



## SPIS TREŚCI

NUMERU 10 (82)

Dualizm  
korpuskularno-falowy  
*prof. dr Iwo Białynicki-Birula* str. 1

Hajta i wišta  
*dr Michał Szurek* str. 1

Gastronomiczny dowód  
pewnego twierdzenia  
o dualności str. 4

Antymateria we Wszechświecie  
*dr Marcin Kubiak* str. 6

Mała Delta str. 9

Zadania str. 11

Dualność w programowaniu  
liniowym str. 12

Pojęcia pierwotne  
w geometrii euklidesowej  
*doc. dr Lesław W. Szczerba* str. 12

Patrz w niebo str. 15

O analogiach, algebrach  
i przestrzeniach  
*dr Wiktor Bartol* str. 16

**Rysunki techniczne**  
*Bogusław Kretkiewicz*

**W następnym numerze:**  
**Geometria wewnętrzna**

„Delta”  
matematyczno-fizyczno-astronomiczny  
miesięcznik popularny  
Polskiego Towarzystwa  
Matematycznego, Polskiego  
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
Towarzystwa Astronomicznego  
wydawany przy poparciu  
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny:  
*doc. dr Jerzy Bartke*  
*doc. dr Andrzej Bączyński*  
*doc. dr Bolesław Gleichgewicht*  
*prof. dr Kazimierz Goebel*  
*doc. dr Bolesław Grabowski*  
*dr Jan Hanasz*  
*doc. dr Bolesław Iwaszkiewicz*  
*doc. dr Tadeusz Iwiński*  
*doc. dr Andrzej Januszajtis*  
*doc. dr Tadeusz Jarzębowski*  
*prof. dr Leon Jeśmanowicz*  
*dr Henryk Kaczorek*  
*prof. dr Marek Kuczma*  
*mgr Andrzej Mąkowski*  
*prof. dr Bohdan Paczyński*  
*prof. dr Zdzisław Pawlak*  
*prof. dr Arkadiusz Piekara*  
*doc. dr Sławomir Ruciński*  
*prof. dr Konrad Rudnicki*  
*prof. dr Zbigniew Semadeni*  
*doc. dr Grzegorz Sitarski*

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60—, cena prenumeraty półrocznej zł 30—  
Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach:  
— do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i cały rok następný  
— do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego.  
Jednostki gospodarki społecznej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienie w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”.  
Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW, oraz prenumeratorki indywidualni zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.  
Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej

**Sprzedż numerów bieżących i uprzednich**

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTA”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.  
Sprzedż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.  
Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Konto PKO I OM W-wa 1531-912  
w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław  
w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa  
w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7 00-068 Warszawa, Poland or with  
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland.  
— Earls Court Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain,  
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia

Cena 1 egzemplarza zł 5— nr indeksu 35723/35550

*prof. dr Józef Smak*  
*prof. dr Jan Stankowski*  
*doc. dr Kazimierz Stępień*  
*prof. dr Mieczysław Subotowicz*  
*doc. dr Stefan Turnau*  
*prof. dr Jerzy Wdowczyk*  
*doc. dr Andrzej Woszczyk*  
*prof. dr Janusz Zakrzewski —*  
*wiceprzewodniczący*  
*prof. dr Wojciech Żakowski —*  
*przewodniczący*

Redaguje Kolegium w składzie:  
*Bożena Jaworska-Kordos — ilustracje*  
*dr Marek Kordos — red. nac.*  
*dr Andrzej Krasieński*  
*dr Michał Szurek*  
*dr Krzysztof Prażmowski — red. techn. graf.*  
*mgr Krystyna Szypcio — sekr. red.*  
*doc. dr Michał Święcki — z-ca red. nac.*

Adres Redakcji  
ul. Hoża 69 pok. 151,  
00-681 Warszawa

Zakład Narodowy im.  
Ossolińskich — Wydawnictwo  
Wrocław, Oddział w Warszawie  
Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.  
wyd.; 2,50 ark. druk.;  
papier offsetowy III kl. 80 g. 61 × 86  
Wydrukowano w Drukarni im.  
Rewolucji Październikowej  
Warszawa, ul. Mińska 65  
Nr zam. 898/12/80 O-132



# Dualizm korpuskularno-falowy

Prof. dr Iwo BIAŁYNICKI-BIRULA,  
członek korespondent PAN

O dualizmie korpuskularno-falowym, umieszczonym w tytule artykułu, będę mówił jedynie w związku z promieniowaniem elektromagnetycznym — strumieniem fotonów. Nie wyczerpie to oczywiście całego tematu, bo dualizm korpuskularno-falowy charakteryzuje także zachowanie się pozostałych mikroobjektów, ale ograniczenie zakresu wykładu umożliwi nam bardziej szczegółowe i głębsze wyjaśnienie podstawowych pojęć i koncepcji.

Fizyka promieniowania elektromagnetycznego zajmuje wyróżnione miejsce w strukturze współczesnej fizyki. Nie ma żadnego innego przykładu tak rozległego zakresu zjawisk fizycznych opisywanego tak doskonale za pomocą jednej uniwersalnej teorii. Światło, z którym obcuje człowiek od zarania swych dziejów i któremu tyle zawdzięcza, stanowi tylko jedną oktawę w widmie promieniowania elektromagnetycznego. Promieniowanie to zostało zbadane w ogromnym zakresie, liczącym kilkadziesiąt oktaw, od bardzo twardych promieni gamma do bardzo długich fal radiowych. Wszystkie przeprowadzone obserwacje i doświadczenia wykazują niezbitcie, że w całym zakresie promieniowaniem elektromagnetycznym: jego wysyłaniem, pochłanianiem i rozchodzeniem się, rządzą te same prawa fizyczne.

Pora teraz wyjaśnić, co to jest dualizm korpuskularno-falowy i jaka była jego historia.

Termin dualizm pochodzi od łacińskiego słowa *dualis* — podwójny i oznacza dwoistość, czyli występowanie dwóch przeciwstawnych, lecz dopełniających się elementów, cech, aspektów. Na przykład, dualizm jako koncepcja filozoficzna oznacza pogląd, że świat składa się z dwóch przeciwstawnych, dopełniających się pierwiastków: ducha i materii. W naszym przypadku dualizm oznacza że promieniowanie elektromagnetyczne zachowuje się jednocześnie jak rojowisko cząstek i jak fala. Mimo, iż oba te aspekty, cząstkowy i falowy, występują zawsze razem, to w każdym wybranym zakresie widma promieniowania łatwiej jest dostrzec tylko jeden z nich. Z ogromnym trudem można by zaobserwować u promieni gamma ich cechy falowe i równie trudno byłoby wykryć cechy korpuskularne długich fal radiowych.

Tak więc dualizm korpuskularno-falowy, nie tylko jest cechą charakterystyczną promieniowania elektromagnetycznego, ale jest także czymś na kształt kłamry spinającej całe widmo promieniowania. Im dłuższa fala promieniowania tym łatwiej nam dostrzec aspekt falowy; im większa energia fotonów, tym bardziej wyrazisty staje się aspekt korpuskularny.

Historię dualizmu korpuskularno-falowego należy niewątpliwie zacząć od Izaaka Newtona. Newton poświęcił wiele lat na badania w dziedzinie optyki: od czasów studenckich do ostatnich lat swego życia. Wyniki tych badań zebrał w obszernym dziele zatytułowanym „*Optyka*”, wydanym po raz pierwszy w 1704 roku a później wielokrotnie wznawianym w ulepszonych przez autora wersjach. Na podstawie wielu obserwacji i doświadczeń, które szczegółowo opisał w *Optyce*, wiedziony genialną intuicją Newton sformułował teorię światła, która dla współczesnego czytelnika brzmi miejscami prawie jak ekspozycja... dualizmu korpuskularno-falowego. Oczywiście byłoby ogromną przesadą twierdzić, że Newton odkrył fotony, ponieważ nieznane mu były żadne fakty wymagające wprowadzenia korpuskularnych cech światła. Mimo ogromnego autorytetu naukowego Newtona, jego teoria światła, zwana teorią emisyjną, nie została przyjęta przez ogół fizyków. Dzięki pracom Huyghensa, Fresnela, Younga i Arago, coraz więcej zwolenników zdobywała falowa teoria światła i w połowie XIX wieku powszechnie sądzono, że wszystkie zjawiska opisane i przeanalizowane przez Newtona, a także zjawiska odkryte później, można wyjaśnić przyjmując, że światło jest falą poprzeczną, rozchodzącą się jako fala sprężysta w hipotetycznym ośrodku zwanym eterem. Zagadnienie mechanicznych własności tego ośrodka było najsłabszym ogniwem teorii falowej w jej pierwotnej, mechanicznej wersji.

Na to, by wyjaśnić obserwowane fakty: ogromną prędkość, polaryzację fal świetlnych, wpływ ruchu ośrodka materialnego

# Hajta i wišta

Dr Michał SZUREK

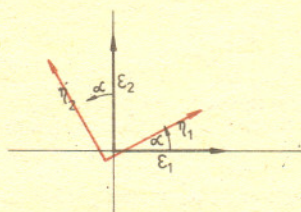
Czy oś liczbowa i linia prosta to to samo? Niezupełnie. Na prostej wszystkie punkty są „takie same” i dopiero gdy umówimy się, że jeden z nich przedstawia liczbę 0, a inny liczbę 1 — możemy zaznaczyć wszystkie inne liczby i nasza prosta staje się właśnie osią liczbową. Każdy punkt ma swoją współrzędną. Podobnie każdy punkt płaszczyzny przedstawia i może być przedstawiony za pomocą pary liczb, ale o tym, które punkty odpowiadają jakim liczbom, decyduje uprzednio dokonany wybór układu współrzędnych (osi i skal na osiach).

Funkcja  $f(x) = x - 2$  przesuwają oś liczbową o dwie jednostki w lewo; początek układu przewędrował do punktu  $-2$ . A jak zmieniły się współrzędne punktów? Oczywiście zwiększyły się o 2; inaczej: przesunęły się w prawo o 2 (bo minus to w lewo, a plus — w prawo). To łatwo zrozumieć. Małemu wszystko wydaje się duże, a dużemu — malutkie.

Przeźniemy się na płaszczyznę. Obróćmy ją o kąt  $\alpha$  w lewo. Jeżeli przez  $x'$  i  $y'$  oznaczymy współrzędne obrazu punktu o współrzędnych  $x, y$ , to

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha, \end{cases}$$

co Czytelnik może łatwo sprawdzić, jeśli nie znał tego przedtem. Nowymi wektorami osi zostały obrócone stare:



Rys. 1  
 $W_1 = [\cos \alpha, \sin \alpha]$ ,  
 $W_2 = [-\sin \alpha, \cos \alpha]$ .

Skoro zmieniły się osie i wersory układu, to zmieniły się także współrzędne punktów i wektorów. Jak się zmieniły? Skoro układ współrzędnych obrócił się w lewo, to — łatwo zgadnąć — współrzędne „obrócą się” w prawo, a to znaczy, że zmieniają się tak:

$$\begin{aligned} x_{\text{nowe}} &= x_{\text{stare}} \cdot \cos \alpha + y_{\text{stare}} \cdot \sin \alpha \\ y_{\text{nowe}} &= -x_{\text{stare}} \cdot \sin \alpha + y_{\text{stare}} \cdot \cos \alpha. \end{aligned}$$

Kto nie wierzy, niechaj to przeliczy, na przykład tak, jak my w następnym przykładzie tego typu. Rozpatrzmy przekształcenie płaszczyzny opisane wzorem

$$\begin{cases} x' = 2x + 7y \\ y' = x + 4y, \end{cases}$$

czyli o macierzy  $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ .

Jeżeli przekształcenie  $f$  przestrzeni  $R^n$  w siebie jest opisane wzorami

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ x'_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

to tablicę współczynników  $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

nazywamy macierzą tego przekształcenia. Wyrażając  $x_1, \dots, x_n$  przez  $x'_1, \dots, x'_n$  (czyli rozwiązując odpowiedni układ równań, jeśli to możliwe), otrzymujemy wzory na przekształcenie odwrotne do  $f$ . Macierz tego przekształcenia odwrotnego nazywamy macierzą odwrotną do  $M$  i oznaczamy przez  $M^{-1}$ .

Niech punkt  $A$  ma współrzędne  $x, y$ , a  $\epsilon_1, \epsilon_2$  niech będą wersorami osi, tj.  $\epsilon_1 = [1, 0]$ ,  $\epsilon_2 = [0, 1]$ . Zatem  $\overline{OA} = x \cdot \epsilon_1 + y \cdot \epsilon_2$ . Przyjmijmy za nowe wektory osi obrazy starych:  $\eta_1 = [2, 1]$ ,  $\eta_2 = [7, 4]$ , czyli

$$(*) \quad \begin{cases} \eta_1 = 2\epsilon_1 + \epsilon_2 \\ \eta_2 = 7\epsilon_1 + 4\epsilon_2. \end{cases}$$

Macierz  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$  nazywa się transponowaną do  $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ .



na rozdanie się światła i inne, należało przypisać eterowi niespotykane nigdzie i bardzo zagadkowe własności.

Falowa teoria światła przyjęła ostateczną formę w drugiej połowie XIX wieku po odkryciu przez Maxwella poprawnej teorii zjawisk elektromagnetycznych. W 1865 roku Maxwell wydedukował ze swojej teorii istnienie fal elektromagnetycznych rozchodzących się z prędkością światła i mających inne właściwości fal świetlnych. Na tej podstawie Maxwell wysunął hipotezę, że światło jest falą elektromagnetyczną.

Tak powstała falowa, elektromagnetyczna teoria światła, doskonała w swej matematycznej formie i obchodząca się bez kłopotliwego pojęcia eteru. Drgania pola elektromagnetycznego składające się na falę elektromagnetyczną nie wymagały bowiem żadnego przenoszącego je ośrodka: mogły z powodzeniem rozchodzić się w próżni. Maxwell zmarł w 1879 roku nie doczekawszy pełnego doświadczalnego potwierdzenia swojej elektromagnetycznej teorii światła. Dokonał tego Henryk Hertz, wykazując w serii doświadczeń przeprowadzonych w latach 1887—1888, że przewidziane przez Maxwella fale elektromagnetyczne rzeczywiście istnieją w zakresie częstości, który nazywamy obecnie radiowym. Doświadczenia Hertza były ukoronowaniem teorii Maxwella i przekonały one ostatecznie fizyków o poprawności tej teorii.

W czasie wykonywania swoich doświadczeń Hertz zauważył, że oświetlenie iskrownika w rezonatorze, służącym do wykrywania fal, promieniowaniem ultrafioletowym, wzmagą przeskakiwanie iskieł. Nie potrafił on wyjaśnić tego faktu, który jak dziś wiemy, był wynikiem zjawiska fotoelektrycznego. Zjawisko to stało się punktem wyjścia dla korpuskularno-falowej teorii światła. Mamy tu więc do czynienia z jednym z tych zaskakujących zbiegów okoliczności, w które obfituje historia fizyki. Doświadczenie będące ostatecznym dowodem teorii falowej zawiera już elementy, z których wyróli się w przyszłości nowa teoria. Warto w tym miejscu zwrócić uwagę na zbieg okoliczności zupełnie innej natury, ale też dotyczący obu omawianych teorii. Twórca falowej, elektromagnetycznej teorii światła, James Clerk Maxwell zmarł w 1879 roku. W tym samym roku urodził się Albert Einstein, który w 1905 roku wykazał, że światło ma naturę ziarnistą i tym samym obalili teorię Maxwella w jej pierwotnej formie.

Koncepcja Einsteina była oparta na hipotezie kwantów energii sformułowanej 5 lat przedtem przez Plancka. W celu wyjaśnienia obserwowanego rozkładu widmowego promieniowania elektromagnetycznego, wysyłanego przez rozgrzane ciała, Planck przyjął, że promieniujące ciało zachowuje się jak zbiór rezonatorów nastrojonych na różne częstości. Energia drgań każdego takiego rezonatora musi być wielokrotnością  $h\nu$ , gdzie  $\nu$  jest częstością drgań a  $h$  nową stałą uniwersalną, zwaną dziś stałą Plancka. Na podstawie tej hipotezy Planck otrzymał wzór na rozkład widmowy promieniowania doskonale zgadzający się z doświadczeniem. Mimo tej zgodności, hipoteza Plancka tak dalece odbiegała od powszechnie przyjętych podówczas koncepcji fizycznych, iż nie tyle została odrzucona, co zignorowana przez większość fizyków.

Einstein posunął hipotezę Plancka znacznie dalej, postulując, że nie tylko jakieś hipotetyczne rezonatory w rozgrzanych ciałach, ale samo promieniowanie elektromagnetyczne o częstości  $\nu$  może nieść energię jedynie w porcjach o energii  $h\nu$ . Było to zdecydowane odejście od tradycyjnej, falowej teorii światła, według której energia fali jest proporcjonalna do kwadratu amplitudy drgań pola i może zatem przyjmować dowolne wartości. Ani w pierwszym artykule Einsteina ani w następnych nie pojawiła się nazwa foton. Taką nazwę dla kwantów promieniowania elektromagnetycznego zaproponował dopiero w 1926 roku mało znany fizyk Lewis.

Einstein użył swojej teorii światła nie tylko do lepszego uzasadnienia wzoru Plancka, ale także do wyjaśnienia prawidłowości występujących w zjawisku fotoelektrycznym. O zjawisku tym wspominaliśmy przy omawianiu doświadczeń Hertza, ale było ono później badane bardziej dokładnie.

