

SPIS TREŚCI

NUMERU 9(81)

Stefan Banach, punkty stałe i równania różniczkowe <i>Dr Marcin E. Kuczma</i>	str. 1
O punktach stałych <i>Doc. dr Lech Górniewicz</i>	str. 4
Jak pies goni zająca po Warszawie, ...	str. 7
Punkty stałe, geodezja i charakterystyka Eulera <i>Mgr Krzysztof S. Nowiński</i>	str. 8
Mała Delta	str. 10
O odręcnym wykreślaniu funkcji $y = x$ <i>Jerzy Geresz</i>	str. 12
O „podwójnym” pulsarze i efektach relatywistycznych <i>Mgr Mieczysław Prószyński</i>	str. 14
Patrz w niebo	str. 15
Szczególny, ale ciekawy przypadek	str. 16
Zadania <i>Magister Pirożyński</i>	str. 16
opowiada	str. 17

Rysunki techniczne:
Bogusław Kretkiewicz

W następnym numerze:
 Dualność

„Delta”
 matematyczno-fizyczno-astronomiczny
 miesięcznik popularny
 Polskiego Towarzystwa
 Matematycznego, Polskiego
 Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
 Towarzystwa Astronomicznego
 wydawany przy poparciu
 Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny:
 doc. dr Jerzy Bartke
 doc. dr Andrzej Bączyński
 doc. dr Bolesław Gleichgewicht
 prof. dr Kazimierz Goebel
 doc. dr Bolesław Grabowski
 dr Jan Hanasz
 doc. dr Bolesław Iwaszkiewicz
 doc. dr Tadeusz Iwiński
 doc. dr Andrzej Januszajtis
 doc. dr Tadeusz Jarzębowski
 prof. dr Leon Jeśmanowicz
 dr Henryk Kaczorek
 prof. dr Marek Kuczma
 mgr Andrzej Mąkowski
 prof. dr Bohdan Paczyński
 prof. dr Zdzisław Pawlak
 prof. dr Arkadiusz Piekara
 doc. dr Sławomir Ruciński
 prof. dr Konrad Rudnicki
 prof. dr Zbigniew Semadeni
 doc. dr Grzegorz Sitarski

prof. dr Józef Smak
 prof. dr Jan Stankowski
 doc. dr Kazimierz Stępień
 prof. dr Mieczysław Subotowicz
 doc. dr Stefan Turnau
 prof. dr Jerzy Wdowczyk
 doc. dr Andrzej Woszczyk
 prof. dr Janusz Zakrzewski —
 wiceprzewodniczący
 prof. dr Wojciech Żakowski —
 przewodniczący

Redaguje Kolegium w składzie:
 Bożena Jaworska-Kordos — ilustracje
 dr Marek Kordos — red. naczk.
 dr Andrzej Krasieński
 dr Michał Szurek
 dr Krzysztof Prażmowski — red. techn. graf.
 mgr Krystyna Szypcio — sekr. red.
 doc. dr Michał Świącki — z-ca red. naczk.

Adres Redakcji
 ul. Hoża 69 pok. 151,
 00-681 Warszawa

Zakład Narodowy im.
 Ossolińskich — Wydawnictwo
 Wrocław, Oddział w Warszawie
 Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.
 wyd.; 2,50 ark. druk.;
 papier offsetowy III kl. 80 g. 61 x 86
 Wydrukowano w Drukarni im.
 Rewolucji Październikowej
 Warszawa, ul. Mińska 65
 Nr zam. 807/12/80 O-115

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60—, cena prenumeraty półrocznej zł 30—

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach:
 — do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i cały rok następny
 — do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego.
 Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienie w miejscach Oddziałów RSW „Prasa—Książka—Ruch”.
 Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW, oraz prenumeratorki indywidualni zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.
 Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.
 Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.
 Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Konto PKO I OM W-wa 1531-912

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław
 w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa
 w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7 00-068 Warszawa, Poland or with
 — Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland.
 — Earls Court Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain,
 — Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia

Cena 1 egzemplarza zł 5— nr indeksu 35723/35550



Stefan Banach, punkty stałe i równania różniczkowe

Dr Marcin E. KUCZMA

Przyjrzyjmy się równaniu

$$(1) \quad \varphi'(x) = \frac{3x^2(x^3\varphi(x) - 2\varphi(x) + 2)}{2 + \varphi(x)^2}$$

To *równanie różniczkowe*. W odróżnieniu od równań znanych z kursu szkolnego, gdzie wielkością poszukiwaną jest liczba, w równaniu (1) niewiadomą jest funkcja φ , której pochodna ma być równa wyrażeniu napisanemu po prawej stronie.

