, itp. nazywamy *geometrią różniczkową*.

§1. Ustalamy na osi liczbowej przedział  $J$  i niech  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  będą funkcjami ciągłymi na  $J$ . Trójkę  $[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]$  oznaczmy przez  $\varphi$ . Ustalmy w przestrzeni  $E^3$  ortonormalny układ współrzędnych i przyporządkujmy każdemu punktowi  $x \in J$  punkt w  $E^3$ , którego współrzędnymi są liczby  $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$  i  $\varphi_3(x)$ . Tym sposobem określamy odwzorowanie ciągłe  $\varphi$  przedziału  $J$  w przestrzeń  $E^3$ . Zapas tego odwzorowania, czyli zbiór punktów o współrzędnych  $[\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)]$  nazywamy krzywą w  $E^3$ . Samo odwzorowanie  $\varphi$  nazywamy opisem parametrycznym tej krzywej. Założyliśmy, że odwzorowanie  $\varphi$  jest ciągłe. Jeżeli jednak nie założymy czegoś więcej, to wyżej postawiona definicja krzywej może się okazać zbyt obszerna. Można podać przykład krzywej wypełniającej obszar dwuwymiarowy, lub nawet trójwymiarowy. Dlatego dalej będziemy rozważać wyłącznie takie opisy krzywych, których składowe nie tylko są ciągłe, ale mają również ciągłe pochodne pierwszego i drugiego rzędu. Zagadnienie obliczania długości krzywych podjął już Archimedes podając metodę obliczania długości okręgu. Używane dzisiaj określenie długości krzywej niczym się w zasadzie nie różni od podanego wówczas przez mistrza z Syrakuz. Ustalmy w  $E^3$  krzywą opisaną przez odwzorowanie  $\varphi$  określone na przedziale  $J$ . Jeżeli podzielimy  $J$  na  $N$  rozłącznych podprzedziałów,  $J = (\alpha, \alpha_1) \cup [\alpha_1, \alpha_2) \cup [\alpha_2, \alpha_3) \cup \dots \cup [\alpha_{N-1}, \beta)$ , to odcinki  $\varphi(\alpha)\varphi(\alpha_1), \varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2), \dots, \varphi(\alpha_{N-1})\varphi(\beta)$  utworzą łamaną w  $E^3$ . Kres górny zbioru długości takich łamanych będziemy uważać za długość krzywej opisanej przez  $\varphi$ . Jeżeli dla każdego przedziału domkniętego i ograniczonego  $J' \subset J$  krzywa opisana przez odwzorowanie  $\varphi$  zacieśnione do  $J'$  ma skończoną długość, to mówimy, że krzywa jest prostowalna. W toku nauki w szkole czy też na uczelni technicznej Czytelnik nie spotka się z krzywymi nieprostowalnymi. W szczególności prostowalnymi są proste, łuki okręgów, linia śrubowa, łuki elips. Na długość  $l$  krzywej będącej obrazem przedziału  $\langle a, b \rangle$  poprzez  $\varphi$  mamy znany wzór

$$(1) \quad l = \int_a^b \sqrt{(\varphi_1'(u))^2 + (\varphi_2'(u))^2 + (\varphi_3'(u))^2} du.$$

Zauważmy, że wyrażenie pod pierwiastkiem po prawej stronie wzoru (1) jest kwadratem skalarnym wektora o składowych  $\varphi_1'(u), \varphi_2'(u), \varphi_3'(u)$ . Ustalmy krzywą opisaną przez odwzorowanie różnowartościowe  $\varphi$  i wybierzmy na krzywej punkt  $p = \varphi(x_0)$ . Dla dowolnego punktu  $x > x_0$  przyjmijmy  $\sigma(x) =$  długość obrazu przedziału  $[x, x_0]$  poprzez  $\varphi$  a dla  $x < x_0$   $\sigma(x) = -$  długość obrazu  $[x, x_0]$  no i  $\sigma(x_0) = 0$ . Tak określona funkcja  $\sigma$  jest na  $J$  funkcją rosnącą i ciągłą, a wobec tego ma odwrotną, którą oznaczmy przez  $z$ . Określamy nowe odwzorowanie  $w$  przyjmując  $w(x) = \sigma(z(x))$ . Mamy więc

$$w(\sigma(y)) = \varphi(\sigma(y)) = \varphi(y) \quad \text{dla każdego } y \in J.$$

Z konstrukcji wynika, że:

1° odwzorowanie  $w$  jest określone na przedziale o długości równej długości obrazu  $J$  poprzez  $\varphi$  i opisuje tę samą krzywą co  $\varphi$ .

2° długość łuku tej krzywej zawartego pomiędzy punktami  $w(s_1)$  a  $w(s_2)$  wynosi  $|s_1 - s_2|$ .

Opisy krzywych w  $E^3$  mające własność 2° nazywają się naturalnymi. Z powyższych konstrukcji wynika, że jeżeli krzywa ma opis różnowartościowy i składowe tego opisu mają pochodne ciągle, to mają również opisy naturalne.

§ 2. Dalej będziemy się zajmować krzywą w  $E^3$  opisaną przez odwzorowanie naturalne w przedziale  $L$  w przestrzeń  $E^3$ , o którym założymy ponadto, że jego składowe  $w_1, w_2, w_3$  mają ciągle pochodne stopnia pierwszego i drugiego. Wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$(2) \quad \begin{aligned} \tau_i(x, h) &= w_i(x) + w_i'(x)h + \frac{1}{2} w_i''(x)h^2, \\ \rho_i(x, h) &= w_i(x+h) - \tau_i(x, h). \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Oznaczmy przez  $w(x)$  wektor wodzący punktu  $w(x)$  względem pewnego układu współrzędnych  $(e_1, e_2, e_3)$ , a dalej niech

$$(3) \quad \begin{aligned} \vec{\rho}(x, h) &= \sum_{i=1}^3 \rho_i(x, h)e_i \\ \vec{\tau}(x, h) &= \sum_{i=1}^3 \tau_i(x, h)e_i \end{aligned}$$

$|a|$  będzie oznaczać długość wektora  $a, \langle a, b \rangle$  — iloczyn skalarny wektorów  $a$  i  $b$ ,  $a \times b$  — ich iloczyn wektorowy.