Według Einsteina zjawisko fotoelektryczne powinno charakteryzować się liniową zależnością energii kinetycznej elektronów wybijanych z metalu przez promieniowanie od częstości padającego promieniowania:  $E_{kin} = h\nu - P$ . Linie proste na wykresie funkcji  $E_{kin}(\nu)$  dla różnych metali mogą zaczynać się w różnych miejscach, ze względu na różne prace wyjścia  $P$ , ale ich nachylenie powinno być takie samo, gdyż jest ono wyznaczone przez stałą Plancka. Przewidywania te były zgodne z obserwacjami Lenarda z lat 1902—3, ale dopiero wieloletnie, bardzo dokładne doświadczenia Millikana w pełni potwierdziły przewidywania Einsteina pod względem ilościowym. Doświadczenia te przekonały wszystkich sceptyków, że światło ma także naturę ziarnistą. Rezultatem tych doświadczeń była

Obliczmy, jak zmienia się współrzędne punktu  $A$ . Rozwiązując powyższy układ równań mamy

$$\begin{cases} \epsilon_1 = 4\eta_1 - \eta_2 \\ \epsilon_2 = -7\eta_1 + 2\eta_2, \end{cases}$$

czyli możemy napisać

$$\vec{OA} = x(4\eta_1 - \eta_2) + y(-7\eta_1 + 2\eta_2) = (4x - 7y)\eta_1 + (-x + 2y)\eta_2.$$

a to znaczy, że nowymi współrzędnymi punktu  $A$  są

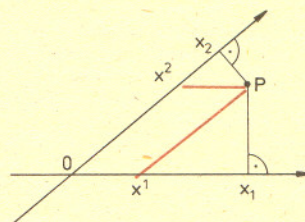
$$\begin{cases} x_{nowe} = 4x - y \\ y_{nowe} = -x + 2y. \end{cases}$$

Współczynniki występujące w powyższym wzorze układają się w macierz  $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$  odwrotną do wyjściowej  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ .

Możemy to sformułować tak:

współrzędne punktów płaszczyzny poddanej przekształceniu o macierzy  $A$  zmieniają się zgodnie z macierzą odwrotną do  $A$ . Widzieliśmy to już na przykładach: układ współrzędnych w lewo — współrzędne w prawo, itd. Dlatego też te współrzędne kartezyjańskie noszą dodatkowe określenie: kontrawariantne, co po polsku znaczy „przeciwniennicze” i to chyba wyjaśnia, skąd ta nazwa.

Są i współrzędne kowariantne, *alias* współmiennicze, tj. zmieniające się zgodnie z danym przekształceniem układu współrzędnych. Mianowicie położenie punktu  $A$  na płaszczyźnie możemy określić jednoznacznie podając iloczyn skalarne wektora  $\vec{OA}$  przez wektory osi  $\epsilon_1, \epsilon_2$ . Te iloczyny  $\vec{OA} \cdot \epsilon_1, \vec{OA} \cdot \epsilon_2$  są właśnie naszymi współrzędnymi kowariantnymi. Czytelnik, jeśli zechce, bez trudu wykaże, że istotnie, zmieniają się one zgodnie z macierzą występującą we wzorach (\*). Jest to macierz transponowana względem macierzy przekształcenia — a nie odwrotna. Możemy powiedzieć, że poruszający się układ współrzędnych „wleczce za sobą” współrzędne kowariantne punktów (jak się zmieniają wektory, tak i współrzędne),



Rys. 2. Para  $(x^1, x^2)$  tworzy współrzędne kontrawariantne, a  $(x_1, x_2)$  — współrzędne kowariantne punktu  $p$ .

a współrzędne kontrawariantne (kartezyjańskie) odbijają jego ruch jak gdyby w lustrze. Te dwa typy współrzędnych związane są ze sobą jak lewo i prawo, przód i tył czy góra i dół. Spotkaliśmy się z przejawami *dualności*, czy lepiej po polsku: *dwoistości*.

Mamy tu zadanie dla Czytelnika:

Jeżeli  $x_1, x_2$  oznaczają współrzędne kowariantne, a  $x^1, x^2$  — współrzędne kontrawariantne ustalonego punktu, to wielkość  $x_1 x^1 + x_2 x^2$  nie zmienia się przy dowolnej zmianie układu współrzędnych.

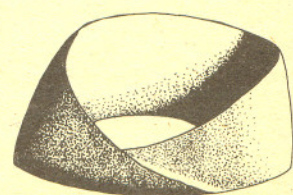
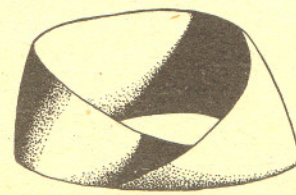
\*

Gdy konserwatywni Anglicy przejdą wreszcie na ruch prawostronny, to czy wystarczy, jeżeli

- 1) powiedzą: jechać prawą stroną!
- 2) odwrócą znaki drogowe i przemalują „zakaz skrętu w prawo” na „zakaz skrętu w lewo” itd.?

\*

Pobawmy się wstęgą Möbiusa. Możemy ją sobie zrobić z paska papieru, obracając jeden z jego końców przed sklejeniem o  $180^\circ$ . A czy mamy obrócić go w prawo czy w lewo? Czy to nie wszystko jedno, skoro *lewo* i *prawo* są dwoiste? Nie, nie wszystko jedno! Oto prawo — i lewostronna wstęga Möbiusa.





również... nagroda Nobla dla Einsteina w 1921 roku za teorię zjawiska fotoelektrycznego (nie za teorię względności). W dwa lata później Compton w swoich doświadczeniach nad rozpraszaniem promieni X na elektronach wykazał ziarnistą naturę promieniowania elektromagnetycznego także i w tym zakresie widma.

Można powiedzieć, że po tych odkryciach w optyce w pełni zapanował dualizm korpuskularno-falowy. Do opisu pewnych zjawisk (ugięcie fal, interferencja itp.) używano obrazu falowego; do opisu innych (zjawisko fotoelektryczne, jonizacja gazu, zjawisko Comptona itp.) używano obrazu korpuskularnego.

Ze względu na to, że oba te obrazy traktowano jako wykluczające się wzajemnie, sytuacja była wysoce niezadowolająca. Trwała ona jednak przez przeszło 20 lat. Rozwiązanie tego paradoksu przyniosła elektrodynamika kwantowa, która powstała w rezultacie odkrycia przez Heisenberga, Schrödingera, Borna, Jordana i innych mechaniki kwantowej. Podstawy elektrodynamiki kwantowej, sformułowane przez Paula Diraca w 1927 roku, stanowiły rozszerzenie idei mechaniki kwantowej na promieniowanie elektromagnetyczne. Jakiej odpowiedzi dostarcza elektrodynamika kwantowa na pasjonujące fizyków od czasów Newtona pytanie: czy światło jest cząstką czy falą? Można odpowiedzieć żartobliwie, że odpowiedzią jest też pytanie: a dlaczego światło miałoby być albo cząstką albo falą? Pod pojęciami cząstki i fali kryje się przecież tradycyjna treść ukształtowana pod wpływem badań takich obiektów jak kule bilardowe czy fale na wodzie. Klasyczne modele tego typu nadają się, jak się okazuje, do opisu własności fizycznych promieniowania elektromagnetycznego tylko w ograniczonym zakresie ale nie udaje się za ich pomocą opisać wszystkich zjawisk. Sytuacja taka nie jest zresztą w fizyce wcale wyjątkowa. Na przykład, do opisu ruchu Ziemi wokół Słońca wystarcza model punktu materialnego, ale model ten jest zupełnie nieprzydatny do opisu trzęsienia ziemi.

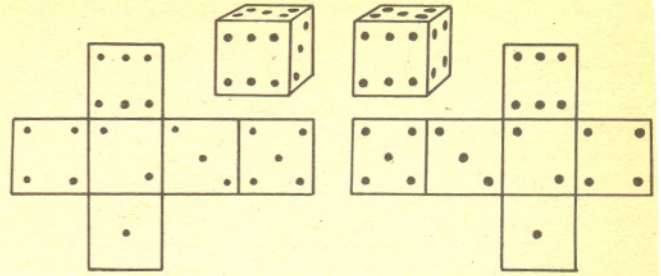
Elektrodynamika kwantowa podaje precyzyjny opis matematyczny promieniowania elektromagnetycznego, z którego wynika także w jakich warunkach możemy używać uproszczonych modeli promieniowania: korpuskularnego i falowego. Kluczem do zrozumienia związku między tymi dwoma opisami jest statystyczny charakter praw kwantowych. W wielkim skrócie, współczesna teoria promieniowania elektromagnetycznego opiera się na następujących tezach. Promieniowanie elektromagnetyczne ma naturę ziarnistą; można sobie wyobrazić, że składa się ono z fotonów o energiach  $h\nu$ . Dla pojedynczych fotonów obowiązują znane z mechaniki zasady zachowania energii, pędu i momentu pędu, zmodyfikowane zgodnie z wymogami teorii względności (fotony poruszają się z prędkością światła). Fotonów nie można jednak wyobrazić sobie w postaci twardych kulek, między innymi dlatego, że posiadają własność zwaną skrętnością, której przejawem jest polaryzacja światła.

Falowa natura światła pojawia się dopiero przy rozpatrywaniu ruchu wielu fotonów, przy czym związek między falą a fotonami ma właśnie charakter statystyczny. Ze zbliżonym obrazem zjawiska mamy do czynienia w przypadku rury Kundta wypełnionej okruchami korka, gdy wzbudzimy w niej stojącą falę dźwiękową. Nie potrafimy przewidzieć, w którym miejscu znajdzie się dany okruh, ale wiemy, iż w węzłach fali wystąpi nagromadzenie okruchów. Podobnie i fala elektromagnetyczna, za pomocą której opisujemy zachowanie się wiązki fotonów pozwala wyznaczyć zagęszczenia i rozrzedzenia fotonów w przestrzeni. Mówiąc bardziej precyzyjnie, prawdopodobieństwo znalezienia fotonu jest proporcjonalne do kwadratu amplitudy drgań pola elektrycznego i magnetycznego fali.

W ten sposób teoria falowa, lub raczej model falowy, promieniowania elektromagnetycznego, podobnie jak kinetyczna teoria materii, pozwala przewidzieć średnie wartości wielkości fizycznych. Jeżeli fotonów w wiązce jest bardzo dużo, to taka umiejętność przewidywania na ogół zupełnie nam wystarcza. Na przykład potrafimy przewidzieć kształt obrazów dyfrakcyjnych i interferencyjnych, choć nie wiemy w jakim kierunku podąży pojedynczy foton. Prostem mechanicznym modelem powstawania określonych obrazów w wyniku statystycznych prawidłowości jest deska Galtona. Nie wiemy bowiem dokąd polecą dana kulka, ale dla dużej liczby kul potrafimy dokładnie przewidzieć ich rozkład.

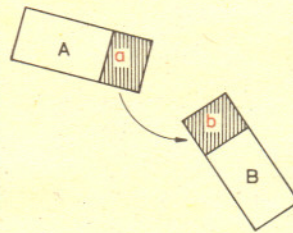
Rozumiemy teraz dlaczego model falowy staje się coraz to lepszy, gdy maleje częstość promieniowania. Fotony o małej częstości mają mniejsze energie i trzeba ich więcej, na to by otrzymać strumień promieniowania o danej całkowitej energii. Z kolei, im więcej fotonów, tym mniej interesujący jest los każdego z nich i jego charakterystyki. Ciekawy jest jedynie opis

A oto: prawo — i lewoskrętna kostka do gry i siatka, z której można je skleić.

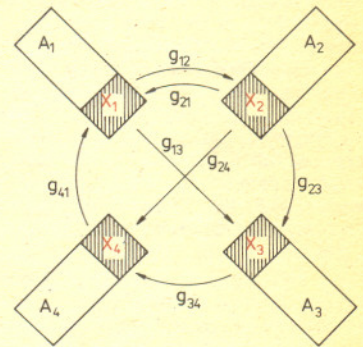


Gdy matematyk pobawi się trochę szczególnymi przykładami, bierze się za ogólną teorię. Więc i my stwórzmy Ogólną Teorię Klejenia.

Polecenie: połącz  $A$  z  $B$ , sklejając  $a$  z  $b$  (rysunek 3), może być wykonane jednoznacznie dopiero wtedy, gdy powiemy wyraźnie jak dokleić  $a$  do  $b$ . Który punkt ma być skleiony z którym. Można powiedzieć, że określamy funkcję  $g: a \rightarrow b$  i sklejamy potem  $x$  z  $g(x)$ .



Rys. 3



Rys. 4

Gdy chcemy połączyć kilka pasków, musimy liczyć się z ewentualnością wielokrotnej nakładki. Wyobraźmy sobie, że chcemy połączyć  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , sklejając je wzdłuż ich części  $X_1 \subset A_1, X_2 \subset A_2, \dots, X_n \subset A_n$ . Musimy zatem wyjaśnić, jak dokleić  $X_i$  do  $X_j$ , a więc dla każdego  $i, j$  mamy określić wzajemnie jednoznaczna funkcję  $g_{ij}: X_i \rightarrow X_j$  (rys. 4). No i dobrze. Ale, jeżeli pewien punkt jest skleiony z innym, a ten drugi z trzecim, to i pierwszy z trzecim. To znaczy, że nasze funkcje muszą spełniać warunek

$$g_{jk} \circ g_{ij} = g_{ik} \quad \text{dla każdego } i, j, k.$$

Ponadto  $g_{ij} = g_{ji}^{-1}$  (dlaczego?), skąd wynika (jak?), że  $g_{ii} = id$ . I oto nasza „teoria klejeń” i jej pierwsze twierdzenie.

Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy a) sposobami połączenia zbiorów  $A_1, A_2, \dots, A_n$  przez sklejanie ich wzdłuż podzbiorów  $X_i \subset A_i$ ; oraz

b) zespołami  $n^2$  funkcji  $g_{ij}: X_i \rightarrow X_j$  takimi, że

- 1)  $g_{ij} = g_{ji}^{-1}$ ,
- 2)  $g_{jk} \circ g_{ij} = g_{ik}$ ,

i — po przyjęciu  $X_1 = X_2 = \dots = X_n = X$

c) zespołami  $n^2$  funkcji  $g_{ij}: X \rightarrow X$  takimi, że spełnione są 1) i 2) z poprzedniego punktu b.

Taki jak w c) zespół funkcji  $g_{ij}$  nosi bardzo mądrze brzmiącą długą nazwę: *jednowymiarowy kocykl w sensie Čecha układu*  $A_1, \dots, A_n$  o współczynnikach w grupie automorfizmów  $X$  i nasze prościutkie twierdzenie „wygląda” teraz doprozdawiliśmy Cię,

Zbiór wszystkich jednowymiarowych kocykli w sensie Čecha układu  $A_1, A_2, \dots, A_n$  o współczynnikach w grupie automorfizmów  $X$  opisuje wszystkie sklejania zbiorów  $A_1, A_2, \dots, A_n$  wzdłuż  $X$ .

I co z tego? — zapyta Czytelnik. Otóż doprowadziliśmy Cię, Czytelniku, do brzegu bardzo szybko rozwijającej się algebry homologicznej, w której jest mowa o cyklach i kocyklach, brzegach i kobrzech, homologiach i kohomologiach, stycznych i kostycznych (to nie dowcip), produktach i koproduktach (też nie żart), kompleksach i kokompleksach (i to nie) oraz o minach i kominach (żart, żart!) a także o



statystyczny pozwalający przy pomocy modelu falowego na wyznaczanie wartości średnich. I na odwrót, dla dużych częstotliwości energia fotonów jest duża, ich liczba jest nieduża, czasami mamy nawet do czynienia z pojedynczymi fotonami. Dogodny wówczas staje się model korpuskularny, w którym oddziaływanie promieniowania opisujemy jako zderzenia pojedynczych fotonów z innymi cząstkami.

Dysponując nowoczesną aparaturą fizyczną możemy wykonać doświadczenie doskonale ilustrujące podane wyżej współczesne rozwiązanie dylematu: cząstka czy fala? Wykorzystamy do tego cały laser będący stabilnym źródłem monochromatycznego promieniowania, charakteryzującego się doskonałymi własnościami interferencyjnymi w tradycyjnym sensie teorii falowej. Promieniowanie lasera padającego na ekran możemy wykryć za pomocą czułego fotomnożnika reagującego na pojedyncze fotony. Okazuje się, że rzeczywista liczba padających fotonów jest proporcjonalna do natężenia fali. Tam gdzie na ekranie widać jasne prążki fotomnożnik wykazuje ogromną liczbę fotonów, zaś tam gdzie widać ciemne miejsca liczba ta jest dużo mniejsza.