Do równań różniczkowych prowadzą w naturalny sposób przede wszystkim zagadnienia z różnych działów fizyki; z pewnością nasi Czytelnicy potrafią podać na to przykłady (choćby równania ruchu pod działaniem sił). Teoria równań różniczkowych stanowi ważny dział matematyki, tak teoretycznej jak i stosowanej.

W problematyce równań różniczkowych zaznaczają się dość wyraźnie dwa nurty: zagadnienia praktyczne (metody rozwiązywania) i teoretyczne — typowe dla tej drugiej sfery zagadnień są liczne twierdzenia orzekające o istnieniu i jedności rozwiązań różnych rodzajów równań. Zatrzymajmy się na chwilę nad kwestią jedności. Już nawet bardzo prosty przykład równania:

$$(2) \quad \varphi'(x) = 2x$$

pokazuje, że rozwiązanie może nie być jedyne; każda funkcja postaci $\varphi(x) = x^2 + c$, gdzie c jest dowolną stałą, jest rozwiązaniem tego równania. Łącznie można uwierzyć, że podobna sytuacja ma zazwyczaj miejsce także przy rozważaniu równań o budowie bardziej skomplikowanej niż (2). W przypadku równania (2) jednoznaczność można uzyskać nakładając dodatkowy warunek, aby szukana funkcja przyjmowała w wybranym punkcie zadaną wartość:

Tak więc np. przy warunku $\varphi(2) = 0$ jedynym rozwiązaniem równania (2) jest funkcja $\varphi(x) = x^2 - 4$. Nie inaczej rzecz się ma w przypadku wielu innych równań. Dlatego też, dla uzyskania jednoznaczności, często stawia się zadanie w postaci: dane równanie plus *warunek początkowy*: $\varphi(x_0) = y_0$; x_0, y_0 — dane liczby (nazwa: *warunek początkowy* bierze się z zastosowań w fizyce, gdzie zmienną niezależną interpretuje się często jako czas).

Rozważmy więc równanie (1) stawiając warunek początkowy wedle fantazji; na przykład:

$$(3) \quad \varphi(1) = -1.$$

Czytelnicy oswojeni nieco z rachunkiem całkowym zauważą z łatwością, że zespół *dwoch* postulatów: równania (1) i warunku (3) można równoważnie zapisać w formie *pojedynczego* równania:

$$(4) \quad \varphi(x) = -1 + \int_1^x \frac{3t^2(t^3\varphi(t) - 2\varphi(t) + 2)}{2 + \varphi(t)^2} dt,$$

otrzymanego przez scałkowanie stronami równania (1) przy uwzględnieniu warunku (3).

I co tu mają do rzeczy punkty stałe? Ano, mają. Przypatrzmy się równaniu (4) w sposób nieco bardziej abstrakcyjny. Otóż: mając daną *jakaikolwiek* funkcję ciągłą φ możemy wykonać na niej działania wskazane po prawej stronie wzoru (4); traktując x jako zmienną, dostajemy w ten sposób pewną nową funkcję — nazwijmy ją ψ . Jaka jest szansa, że $\psi = \varphi$? — czyli że po wykonaniu tych operacji trafimy z powrotem na tę funkcję φ , od której wyszliśmy? Niewielka. No ale to właśnie postuluje nasze równanie. Oznaczmy literą T odwzorowanie, które dowolnie wybranej funkcji φ przyporządkowuje funkcję

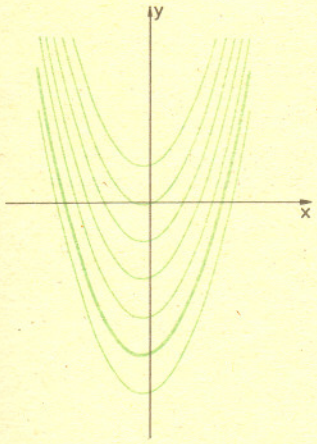
$$(5) \quad \psi(x) = -1 + \int_1^x \frac{3t^2(t^3\varphi(t) - 2\varphi(t) + 2)}{2 + \varphi(t)^2} dt$$

to znaczy napiszmy

$$(6) \quad \psi = T(\varphi).$$

Widzimy, że rozwiązaniem równania (4) będzie funkcja φ , dla której $T(\varphi) = \varphi$. Zatem rozwiązaniem równania (4) — to ni mniej ni więcej, tylko punkt stały odwzorowania T .