Rozwiązanie zadania M 246. Z warunków zadania wynika, że łączna liczba boków czarnych trójkątów byłaby o 10 większa od liczby boków białych trójkątów. Ale obie te liczby są podzielne przez 3 — sprzeczność.



Rozważmy teraz granicę  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (w(x+h) - w(x))$ .

Wektor  $w(x+h) - w(x)$  możemy sobie wyobrazić jako skierowaną cięciwę łuku naszej krzywej, mającą początek w punkcie  $w(x)$  a koniec w punkcie  $w(x+h)$ . Przy naszych założeniach odnośnie opisu  $w$  liczba  $h$  jest długością łuku krzywej zawartego pomiędzy tymi punktami, zaś  $|w(x+h) - w(x)|$  jest długością cięciwy. Iloraz tych dwóch wielkości mierzy do jedności przy  $h$  zmierzającym do zera. A więc wektor  $w'(x)$  ma długość 1 i określa kierunek krzywej. Wektor ten oznaczymy symbolem  $T(x)$ . Jest to jednostkowy wektor styczny do naszej krzywej, a jego zwrot jest jednoznacznie wyznaczony przez opis  $w$ . Wykażemy, że wektor

$$w''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (w'(x+h) - w'(x))$$

jest do niego prostopadły. Różniczkując tożsamość

$$|w''(x)|^2 = 1 = \sum_{i=1}^3 (w'_i(x))^2$$

otrzymamy

$$0 = 2 \sum_{i=1}^3 w'_i(x) w''_i(x) = 2 \langle w'(x), w''(x) \rangle.$$

Iloczyn skalarny wektorów  $w'(x)$  i  $w''(x)$  jest równy zeru, a więc wektory te są albo prostopadłe albo drugi z nich jest wektorem zerowym (bo pierwszy nie jest).

Ażeby otrzymać na naszej krzywej funkcję charakteryzującą jej krzywiznę będziemy się starali dobrać w danym jej punkcie najściślej dopasowany do niej okrąg. Za miarę krzywizny naszej krzywej uważamy odwrotność jego promienia. Wybierzmy więc na naszej krzywej trzy punkty  $w(x-h)$ ,  $w(x)$  i  $w(x+h)$ . Jeżeli nie leżą one na jednej prostej, to przechodzi przez nie dokładnie jeden okrąg. Promień  $r_h(x)$  tego okręgu obliczymy ze wzoru

$$r_h(x) = \frac{\text{iloczyn boków trójkąta o wierzchołkach } w(x-h), w(x), w(x+h)}{4 \text{ pola tego trójkąta}}$$

Zastępując w tym wzorze pole trójkąta przez połowę długości iloczynu wektorowego boków  $w(x-h)w(x)$  i  $w(x)w(x+h)$  otrzymamy

$$(4) \quad r_h(x) = \frac{a(x, h)b(x, h)c(x, h)}{2|a(x, h) \vee b(x, h)|}$$

gdzie  $a(x, h) = w(x) - w(x-h)$ ,  $b(x, h) = w(x+h) - w(x)$ ,  $c(x, h) = w(x+h) - w(x-h)$  i  $|a(x, h)| = |a(x, h)|$ ,  $|b(x, h)| = |b(x, h)|$ ,  $|c(x, h)| = |c(x, h)|$ . Przy ustalonym  $x$  i zmierzającym do zera  $h$  wielkość  $r_h(x)$  zmierza do określonej granicy albo do nieskończoności. Wykażemy to, jednocześnie obliczając granicę. Mamy (zob. oznaczenia (2) i (3))

$$a(x, h) = w'(x)h - \frac{1}{2} w''(x)h^2 + \vec{\varrho}(x, h)$$

$$b(x, h) = w'(x)h + \frac{1}{2} w''(x)h^2 + \vec{\varrho}(x, h)$$

$$c(x, h) = 2w'(x)h + \varrho(x, h) + \vec{\varrho}(x, -h)$$

a stąd obliczamy

$$a(x, h) \vee b(x, h) = 2w(x) \vee w''(x)h^3 + w'(x) \vee \varrho(x, h)h - w'(x) \vee \varrho(x, -h)h$$

Z określenia funkcji wektorowej  $\varrho$  wynika, że  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varrho(x, h)}{h^2} = 0$ , a stąd

$$(5) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} a(x, h) \vee b(x, h) = 2w'(x) \vee w''(x).$$

Podobnie możemy wykazać, że

$$(6) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} a(x, h)b(x, h)c(x, h) = |w'(x)| = 1.$$

Korzystając z faktu, że  $w''(x)$  jest wektorem prostopadłym do wektora jednostkowego  $w'(x)$ , otrzymamy

$$(7) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{1}{h^3} a(x, h) \vee b(x, h) \right| = |w''(x)|$$

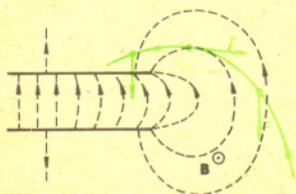
Wychodząc ze wzoru (4) i wykorzystując (5), (6), (7) wyliczmy ostatecznie, że

$$(8) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{r_h(x)} = |w''(x)|.$$



Rozwiązanie zadania F85.

Istotnym dla przyspieszenia jest odstęp czasu od chwili włączenia pola magnetycznego. W tym okresie pola elektryczne i magnetyczne są polami statycznymi. Siła, z jaką oddziałuje na ładunek takie pole magnetyczne, nie wykonuje pracy, pole elektrostatyczne jest zachowawcze. Praca jego sił na drodze zamkniętej wynosi zero. Efektowi przyspieszenia cząstki w obrębie kondensatora towarzyszyć musi hamowanie w obszarze zewnętrznym. Projekt jest dzięki swej niezwyklej „ekonomiczności” bezwartościowy. Efekt hamowania staje się bardziej namacalny, gdy narysuje się linie pola poza wnętrzem kondensatora. Należy również zwrócić uwagę, iż tor cząstki nie będzie już okręgiem, a jego znalezienie nawet dla najprostszej geometrii układu (płyty kołowe) jest problemem bardzo trudnym. Tor przedstawiony na rysunku posiada charakter umowny i ma za zadanie unaocznić działające siły pola elektrycznego.