Dla wielu fizyków, jednym z nich był sam Einstein, niemożność przewidzenia zachowania się pojedynczych fotonów, czy też ogólnie każdego pojedynczego mikrocząstki: elektronów, protonów itd., jest wadą teorii i świadczy o jej przejściowej roli w rozwoju fizyki. Jest oczywiście prawdą, że mamy tu do czynienia z istotnym ograniczeniem naszej wiedzy o świecie. Nie wiemy dotąd, czy jest to absolutne ograniczenie, czy też w przyszłości potrafimy się od niego uwolnić i podać bardziej szczegółowe niż tylko statystyczne prawa dla ruchu fotonów i innych mikrocząstek. Na razie cieszy nas to, że wszystkie statystyczne przewidywania elektrodynamiki kwantowej pozostają w idealnej zgodności z danymi uzyskanymi w licznych, bardzo precyzyjnych doświadczeniach. Dla ilustracji tej tezy podam, że częstość fali radiowej wysyłanej przez atomy wodoru przy tak zwanym przejściu nadsubtelnym zmierzona w doświadczeniu wynosi 1420,4057517864 MHz, gdzie wszystkie podane cyfry są znaczące. Obliczona teoretycznie wartość zgadza się z dokładnością do jednej milionowej z wartością zmierzoną.

Ta zadziwiająca zgodność teorii z doświadczeniem bardzo krępuje swobodę ruchów fizyków. Wielu z nich chciałoby zmienić teorię, zastępując prawa statystyczne prawami przyczynowymi, które umożliwiłyby dokładne przewidywanie zachowania się fotonów i innych cząstek elementarnych.

Jednakże dotąd nie udało się podać żadnej innej teorii mogącej konkurować z teorią kwantową w całym ogromnym zakresie jej zastosowań pod względem precyzji przewidywań i zgodności z doświadczeniem.

Na razie obowiązuje więc ciągle dualizm korpuskularno-falowy rozumiany jako koncepcja, według której cząstki-korpuskuły poruszają się, *średnio*, zgodnie z prawami falowymi.

pniakach i kopniakach (hi, hi). Ale nie igraszki słowne składają się na algebrę homologiczną. Takie jak widzieliśmy kocykle tworzą grupę (przy pewnych słabych dodatkowych założeniach) a z tego taki pożytek, że i sposoby sklejanania tworzą grupę, a z tego taki pożytek, że możemy mieć nadzieję, iż coś tak dziwnego jak klejenie różnymi sposobami może mieć opis algebraiczny, a z tego taki pożytek, że dowiemy się o tym czegoś więcej, a z tego taki pożytek ... oj, wkraczam już na śliski grunt.

\*

Każde chyba pojęcie matematyczne ma swoje ko-pojęcie i ten dualizm ma swój sformalizowany opis w języku teorii kategorii. Mamy więc i kogrupy i koalgebry (że nie wspomnę już o kotangensie). Postaramy się opisać pojęcie „przestrzeni kostycznej” (nazwa nie pochodzi od kości, tylko od styczności). Widzieliśmy już, że na płaszczyźnie (i w każdej przestrzeni  $E^n$ ) można wprowadzić dwa rodzaje współrzędnych: kowariantne (oznaczone przez wskaźniki na dole:  $x_1, x_2, x_3, \dots$ ) oraz kontrawariantne (wskaźniki na górze:  $x^1, x^2, x^3, \dots$ ). Widzieliśmy

też, że liczba  $\sum_{i=1}^n x_i x^i$  zależy tylko od punktu, a nie od układu

współrzędnych.

A więc mamy funkcję  $h: V_{\text{kow}} \times V_{\text{kontr}} \rightarrow R$ ; przez  $V_{\text{kow}}$  oznaczyliśmy zbiór współrzędnych kowariantnych,  $V_{\text{kontr}}$  kontrawariantnych. Ma ona następujące własności

- 1)  $h(a+b, c) = h(a, c) + h(b, c)$ ,
- 1')  $h(a, b+c) = h(a, b) + h(a, c)$ ,
- 2)  $h(ra, b) = rh(a, b)$ ,  $a \in V_{\text{kow}}$ ,  $b \in V_{\text{kontr}}$ ,  $r \in R$ ,
- 2')  $h(a, rb) = rh(a, b)$ ,
- 3) jeżeli dla pewnego  $a \in V_{\text{kow}}$  i każdego  $b \in V_{\text{kontr}}$  mamy  $h(a, b) = 0$ , to  $a = 0$ ,
- 3') jeżeli dla pewnego  $b \in V_{\text{kontr}}$  i każdego  $a \in V_{\text{kow}}$  mamy  $h(a, b) = 0$ , to  $b = 0$ .

Przestrzenie, związane funkcją  $h$  o wymienionych powyżej własnościach nazywane są *dualnymi* albo: *sprzężonymi*, o funkcji  $h$  mówimy, że ustala ich dualność.

A więc przestrzeń styczna np. do powierzchni — to dualna do płaszczyzny stycznej do tej powierzchni. Możemy powiedzieć, że przestrzeń styczna do przestrzeni styczna z dualnymi współrzędnymi.

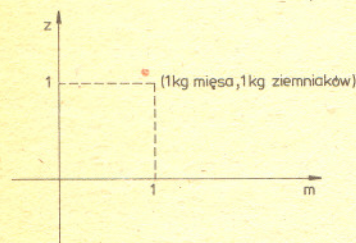
Fatalny brak miejsca w Delcie każe przerwać opowiadanie w tym bardzo ciekawym miejscu. Dlaczego ciekawym? A, bo teraz rozpatrywalibyśmy wiązki styczne, czyli zbiory złożone ze wszystkich przestrzeni stycznych i dualne do nich wiązki kostyczne (czyli zbiory złożone z przestrzeni kostycznych), zobaczylibyśmy, jak są zabawnie względem siebie pokrecone, że co jedna zakreć, to druga odkreć, oraz dostrzeżlibyśmy, jak w tym skomplikowanym świecie pojęć abstrakcyjnych odbija się prosta reguła: układ współrzędnych w lewo — współrzędne w prawo, poprzeczka niżej — poziom usportowienia społeczeństwa wyżej, skąpy tata — rozrzutny syn, nudny jeden artykuł — ciekawsze inne.

## Gastronomiczny dowód pewnego twierdzenia o dualności

Zgodnie z panującym w matematyce stylem, zanim powiemy, o co chodzi, sformułujemy kilka definicji. Będziemy więc najpierw rozpatrywać *przestrzeń spożywczą*  $S$ . Jej elementami będą porcje mięsa i ziemniaków; 2 kg mięsa i 3 kg ziemniaków oznaczmy symbolicznie przez  $2m+3z$  (prosimy nie pytać redakcji, co autor rozumie przez  $-m$  itp.). Wyrażenia  $am+bz$  możemy dodawać, odejmować i mnożyć przez liczby — a więc  $S$  jest przestrzenią liniową; można wyobrazić ją sobie jako płaszczyznę o osiach  $m$  i  $z$  (rysunek).

Każda przestrzeń ma bazę. *Baza* to po prostu układ wektorów podstawowych na osiach. Jak i każdej płaszczyzny, tak i bazą naszej przestrzeni spożywczej  $S$  są wektory  $[1, 0] = 1 \cdot m + 0 \cdot z$  i  $[0, 1] = 0 \cdot m + 1 \cdot z$ .

Produkty spożywcze kupujemy w sklepie. *Sklep* to nic innego jak funkcja przyporządkowująca każdemu elementowi  $s \in S$  pewną liczbę rzeczywistą  $r$  (wulgarnie mówiąc: jego cenę). A więc przestrzeń sklepów składa się ze wszystkich funkcji (liniowych; cena różnie liniowo względem ilości towaru). Taką przestrzeń nazywamy w matematyce *dualną do* lub *sprzężoną z*  $S$  i oznaczamy przez  $S^*$ . A każdej bazie przestrzeni  $S$  odpowiada dualna do niej baza przestrzeni  $S^*$ . W naszym przypadku (tj. w przestrzeni  $S^*$ ) tworzą ją dwa nieco zwiariowane sklepy MIE oraz ZIE. W pierwszym z nich płaci się tylko za mięso — złotówkę za kilogram. Kartofle dodają tam za darmo, dla zachęcenia ludzi do częstszego odwiedzania sklepu. Natomiast sklep ZIE sprzedaje





ziemniaki po złotemu nie patrząc, ile kto wziął mięsa. Czyli

$$\begin{aligned} \text{MIE}(1 \cdot m) &= 1, & \text{MIE}(1 \cdot z) &= 0, \\ \text{ZIE}(1 \cdot m) &= 0, & \text{ZIE}(1 \cdot z) &= 1. \end{aligned}$$

Każdy inny rozsądny sklepikarz, biorący  $a$  za kilogram mięsa i  $b$  za kilogram kartofli, może być opisany jako kombinacja liniowa  $a\text{MIE} + b\text{ZIE}$ .

Wprowadźmy teraz do rozważań przestrzeń obiadową  $O$ . Jej elementy — to obiady, złożone z dań mięsno-ziemniaczanych. Wyróżnimy trzy „bazowe” dania w naszej przestrzeni, wraz z występującymi w nich proporcjami mięso-ziemniaki:  $k$  = kartoflanka na podrobach ( $1m + 7z$ ),  $g$  = gulasz z ziemniakami ( $2m + 5z$ ),  $b$  = krwisty befsztyk + frytki ( $3m + z$ ). Każdy obiad naszej przestrzeni  $O$  jest ich kombinacją liniową (można zjeść pół porcji zupy i trzy befsztyki:  $\frac{1}{2}k + 3b$ ,

lub np. trzy zupy, dwa razy gulasz i ćwierć befsztyka:  $3k + 2g + \frac{1}{4}b$  etc.). Na mocy samej

definicji przestrzeni  $O$  jest trójwymiarowa. Przekonujemy się łatwo, że elementami przestrzeni dualnej  $O^*$  są restauracje, gdyż przypisują one ceny swoim obiadom, na ogół dość różnie. Cena obiadu w tej samej restauracji też rośnie liniowo wraz z wielkością porcji.

Musimy teraz rozstrzygnąć, jakie restauracje tworzą bazę dualną do bazy {kartoflanka, gulasz, befsztyk} przestrzeni  $O$ . Odpowiedź znajdujemy łatwo: są to knajpy ZU, GU i BE takie, że

$$\begin{aligned} \text{ZU}(z) &= 1, & \text{ZU}(g) &= 0, & \text{ZU}(b) &= 0, \\ \text{GU}(z) &= 0, & \text{GU}(g) &= 1, & \text{GU}(b) &= 0, \\ \text{BE}(z) &= 0, & \text{BE}(g) &= 0, & \text{BE}(b) &= 1. \end{aligned}$$

W pierwszej z nich płaci się tylko za zupę, objadając się gulaszem i befsztykami ile wlezie, w drugiej tylko gulasz jest w cenie, trzecia liczy sobie po złotówce za jeden befsztyk, nie dostrzegając tłumów pałaszujących z apetytem kartoflankę z gulaszem.

Po wprowadzeniu tych podstawowych pojęć przechodzimy do głównego toku naszych rozważań. Mamy oczywistą funkcję „receptura” o argumentach w  $O$  a wartościach w  $S$ :

$$\text{rec}(\text{obiad}) = \text{produkty}.$$

Widzieliśmy, że

$$\begin{aligned} \text{rec}(k) &= 1m + 7z, \\ \text{rec}(g) &= 2m + 5z, \\ \text{rec}(b) &= 3m + z \end{aligned}$$

i widoczne powyżej współczynniki liczbowe układają się w macierz  $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ . Zwyczajowo jednak

ustawia się je tak:  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 1 \end{bmatrix}$  i taką macierz nazywa się macierzą danego przekształcenia

w zadanych bazach obu przestrzeni. Obliczyliśmy więc macierz funkcji „receptura”.

Każde odwzorowanie liniowe pomiędzy dwiema przestrzeniami liniowymi daje życie odwzorowaniu dualnemu. Wzorem określa się je w ten sposób:

jeżeli  $f: W \rightarrow V$ , to  $f^*$  jest takim odwzorowaniem  $V^*$  w  $W^*$ , że dla każdego  $w \in W$  mamy  $(f^*(v^*))(w) = v^*(f(w))$ .

U nas to będzie tak. Z każdym sklepem  $S^* \in P^*$  można stowarzyszyć taką restaurację  $\text{Ciot}(S^*)$ , w której za obiad płaci się tyle, ile zapłaciło się w sklepie za produkty. Oczywiście jest, że taką restaurację prowadzi nasza ciocia albo inna bliska krewna. Z samego określenia odwzorowania dualnego wynika, że

$$\text{rec}^* = \text{Ciot}.$$

Jakie są ceny w restauracji  $\text{Ciot}(\text{MIE})$ ? Oczywiście takie:

$$\text{zupa} - 1 \text{ zł}, \quad \text{gulasz} - 2 \text{ zł}, \quad \text{befsztyk} - 3 \text{ zł},$$

a to znaczy, że ta restauracja jest kombinacją liniową:

$$\text{Ciot}(\text{MIE}) = 1 \cdot \text{ZU} + 2 \cdot \text{GU} + 3 \cdot \text{BE}.$$

Zupełnie podobnie stwierdzamy, że skoro w  $\text{Ciot}(\text{ZIE})$  można zjeść kartoflankę za 7 zł, gulasz za 5 zł, a befsztyk za złotówkę, to

$$\text{Ciot}(\text{ZIE}) = 7 \text{ ZU} + 5 \text{ GU} + 1 \text{ BE}.$$

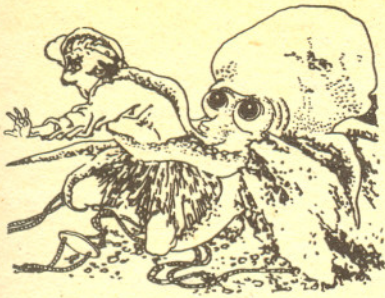
Dwa ostatnie wzory dają już macierz naszego odwzorowania dualnego  $\text{rec}^* = \text{Ciot}$ . Widzieliśmy już, że występujące w tych wzorach współczynniki liczbowe ustawiamy w kolumnach i stąd mamy, że macierzą  $\text{Ciot}$  jest

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

zwana transponowaną względem  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ . Tak oto widzimy, że macierzą odwzorowania

dualnego do  $f$  w bazach dualnych rozpatrywanych przestrzeni jest macierz transponowana względem macierzy odwzorowania  $f$  w danych bazach.

(opr. red. na podstawie *The Mathematical Gazette*, 1975).



#### Rozwiązanie zadania M 238

Jeżeli  $b_0$  jest dowolne, zaś  $b_1 = \frac{b_0}{b_0 - 1}$ ,

$$A_1 = b_0 + b_1, \quad b_2 = \frac{A_1}{A_1 - 1},$$

$A_2 = b_0 + b_1 + b_2$ , itd., to każde z wyrażeń

$A_n = b_0 + b_1 + \dots + b_n$  ma żadaną własność.

W naszym przypadku  $b_0 = 6$  i obliczamy

$$b_1 = \frac{1679616}{1502761}, \quad A_1 = \frac{2821109907456}{265770796665}.$$

i naszym wyrażeniem jest

$$\frac{2821109907456}{265770796665} = 6 + \frac{6}{5} + \frac{36}{31} +$$

$$+ \frac{1296}{1141} + \frac{1679616}{1502761}.$$



Dr Marcin KUBIAK



Odkrycie antycząstek w istotny sposób uprościło nasz obraz świata w skali mikroskopowej, dowodząc zarazem, że przyroda podziela niejako nasze upodobanie do symetrii. Jeżeli jednak postulat symetrii między materią i antymaterią, tak dokładnie spełniony w dziedzinie cząstek elementarnych, ma mieć moc ogólnego prawa przyrody, to musi on być również — spełniony we Wszechświecie jako całości. W życiu codziennym nie spotykamy — na szczęście — wokół siebie żadnych skupisk antymaterii, a wytworzenie nawet znikomych jej ilości wymaga dość skomplikowanych zabiegów eksperymentalnych.

W skali właściwej człowiekowi świat może być tylko albo materialny, albo antymaterialny. Wniosek ten jest słuszny nie tylko w odniesieniu do Ziemi, ale również w odniesieniu do naszego najbliższego otoczenia kosmicznego. Na Księżyc, Wenus i Marsa upadły już przedmioty zbudowane z materii ziemskiej i, jak wiemy, nie zakończyło się to eksplozją, jaka powinna towarzyszyć bezpośredniemu zetknięciu się materii z antymaterią. Wiemy również, że Słońce wysłała bezustannie strumienie cząstek w postaci wiatru słonecznego, które dobiegają, bez widocznych efektów anihilacji, nie tylko do Ziemi, ale również do planet leżących na dalekich peryferiach układu słonecznego, oddziałując po drodze z kometami, meteorami i pyłem międzyplanetarnym. Stwierdzenie, że cały układ słoneczny jest zbudowany z materii, nie jest jednak zbyt interesujące z astronomicznego punktu widzenia. Co najwyżej, potwierdza ono nasze oczekiwania, że naturalny obszar aktywności człowieka nie ogranicza się tylko do Ziemi, lecz obejmuje również układ planetarny.

Mówiąc najogólniej, warunek symetrii Wszechświata względem zamiany materii i antymaterii może być spełniony w jeden z następujących sposobów:

- (1) średnio co druga gwiazda w galaktyce jest zbudowana z antymaterii,
- (2) średnio co druga galaktyka jest zbudowana z antymaterii,
- (3) cała obserwowana przez nas część Wszechświata, którą dla wygody nazwijmy Metagalaktyką, jest zbudowana z materii, natomiast w odległych od nas obszarach Wszechświata istnieje inna Metagalaktyka, której nie jesteśmy w stanie obserwować, zbudowana całkowicie z antymaterii.