W tytule artykułu wymienione jest nazwisko genialnego naszego rodaka Stefana Banacha, jednego z najwybitniejszych matematycznych umysłów wszechczasów. Spośród licznych twierdzeń Banacha postaramy się tu zaprezentować jedno, odgrywające niepoślednią rolę w teorii punktów stałych.



Kto nie jest pewien, niech różniczkuje wzór (4).



Rozwiązanie zadania M 237
 Możemy założyć, że długość boku kwadratu wynosi 1. Przeprowadzając konstrukcję opisaną w zadaniu M 236 dla $n = 2, 4, 8, \dots, 2^k, \dots$ przekonamy się, że istnieją ciągi $(p_k), (q_k), (r_k), (s_k)$ takie, że p_k, q_k, r_k, s_k leżą w jednym kwadracie o boku 2^{-k} , oraz $F_1(p_k) \leq p_{k+1}, F_1(q_k) \geq q_{k+1}, F_2(r_k) \leq r_{k+1}, F_2(s_k) \geq s_{k+1}$; dolne wskaźniki 1, 2 oznaczają numery współrzędnych.
 Z ciągu (p_k) można wybrać podciąg (p_{k_i}) zbieżny do pewnego punktu x kwadratu. Ale do tego samego punktu będą zbieżne ciągi $(q_{k_i}), (r_{k_i}), (s_{k_i})$.
 Ponieważ teraz F_1 i F_2 są funkcjami ciągłymi, więc $F_1(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} F_1(p_{k_i}) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} p_{k_i+1} = x$, i analogicznie $F_1(x) \geq x_1, F_2(x) \leq x_2$ oraz $F_2(x) \geq x_2$, skąd wynika, że $F_1(x) = x_1$ i $F_2(x) = x_2$, czyli $F(x) = x$, c.b.d.o.



Czytelnikom znane jest pojęcie przestrzeni metrycznej zupełnej, tj. takiej, w której zbieżność ciągu punktów (p_n) równoważna jest spełnieniu warunku Cauchy'ego:

odległość $\varrho(p_n, p_m)$ staje się dowolnie mała,
gdy tylko n i m są dostatecznie duże.

Oto rzeczony twierdzenie Banacha, zwane zasadą odwzorowań zwięzających:

Zakładamy, że X jest przestrzenią metryczną zupełną oraz że w przestrzeni X określone jest odwzorowanie T (przyporządkowujące każdemu punktowi $p \in X$ pewien punkt $T(p) \in X$), przy czym istnieje stała $\lambda < 1$ taka, że

$$(7) \quad \varrho(T(p), T(q)) \leq \lambda \varrho(p, q)$$

dla każdej pary punktów $p, q \in X$ (odwzorowanie o tej własności nazywamy zwięzającym). Wówczas istnieje dokładnie jeden punkt stały tego odwzorowania, czyli jeden punkt spełniający równanie $T(p) = p$.

Przypomnimy (p. artykuł L. Górniewiczza), że dowodzi się tego tak. Bierzymy dowolny punkt $p_0 \in X$ i określamy ciąg: $p_1 = T(p_0), p_2 = T(p_1), p_3 = T(p_2), \dots$ Okazuje się, że ciąg ten jest zbieżny i to — niezależnie od wyboru początkowego punktu p_0 — do tej samej granicy p . W jakikolwiek sposób wybierzemy p_0 , w granicy dojdziemy do tego samego punktu p , będącego już punktem stałym odwzorowania T .

Najbardziej chyba naturalny przykład przestrzeni metrycznej to znana nam dobrze przestrzeń euklidesowa. Prowadząc rozważania dotyczące ogólnych („abstrakcyjnych”) przestrzeni metrycznych z reguły odwołujemy się więc do wyobraźni geometrycznej, która każe nam widzieć punkty rozważanej przestrzeni jak kropki na papierze. Siła ogólnej teorii polega między innymi na tym, że — niezależnie od owych intuicji geometrycznych (bardzo zresztą przydatnych) — uzyskane wyniki można też stosować do przestrzeni, której elementami są obiekty zupełnie innego rodzaju. Na przykład funkcje.