Mamy już więc wzór na promień granicznego okręgu. Znajdziemy jego środek oraz płaszczyznę, w której on leży. W tym celu rozpinamy na wektorach  $a(x, h)$  i  $b(x, h)$  płaszczyznę i będziemy szukać jej położenia granicznego przy  $h$  zmierzającym do zera. Płaszczyzna ta jest wyznaczona jednoznacznie wtedy i tylko wtedy, kiedy punkty  $w(x-h)$ ,  $w(x)$  i  $w(x+h)$  nie leżą na jednej prostej. Pomińmy więc ten przypadek, kiedy nasza krzywa jest prostą w otoczeniu punktu  $w(x)$ . Wektor  $h^{-3}a(x, h) \vee b(x, h)$  jest więc wektorem prostopadłym do płaszczyzny wyznaczonej przez punkty  $w(x-h)$ ,  $w(x)$  i  $w(x+h)$ . Obliczyliśmy już, że jego granica przy  $h$  zmierzającym do zera jest równa wektorowi  $\frac{1}{2}w(x) \vee w''(x)$ . A więc równanie płaszczyzny granicznej ma postać

$$(9) \quad \left\langle \overrightarrow{w(x)X}, \frac{1}{2} w'(x) \vee w''(x) \right\rangle = 0.$$

$X$  oznacza tu zmienny punkt płaszczyzny. Płaszczyznę (9) nazwiemy płaszczyzną ściśle styczną naszej krzywej w punkcie  $w(x)$ .

**Przykład.** Na rysunku 2 widzimy linię śrubową. Ma ona przedstawienie parametryczne

$$w(t) = (w_1(t), w_2(t), w_3(t)),$$

gdzie  $w_1(t) = \cos t$ ,  $w_2(t) = \sin t$ ,  $w_3(t) = t$ . Aby znaleźć np. równanie płaszczyzny ściśle stycznej, musimy to przedstawienie zmienić tak, by było „naturalne”. Z wzoru (1) obliczamy łatwo, że długość łuku linii śrubowej między punktami  $w(t_1)$  a  $w(t_2)$  wynosi  $\sqrt{2}|t_1 - t_2|$ .

Przyjmijmy zatem  $s = t\sqrt{2}$  i wtedy

$$w(s) = \left( \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$$

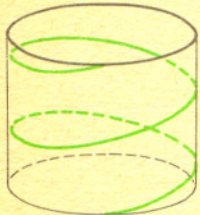
$$w'(s) = \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$w''(s) = \left( -\frac{1}{2} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

$$w'(s) \vee w''(s) = \left( +\frac{1}{2\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Gdy  $s = 0$ , to  $w' \vee w'' = \left( 0, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ . Płaszczyzna ściśle styczna ma równanie

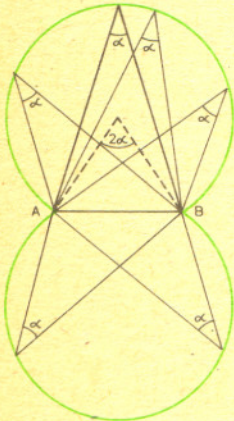
$$-x_2 + 2x_3 = 0.$$



Rys. 2. Linia śrubowa



**Rozwiązanie zadania M244.** Miejsce geometryczne punktów płaszczyzny, z których dany odcinek  $AB$  widać pod ustalonym kątem, składa się z dwóch łuków okręgów o promieniu  $r = AB/2 \sin \alpha$  (rysunek). Szukane miejsce geometryczne składa się zatem z punktów przecięcia tych „ósemek”



dla  $AB$  i  $A'B'$ . Za pomocą cyrkla i linijki możemy wyznaczyć dowolną liczbę takich punktów. Rozwiązanie analityczne (rysunek) sprowadza się do wyliczenia punktów przecięcia okręgów

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y \pm a)^2 = a^2 + \frac{1}{4}$$

z okręgami

$$(x \pm a)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{1}{4}.$$

Otrzymujemy stąd układ równań

$$x^2 - 3x + 2 + y^2 \pm 2ay = 0$$

$$y^2 - 3y + 2 + x^2 \pm 2ax = 0.$$

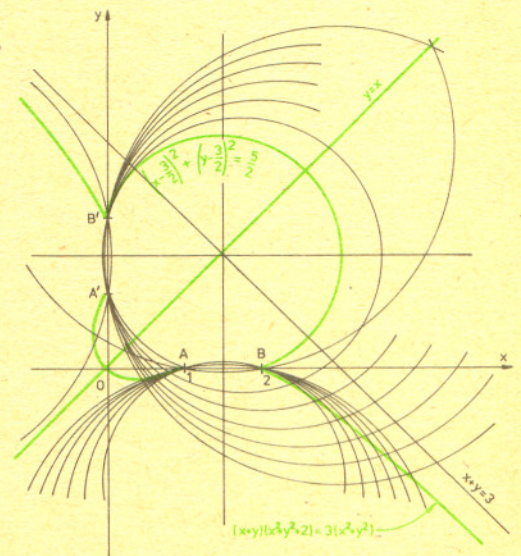
Ponieważ  $a$  jest dowolnym parametrem rzeczywistym, wystarczy rozpatrywać tylko dwa przypadki:

1) znaki zgodne (oba plusy): wtedy po odjęciu równań stronami i prostych przekształceniach dostajemy  $x - y = 0$  lub  $x^2 + y^2 - 3(x + y) + 2 = 0$ , tj. dwusieczną kąta między tymi odcinkami i okrąg przechodzący przez ich końce. Punkty krótszych łuków  $AB$  i  $A'B'$  nie spełniają warunków zadania. 2) znaki przeciwne, np.  $+$ ,  $-$ . Wówczas po odjęciu równań stronami wyliczamy, że  $a = \frac{3(x-y)}{2(x+y)}$

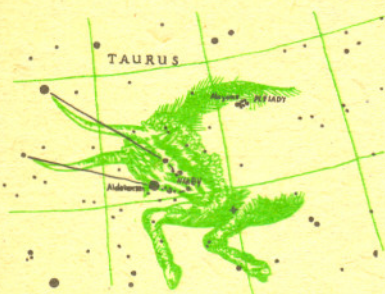
i wstawiając to do pierwszego równania dostajemy po prostych przekształceniach

$$(x+y)(x^2 + y^2 + 2) - 3(x^2 + y^2) = 0.$$

Punkty tej krzywej (rysunek) też spełniają warunki zadania — z wyjątkiem punktów położonych na łukach między  $B$  i  $A$  oraz między  $B'$  i  $A'$ .