Powyższy sposób rozumowania jest mniej lub bardziej świadomym odwołaniem się do proponowanego niegdyś modelu hierarchicznej budowy Wszechświata, zgodnie z którym materia tworzy skupiska w coraz to większej skali, oddzielone od siebie coraz to większymi odległościami, tak iż w granicy średnia gęstość materii dąży do zera. Wprawdzie przyczyny, dla których zaproponowano swego czasu model hierarchiczny, stały się już nieaktualne, jednak pozostaje on wciąż użyteczny jako ilustracja znanego faktu obserwacyjnego, że poszczególne gwiazdy skupiają się w galaktyki, poszczególne galaktyki tworzą gromady galaktyk, a te, być może, wchodzą w skład supergromad. Dalsze przedłużenie tego łańcucha, tzn. łączenie supergromad w metagalaktykę, wiele metagalaktyk w teragalaktykę itd., dopóki wystarczy nam pomysłów na tworzenie nowych słów, jest już tylko dowolną ekstrapolacją i w istocie rzeczy usuwa tylko nie rozwiązane problemy z naszego pola widzenia, spychając je w obszary Wszechświata, których z natury rzeczy nie jesteśmy i nie będziemy w stanie obserwować. Dlatego też przyjęcie trzeciej z wymienionych wyżej możliwości byłoby raczej wybiegiem niż odpowiedzią na nurtujące nas tu pytanie, gdzie we Wszechświecie znajduje się antymateria stanowiąca odpowiednik naszej materii.

W tej sytuacji dokładniejszego rozważenia wymagają przede wszystkim dwie pierwsze możliwości. Żądanie, by średnio co druga gwiazda w każdej galaktyce była zbudowana z antymaterii, wydaje się żądaniem zbyt daleko posuniętym: gdyby przyroda chciała uczynić mu zadość, wówczas galaktyki najprawdopodobniej nigdy by nie powstały. Wprawdzie historia powstania i ewolucji galaktyk nie została jeszcze dokładnie odtworzona, to jednak jest niemal pewne, że obiekty te powstały w wyniku grawitacyjnego kurczenia się przypadkowych zagęszczeń w pierwotnym obłoku materii rozrzedzonej. Trudno jest wyobrazić sobie, jak proces taki mógłby skutecznie przebiegać w przypadku, gdyby wzrostowi gęstości towarzyszyło jednocześnie wzmocnienie procesów anihilacji między cząstkami materii i antymaterii. Wypada tu jednak silnie podkreślić, że gdyby ktoś mimo wszystko utrzymywał, że najbliższa nas gwiazda, Proxima Centauri, jest zbudowana z antymaterii, to nie mielibyśmy żadnych podstaw, by takie twierdzenie odrzucić.

Dlaczego tak jest, łatwo zrozumiemy, jeżeli uprzytomnimy sobie, w jaki sposób astronomowie tworzą obraz naszego otoczenia kosmicznego. Otóż praktycznie wszystkie informacje, które mamy o obiektach astronomicznych, pochodzą z analizy wysyłanego przez nie promieniowania elektromagnetycznego, czyli fotonów, które należą zarówno do świata materii, jak i do świata antymaterii. Z drugiej strony, pełna symetria obu tych światów sprawia, że wszystkie procesy fizyczne, które prowadzą do wysłania promieniowania elektromagnetycznego, przebiegają dokładnie tak samo w materii, jak i w antymaterii. Innymi słowy, nasza znajomość ciał niebieskich jest całkowicie niezależna od tego, czy składają się one ze zwykłych atomów, czy z antyatomów.



**Rozwiązanie zadania F 81**  
Przekształćmy podane równanie do innej postaci

$$E = A(1 + \cos \Omega t) \sin \omega t = A \sin \omega t + A \cos \Omega t \sin \omega t = A \sin \omega t + \frac{A}{2} \sin(\omega + \Omega)t + \frac{A}{2} \sin(\omega - \Omega)t.$$

Rozważana fala jest więc superpozycją trzech fal monochromatycznych o częstościach:

$$\omega_1 = \omega - \Omega = 2,6 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1},$$

$$\omega_2 = \omega = 3,0 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1},$$

$$\omega_3 = \omega + \Omega = 3,4 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}.$$

W opisie kwantowym odpowiada jej strumień fotonów o energiach

$$\epsilon_1 = h\nu_1 = h \frac{\omega_1}{2\pi} = h(\omega - \Omega),$$

$$\epsilon_2 = h\omega,$$

$$\epsilon_3 = h(\omega + \Omega).$$

Traktując absorpcję energii przez elektron jako proces jednofotonowy, można korzystać z prawa Einsteina dla zjawiska fotoelektrycznego

$$\epsilon = E_{\max} + W,$$

gdzie  $E_{\max}$  — maksymalna energia kinetyczna fotoelektronów. Minimalna częstość zdolna wywołać fotoefekt

$$\omega_{\min} = \frac{W}{h},$$

czyli

$$\omega_{\min} = \frac{2,15 \text{ eV}}{6,58 \cdot 10^{-16} \text{ eV} \cdot \text{s}} = 3,27 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}.$$

Ponieważ jedynie dla  $\omega_3$  spełniona jest nierówność:

$$\omega > \omega_{\min},$$

więc tylko fotony o energiach  $\epsilon_3 = h(\omega + \Omega)$  zdolne są do wywołania fotoefektu, a maksymalna energia elektronów wynosi

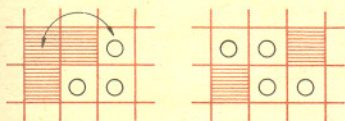
$$E_{\max} = h(\omega + \Omega) - W = 6,58 \cdot 10^{-16} \cdot 3,4 \cdot 10^{15} \text{ eV} - 2,15 \text{ eV} \approx 0,1 \text{ eV}.$$





Rozwiązanie zadania M 240

Zauważmy, że zamieniając role „pionków” i „pustych pól” uzyskamy zamiast „dostawiania pionków” — „zbijanie pustych pól”. Rozgrywając więc „samotnika” od końca, rozwiązujemy dokładnie tę samą lamigłówkę.

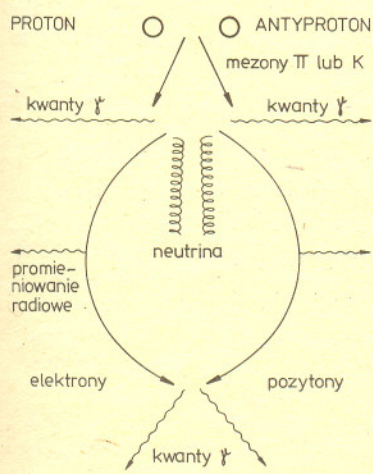


dostawianie pionka jest zbiem wolnego pola

Dla ścisłości wypada tu dodać, że atomy materii i antymaterii, różniące się tym, że znaki ładunków ich odpowiednich cząstek składowych są wzajemnie wymienione, inaczej reagują na obecność sił elektrycznych i magnetycznych, co w pewnych warunkach jest podstawą do odróżnienia materii i antymaterii. Na przykład w polu magnetycznym elektrony i pozytony poruszają się po torach kołowych, ale w kierunkach przeciwnych. W związku z tym, tzw. efekt Zeemana, czyli rozszczepienie linii widmowych atomu znajdującego się w polu magnetycznym na składowe o charakterystycznej polaryzacji, będzie inny dla atomu, a inny dla antyatomu przy takim samym kierunku pola. Jeżeli jednak zmienimy kierunek pola magnetycznego na przeciwny, wówczas kierunki ruchów elektronów i pozytonów ulegną zmianie na przeciwne i efekt Zeemana, w takiej postaci w jakiej obserwowaliśmy go poprzednio dla atomów, będziemy obserwować obecnie dla antyatomów. Ponieważ nie mamy żadnej innej metody wyznaczania kierunku pola magnetycznego na odległość niż właśnie efekt Zeemana, więc obserwowane rozszczepienie zeemanowskie linii widmowych możemy interpretować zawsze dwojako: albo jako wynik oddziaływania atomów z polem o danym kierunku, albo jako wynik oddziaływania antyatomów z polem o kierunku przeciwnym. Oczywiście, nie zbliża to nas ani o krok do rozwiązania problemu odróżnienia materii od antymaterii w astronomii.

Uważny Czytelnik słusznie może w tym miejscu zwrócić uwagę, że fakt, iż nie potrafimy odróżnić fotonu wysłanego przez materię od fotonu wysłanego przez antymaterię, nie wyklucza jeszcze możliwości zaobserwowania skutków anihilacji zachodzącej na skalę kosmiczną. Niestety, również i tu spotyka nas rozczarowanie. W warunkach, jakie obecnie panują w naszej Galaktyce oraz prawdopodobnie w innych galaktykach, proces anihilacji materii i antymaterii przebiegałby tak spokojnie, że jego skutki byłyby w obecnym stanie techniki obserwacyjnej nie do zauważenia. Przestrzenna gęstość gwiazd w galaktykach, być może z wyjątkiem niewielkich obszarów ich jąder, jest tak mała, że zderzenie się dwu gwiazd jest zdarzeniem praktycznie niemożliwym, choć w przypadku, gdyby zderzające się gwiazdy były zbudowane z różnych rodzajów materii, wzajemna anihilacja ich materii dostarczyłaby nam wspaniałego widowiska kosmicznego, a zarazem dowodu istnienia antygwiazd. Jednak to, czego możemy realnie oczekiwać, nie przypomina w niczym wspaniałego fajerwerku kosmicznego. W najlepszym razie zderzenie ograniczy się do stosunkowo cienkiej warstwy, w której ulegną wymieszaniu i anihilacji cząstki rozrzedzonych obłoków materii i antymaterii otaczających gwiazdę i antygwiazdę. Rozumowanie, które do takiego wniosku prowadzi, jest stosunkowo proste i warto je tutaj przytoczyć.

W zgodzie z wieloma danymi obserwacyjnymi możemy przyjąć, że typowa gwiazda jest otoczona obłokiem fizycznie z nią związanej materii rozrzedzonej. Obłok taki może być pozostałością po pierwotnym obłoku, z którego powstała gwiazda, albo może być utworzony przez materię opuszczającą gwiazdę np. w postaci wiatru gwiazdowego. Wyobraźmy sobie teraz, że dwie gwiazdy, zbudowane z różnych rodzajów materii, zbliżają się do siebie na tak małą odległość, że otaczające je obłoki materii i antymaterii znajdują się w bezpośrednim kontakcie. W obszarze zetknięcia się obu rodzajów gazów natychmiast zaczynają przebiegać procesy anihilacji. Anihilacja każdej pary elektron-pozyton spowoduje wysłanie dwóch kwantów gamma o łącznej energii około 1 MeV, które na ogół opuszczą bez przeszkód miejsce swego powstania. Anihilacja protonów z antyprotonami, która ze względu na ich znacznie większą masę spoczynkową (odpowiadającą około 1800 MeV) jest ważniejsza pod względem energetycznym, ma przebieg bardziej złożony. Początkowo na miejscu pierwotnej pary pojawią się mezony  $\pi$  lub  $K$ , które po upływie kilku mikrosekund rozpadną się z kolei na kilka neutrin, kwantów gamma i jedną lub dwie pary elektron-pozyton. Neutrino i kwanty gamma opuszczą miejsce reakcji unosząc ze sobą łącznie około 1500 MeV energii. Natomiast elektrony i pozytony, pomimo swej ogromnej energii kinetycznej (około 300 MeV łącznie) nie będą mogły oddalić się zbytnio od miejsca swego powstania. Przeszkodzi temu powszechnie występujące pole magnetyczne. W typowym dla Galaktyki polu magnetycznym o natężeniu rzędu  $10^{-5}$  gaussa, elektrony i pozytony o podanej wyżej energii będą poruszać się po spiralach mieszczących się w obszarze o średnicy niewiele większej od odległości Ziemia-Słońce. Do chwili anihilacji, uwięzione przez pole magnetyczne elektrony i pozytony będą tracić energię w wyniku promieniowania radiowego oraz w wyniku zderzeń z innymi cząstkami. Zderzenia te bardzo szybko doprowadzą do gwałtownego wzrostu temperatury w warstwie granicznej, a tym samym do jej rozprężenia i zmniejszenia gęstości.



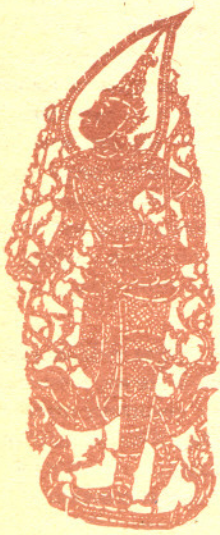
Zmniejszenie się gęstości zahamuje z kolei dalsze procesy anihilacji. Ostatecznie ustali się pewien stan równowagi, w którym tempo anihilacji będzie dokładnie takie, jakie jest konieczne do wytworzenia odpowiednio gorącej warstwy granicznej oddzielającej materię od antymaterii. Warstwa taka będzie źródłem promieniowania gamma oraz promieniowania radiowego.

Co prawda ilości energii, jakich możemy oczekiwać od typowych warstw granicznych, są tak małe, że dziś nie byłibyśmy w stanie wykryć ich istnienia nawet z niewielkiej odległości, to jednak problem nasz wyszedł w ten sposób ze sfery czystych spekulacji i przynajmniej w zasadzie może znaleźć rozwiązanie obserwacyjne. Należy jednak dodać, że odpowiednie obserwacje, nawet jeżeli byłyby kiedyś możliwe, nie będą miały jednoznacznej interpretacji: już obecnie znamy i obserwujemy wiele procesów przebiegających w zwykłej materii, które są źródłami zarówno promieniowania gamma jak i promieniowania radiowego.





Rozwiązanie zadania M 239  
 Białe wygrywiają: 1. Sc4 Sh5 (jeśli 1...Se8 lub 1...Sf5, to 2. Sd6!, natomiast po 1...Se6 następuje 2. Se5 Sc7, 3. Sc6 Se8, 4. Se7 i czarny koń nie ma ucieczki), 2. Se5 Sg3, 3. Sf3 Sh5, 4. Sg5! i w następnym ruchu koniec. Widoczne jest, że o wygranej decyduje zajęcie opozycji — dwa skoczki tuż obok siebie.



Pozostaje nam jeszcze do rozważenia możliwość (2), tzn. że średnio co druga galaktyka jest zbudowana z antymaterii. W świetle tego, co mówiliśmy o trudnościach związanych z obserwacyjnym wykryciem antymaterii w naszej Galaktyce, łatwo jest zrozumieć, że trudności te wznoszą niesłychanie, gdy mamy do czynienia z obiektami tak odległymi i izolowanymi, jak inne galaktyki. Jedyną, choć bardzo nikłą nadzieję można w tym przypadku wiązać z obserwacjami promieniowania kosmicznego. W strumieniu szybkich cząstek, które dobiegają z przestrzeni kosmicznej do górnych warstw atmosfery ziemskiej, powinny znajdować się również takie, które przybyły z odległych galaktyk niosąc informacje o przebiegających tam burzliwych procesach, w których zaangażowane były ogromne ilości energii. Oczywiście możemy oczekiwać, że galaktyka zbudowana z antymaterii będzie wysyłała promieniowanie kosmiczne złożone głównie z antycząstek. Wykrycie w pozagalaktycznym promieniowaniu kosmicznym istotnej składowej antymaterialnej byłoby wyraźną wskazówką, że gdzieś we Wszechświecie istnieją antygalaktyki, w których wybuchają anty-supernowe, lub których anty-jądra wykazują podobną aktywność jak jądra zwykłych galaktyk. W obserwowanym promieniowaniu kosmicznym nie stwierdzono jeszcze w sposób bezsporny występowania antycząstek, choć ich wykrycie byłoby równie proste jak zwykłych cząstek. Wynik ten wydaje się przemawiać przeciwko możliwości istnienia wokół naszej Galaktyki licznych galaktyk zbudowanych z antymaterii, nie wyklucza jednak ich istnienia w większych odległościach.

Przedstawione wyżej trudności związane z obserwacyjnym wykryciem istnienia antymaterii we Wszechświecie doprowadziły do dość osobliwej sytuacji. Z jednej strony, w obecnym stanie naszej wiedzy o Wszechświecie jest zupełnie obojętne dla astronomów, czy materia występuje w nim w takich samych ilościach jak antymateria, czy też jest on zbudowany wyłącznie z materii. Z drugiej strony, u podstaw wszelkich badań astronomicznych leży przekonanie, że poznawane przez nas prawa przyrody mają znaczenie uniwersalne, tzn. odnoszą się do każdej części Wszechświata i są spełnione we wszystkich przebiegających w nim procesach, niezależnie od ich skali. Dlatego też wiedząc, że istnieją dwa najzupełniej pełnoprawne rodzaje materii, trudno byłoby nam pogodzić się z przypuszczeniem, że przyroda do zbudowania naszego Wszechświata zdecydowała się użyć tylko jednego rodzaju, drugiemu zaś przeznaczyła rolę efemerycznej zjawy towarzyszącej niektórym procesom przebiegającym w skali podatomowej.