Przypuśćmy, że mamy dane dwa przedziały liczbowe $\langle a, b \rangle$ i $\langle c, d \rangle$. Niech $\mathcal{P} = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ oznacza prostokąt na płaszczyźnie Oxy o wierzchołkach $(a, c), (b, c), (b, d), (a, d)$. Rozważmy zbiór X wszystkich funkcji ciągłych na przedziale $\langle a, b \rangle$ o wartościach w przedziale $\langle c, d \rangle$ — czyli zbiór wszystkich funkcji ciągłych, których wykresy zawierają się w prostokącie \mathcal{P} . Zbiór ten staje się przestrzenią metryczną, jeśli odległość pomiędzy dwiema funkcjami f i g określimy następująco:

$$(8) \quad \varrho(f, g) = \max_{x \in \langle a, b \rangle} |f(x) - g(x)|.$$

Geometrycznie, znaczy to tyle, że dla każdej liczby $x \in \langle a, b \rangle$ bierzemy długość odcinka linii pionowej przechodzącej przez punkt $(x, 0)$, wyznaczonego przez punkty przecięcia tej linii z wykresami funkcji f i g ; następnie ze wszystkich otrzymanych długości wybieramy największą. To, że odległość określona w ten sposób czyni zadość aksjomatom przestrzeni metrycznej, jest kwestią całkiem trywialnego sprawdzenia. To, że otrzymana przestrzeń metryczna jest zupełna, jest mniej trywialne, ale też i nie za bardzo trudne. Dowód można znaleźć w każdym podręczniku analizy matematycznej, a nawet w niektórych podręcznikach szkolnych (w skryptach dla szkół z rozszerzonym programem matematyki).

Jak nietrudno się domyślić, zmierzamy do tego, żeby zastosować zasadę Banacha do odwzorowania T określonego wzorem (5)–(6). Postawmy zagadnienie ogólniej. Zamiast bardzo konkretnego równania (1) (sam jego wygląd budzi niechęć!) rozważmy równanie w postaci ogólnej

$$(9) \quad \varphi'(x) = F(x, \varphi(x))$$

z warunkiem początkowym

$$(10) \quad \varphi(x_0) = y_0.$$

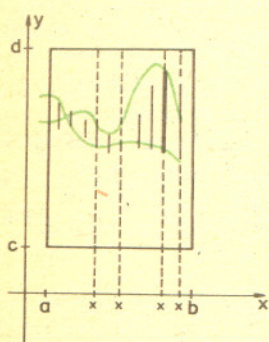
Zakładamy tu, że funkcja $F(x, y)$ jest ciągła i ma ciągłą pochodną cząstkową $\frac{\partial F}{\partial y}$. W naszym przykładzie (1) funkcja $F(x, y)$ ma postać

$$F(x, y) = \frac{3x^2(x^2y - 2y + 2)}{2 + y^2}.$$

Podobnie jak poprzednio, równanie (9) z warunkiem (10) jest równoważne postulatowi, aby funkcja φ była punktem stałym odwzorowania T danego wzorem:

$$(11) \quad \begin{cases} T(\varphi) = \psi, & \text{gdzie} \\ \psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F(t, \varphi(t)) dt. \end{cases}$$

To się nazywa: geometryzacja analizy.



Jeśli (f_n) jest ciągiem funkcji w przestrzeni X spełniającym warunek Cauchy'ego, to przy dowolnie ustalonym $x \in X$ ciąg liczb $\{f_n(x)\}$ spełnia warunek Cauchy'ego, jest więc zbieżny do pewnej granicy $f(x)$. W ten sposób zostaje określona pewna funkcja f . Sprawdzenia wymaga tylko, że $f \in X$ (ciągłość!) i że odległość f_n od f dąży do zera, gdy $n \rightarrow \infty$.

Pochodną cząstkową $\frac{\partial F}{\partial y}$ funkcji dwu zmiennych $F(x, y)$ oblicza się traktując F jako funkcję samej tylko zmiennej y i różniczkując; zmienną x traktuje się jako stałą („parametr”).