## Patrz w niebo



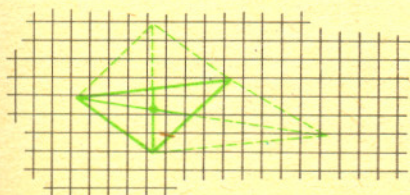
W grudniu wracają na wieczorne niebo zimowe gwiazdozbiory: Byk, Orion i Woźnica. Chyba każdy z Czytelników naszego kącika już je poznaje. Najpiękniejszy jest Orion, jednak nie mniej ciekawy jest Byk. Rok temu mówiliśmy o dwóch gromadach otwartych widocznych gołym okiem w Byku: Plejadach i Hiadach. Dzisiaj zajmiemy się obiektem niewidocznym bez użycia dużych teleskopów, który jednak od ponad 900 lat był wyzwaniem dla astronomów. (Teleskop wynaleziono około 370 lat temu). M1, bo o niej mowa, jest mgławicą gazową o nieregularnym kształcie i wielu odnogach, przypomina niektórym kraba. Tak została ochrzczone. Mgławica Kraba jest pozostałością po ogromnym wybuchu, który wstrząsnął starzejącą się gwiazdą istniejącą w miejscu, gdzie teraz znajduje się jądro mgławicy — szybko obracająca się (30 obrotów na sekundę), mała (ok. 15 km średnicy) gwiazda neutronowa błyskająca w przestrzeń podobnie jak latarnia morska. Wybuch nastąpił 4 lipca 1054 roku. Chińczycy, którzy w owych czasach najuważniej obserwowali niebo, zapisali (a właściwie narysowali) dość dokładnie położenie superjasnej nowej gwiazdy. Dzięki nim mogliśmy zidentyfikować obiekt, który rozjaśniał niebo w 1054 roku ze słabutką plamką widoczną dzisiaj przez lunety. Był to wybuch supernowej, jej jasność była porównywalna z jasnością Księżyca. Dzisiaj jest słabsza miliony razy, przy czym dużą część swej energii oddaje na pobudzenie do świecenia mgławicy, która od 926 lat oddala się od jądra z prędkością 500 km/s. Widząc jak małą plamką jest Mgławica Kraba, możemy sobie pośrednio zdać sprawę z tego, jak wielka odległość dzieli Ziemię od M1 — ile to jest 7 tysięcy lat świetlnych (a więc supernowa wybuchła w początkach historii Egiptu). Wybuch supernowej, którego możliwe mechanizmy opiszemy w jednym z najbliższych numerów, nie jest czymś unikalnym we Wszechświecie. Pisaliśmy dwa miesiące temu o supernowej z 1572 r. Jest to jednak zjawisko dość rzadkie; wydaje się, że taki stan przeżywa każda dostatecznie masywna gwiazda. W naszej Galaktyce taki wybuch notowano średnio raz na 300 lat (patrz tabela niżej). Dzisiaj, przy pomocy naziemnych badań optycznych i radiowych oraz satelitarnych badań rentgenowskich odbieramy promieniowanie emitowane również przez pozostałości innych supernowych w naszej Galaktyce, których wybuchy umknęły uwadze dawnych obserwatorów. Obserwujemy też resztki wybuchów supernowych, które nastąpiły zanim człowiek nauczył się pisać, rysować, chodzić na dwóch nogach ... Największe zasługi w odkrywaniu i badaniu takich pozostałości ma niewątpliwie amerykański satelita Einstein (któremu nadano to imię, kiedy okazało się, że codziennie coś ciekawego dzięki niemu odkrywano).

Obserwując inne galaktyki również możemy czasem zauważyć wybuchy supernowych. Są one czasami jaśniejsze od wszystkich pozostałych (dziesiątków miliardów) gwiazd w galaktyce. Częstość wybuchów jest podobna a czasem nawet większa. Może więc będziemy w najbliższym czasie świadkami ogromnego wybuchu w sąsiedztwie Słońca?

*mgr. Tomasz CHLEBOWSKI*



Rozwiązanie zadania M 245. Indukcja względem liczby  $n$  wierzchołków wielokąta: gdy  $n = 3$ , wystarczy na dwa sposoby dopełnić nasz trójkąt do równoległoboku, aby znaleźć dwie jego środkowe. Gdy teraz  $n > 3$ , możemy podzielić nasz wielokąt na  $(n-1)$  — kąt i trójkąt odcinając pewien wierzchołek. Środek ciężkości naszego  $n$ -kąta leży na prostej łączącej środki  $(n-1)$  — kąta i trójkąta, na który nas:  $n$ -kąt podzielił, a te środki umiemy znaleźć na mocy założenia indukcyjnego. Powtarzając tę konstrukcję dla dwóch różnych podziałów otrzymamy na przecięciu uzyskanych prostych poszukiwany środek ciężkości  $n$ -kąta.