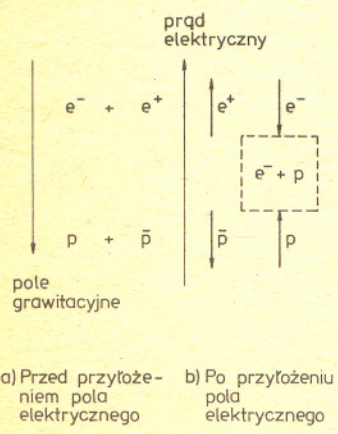
By nie wchodzić dalej w rozważania natury bardziej filozoficznej niż fizycznej, przyjmijmy w tym miejscu założenie, że pierwotnie materia i antymateria występowały we Wszechświecie w jednakowych ilościach i że były ze sobą dokładnie wymieszane.

Wbrew pozorom, założenie to wcale nie wymaga rewizji naszych dotychczasowych wyobrażeń o początkowych stanach istnienia Wszechświata. Obserwowana obecnie „ucieczka galaktyk”, wskazująca na rozszerzanie się Wszechświata, oraz istnienie tzw. promieniowania resztkowego przemawiają za tym, że nasz obecnie bardzo rozrzedzony i zimny Wszechświat był niegdyś bardzo gęsty i bardzo gorący. W warunkach temperatury rzędu wielu miliardów stopni i bardzo dużej gęstości zarówno materii jak i promieniowania, antymateria mogła współistnieć z materią, ponieważ wszystkie akty anihilacji były kompensowane przez akty kreacji par w wyniku zderzeń fotonów o odpowiednio dużej energii. Ażeby jednak z takiej mieszaniny mógł wyłonić się trwały Wszechświat, nie ulegający ciągłej anihilacji w miarę obniżania się jego temperatury, musiał mieć miejsce jakiś proces, który doprowadził do wielkoskalowego rozdzielenia materii od antymaterii.

O tym, jaki to był proces, nie mamy obecnie żadnego pojęcia. Nie znaczy to jednak, że nie mógłby on zostać odtworzony na podstawie znanych nam praw przyrody. Do optymizmu w tym względzie upoważnia nas następujący mechanizm rozdzielania materii od antymaterii zaproponowany przez znanego fizyka szwedzkiego Hannesa Alfvena.

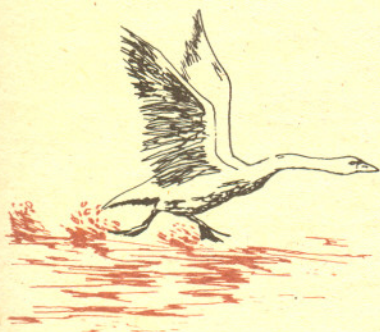
Wyobraźmy sobie całkowicie zjonizowaną mieszaninę materii i antymaterii znajdującą się w silnym polu grawitacyjnym. Podobnie, jak to ma miejsce np. w atmosferze ziemskiej, obecność pola grawitacyjnego doprowadzi do segregacji składników zależnie od ich masy: ciężkie protony i antyprotony zostaną zagęszczone silniej niż lekkie elektrony i pozytony. Wyobraźmy sobie również, że do tak rozwarstwionej mieszaniny przykładamy pole elektryczne, które spowoduje przepływ prądu „z dołu do góry”, tzn. w kierunku przeciwnym do kierunku pola grawitacyjnego. Taki kierunek przepływu prądu oznacza, że cząstki obdarzone ładunkiem dodatnim — protony i pozytony — poruszają się w górę, natomiast cząstki o ładunku ujemnym — elektrony i antyprotony — w dół. Łatwo zauważyć, że w pewnym obszarze nastąpi „spotkanie” płynących w dół elektronów z płynącymi w górę protonami; pojawi się więc obszar, w którym występować będzie przede wszystkim materia. Oczywiście odwrócenie kierunku przepływu prądu spowodowałoby powstanie obszaru wypełnionego przede wszystkim antymaterią.

Opisany tu proces nie byłby w stanie wyjaśnić rozdzielania materii i antymaterii na skalę kosmiczną, jest na to zbyt mało wydajny. Wskazuje on jednak drogę, którą powinny pójść dalsze rozważania. Co więcej, dowodzi on jednocześnie, że można w nich wykorzystać tak dobrze znane zjawiska, jak np. pole grawitacyjne czy przepływ prądu elektrycznego. Tak więc, przedstawione w tym artykule kłopoty, jakie sprawia astronomom problem istnienia antymaterii we Wszechświecie, nie są jeszcze wystarczającym powodem, by mieli oni zrezygnować z wszelkich prób wbudowania jej w astronomiczny obraz otaczającego nas świata, podobnie jak uczynili to już fizycy zajmujący się światem cząstek elementarnych.



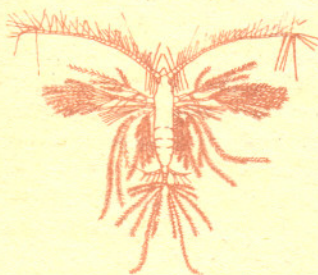


## Płynność wody



Woda wydaje nam się bardzo miękka. Jest tak dlatego, że, jak każda ciecz, zmienia łatwo swój kształt i przy próbach ściśnięcia jej w garści bez trudu przeslizguje się między palcami. Jednak naprawdę wody ścisnąć się nie da. Łatwo się o tym przekonać usiłując ścisnąć wypełniony nią woreczek plastikowy. Dobrze wiemy, że dolanie do wiadra dziesięciu litrów wody zwiększy objętość wody w wiadrze o dziesięć właśnie litrów. Dolne warstwy nie ulegają więc zgnieceniu. Pomimo, iż dolana woda waży aż dziesięć kilogramów. Zamiana dziesięciu kilogramów na dziesięć ton także nic nie daje. Nawet tak silnie obciążona woda nie chce zmienić swojej objętości. Nieściśliwość wody powoduje, że w niektórych sytuacjach powierzchnia jej okazuje się wyjątkowo twarda. Kamień tonie w niej bez trudu, ale odpowiednio rzucony (i płaski) odbija się kilkakrotnie od lustra wodnego w stawie. Twardość wody odczuwa też pływak skaczący z trampoliny, gdy nie uda mu się przyjąć odpowiedniej pozycji. Spróbujcie zresztą uderzyć mocno otwartą dłońią (na płask) w powierzchnię wody w wannie...

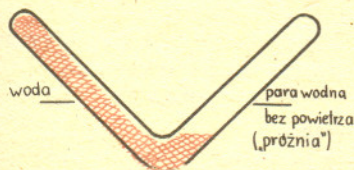
Kontrast między miękkością i twardością wody można łatwo wytłumaczyć. Po prostu woda zmienia swój kształt stosunkowo powoli i zmiany te nie mogą nadążyć za gwałtownymi uderzeniami o powierzchnię. Zjawisko to zachodzi również pod wodą, chociaż trudniej je zaobserwować. Na przykład przy szybkich obrotach śruby okrętowej za łopatkami tworzy się próżnia, która następnie jest wypełniana przez wodę tak, że wywołane tym uderzenia powodują znaczny hałas będący świadectwem gwałtowności tych uderzeń. W celu zabezpieczenia łopatek przed zniszczeniem, śruby okrętowe robi się ze specjalnego rodzaju stopów.



Hałas wywołany uderzeniami wody możemy też słyszeć w czasie gotowania wody w czajniku. W miarę zwiększania temperatury w wodzie pojawia się coraz więcej drobnych pęcherzyków pary, które natychmiast zostają zgniecione, czemu towarzyszy zderzanie się warstw wody ze sobą. W pewnej temperaturze powstające pęcherzyki mają na tyle dużą prędkość, że nie dają się już zgnieść i swobodnie wypływają na powierzchnię. Woda wrze, a charakterystyczny hałas ustaje na rzecz bulgotania.

Niszczące uderzenia wody zmuszają do stosowania w instalacjach wodnych odpowiednich zabezpieczeń. Z tego powodu kranie wodne mają tak złożoną i solidną budowę. Zamknięcie wody prostym kurkiem używanym przy maszynkach gazowych groziłoby niebezpieczeństwem złamania kurka przez rozpedzony strumień wody.

Prócz swej miękkości, woda wydaje się być bardzo rozciągliwa. W każdym razie łatwo dzieli się na kawałki i stosunkowo łatwo tworzy niewielkie krople. Jednak rozciągliwość i łatwość dzielenia to wcale nie to samo. Biorąc pod uwagę nieograniczone możliwości wody przy zmianach jej kształtu, nie wydaje się proste stwierdzenie, czy wodę łatwo czy też trudno rozciągnąć. Trzeba by uformować bardzo długą kroplę i sprawdzić, czy może ona pod własnym ciężarem wydłużyć się bądź pęknąć. Takie warunki można stworzyć w szklanych rurkach laboratoryjnych (patrz rysunek) i uzyskać nawet trzydziestocentymetrowe wiszące słupki wody. Możliwość utrzymania takiej wiszącej „kropli”, jedynie przez siły spajające wodę, świadczy o tym, że nie jest ona wcale rozciągliwa. W warunkach normalnych trudno jednak to stwierdzić z powodu wspomnianej wyjątkowej „kruchości” wody.

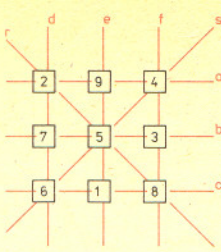


Tak więc woda jest miękka i twarda zarazem, a oprócz tego krucha i płynna, choć nierozciągliwa. Jeśli dodamy, że spełnione są dla niej prawa Archimidesa i Pascala, co czyni ją podobną do gazów, to łatwo uwierzmy, że całkiem niezwykła z niej substancja.

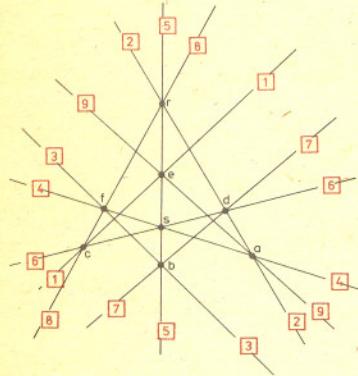


2	9	4
7	5	3
6	1	8

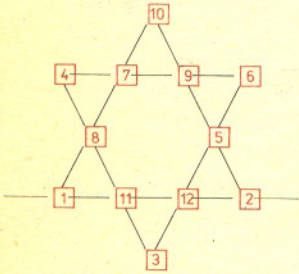
Rys. 1



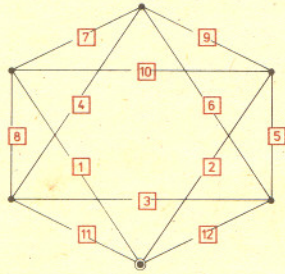
Rys. 2. Mamy 9 punktów, ponumerowanych od 1 do 9, oraz 8 prostych oznaczonych przez  $a, b, c, d, e, f, r, s$ . Prosta  $r$  przechodzi przez punkty 2, 5, 8, prosta  $a$  przechodzi przez 2, 9, 4, prosta  $b$  przechodzi przez 7, 5 i 3 i tak dalej. Suma liczb wzdłuż każdej prostej jest równa 15.



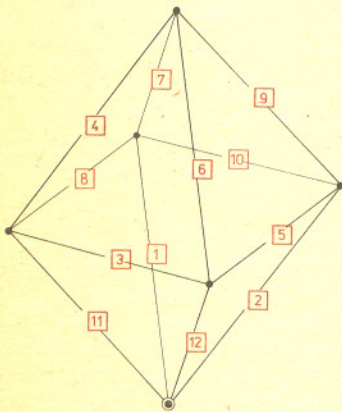
Rys. 3. Mamy 9 prostych, ponumerowanych od 1 do 9 oraz 8 punktów oznaczonych przez  $a, b, c, d, e, f, r, s$ . Punkt  $r$  leży na prostych 2, 5, 8, punkt  $a$  leży na prostych 2, 9, 4, punkt  $b$  leży na prostych 7, 5 i 3 ... i tak dalej.



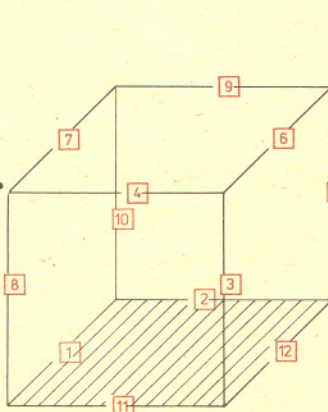
Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

## Figury magiczne i dualne

Czy umiecie ustawić liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, w kwadrat magiczny? Spójrzcie na rysunek 1. Suma liczb w poziomych rzędach jest zawsze równa 15. Tyle samo wynosi suma liczb położonych jedna pod drugą. I wreszcie na ukos też:  $2+5+8 = 6+5+4 = 15$ . To właśnie znaczy, że kwadrat jest magiczny. Inaczej narysowane jest to na rysunku 2. A co widzimy na rysunku 3? Czy suma liczb na prostych wychodzących z jednego punktu jest zawsze równa 15? Czy trzeba to sprawdzić, czy wynika to z pewnego podobieństwa figur z rys. 2 i 3?

Na czym polega to podobieństwo? Na tym, że są to figury *dualne*. Proste zostały zastąpione przez punkty, punkty przez proste — ale nie zmieniła się relacja „leżenia na” (lub *incydencji*, jak mówią matematycy). Odpowiedź na postawione kilka wierszy temu pytanie (czy trzeba to sprawdzać?) jest oczywiście twierdząca. Ale możemy to sformułować w postaci bardzo mądrze wyglądającego twierdzenia

*Figura dualna do magicznej jest znów magiczna, albo już nadzwyczaj mądrze*

*Magiczność jest niezmiennikiem dualizacji.*

Pobawmy się dalej w dualizowanie. Na następnym rysunku dwanaście liczb zostało ustawionych w 6 rzędach po 4 w każdym i suma liczb w każdym rzędzie jest równa 26. Mamy więc taką gwiazdę magiczną. Jak wygląda figura do niej dualna? Ma ona 12 prostych, 6 punktów ich przecięcia — w każdym punkcie schodzą się po 4 proste; a suma liczb na prostych wychodzących z każdego z punktów jest równa 26. Przekonajcie się, że figura na rysunku 5 jest właśnie taka. Dlaczego dolny wierzchołek został narysowany trochę inaczej? Odpowiedź: bo dolna linia na rysunku 4 też.

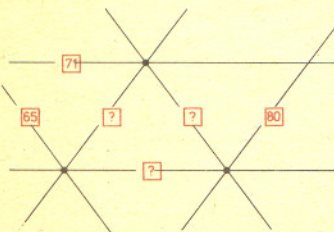
Gdyby zależało nam, aby wszystkie punkty przecięcia prostych naszej figury były punktami figury dualnej, musielibyśmy ustawić wszystko w ośmiościan (rys. 6). Znowu jest on magiczny: sumy liczb na krawędziach wychodzących z każdego z wierzchołków są zawsze 26. Ośmiościan nasz ma jednak jeszcze (jak każda bryła) i ściany. Jaka jest wobec tego bryła do niej dualna? To się robi tak: zamieniamy ściany na wierzchołki, a wierzchołki na ściany. Krawędzie zostają krawędziami. Nie możemy tylko zmienić stosunków rodzinnych panujących na naszej bryle. Aby to ująć prosto, umówmy się, że zamiast mówić punkt leży na prostej, wierzchołek leży na krawędzi, krawędź leży na ścianie, ściana zawiera wierzchołek, krawędź zawiera wierzchołek itp., będziemy mówili: są *incydentne*. A zatem przy dualizacji

*jeżeli dwie rzeczy są incydentne przed, to i po.*

Albo mądrze

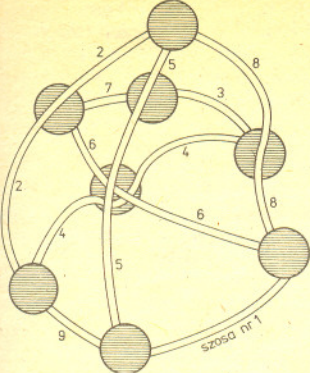
*Incydencja jest niezmiennikiem dualizacji.*

Przekonajcie się, że bryłę dualną do ośmiościanu z rysunku 6 widzicie na rysunku 7. Jest to po prostu sześciąt. Na czym polega jego „magiczność”? Dlaczego zaciemniowaliśmy dolną podstawę? Spójrzcie na rysunek 8. Czy potraficie wpisać w kółka liczby takie, by przy każdym wierzchołku liczba w kwadracie była sumą liczb w kołach?

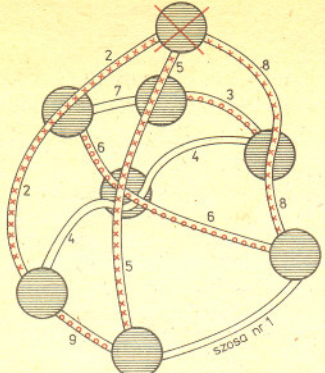


Rys. 8





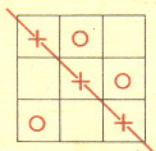
Rys. 9



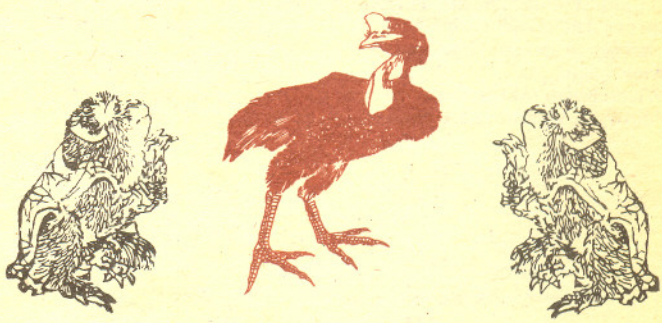
Rys. 10

Czy potraficie, czy nie, zajrzyjcie do Małej Deltę 1/1979, albo sami napiszcie zadanie dualne do tego, które tu postawiliśmy. A na zakończenie zagrajmy w taką oto nieskomplikowaną grę: 9 szos łączy 8 miast tak, jak pokazuje to rysunek 9. Każdy z dwóch graczy w kolejnym ruchu blokuje poszczególną drogę na całej jej długości, np. kolorując ją swoim kolorem. Wygrywa ten, kto pierwszy zablokuje trzy drogi przechodzące przez jedno miasto (rys. 10). Co wspólnego ma ta gra z tematem dzisiejszej Małej Deltę? Jeśli nie wiecie, to dla odprężenia zagrajcie w „szubienicę” (rys. 11).