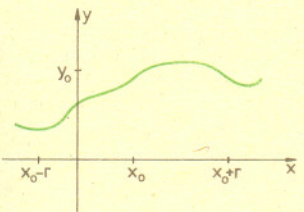


Rozwiązanie zadania M 236

Zamalujmy na czerwono te pola, dla których $F_1(x) < x_1$ dla wszystkich x leżących we wnętrzu lub na brzegu pola, a na zielono pola, dla których $F_1(x) > x_1$ dla wszystkich punktów pola domkniętego. Ponieważ na lewym brzegu nie mogą leżeć pola czerwone, na prawym — pola zielone i dwa pola różnych kolorów nie mogą się dotykać, król nie może przejść od lewego brzegu szachownicy do prawego nie wchodząc na pole nie zamalowane. Wobec tego (p. zad. M 235) wieża może przejść od górnego brzegu do dolnego po nie zamalowanych polach. Zamalujmy teraz na niebiesko te pola na jej drodze, których wszystkie punkty spełniają warunek $F_2(x) > x_2$ i na żółto — te pola, że wszystkie ich punkty są przesuwane „w dół”: $F_2(x) < x_2$. Rozumując analogicznie, jak to pokazaliśmy powyżej, przekonamy się, że co najmniej jedno pole na drodze wieży i teraz pozostanie nie zamalowane. Znaczą to, że istnieją w tym polu punkty p, q, r, s spełniające warunki zadania.



- pola zielone
- ← pola czerwone
- ▨ droga wieży
- ↓ pola żółte
- ↑ pola niebieskie
- pole znalezione



W analizie matematycznej wprowadza się różne rodzaje zbieżności ciągów funkcyjnych. Jeżeli ciąg funkcji jest zbieżny jako ciąg elementów przestrzeni metrycznej z odległością daną wzorem (8), to mówimy, że ten ciąg jest zbieżny jednostajnie. Jeśli Czytelnik zna „epsilonowo-deltową” definicję jednostajnej zbieżności ciągu funkcji:

$$f_n \text{ zbiega jednostajnie do } f \text{ na przedziale } (a, b) \\ \forall \epsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall x \in (a, b) |f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

to może przekonać się, że te dwa określenia pokrywają się.

Ustalmy dwie liczby dodatnie r i R i rozważmy prostokąt $\mathcal{P} = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$, gdzie

$$\langle a, b \rangle = \langle x_0 - r, x_0 + r \rangle, \quad \langle c, d \rangle = \langle y_0 - R, y_0 + R \rangle.$$

Niech M oznacza największą (co do modułu) wartość funkcji F na zbiorze \mathcal{P} , a M' — największą wartość pochodnej $\frac{\partial F}{\partial y}$:

$$M = \max_{(x,y) \in \mathcal{P}} |F(x, y)|, \quad M' = \max_{(x,y) \in \mathcal{P}} \left| \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right|.$$

Rozpatrujemy przestrzeń metryczną X złożoną z funkcji ciągłych o wykresach zawartych w \mathcal{P} , z odległością zdefiniowaną przed chwilą (wzór (8)). Chcemy, żeby wzór (11) określał odwzorowanie T przestrzeni X w siebie (to znaczy, żeby dla każdej funkcji $\varphi \in X$, funkcja ψ dana wzorem (11) też miała wykres zawarty w \mathcal{P}). Prościutki rachunek pokazuje, że w tym celu wystarczy, aby spełniona była nierówność

$$(12) \quad rM \leq R.$$

Niech $\varphi_1, \varphi_2 \in X$. Oznaczmy odległość $\varrho(\varphi_1, \varphi_2)$ literą δ . Wówczas

$$|F(t, \varphi_1(t)) - F(t, \varphi_2(t))| = |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \cdot \left| \text{wartość } \frac{\partial F}{\partial y} \text{ w pewnym punkcie} \right| \leq \delta M'.$$

Biorąc dowolny punkt $x \in \langle a, b \rangle$ (a więc taki, że $|x - x_0| \leq r$) i całkując od x_0 do x dostajemy

$$\left| \int_{x_0}^x (F(t, \varphi_1(t)) - F(t, \varphi_2(t))) dt \right| \leq r \delta M'.$$