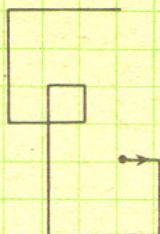
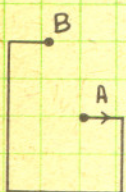


## Historyczne supernowe

rok n.e.	Dzień	Gwiazdozbiór	Główny badacz	Miejsce obserwacji	Pewność identyfikacji
185	7 grudnia	Centaur		Chiny	prawdopodobna
386	?	?		Chiny	niewielka
393	?	?		Chiny	niewielka
1006	6 maja	Wilk		Chiny, Japonia, Europa, Arabowie	100 %
1054	4 lipca	Byk		Chiny, Japonia	100 %
1181	?	?		Chiny, Japonia	prawdopodobna
1572	6 listopada	Kasjoepa	Tycho Brahe	Europa, Chiny, Korea	100%
1604	10 października	Wężownik	J. Kepler	Europa, Chiny, Korea	100%



## Łamane na kratkowanym papierze

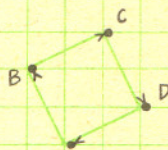
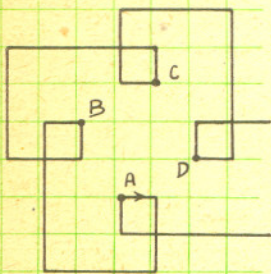
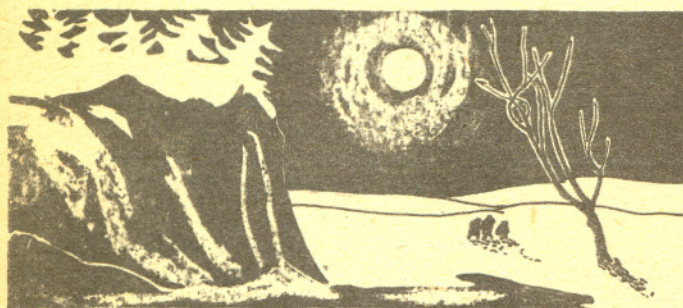


Rys. 1. Rys. 2.

W poprzednim odcinku Małej Delti zajmowaliśmy się łamanymi, które kreśli się na kratkowanym papierze poruszając się według następującej reguły. Idziemy kilka kroków (odcinków o długości boku kratki) na wschód, potem kilka kroków na południe, zachód i północ. Liczbę kroków w każdym kierunku określają z góry dane liczby skończonego ciągu liczbowego. Dla przykładu — drogę odpowiadającą ciągowi (1, 2, 3, 4, 1) mamy narysowaną na rys. 1. Aha! — jeszcze jedna reguła. Po wyczerpaniu wszystkich wyrazów ciągu nie przerywamy marszu, tylko skręcamy (stałe w prawo) tak, jak każdą znow początkowe wyrazy ciągu. Tak więc dalsza nasza droga wygląda tak jak na rysunku 2.

Postawiłem kilka pytań dotyczących takich łamanych, zachęcając Czytelników do nadsyłania wyników swoich badań. Jedno z pytań brzmiało: Kiedy powrócimy do punktu wyjścia? W narysowanym przypadku na pewno tak jest (rys. 3). Dlaczego? Jeśli rozpatrzmy drogę odpowiadającą całemu ciągowi (1, 2, 3, 4, 1) to łatwo możemy policzyć, dokąd nas ona zaprowadzi. Otóż poszliśmy 1 krok na wschód, potem 3 kroki na zachód i ponownie 1 na wschód. Łącznie przesunęliśmy się na wschód o  $-1$  krok, czyli 1 krok na zachód. W kierunku północ — południe przesuniemy się o 2 kroki na północ. Łącznie przesuniemy się więc z punktu wyjścia tak jakbyśmy szli po naznaczonej strzałce.

Co będzie dalej? To samo? Tak, tyle że rozpoczynamy tym razem od drogi na południe i zmienia się nam kierunki. Przejdziemy od punktu B do punktu C. Potem znow zaczniemy od innego kierunku (na zachód), a za czwartym razem — na północ. Znajdziemy się w punkcie wyjścia.



Rys. 3. Rys. 4.

Rozpatrzyliśmy jeden, szczególny ciąg. Na ile sytuacja była typowa?

Zobaczmy co było ważne w rozumowaniu. Przesunięcie AB będzie się zawsze liczyć w podobny sposób. Położenie punktu C otrzymujemy obracając AB w prawo (i przesuwając). Kierunek obrotu brał się stąd, że kolejny odcinek drogi zaczynaliśmy od marszu na południe (zamiast na wschód). Gdyby przyszło nam zacząć od marszu na północ — musielibyśmy dokonać obrotu w lewo. Nie jest to koniec analizy. Pozostają jeszcze dla Was pytania: co by było gdyby po przejściu pierwszego odcinka drogi następny odcinek przyszłoby rozpocząć od marszu na zachód? A ponownie na wschód? Po czym poznać, z którym przypadkiem mamy do czynienia? A oto jeszcze jeden problem: Kiedy nakreślona łamana ma osie symetrii?

Jak i poprzednio, czekam na listy, przesłane do redakcji Delti.



Jan WASZKIEWICZ

# Regulamin konkursu uczniowskich prac z matematyki

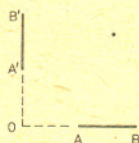


1. Konkurs organizowany jest corocznie przez Zarząd Główny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i Redakcję miesięcznika „Delta”, przy poparciu Ministerstwa Oświaty i Wychowania.
2. W konkursie mogą brać udział uczniowie wszystkich typów szkół.
3. Konkurs składa się z eliminacji i finału.
4. W eliminacjach bierze udział każdy uczeń, który w terminie do dnia 1 maja prześle pod adresem Redakcji „Delty” jeden egzemplarz swojej pracy maturalnej lub innej pracy matematycznej. Do pracy należy dołączyć następujące informacje: adres prywatny autora, nazwa i adres szkoły, imię i nazwisko nauczyciela — opiekuna pracy.
5. Praca powinna zawierać samodzielny wkład ucznia i pełną informację o źródłach, z których korzystał jej autor. Prace czysto kompilacyjne nie będą dopuszczane do finału konkursu.
6. Prace nadesłane na eliminacje zostaną ocenione przez Komisję Konkursu i kompetentnych recenzentów. Te spośród prac, które spełniają warunki konkursu, zostaną przedstawione Jury Konkursu. Jury zakwalifikuje najlepsze prace do finału, który odbędzie się w trakcie dorocznej Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego.
7. Zawiadomienia o zakwalifikowaniu do finału zostaną przesłane autorom prac oraz nauczycielom — opiekunom prac przed końcem roku szkolnego.
8. Finałiści i nauczyciele opiekujący się ich pracami otrzymują od Zarządu Głównego PTM zaproszenie do udziału w Sesji na koszt Towarzystwa.
9. Finał polega na wygłoszeniu przez ucznia, podczas specjalnego otwartego posiedzenia Sesji, referatu (trwającego nie dłużej niż 15 minut) i wzięciu udziału w dyskusji na temat, któremu poświęcona była praca.
10. Rezultaty finału oceni Jury Konkursu. Jury będzie brało pod uwagę, oprócz merytorycznej wartości pracy, również samodzielność i oryginalność ujęcia tematu oraz przebieg referatu i dyskusji. Jury przyznaje medale: złoty, srebrny i brązowy, wyróżnienia oraz nagrody pieniężne fundowane przez Ministerstwo Oświaty i Wychowania.
11. Ogłoszenie wyników finału następuje w trakcie Walnego Zgromadzenia Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Medale wręcza Prezes Towarzystwa. Wszyscy uczestnicy finału otrzymują dyplomy.
12. Wyniki konkursu i skrót zwycięskiej pracy będą opublikowane w miesięczniku „Delta”.
13. Komisję Konkursu oraz Jury tego Konkursu powołuje Zarząd Główny PTM na wniosek Komitetu Redakcyjnego „Delty”.



## Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI



**M 244.** Odcinki  $AB$  i  $A'B'$  położone są jak na rysunku ( $OB \perp OB'$ ,  $OA = OA'$ ,  $OB = OB'$ ,  $AB = A'B'$ ). Znaleźć miejsce geometryczne punktów płaszczyzny, z których te odcinki widać pod równymi kątami.

Rozwiązanie na str. 12

**M 245.** Na kartce kratkowanego papieru narysowano wielokąt, którego wierzchołki leżą w węzłach kratek. Wykazać, że środek ciężkości tego wielokąta można skonstruować za pomocą samej linijki.

Rozwiązanie na str. 13

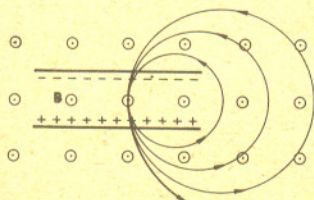
**M 246.** Czy dziesięciokąt można pokryć takim parkietem z białych i czarnych trójkątów, aby:

- a) dwa trójkąty podziału były albo rozłączne, albo stykały się wierzchołkiem, albo miały wspólny bok, przy czym w ostatnim przypadku były różnych barw;
- b) każdy bok dziesięciokąta był bokiem pewnego czarnego trójkąta?

Rozwiązanie na str. 11

Redaguje doc. dr Michał ŚWIĘCKI

**F 85.** Zaproponowano następujący akcelerator. W komorze próżniowej znajduje się naładowany kondensator płaski z dwoma niewielkimi, usytuowanymi naprzeciwko siebie otworkami. Przez jeden z nich wstrzelona zostaje naładowana cząstka i równocześnie zostaje włączone jednorodne pole magnetyczne równoległe do płyt kondensatora, mające pokazany na rysunku zwrot. Pole elektryczne w kondensatorze przyspiesza cząstkę tak, że przy wylocie jej energia kinetyczna jest większa niż przy wlocie. Pole magnetyczne zawraca ją z powrotem bez zmiany prędkości. Powtarzając takie cykle wielokrotnie można uzyskać odpowiednio duże prędkości. Ocenić z punktu widzenia praw fizyki wartość projektu.



Rozwiązanie na str. 11

(T. Tratkiewicz)



## Skromne początki

6 kwietnia 1846 roku na posiedzeniu Towarzystwa Królewskiego w Edynburgu została przedstawiona praca 15-letniego chłopca, Jamesa Clarka Maxwella. Kilka miesięcy przedtem chłopiec ten był z ojcem na posiedzeniu Towarzystwa i przysłuchiwał się z uwagą dyskusji o zadziwiających umiejętnościach starożytnych Etrusków. Nie znając wyższej matematyki, lepił oni naczynia o przekrojach w kształcie pięknych owali Kartezjusza (rysunek). Dyskusja w Towarzystwie była właśnie poświęcona domysłom, jak to się im udawało.

Trudno domyślić się, czy Etruskowie znali sposób odkryty przez Maxwella (sklони bylibyśmy raczej sądzić, że robili to „na oko”). W każdym razie konstrukcja, którą on podał jest tak prosta, że aż dziwne, że nie znano jej w XIX wieku. Analogicznie do elipsy i hiperboli, na których odpowiednio suma i wartość bezwzględna różnicy odległości od dwóch danych ognisk jest stała, Maxwell rozpatrywał krzywe o dwóch ogniskach, złożone z punktów, których odległości  $r_1$  i  $r_2$  od tych ognisk są związane zależnością

$$mr_1 + nr_2 = c = \text{const.}$$

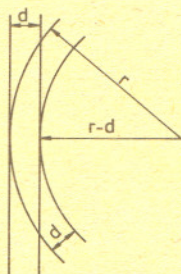
Rysunki 2 i 3 pokazują jak narysować takie krzywe. Możemy także zobaczyć, dlaczego owal właśnie tak się nazywa (*ovum* = jajko). Nietrudno wyprowadzić równanie takiej krzywej o dwóch ogniskach

$$\sqrt{x^2 + y^2} = c + \frac{m_1}{m_2} \sqrt{(x-d)^2 + y^2}$$

( $d$  — odległość między ogniskami,  $c$  — stała). Są to zatem owale Kartezjusza. Jeżeli jedno z ognisk jest w nieskończoności (konkretnie: w trakcie ruchu punktu po krzywej odpowiedni odcinek nici przesuwają się równolegle), naszym „owalem” jest parabola. Maxwell podał również sposób rysowania krzywych o trzech ogniskach (rysunek). Co dla czterech ognisk?

## Po co dokładnie?

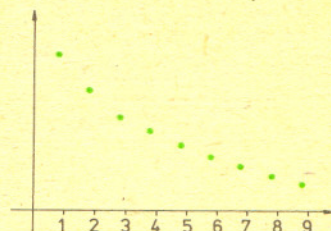
Linia narysowana na papierze ma naprawdę pewną dodatnią szerokość  $d$ . Wobec tego „proste prostopadłe” przecinają się naprawdę w kwadracie o boku  $d$ , a proste nachylone pod kątem  $\alpha$  — w rombie o boku  $\frac{d}{\sin \alpha}$ . Możemy się pocieszać tym, że ostrząc dokładniej ołówek zwiększamy dokładność rysunku.