Małą Deltę opracowali Michał SZUREK i Michał ŚWIĘCKI.

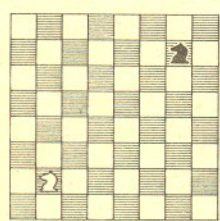


Rys. 11



## Zadania

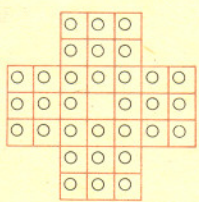
Reaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI



Ruch białych

**M 238.** W równości  $\frac{1679616}{176855} = 6 + \frac{6}{5} + \frac{36}{31} + \frac{1296}{1141}$  możemy, zaczynając od lewej strony, ścierać plusy i zastępować je znakami mnożenia a równość pozostanie prawdziwa. Znaleźć następny składnik  $b_4$  taki, aby wyrażenie  $b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4$  ( $b_0 = 6, b_1 = \frac{6}{5}, b_2 = \frac{36}{31}, b_3 = \frac{1296}{1141}$ ) miało też tę własność (sz).

Rozwiązanie na str. 5

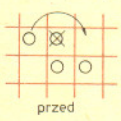


Plansza i początkowe położenie pionków

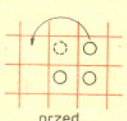
**M 239.** Każdą grę można „dualizować”, nie zmieniając przepisów, a przedstawiając tylko pojęcie „wygranej” i „przegranej” i niekiedy w taką „dualną” grę da się sensownie grać. Jeżeli w szachach wprowadzimy przymus bicia, zniesiemy „szach” i umożliwimy bicie króla oraz uznamy za zwycięzcę gracza, który pozwolił sobie wybić wszystkie figury, otrzymamy całkiem nietrywialną grę „wybitkę”. Dla kogo jest wygrana końcówka, widoczna na rysunku obok? (sz).

Rozwiązanie na str. 8

**M 240.** W znanej pod nazwą samotnik łamigłówce należy, zbijając kolejne pionki tak, jak to przedstawia rys. 1, doprowadzić do sytuacji, w której w środku planszy stoi samotny pionek. Pokazać, że rozwiązanie tej łamigłówki „od końca”, czyli od pojedynczego pionka, przez dostawianie kolejnych pionków tak, jak to przedstawia rys. 2 nie jest istotnym ułatwieniem. Rozwiązanie na str. 7



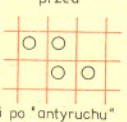
przed



przed



i po zбиciu pionka



i po „anty ruchu”

Redaguje doc. dr Michał ŚWIĘCKI

**F 81.** Natężenie pola elektrycznego zmodulowanej amplitudowo fali elektromagnetycznej zmienia się według zależności:

$$E = A(1 + \cos \Omega t) \sin \omega t$$

gdzie:  $A$  — stała,  $t$  — czas,  $\Omega = 4,0 \cdot 10^{14} \text{s}^{-1}$ ,  $\omega = 3,0 \cdot 10^{15} \text{s}^{-1}$ .

Fala ta pada na fotokomórkę. Znaleźć maksymalną energię elektronów uwalnianych z fotokatody potasowej (praca wyjścia  $W = 2,15 \text{ eV}$ ).

Rozwiązanie na str. 6

T. Tratkiewicz



# Dualność w programowaniu liniowym

Najprostszą wersję zagadnienia programowania liniowego można sformułować następująco:

Znaleźć największą (lub najmniejszą) wartość funkcji liniowej zwanej funkcją celu

$$c(x) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$$

na zbiorze  $A$  określonym następującymi nierównościami:

$$(*) \begin{cases} x_1 \geq 0 \\ \dots \\ x_n \geq 0 \\ a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n \leq b_k \end{cases}$$

(Zbiór  $A$  jest więc wielościannem wypukłym).

Z punktu widzenia „matematyki czystej” teoria tego problemu sprowadza się do stwierdzenia, że o ile poszukiwane maksimum istnieje, to jest przyjmowane w jednym z wierzchołków wielościannu  $A$ .

Wierzchołek taki możemy znaleźć rozwiązując układ  $n$  równań liniowych wybranych z równań

$$(**) \begin{cases} x_1 = 0 \\ \dots \\ x_n = 0 \\ a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

Tak więc, aby nasz problem rozwiązać, wystarczy:

1. rozwiązać wszystkie  $\binom{n+k}{n}$  uzyskanych w ten sposób układów równań,
2. sprawdzić, czy rozwiązanie takiego układu spełnia pozostałe  $k$  warunków (\*), czyli czy należy do zbioru  $A$ ,
3. wybrać spośród znalezionych wierzchołków ten, w którym wartość funkcji  $c$  jest największa.

Niestety, „rozwiązanie” to nie ma wartości praktycznej: dla rozwiązania zagadnienia, w którym  $n = 50$  zmiennych jest związane  $k = 150$  warunkami, musielibyśmy rozpatrzyć  $\binom{n+k}{n} = \binom{200}{50} \approx 10^{150}$  układów 50 równań z 50 niewiadomymi,

co gwarantowałoby nam zajęcie na co najmniej  $10^{10}$  lat. Tak więc należałoby poszukać sprawniejszego algorytmu rozwiązywania naszego zagadnienia. Pytanie jeszcze, po co? Otóż okazuje się, że wiele problemów „życiowych” (głównie natury ekonomicznej) formułuje się właśnie w terminach programowania liniowego.

Oto najprostszy przykład. Możemy produkować  $n$  różnych wyrobów, przy czym zysk z produkcji jednostki  $i$ -tego wyrobu wynosi  $c_i$ , a jej wyprodukowanie wymaga  $a_{ij}$  jednostek  $j$ -tego surowca. Mamy do dyspozycji  $b_j$  jednostek  $j$ -tego materiału. Ile jednostek poszczególnych wyrobów powinniśmy wyprodukować, aby osiągnąć maksymalny zysk? Takie i podobne problemy pojawiają się dostatecznie często, aby było warto zająć się poważnie szukaniem metody ich rozwiązywania.

Nie będziemy tu omawiać szczegółowo najbardziej znanego takiego algorytmu (tzw. metody simplex), podamy tylko jej sens geometryczny.

Drogę do rozwiązania optymalnego zaczynamy od dowolnego wierzchołka  $w_1$  wielościannu  $A$  (zwykle od punktu  $(0, \dots, 0)$ ).

Wśród wychodzących z tego wierzchołka krawędzi szukamy teraz tych, w kierunku których rośnie funkcja celu. Jeżeli takich krawędzi nie ma, jesteśmy już w wierzchołku poszukiwanym i możemy zakończyć pracę. W przeciwnym przypadku wybieramy krawędź „najbardziej obiecującą” i przechodzimy po niej do następnego wierzchołka, aby opisaną procedurę powtórzyć. Wierzchołek optymalny znajdziemy wykonując co najwyżej  $k$  takich kroków.

Pora teraz na zapowiedzianą w tytule dualność. Otóż zagadnienie dualne polega na zamianie ról ograniczeń (materiałów w naszej interpretacji ekonomicznej) i zmiennych — czyli przejściu do przestrzeni sprzężonych — p. artykuł M. Szurka i gastronomiczny.

Otrzymujemy w ten sposób problem następujący: Znaleźć minimum funkcji

$$d(w) = b_1 w_1 + \dots + b_k w_k$$

na zbiorze  $A$  wyznaczonym warunkami

$$\begin{cases} w_1 \geq 0 \\ \dots \\ w_k \geq 0 \\ a_{11}w_1 + \dots + a_{k1}w_k \geq c_1 \\ \dots \\ a_{1n}w_1 + \dots + a_{kn}w_k \geq c_n \end{cases}$$

Zagadnienie jest poprawnie sformułowane, występują w nim te same współczynniki co w zagadnieniu pierwotnym, ale co mają ze sobą wspólnego ich rozwiązania? I jaki jest ich sens? Zauważmy, że w rozwiązaniu zagadnienia z  $l$  zmiennymi i  $m$  warunkami wartość niezerową może przybierać co najwyżej  $\min(l, m)$  zmiennych (dlaczego?).

Jeżeli więc np.  $k > n$ , to rozwiązaniem zagadnienia dualnego będzie punkt  $(w_1^0, \dots, w_k^0)$ , w którym co najwyżej  $n$  współrzędnych będzie różnych od zera. Wiemy, że zmienne  $w_i$  odpowiadają ograniczeniom (nierównościami) zagadnienia pierwotnego — wobec tego dokonaliśmy w ten sposób pewnego wyboru warunków. Okazuje się, że są to dokładnie te nierówności, które określają wierzchołek poszukiwany w zagadnieniu pierwotnym. Warto zauważyć, że gdy  $k \neq n$ , rozwiązywanie zagadnienia pierwotnego i dualnego może się różnić złożonością rachunków i wobec tego w niektórych przypadkach rozważanie problemu dualnego może przynieść istotny zysk czasowy.

Czy można jeszcze dokładniej sprecyzować sens rozwiązania dualnego?

Okazuje się, że tak. Rozważmy mianowicie płaszczyzny wyznaczone poszukiwany wierzchołek  $x^0$ . Będą to płaszczyzny odpowiadające pewnym zmiennym  $w_i$  rozwiązania dualnego. Jeżeli teraz  $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$  jest równaniem takiej płaszczyzny, to  $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 + \epsilon$  będzie równaniem bliskiej płaszczyzny równoległej. Takie „rozluźnienie”  $i$ -tego warunku spowoduje, że rozwiązanie optymalne  $x^0$  przesunie się do położenia  $x^{\epsilon}$ , dając pewien zysk na funkcji celu — zysk proporcjonalny do  $\epsilon$ . Okazuje się, że współczynnikiem tej proporcjonalności jest właśnie  $w_i^0$ .

Gdybyśmy dokonali „analizy wymiarowej” problemu programowania liniowego w interpretacji ekonomicznej, okazałoby się, że  $w_i$  ma „wymiar” ceny  $z$ /jednostka. Jest to tzw. cena dualna  $i$ -tego materiału, będąca miernikiem jego względnej wartości w określonej naszymi warunkami (\*) sytuacji: materiały, których mamy w nadmiarze mają „cenę” 0, a materiały najbardziej potrzebne z punktu widzenia naszych celów — cenę najwyższą.

Mgr Krzysztof Nowiński

# Pojęcia pierwotne w geometrii euklidesowej

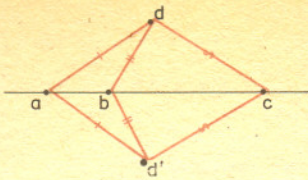
Doc. dr Lesław W.

SZCZERBA

Najbardziej znany układ pojęć pierwotnych pochodzi od Dawida Hilberta (1899). Pojęciami tymi są: *punkt*, *prosta*, *płaszczyzna*, *leży na*, *leży między* i *przystaje*. Punkty będą oznaczone małymi literami łacińskimi, duże litery łacińskie zarezerwujemy dla prostych, a małe greckie dla płaszczyzn (chyba, że zaznaczono inaczej). Relacja incydencji (*leży na*) będzie oznaczana przez  $I$ . Może ona zachodzić między punktami a prostymi lub płaszczyznami, a także między prostymi a płaszczyznami. Relacja *leżenia między* będzie oznaczana przez  $B$  i może zachodzić między trzema punktami. Wreszcie relacja *przystawania*,  $\equiv$ , może zachodzić dla dwu par punktów lub dwu par prostych. W pierwszym przypadku mówi się o przystawianiu odcinków, w drugim — kątów.

Nie jest to ani jedyny, ani nawet najprostszy układ pojęć pierwotnych. Prostszy zaproponował Alfred Tarski (1951). Składa się on z pojęć występujących już u Hilberta. Pojęciami tymi są mianowicie: *punkt*, *leży między*, *przystaje*. Ten układ pojęć pierwotnych też nie jest najekonomiczniejszy: relację *leżenia między* można zdefiniować za pomocą przystawania.





Aby to pokazać, zdefiniujmy najpierw relację *współliniowości*:  
 $L(abc) \leftrightarrow a = b \vee \wedge dd'(da \equiv ad' \wedge db \equiv bd' \rightarrow dc \equiv cd')$  (czytamy:  $a, b, c$  są współliniowe).  
 Następnym pojęciem, które należy zdefiniować jest kąt prosty:  $\perp(abc)$  (czytamy:  $abc$  tworzą kąt prosty (o wierzchołku  $b$ )).

$$\perp(abc) \leftrightarrow a = b \vee \vee a'(ab \equiv ba' \wedge ac \equiv ca' \wedge a \neq a' \wedge L(aba')).$$

Pojęcie kąta prostego pozwala zdefiniować relację leżenia między:

$$B(abc) \leftrightarrow L(abc) \wedge \vee b'(\perp(abb') \wedge \perp(b'bc) \wedge \perp(ab'c)).$$

W ten sposób otrzymaliśmy system pojęć pierwotnych, równoważny systemowi Tarskiego. Składa się on z pojęć: *punkt, przystaje*. Relacja przystawania jest relacją czteroargumentową. Oszczędniej byłoby mieć relację trójargumentową. Taki układ pojęć pierwotnych zaproponował Pieri (1899). Na system ten składają się pojęcia: *punkt* i *trójkąt równoramienny*. Pojęcie to jest szczególnym przypadkiem przystawania odcinków: dlatego zamiast „ $abc$  tworzą trójkąt równoramienny” będziemy pisać „ $ab \equiv bc$ ”. Łatwo zauważyć, że definicja współliniowości w terminach przystawania, podana powyżej, jest w istocie definicją w terminach Pieriego. Podobnie jest z definicją kąta prostego i relacji leżenia między. Można więc przyjąć, że wszystkie te trzy relacje zostały zdefiniowane w systemie Pieriego. Teraz zdefiniujemy relację *środką*

$$\vdash (abc) \leftrightarrow B(abc) \wedge ab \equiv bc,$$

a za jej pomocą relację przystawania

$$ab \equiv cd \leftrightarrow \vee ee'((aec) \wedge (bee') \wedge e'c \equiv cd).$$

Nie tylko relacja trójkąta równoramiennego może być jedyną relacją pierwotną. Innym przykładem takiej relacji jest *kąt prosty* wspomniany już powyżej. Za pomocą tego pojęcia można zdefiniować relację *środką*:

$$\vdash (abc) \leftrightarrow \vee ed(\perp(abd) \wedge \perp(abe) \wedge \perp(cbd) \wedge \perp(cbe) \wedge \perp(adc) \wedge \perp(dce) \wedge \perp(cea) \wedge \perp(ead)),$$

a to wystarcza do zdefiniowania relacji Pieriego

$$ab \equiv bc \leftrightarrow \vee d(\vdash(adc) \wedge \perp(adb)).$$

Skoro chcemy zdefiniować w systemie Tarskiego pojęcia systemu Hilberta, to nie możemy ograniczyć się do definiowania relacji. Musimy jeszcze zdefiniować proste i płaszczyzny.

Zacznijmy od funkcji  $L(ab) = \{c : L(abc)\}$ .

Funkcja ta przyporządkowuje parom punktów zbiory punktów. Na przykład jeśli  $a = b$ , to  $L(ab)$  jest zbiorem wszystkich punktów, jeśli jednak  $a \neq b$ , to  $L(ab)$  jest prostą. Pojęcie prostej możemy zatem zdefiniować następująco: zbiór punktów  $X$  jest prostą wówczas, gdy istnieją takie dwa różne punkty  $a$  i  $b$ , że  $X = L(ab)$  (w tym kontekście  $X$  oznacza dowolny zbiór punktów). Przy tak zdefiniowanych prostych relację incydencji można zdefiniować jako relację *należenia*:

$$a \perp L \leftrightarrow a \in L.$$

Zdefiniujemy dwie relacje zachodzące pomiędzy prostymi:

Relację *współpękowości*:

$$p(KLM) \leftrightarrow \vee a(a \in K \cap L \cap M)$$

i *prostokątności*:

$$K \perp L \leftrightarrow \vee abc(\perp(abc) \wedge a \neq b \neq c \wedge a, b \in K \wedge b, c \in L).$$

Układ: *proste, współpękowość* i *prostokątność* też może służyć jako układ pojęć pierwotnych. Weźmy bowiem pod uwagę dwie różne proste  $K$  i  $L$ . Proste te wyznaczają pęk  $p(KL) = \{M : p(KLM)\}$ . Pęk taki może być pusty (gdy proste są, intuicyjnie rzecz biorąc, równoległe). Pęki niepuste będziemy nazywać właściwymi i oznaczać małymi, lecz półgrubymi literami łacińskimi. Można łatwo zdefiniować pojęcie: pęki  $a, b, c$  tworzą kąt prosty:

$$\perp(abc) \leftrightarrow \vee KLMN(L \perp M \wedge a = p(KL) \wedge b = p(LM) \wedge c = p(MN)).$$

W tym momencie chciałoby się już powiedzieć, że to koniec dowodu: zdefiniowaliśmy pojęcia, o których już wiemy, że tworzą układ równoważny układowi Tarskiego. Trudność polega jednak na tym, że nie zdefiniowaliśmy bynajmniej pojęcia punktu, a tylko pojęcie pęku wierzchołkowego i postanowiliśmy te pęki nazywać punktami. Powyższy układ pojęć pierwotnych można uprościć: zamiast relacji współpękowości prostych wystarczy wziąć relację *przecinania się prostych*,  $\times$ , gdyż

$$p(KLM) \leftrightarrow K \times L \times M \times K \wedge \vee PQ(K \perp P \perp L \perp Q \perp M \wedge P \times Q).$$

Ciekawe, że definicja ta jest istotnie przestrzenna. Można udowodnić, że w geometrii płaskiej relacja współpękowości nie daje się zdefiniować za pomocą żadnego układu relacji dwuargumentowych. Natomiast autor nie wie, czy relacja przecinania się prostych jest w przypadku geometrii przestrzennej naprawdę potrzebna, tzn. czy nie można jej zdefiniować za pomocą relacji przecinania się pod kątem prostym.



W hilbertowskim układzie pojęć pierwotnych relacja przystawania może zachodzić dla dwu par prostych (przecinających się). Musimy zatem rozszerzyć relację przystawania na pary prostych:

$$KL \equiv MN \leftrightarrow \vee abca'b'c' (a \neq b \neq c \wedge a, b \in K \wedge b, c \in L \wedge a', b' \in M \wedge b', c' \in N \wedge ab \equiv a'b' \wedge bc \equiv b'c' \wedge ca \equiv c'a')$$

Wreszcie pozostaje nam do zdefiniowania pojęcie płaszczyzny w terminach pojęć Tarskiego. W tym celu wprowadzimy najpierw pojęcie symetralnej odcinka:  $P(a, b) = \{c: ac \equiv cb\}$ . Płaszczyzny są to akurat symetralne odcinków niezdegenerowanych, a więc odcinków, których końce nie są tym samym punktem. Mówimy, że punkt  $a$  leży na płaszczyźnie  $\alpha$ , gdy do niej należy:

$$aI\alpha \leftrightarrow a \in \alpha,$$

a prosta  $L$  na niej leży, gdy się w niej zawiera:

$$LI\alpha \leftrightarrow L \subseteq \alpha.$$

W ten sposób przekonał się, że układów pojęć pierwotnych dla geometrii może być dużo. Wszystkie układy wspomniane powyżej są równoważne układowi Hilberta, to znaczy: pojęcie jest definiowalne w układzie pojęć pierwotnych Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy jest definiowalne w układzie Tarskiego (Pieriego, etc.).

Powyższe wyliczenie nie wyczerpuje oczywiście wszystkich możliwych układów pojęć pierwotnych dla geometrii euklidesowej. Nie wyczerpuje również wszystkich znanych, a nawet wszystkich ciekawych. Na dowód pokażemy jeszcze dwa przykłady. Pierwszy z nich pochodzi w zasadzie od Friedricha Bachmanna (1951). Składa się on z pojęć: izometria i złożenie. Przez izometrię rozumie się tu dowolne przekształcenie przestrzeni na siebie, które spełnia warunek

$$\wedge ab(ab \equiv \Gamma a \Gamma b).$$

Izometrie będziemy oznaczać dużymi literami greckimi. Złożenie przy tym rozumiemy jako złożenie (superpozycję) funkcji. Jest to tym ciekawszy układ pojęć, że traktuje geometrię jako teorię pewnych, bardzo szczególnych, grup — grup izometrii. (Jak wiadomo, wszystko w matematyce jest algebrą!) Aby to wykazać, trzeba zdefiniować w tej grupie pojęcia jakiegoś układu równoważnego układowi Hilberta. Wyróżnimy najpierw wśród izometrii inwolucje — to znaczy izometrie, które są same do siebie odwrotne, ale jednak różne od przekształcenia tożsamościowego:

$$\Gamma \neq 1 \wedge \Gamma \Gamma = 1.$$

(1 oznacza tu przekształcenie tożsamościowe). Zauważmy przy tym, że wśród izometrii inwolucjami są tylko symetrie (środkowe, osiowe i płaszczyznowe). Wprowadźmy oznaczenie

$$A|\Omega \leftrightarrow A\Omega = \Omega A$$

(gdy  $A|\Omega$ , mówimy, że izometrie  $A$  i  $\Omega$  są przemienne). Niech teraz  $\Gamma, \Gamma'$  będą różnymi symetrami o środkach (odpowiednio)  $a$  i  $a'$ ,  $\Delta, \Delta'$  — różnymi symetrami o osiach  $K, K'$ , zaś  $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$  — różnymi symetrami względem płaszczyzn  $\alpha, \alpha'$ . Wówczas nie może zachodzić  $\Gamma|\Gamma', \Gamma|\Delta$  oznacza że  $a$  leży na  $K, \Gamma|\mathcal{E}$  — że  $a$  leży na  $\alpha, \Delta|\mathcal{E}$  — że  $K$  leży na  $\alpha$  lub  $K$  jest prostopadła do  $\alpha, \Delta|\Delta'$  — że proste  $K$  i  $K'$  przecinają się pod kątem prostym, wreszcie  $\mathcal{E}|\mathcal{E}'$  — że  $\alpha$  i  $\alpha'$  są prostopadłe. Łatwo więc zauważyć, że  $\Gamma$  jest symetrią osiową wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje izometria  $\Delta$  taka, że dowolne dwie inwolucje  $\Gamma', \Delta'$  które są jednocześnie przemienne z  $\Gamma$  i z obrazem  $\Gamma$  przy izometrii  $\Delta$  (a więc i z inwolucją  $\Delta\Gamma\Delta^{-1}$ ) muszą same być przemienne. Ponieważ symetrie osiowe można identyfikować z ich osiami, można zatem uważać, że zdefiniowaliśmy pojęcie prostej. Będziemy więc dalej oznaczać symetrie osiowe dużymi literami łacińskimi.

Relację przecinania się pod kątem prostym zdefiniować jest bardzo łatwo:

$$K \perp L \leftrightarrow K|L \wedge K \neq L.$$

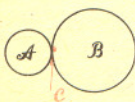
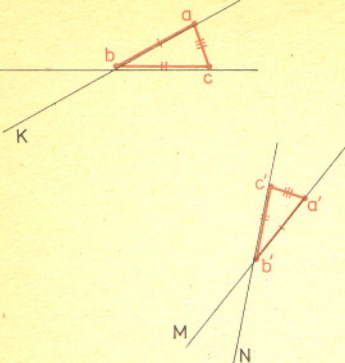
Nieco trudniej zdefiniować relację przecinania pod dowolnym kątem: dwie proste przecinają się wówczas, gdy są równe lub istnieją dokładnie trzy inwolucje przemienne z każdą z nich. W ten sposób pokazaliśmy, że geometrię można rozpatrywać jako teorię pewnych, specjalnych, grup. Ostatnim układem, jaki zostanie tu przedstawiony jest geometria brył, pochodząca od Tarskiego (1929). Składają się na nią pojęcia: kula otwarta oraz zawieranie. Najpierw jednak omówimy modyfikację tego układu pochodzącą od Jaśkowskiego (1949). Modyfikacja polega na zastąpieniu pojęcia kuli otwartej przez pojęcie kuli domkniętej (wraz z brzegiem). Kule (w zależności od potrzeby domknięte lub otwarte) będziemy oznaczać literami ozdobnymi, a relację zawierania znakiem  $\subseteq$ .

Wśród kul domkniętych łatwo wyróżnić punkty. Są to kule minimalne, nie zawierające innych, to znaczy spełniające warunek:

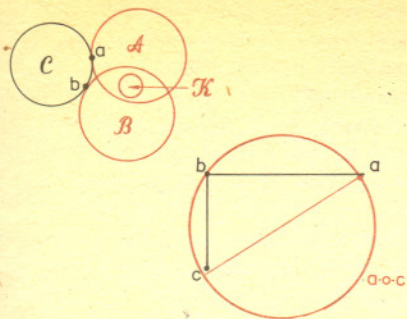
$$\text{dla dowolnego } \mathcal{B}: \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} = \mathcal{A}.$$

Będziemy je zatem oznaczać małymi literami łacińskimi. Następnie zdefiniujemy relację zewnętrznej styczności

$$\mathcal{A} \circ \mathcal{B} \leftrightarrow \text{istnieje dokładnie jedno } \mathcal{C}, \text{ takie że } \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}, \mathcal{B}$$







$$a \dot{\circ} B \leftrightarrow a \in B \wedge \forall B (a \in B \leftrightarrow B \in \mathcal{A}) \wedge B \neq a$$

Dowolne dwa punkty  $a, b$  wyznaczają kulę, w której leżą na końcach średnicy:

$$a \cdot \dot{\circ} \cdot b = C \leftrightarrow a, b \dot{\circ} C \wedge \sim [\forall \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{K} (a \in \mathcal{A} \wedge b \in \mathcal{B} \wedge \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \in \mathcal{K} \subseteq \mathcal{A} \wedge \mathcal{K} \subseteq \mathcal{B})]$$

Wreszcie możemy zdefiniować relację kąta prostego dla punktów:

$$\perp (abc) \leftrightarrow b \dot{\circ} (a \cdot \dot{\circ} \cdot c).$$

Zatem układ pojęć pierwotnych zaproponowany przez Jaśkowskiego jest równoważny układowi Hilberta.

Z układem Tarskiego jest nieco trudniej. Zauważmy jednak, że część wspólna zstępującego (nieskończonego) ciągu kul otwartych jest zawsze kulą domkniętą. Mówi się wówczas, że ów ciąg jest zbieżny do kuli domkniętej. Niech  $\{\mathcal{A}_n\}$  będzie zbieżny do  $\mathcal{A}$  i  $\{\mathcal{B}_n\}$  — do  $\mathcal{B}$ .

Wówczas

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \leftrightarrow \bigwedge n \forall m (\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{B}_m).$$

W takiej sytuacji będziemy pisać  $\{\mathcal{A}_n\} \subseteq \{\mathcal{B}_n\}$ . Dwie kule, które się nawzajem zawierają, muszą być równe, zatem trzeba przyjąć, że jeśli  $\{\mathcal{A}_n\} \subseteq \{\mathcal{B}_n\} \subseteq \{\mathcal{A}_n\}$ , to oba ciągi są zbieżne do tej samej kuli. Możemy więc przyjąć, że kulą domkniętą jest klasa ciągów zstępujących kul otwartych zbieżnych do tej samej kuli. W rezultacie zdefiniowaliśmy w układzie Tarskiego pojęcie układu Jaśkowskiego. Ponieważ zdefiniowanie kuli otwartej w układzie Hilberta nie przedstawia trudności, więc można uznać, że również i system geometrii brył jest równoważny układowi Hilberta.

Na zakończenie zauważmy ciekawą własność systemu geometrii brył: umożliwia ona traktowanie geometrii jako teorii pewnych porządków częściowych. Nic w tym zresztą dziwnego; nie tylko geometria, ale cała matematyka jest porządkiem (częściowym).

Ważnym problemem w badaniu rzeczywistości jest pytanie, jak ją opisać. Chodzi tu, wbrew pozorom o dwie zupełnie różne sprawy. Po pierwsze musimy wybrać, jaki aspekt realnego świata będziemy poznawali — tu dokonuje się podział na dyscypliny naukowe. Jest jednak jeszcze i drugie pytanie — w jakim języku. Ludzie badający nasze dokonania i możliwości w tym zakresie uprawiają, jak przyjęto mówić, podstawy danej dyscypliny. Warto więc zwrócić uwagę na fakt, że dla autora poniższego artykułu proste, punkty, kąty, odcinki itp. to jednoznaczne, realne obiekty. A jeśli definiuje jedno z nich za pomocą drugich, to dlatego, że bada problem w jakich językach dyscyplinę, której podstawy uprawia — geometrię — można opisać w sposób pełny. Definiując nie krężyte bytów, a nazywa w różnych językach stwierdzając tym samym ich przydatność do uprawiania geometrii.

## Patrz w niebo



Wśród górujących na październikowym niebie gwiazdozbiorów łatwo jest zauważyć charakterystyczną konstelację Kasjopei, tworzącą nieco skrzywioną literę W. W najbliższych dniach, 7 listopada minie rocznica zjawiska, które miało duży wpływ na rozwój astronomii nie tylko XVI i XVII w. Tego dnia 1572 roku W. Shuler zauważył w gwiazdozbiorze Kasjopei „nową gwiazdę”, która potem okazała się najjaśniejszą supernową od 500 lat. W ciągu następnych kilku dni była ona obserwowana przez wielu znanych astronomów tamtych lat. Wiele czasu poświęcił jej Tycho de Brahe, pisał on o „nowej gwiazdzie” mniej więcej w tych słowach:

„Jedenastego dnia listopada po zachodzie Słońca... podziwiałem gwiazdy na bezchmurnym niebie ... zauważyłem, że nowa, niezwykła gwiazda przewyższająca pozostałe swoją jasnością, świeci prawie dokładnie nad moją głową; a ponieważ znałem od dzieciństwa dokładnie wszystkie gwiazdy na niebie, było dla mnie oczywiste, że w tym miejscu żadna, nawet najmniejsza gwiazda nigdy nie świeciła, nie mówiąc już o tak wyraźnej i jasnej jak ta. Byłem tak zdziwiony tym widokiem, że przez chwilę wątpiłem w wiarygodność moich oczu. Kiedy stwierdziłem, że inni, po wskazaniu im miejsca, również widzieli tam gwiazdę, nie miałem dalszych wątpiwości. Był to prawdziwy cud, jakiego nikt nigdy nie widział od początku świata”.

W uznaniu dużego wkładu pracy w wyznaczeniu jasności i dokładnego położenia gwiazdy (z dokładnością do 30'' bez lunety, którą wynaleziono kilkadziesiąt lat później) nazywa się ją często gwiazdą Tychona (lub *B Cassiopeia*).

Przez dwa tygodnie gwiazda przewyższała jasnością wszystkie gwiazdy na niebie i była widoczna nawet w ciągu dnia. W końcu listopada zaczęła słabnąć i zmieniać kolor. Na początku biała, zaczęła żółknąć, a w końcu, coraz bardziej pomarańczowa a potem czerwona, znikła z zasięgu wzroku w marcu 1574 r. Dzięki badaniom radiowym przeprowadzonym w latach sześćdziesiątych naszego wieku udało się odnaleźć pozostałość po potężnym wybuchu, jaki wstrząsnął gwiazdą 400 lat temu. Pozostała ciemna mgławica emitująca fale radiowe, rozszerzająca się w przestrzeń z ogromną, nawet na warunki kosmiczne, prędkością 9000 km/s.

Dzisiaj coraz lepiej rozumiemy, co jest przyczyną tak silnych eksplozji, mogących rozerwać całą gwiazdę. Mimo, że wiele szczegółów jest ciągle niejasnych i numeryczne modele często „nie chcą wybuchać”, ogólny obraz jest coraz jaśniejszy — napiszemy o nim w jednym z najbliższych numerów.



# O analogiach, algebrach i przestrzeniach

Dr Wiktor BARTOL

Dla dowolnych elementów  $a, b, c \in B$ :

- 1)  $a + b = b + a$
- 2)  $a \cdot b = b \cdot a$
- 3)  $a + (b + c) = (a + b) + c$
- 4)  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- 5)  $a + (a \cdot b) = a$
- 6)  $a \cdot (a + b) = a$
- 7)  $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$
- 8)  $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
- 9)  $(a + (-a)) \cdot b = b$
- 10)  $(a \cdot (-a)) + b = b$

## Dualność na PKP

Jak wiadomo, każdy pociąg powinien mieć swój pociąg dualny — ten kursujący „z powrotem”. Pociągi dualne nazywają się tak samo („Kopernik”, „Portowiec”, „Górnik”, „Tatry”, „Beskidy” ...), mają jednak różne numery. Łatwo sprawdzić, że dualizacja pociągu pospiesznego też jest pospieszna, sezonowego — sezonowa, przy czym sezony są co najwyżej przesunięte o 1 dobę. A oto problemy do samodzielnego rozwiązania:

- 1) Jaka reguła rządzą numerowaniem pociągów dualnych
  - a) kursujących w obrębie tej samej Dyrekcji DOKP,
  - b) kursujących między różnymi Dyrekcjami;
- 2) Dlaczego dualizacja pociągu „Beskidy” relacji Warszawa Wschodnia—Bielsko-Biała (planowy odjazd 14.03) jest pociągiem „Beskidy” relacji Gliwice—Warszawa Wschodnia. Co robią w Bielsku z takim nadmiarem wagonów (kilka tysięcy rocznie)?

Literatura pomocnicza: *Urządowy Rozkład Jazdy Pociągów 1980/81*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa 1980.