Niestety nie zawsze: „punkt styczności” „okręgu” o promieniu  $r$  z „prostą” jest odcinkiem koła o cięwiwie  $l = 2\sqrt{r^2 - (r-d)^2} = 2\sqrt{rd - d^2}$ . „Względna dokładność”  $\frac{d}{l} = \frac{d}{2\sqrt{rd - d^2}}$  maleje do zera, gdy  $d$  maleje do zera. A więc im dokładniej rysujemy tym gorsze (względnie) rezultaty...

Badania statystyczne na materiale stałych fizycznych, informacji z roczników statystycznych itp. liczb występujących „w przyrodzie” pokazały, że dobrym przybliżeniem rozkładu zmiennej losowej „ $i$ -ta cyfra znacząca” ( $0 < i \leq 9$ ), jest

$$p(i) = \log_{10} \frac{i+1}{i}$$



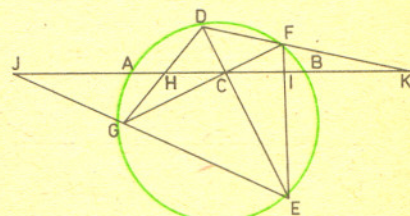
Jeżeli obliczymy wszystkie iloczyny liczb dwucyfrowych a następnie policzymy, ile razy jaka cyfra tam występuje, otrzymamy taką tabelkę

cyfra	1	2	3	4	5	6	7	8	9
występuje razy	1954	1481	1181	952	767	618	494	372	281

Co mają wspólnego ze sobą te dwie informacje?

## Motyły na elipsach

Dość łatwo wykazać, że okrąg ma następującą własność (patrz rysunek):



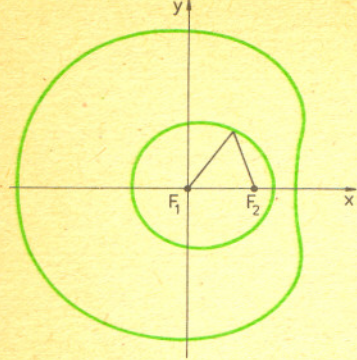
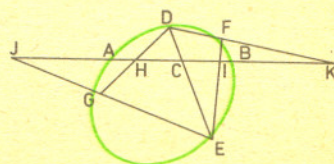
Jeżeli  $C$  jest środkiem cięciwy  $AB$ , zaś  $DE$  i  $JG$  są dwiema innymi cięciami przechodzącymi przez  $C$ , to  $CH = CI$  i  $CJ = CK$  (gdzie  $J, H, K, I$  są punktami przecięcia cięciw jak na rysunku). Nazywa to się twierdzeniem o motyłu (chyba widać, dlaczego). Co ciekawsze, podobna własność przysługuje również elipsom. Dowód jest bardzo prosty: każdą elipsę można otrzymać jako rzut okręgu, a własność „motyla” zachowuje się przy rzutowaniu (dlaczego?).

Ale okazuje się, że tylko elipsy są takie: jeśli krzywa (nie całkiem dowolna, o czym niżej) ma własność „motyla”, to jest elipsą. Dokładnie, mamy następujące

**Twierdzenie Jacobsona.** Jeżeli  $S$  jest brzegiem wypukłego, domkniętego i ograniczonego obszaru na płaszczyźnie o tej własności, że ilekroć  $AB$  jest cięciwą,  $C$  jej środkiem, a  $DE$  i  $FG$  — dwiema innymi cięciami przechodzącymi przez  $C$ , to  $CH = CI$ ,

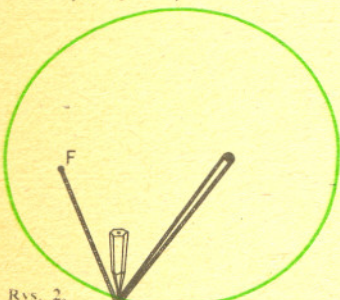
to wtedy  $S$  jest elipsą.

Dodajmy, że krzywe  $S$  spełniające założenia powyższego twierdzenia są zwane owalami. A więc jeżeli na owalu siedzi motyl, to ten owal jest elipsą...

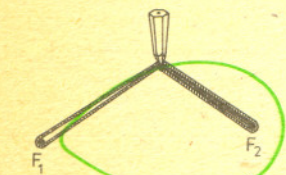


Rys. 1. Owal Kartezjusza jest miejscem geometrycznym punktów płaszczyzny, których odległości  $r_1$  i  $r_2$  od dwóch ustalonych punktów (ognisk)  $F_1$  i  $F_2$  są związane niejednorodnym równaniem  $r_1 + mr_2 = a$ . W ogólnym przypadku owal Kartezjusza składa się z dwu oddzielnych gałęzi, a w prostokątnym układzie współrzędnych ma równanie

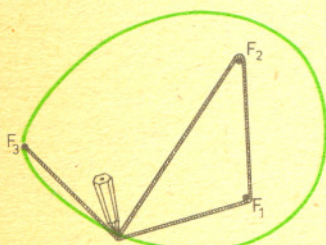
$$\sqrt{x^2 + y^2} + m\sqrt{(x-d)^2 + y^2} = a$$



Rys. 2.



Rys. 3. *Ovum* — jajko ( $m = 2, a = 3$ )



Rys. 4.

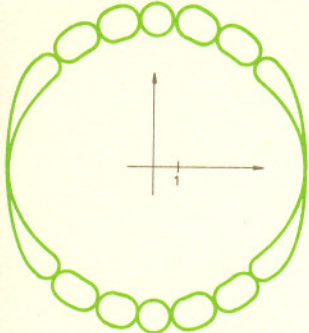
## Zgubiona siekiera

Pewnemu człowiekowi zginęła siekiera. Podejrzewając, że ukradł ją syn sąsiada, począł go obserwować. Chód i kroki tamtego były takie, jakby ukradł siekiere, jego wyraz twarzy był taki, jakby ukradł siekiere, sposób mówienia taki, jakby ukradł siekiere: w jego ruchach, postawie i we wszystkim co czynił, nie było niczego, co by nie świadczyło, że właśnie on ukradł siekiere. Przypadkiem ów, któremu zapadł się było narzędzie, kopał rów i przy tej okazji znalazł swą siekiere. Gdy ponownie zobaczył syna sąsiada następnego dnia, zauważył, że w ruchach i postawie tamtego nie było nic, co by wskazywało, że ukradł siekiere. Lie Jü-k'ou, „Lie-tyy”; ok. 200 p.n.e.