Powiadają, że dobry matematyk potrafi dowodzić własności pewnych pojęć, wybitny — potrafi dostrzec analogie między pojęciami, genialny — dostrzega analogie między analogiami. O pewnych analogiach właśnie, których zauważenie i ujęcie w ścisłe ramy matematycznego opisu i rozumowania zawdzięczamy matematykom wybitnym i genialnym, będzie mowa w niniejszym artykule. W latach 1847 i 1854 George Boole, angielski matematyk samouk, opublikował dwie prace (których tytuły przywodzą na myśl XIX-wieczne biblioteki, pełne grubych tomów oprawnych w skórę): „*The mathematical analysis of logic, being an essay towards a calculus of deductive reasoning*” (czyli „*Matematyczna analiza logiki, będąca próbą opisu rachunku rozumowania dedukcyjnego*”) i „*An investigation of the laws of thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probability*” (czyli „*Badanie praw myślenia, na których opierają się matematyczne teorie logiki i prawdopodobieństwa*”), w których wskazał na to, że działania na zdaniach logicznych podlegają podobnym prawom formalnym co działania na zbiorach. Spostrzeżenie to spowodowało, że od drugiej połowy XIX wieku wiele uwagi poświęcono tzw. algebrze Boole’a. Algebrą Boole’a jest każdy system  $(B, +, \cdot, -)$  złożony z niepustego zbioru  $B$ , z dwóch operacji (działań) dwuargumentowych  $+$  i  $\cdot$  oraz jednej operacji jednoargumentowej  $-$ , spełniających wypisane na marginesie warunki.

Jeśli zbiorem  $B$  będzie zbiór wartości logicznych  $\{0, 1\}$ , a operacjami na 0 i 1 będą działania odpowiadające kolejno alternatywie, koniunkcji i negacji zdań, to wszystkie powyższe warunki będą spełnione, a taka algebra Boole’a będzie stanowiła pełny opis rachunku zdań. Podobnie warunki 1) — 10) będą zachowane, gdy  $B$  będzie rodziną wszystkich podzbiorów pewnego ustalonego zbioru  $X$ , a operacjami będą odpowiednio: suma, iloczyn zbiorów oraz dopełnienie zbioru w  $X$ . Algebrę Boole’a, której elementami są zbiory, a operacjami właśnie suma, iloczyn i dopełnienie teoriomnogościowe (czyli „zwykłe” działania na zbiorach) nazywa się ciałem zbiorów. Oczywiście nie każda algebra Boole’a jest ciałem zbiorów: algebra opisująca rachunek zdań ciałem zbiorów przecież nie jest, a każda książka o algebrach Boole’a dostarczy zainteresowanemu czytelnikowi wielu przykładów różnych algebr. Pojęcie algebry Boole’a jest więc formalizacją analogii między wieloma różnymi systemami; każda własność dająca się wywieść w sposób formalny (tj. bez wnikania w to, czym są elementy zbioru  $B$ , ani w znaczenie symboli „+”, „ $\cdot$ ”, „-” i „-”) z warunków 1) — 10) przysługuje każdemu takiemu systemowi, każdej algebrze Boole’a.

Okazuje się jednak, że ciała zbiorów są najbardziej typowymi algebrami Boole’a. W latach trzydziestych naszego wieku amerykański matematyk M. H. Stone pokazał, że każda algebra Boole’a jest izomorficzna z pewnym ciałem zbiorów. Naszkicujmy pokrótce rozumowanie, na którym opiera się dowód tego twierdzenia: Niech  $(B, +, \cdot, -)$  będzie dowolną algebrą Boole’a. Podzbiór  $F$  zbioru  $B$  taki, że zawsze, gdy  $a, b \in F$  oraz  $c \in B$ , to  $a \cdot b \in F$  i  $a + c \in F$ , nazwiemy filtrem w  $B$ . Filtr  $F$  jest maksymalny, jeśli jedynym zawierającym go i różnym od niego filtrem w  $B$  jest cały zbiór  $B$ . Niech  $\mathcal{F}_B$  oznacza rodzinę wszystkich filtrów maksymalnych w algebrze  $(B, +, \cdot, -)$ . Przyporządkujmy każdemu elementowi  $a \in B$  zbiór  $f(a)$  złożony dokładnie ze wszystkich filtrów maksymalnych, do których należy element  $a$ ;  $f(a)$  jest więc zawsze podzbiorem zbioru  $\mathcal{F}_B$ . Można wykazać, że takie przyporządkowanie jest wzajemnie jednoznaczną funkcją ze zbioru  $B$  na rodzinę  $\{f(a) : a \in B\}$  wszystkich podzbiorów zbioru  $\mathcal{F}_B$  postaci  $f(a)$ . Ponadto,  $f(a + b) = f(a) \cup f(b)$ ,  $f(a \cdot b) = f(a) \cap f(b)$  oraz  $f(-a) = \mathcal{F}_B - f(a)$ . Przyporządkowanie  $f$  jest więc izomorfizmem algebry  $(B, +, \cdot, -)$  na ciało zbiorów  $(\{f(a) : a \in B\}, \cup, \cap, -)$ . Twierdzenie Stone’a oznacza, że każda algebra Boole’a może być reprezentowana przez pewne ciało zbiorów, które ma dokładnie te same własności algebraiczne co algebra wyjściowa. Stąd np. jeśli chcemy sprawdzić prawdziwość jakiejś równości (w której występują symbole operacji algebry Boole’a) dla dowolnych elementów dowolnej algebry Boole’a, to wystarczy przekonać się, czy równość ta jest prawdziwa dla dowolnych zbiorów, interpretując operacje jako odpowiednie działania na zbiorach.

Opuśćmy na chwilę ciała zbiorów i algebry Boole’a i wejdźmy w inny świat pojęć.

W początkach XX wieku powstała i rozwijała się (przy dużym zresztą udziale matematyków polskich) dziedzina matematyki nazwana topologią, której przedmiotem badań są tzw. przestrzenie topologiczne. Przestrzenią topologiczną jest każdy zbiór  $X$  z wyróżnioną rodziną  $\mathcal{O}$  jego podzbiorów taką, że zbiór pusty  $\emptyset$  oraz cały zbiór  $X$  należą do  $\mathcal{O}$ , a ponadto suma dowolnej rodziny zbiorów z  $\mathcal{O}$  i iloczyn dowolnej skończonej rodziny zbiorów z  $\mathcal{O}$  także do  $\mathcal{O}$  należą. Zbiory należące do  $\mathcal{O}$  nazywa się zbiorami otwartymi w  $X$ , a ich dopełnienia — zbiorami domkniętymi (zauważmy, że dopełnienie zbioru domkniętego jest znów zbiorem otwartym). I tak np. przestrzenią topologiczną jest zbiór  $R$  wszystkich liczb rzeczywistych, w którym wyróżnioną rodziną zbiorów otwartych jest rodzina wszystkich takich podzbiorów zbioru  $R$ , które są sumami przedziałów otwartych na prostej (zbiór pusty uważamy za przedział otwarty). Przestrzenią topologiczną jest także każdy zbiór  $X$ , w którym rodziną zbiorów otwartych jest rodzina wszystkich podzbiorów tego zbioru: każdy podzbiór zbioru  $X$  jest zatem w tej przestrzeni zbiorem otwartym, a jednocześnie każdy jest zbiorem domkniętym. Taką przestrzeń nazywa się przestrzenią dyskretną; ale nie tylko w przestrzeniach dyskretnych istnieją podzbiory, będące jednocześnie zbiorami otwartymi i domkniętymi. W każdej przestrzeni topologicznej  $X$  takimi zbiorami (nazwijmy je otwarto-domkniętymi) są zbiór  $\emptyset$





THEY ARE COMING TO TAKE ME AWAY  
HA, HA, HI, HI...

RZECZYWISTOŚĆ JEST NIEPOMIERNIE ZŁOŻONA, a poznanie nasze zbyt jest subiektywne, abyśmy spostrzegając światło umieli zdecydowanie ocenić, gdzie znajduje się jego źródło - w świecie zewnętrznym, w naszym oku, czy może jest to jedynie doznanie naszego mózgu?



Wielu zatem trzeba dokonać selekcji, aby tak ograniczyć zakres naszych badań, tak określić pojęcia, tak sformułować pytania, tak zawęzić odpowiedzi, abyśmy sami zyskali wrażenie, że coś na temat świata zostało powiedziane nam czy przez nas /gdyż to ostatnie rozróżnienie najmniej jest ważne i znaczące/.



Mamy wówczas do czynienia z teorią, która cieszy nas tak długo, aż ten czy ów zbawczy czynnik nasunie nam spostrzeżenie: rzeczywistość jest niepomiernie złożona względem uproszczonego opisu, jakim dysponujemy /cóż za bałwan z tego Kopernika, Newtona, Darwina, Marksa, Cerwantesa czy Lysenki!/.



Uwzględniamy więc wszelkie wyjątki, niuanse, subtelności; bierzemy pod uwagę takie niewątpliwie wartości, jak indywidualne upodobania, subiektywne wrażenia, intuicje i apetyty, aby nareszcie osiągnąć stan wstępny naszych rozważań i doformułować: RZECZYWISTOŚĆ JEST NIEPOMIERNIE ZŁOŻONA i nie pewnego nie da się o niej powiedzieć.



"... i już zaczęło się przedstawienie.

Przycichła nieco orkiestra dęta.  
Na scenę weszli dumiący księżęta;

chłopcy jak byki z grzywą na karkach,  
przy kordelasach i przy zegarkach.

Bo po co aktor płacze i skamle,  
że tylko on jest jedyny Hamlet?

Dobra Dyrekcja, by te Lzy otrzeć,  
zadaptowała sztukę samotrzeć.

Zamiast dwudziestu pięciu postaci  
sami Hamleci byli w dramacie.

Na diabła Grabarz z tą Ofeliją!  
Chcą grać chłopski, niech się wyżyją.

W ten sposób szlagier pierwszy raz  
w świecie!  
Grali w "Hamlecie" sami Hamleci.

Reka na sercu. Twarze ponure.  
"Być albo nie być" wołali chórem."

"Chryzostoma Bulwiewicia podród do  
Ciemnogródu"  
K.I. Gałczyński

i zbiór  $X$  — otwarte z definicji przestrzeni topologicznej, domknięte — bo są nawzajem swoimi dopełnieniami.

Niech  $\mathcal{O}$  będzie rodziną wszystkich otwarto-domkniętych podzbiorów pewnej (dowolnej) przestrzeni topologicznej  $X$ . Jeśli  $A, B \in \mathcal{O}$ , to  $A \cup B$  jest zbiorem otwartym, gdyż jest sumą dwóch zbiorów otwartych; jednocześnie  $\neg A$  i  $\neg B$  (będąc dopełnieniami zbiorów domkniętych), a więc także  $\neg A \cap \neg B$ , są zbiorami otwartymi, skąd wynika, że zbiór  $A \cup B$  (równy zbiorowi  $\neg(\neg A \cap \neg B)$ ) na mocy praw de Morgana) jest zbiorem domkniętym. Okazuje się zatem, że  $A \cup B$  jest zbiorem otwarto-domkniętym, gdy  $A$  i  $B$  są takimi zbiorami. Podobne do powyższego rozumowanie pokazuje, że również zbiór  $A \cap B$  jest wówczas otwarto-domknięty. Łatwo także wywnioskować dalej, że jeśli  $A \in \mathcal{O}$ , to i  $\neg A \in \mathcal{O}$ . Tak więc suma, iloczyn zbiorów oraz dopełnienie zbioru w  $X$  są operacjami w  $\mathcal{O}$ , ich wyniki nie wyprowadzają poza tę rodzinę. Oczywiście operacje te spełniają wszystkie warunki 1) — 10). System  $(\mathcal{O}, \cup, \cap, \neg)$  jest zatem algebrą Boole'a!

Chwila, w której zapomnieliśmy o algebrach Boole'a i ciałach zbiorów okazała się być stosunkowo krótka, rozważania topologiczne doprowadziły nas do znalezienia nowej klasy przykładów takich algebr. Ale czy są to tylko kolejne przykłady? Powróćmy do omówionego wyżej twierdzenia Stone'a. Niech znów  $(B, +, \cdot, \neg)$  będzie dowolną algebrą Boole'a. W zbiorze  $\mathcal{F}_B$  wszystkich filtrów maksymalnych w  $B$  wyróżnimy rodzinę podzbiorów otwartych  $\mathcal{O}$  w ten sposób, że podzbiór  $S$  zbioru  $\mathcal{F}_B$  należy do  $\mathcal{O}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $S$  jest sumą pewnej rodziny zbiorów postaci  $f(a)$  (mówimy wówczas, że rodzina  $\{f(a) : a \in B\}$  jest bazą przestrzeni  $\mathcal{F}_B$ ). Nietrudno sprawdzić, że w istocie  $\mathcal{F}_B$  z tak wyróżnioną rodziną podzbiorów  $\mathcal{O}$  jest przestrzenią topologiczną (zauważmy, że  $\emptyset \in \mathcal{O}$  i  $\mathcal{F}_B \in \mathcal{O}$ , bo  $\emptyset$  jest sumą pustej rodziny zbiorów, a  $\mathcal{F}_B$  jest sumą rodziny wszystkich zbiorów postaci  $f(a)$ ). Z określenia rodziny  $\mathcal{O}$  widać, że w szczególności każdy ze zbiorów  $f(a)$  jest zbiorem otwartym; jednocześnie każdy z nich jest zbiorem domkniętym, bo dopełnieniem zbioru  $f(a)$  jest zbiór otwarty  $f(\neg a)$ . Zbiory te są więc otwarto-domknięte i są to wszystkie otwarto-domknięte podzbiory w opisywanej przez nas przestrzeni  $\mathcal{F}_B$ . Przestrzeń, która ma bazę złożoną ze zbiorów otwarto-domkniętych nazywa się przestrzenią całkowicie niespójną — taka jest właśnie nasza przestrzeń. Ma ona ponadto następujące ciekawe własności:

- a) dla dowolnych dwóch różnych elementów  $F$  i  $G$  tej przestrzeni istnieją dwa rozłączne zbiory otwarte  $P$  i  $S$  takie, że  $F \in P$  i  $G \in S$  (inaczej mówiąc, każde dwa różne elementy tej przestrzeni można rozdzielić rozłącznymi zbiorami otwartymi),
- b) z dowolnej rodziny zbiorów otwartych, których sumą jest cała przestrzeń, można wybrać rodzinę skończoną, której sumą jest także cała przestrzeń.

Przestrzenie mające własność a) nazywa się przestrzeniami Hausdorffa, przestrzenie mające własność b) — przestrzeniami zwartymi. Wreszcie — całkowicie niespójne, zwarte przestrzenie Hausdorffa określa się mianem przestrzeni Stone'a. Możemy teraz podsumować dotychczasowe rozważania:

*Każda algebra Boole'a jest izomorficzna z ciałem wszystkich podzbiorów otwarto-domkniętych pewnej przestrzeni Stone'a.*

Tak więc każdej algebrze Boole'a  $B$  możemy przyporządkować odpowiadającą jej na mocy twierdzenia przestrzeń Stone'a (oznaczymy ją przez  $\mathcal{S}(B)$ ); odwrotnie, każdej przestrzeni Stone'a (nie tylko zresztą takim przestrzeniom, jak widzieliśmy poprzednio) można przyporządkować algebrę Boole'a jej podzbiorów otwarto-domkniętych.

Twierdzenie powyższe jest przykładem częstego zjawiska dualizacji w matematyce: pojęcia wyrosłe z różnych gruntów okazują się być wymienne — tak jak wymienne są dwa teksty, z których jeden powstał przez tłumaczenie drugiego na inny język. Do badania algebr Boole'a możemy stosować metody topologiczne, bo każda algebra Boole'a jest — jak mówią matematycy: z dokładnością do izomorfizmu — bazą pewnej przestrzeni Stone'a; do badania pewnych zagadnień topologicznych możemy stosować metody algebraiczne, gdyż baza każdej przestrzeni Stone'a jest algebrą Boole'a (a ogólniej — algebrą taką jest rodzina wszystkich otwarto-domkniętych podzbiorów dowolnej przestrzeni topologicznej). Taka dualizacja (czy wymiennosc) nie grozi zagubieniem własności w procesie „tłumaczenia”: dwie algebry Boole'a  $A$  i  $B$  są izomorficzne (a więc mają te same własności algebraiczne) wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzenie Stone'a  $\mathcal{S}(A)$  i  $\mathcal{S}(B)$  są homeomorficzne (czyli mają te same własności topologiczne).

Oto prosty przykład zastosowania słownika algebraiczno-topologicznego: własność „algebra Boole'a  $B$  jest przeliczalna” jest równoważna własności „przestrzeń Stone'a  $\mathcal{S}(B)$  jest metryzowalna”. Stosując „słownik” w drugą stronę otrzymujemy twierdzenie następujące: „Przestrzeń Stone'a jest metryzowalna wtedy i tylko wtedy, gdy algebra jej otwarto-domkniętych podzbiorów jest przeliczalna”.

Można oczywiście podawać przykłady bardziej złożonych równoważnych własności algebraicznych i topologicznych. Zamiast tego, przytoczmy cytat z książki Paula Halmosa „Lectures on Boolean Algebras”: „...Dzięki tej teorii można w zasadzie dualizować każdy fakt i każde pojęcie, przekładając fakty i pojęcia algebraiczne na topologiczne i odwrotnie. W prawie każdym przypadku taka dualizacja jest warta zachodu; często jest ona pożyteczna i pouczająca, a już co najmniej — zabawna.”