Krzywa  $r = a \cos \alpha$  dla pięciu różnych wartości  $a$ .

### Ornamenty algebraiczne



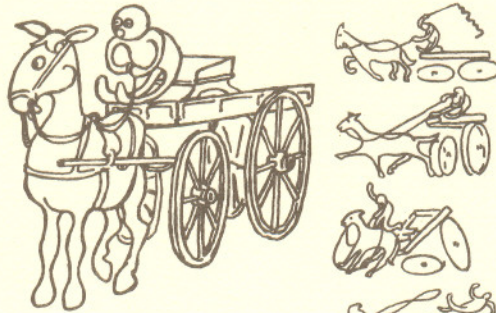
Rys. 1.  $y = \pm \sqrt{49 - x^2} \pm \sqrt{49 - ((x \pm (3 \pm 2 \pm 1))^2)}$



Rys. 2.  $y = \pm \sqrt{441 - x^2} \pm \sqrt{(4 \pm 2 \pm 1)^2 - (x \pm (7 \pm 7))^2}$

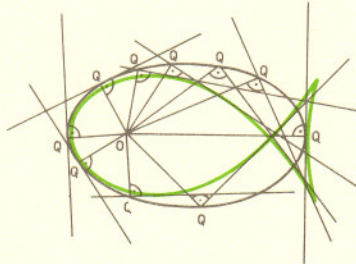


Rys. 3.  $y = 2 + \sqrt[3]{x^2} \pm \sqrt{(x+1)(3-x)}$

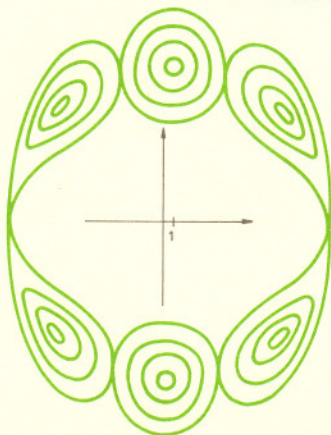


### Elipsa w technice

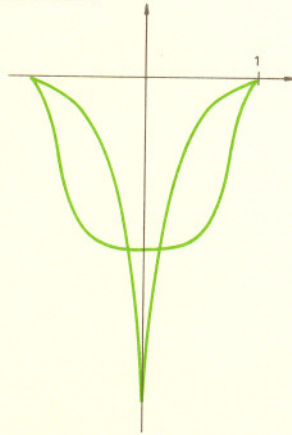
Sztuka nie kłamie —  
Te sympatyczne  
Koła u wozu  
Są eliptyczne!  
Rysunek daje  
Efekty śliczne —  
Lecz sama jazda  
Raczej komiczne!



Taką rybkę można otrzymać w następujący sposób. Przez każdy punkt elipsy (praktycznie: kilkanaście) prowadzimy prostą prostopadłą do odcinka łączącego ten punkt z ogniskiem. Nasza rybka jest krzywą styczną (obwiednią) do wszystkich tych prostych.



Rys. 4.  $y = (4 \pm 2 \pm 1)p \sqrt[3]{x^2} \pm mx \sqrt{a^2 - x^2}$   
gdzie  $0 < k < 1, p > ma^3 \sqrt{2a}$

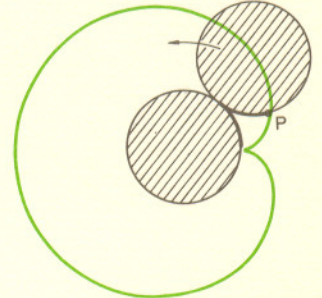


Rys. 5.  $y = -(\sqrt[3]{1 \pm \sqrt{1-x^2}} - 1)^4$

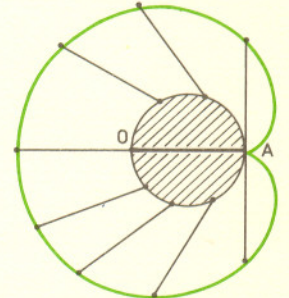
### Kardioida

Krzywa ta, o nazwie pochodzącej od serca, ma tę szczególną własność, że można ją otrzymać na dwa istotnie różne sposoby:

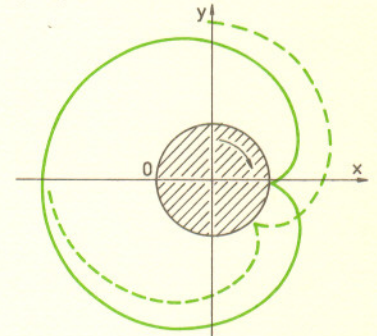
1. Po okręgu toczymy drugi taki sam okrąg z zaznaczonym na nim punktem. Tor tego punktu to właśnie *kardioida*. A podany przepis (owo toczenie) każę ją zaliczyć do *cykloid*.



2. Na okręgu wybieramy punkt  $A$ . Na dowolnej prostej przez  $A$  odkładamy po obu stronach jej drugiego przecięcia z okręgiem średnicę okręgu (na stycznej odkładamy średnicę po obu stronach  $A$ ). Otrzymane punkty tworzą *kardioidę*. A podany przepis każę ją zaliczyć do *konchoid*.



Zastosowanie kardioidy w technice nasunie się Czytelnikowi, gdy rozwiąże następujące zadanie: Umieśmy środek okręgu  $o$  w początku układu współrzędnych. Znaleźć prędkość ruchu przecięcia kardioidy z osią  $x$ , jeżeli okrąg  $O$  wraz z kardioidą obraca się ze stałą prędkością kątową.



A może z rozwiązania da się wywnioskować jeszcze jeden sposób otrzymywania kardioidy?