Niech teraz $\psi_1 = T(\varphi_1), \psi_2 = T(\varphi_2)$; utwórzmy różnicę $\psi_1(x) - \psi_2(x)$. Przy odejmowaniu składników ψ (por. wzór (11)) ulegnie redukcji i otrzymujemy $|\psi_1(x) - \psi_2(x)| \leq r \delta M'$, skąd ostatecznie (przez wzięcie wartości maksymalnej dla lewej strony)

$$\varrho(\psi_1, \psi_2) \leq r M' \delta = r M' \varrho(\varphi_1, \varphi_2).$$

Na to, by odwzorowanie T było zwężające, wystarczy, aby

$$(13) \quad r M' < 1.$$

Liczby r i R spełniające warunki (12) i (13) na pewno można znaleźć. Na mocy twierdzenia Banacha odwzorowanie T ma w przestrzeni X dokładnie jeden punkt stały — znaczy to, że równanie (9) z warunkiem początkowym (10) ma w przedziale $\langle x_0 - r, x_0 + r \rangle$ dokładnie jedno rozwiązanie.

Powtarzając to rozumowanie, biorąc punkt $x_0 + r$ (względnie $x_0 - r$) jako „nowy punkt x ” możemy to rozwiązanie przedłużać w prawo i w lewo. Czyniąc to (w razie potrzeby) wielokrotnie, otrzymamy rozwiązanie w całym przedziale jego określoności.

W ten sposób z zasady odwzorowań zwężających wyprowadziliśmy twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania pewnego równania różniczkowego. Powie ktoś: pięknie, ale wartość tego jest czysto teoretyczna; nie zbliżyliśmy się nawet do tego, aby to rozwiązanie wyznaczyć. Wiemy, że istnieje, ale nie wiemy, czemu jest równe.

To nie całkiem prawda. Przypomnijmy sobie dowód Banacha: punkt stały p otrzymywało się jako granicę ciągu (p_n) określonego indukcyjnie: $p_{n+1} = T(p_n)$; przy tym p_0 mogło być dowolne. Tak więc w przypadku odwzorowania (11) funkcję będącą jego punktem stałym dostaniemy jako granicę ciągu funkcji danego indukcyjnie:

$$\varphi_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F(t, \varphi_n(t)) dt.$$

Zacząć możemy od dowolnej funkcji φ_0 ; dla wygody rachunków można wziąć np. $\varphi_0 \equiv 0$. Funkcje otrzymywane w kolejnych krokach stanowią coraz dokładniejsze przybliżenia szukanej funkcji φ ; całe to postępowanie nosi nazwę metody kolejnych przybliżeń. W pobliżu punktu x_0 zbieżność jest bardzo szybka.

Wróćmy do równania (1) z warunkiem (3), czyli do wzorów (5)–(6). Biorąc $\varphi_0 \equiv 0$ i obliczając $\varphi_1 = T(\varphi_0)$ znajdujemy

$$\varphi_1(x) = -1 + \int_1^x \frac{3t^2 \cdot 2}{2} dt = x^3 - 2.$$

Jest to pierwsze przybliżenie rozwiązania równania (1). Proponujemy Czytelnikom znalezienie drugiego przybliżenia. A może ktoś znajdzie dokładne rozwiązanie?

Zamieszczony obok artykuł (i wszystkie inne artykuły matematyczne tego numeru Delta) jest poświęcony teorii punktów stałych przekształceń ciągłych. Jest to trzeci artykuł z cyklu, prezentującego najbardziej znane zagadnienia, które ugruntowały sławę polskiej szkoły matematycznej w topologii. Pierwszy artykuł poświęcony był teorii retraktów (Delta 3/1979), drugi — teorii kształtu (5/1980). Faktycznym twórcą tych dwu teorii jest profesor Karol Borsuk, który również miał decydujący udział w rozwoju teorii punktów stałych odwzorowań ciągłych.

O punktach stałych

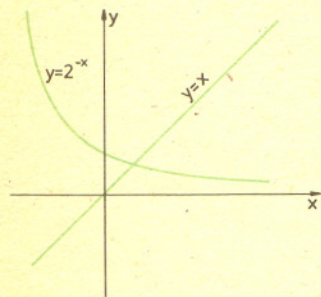
Doc. dr Lech GÓRNIEWICZ

Rozwiązywanie równań stanowi ważną część szkolnego programu matematyki. Równania, które rozwiązujemy w szkole, można by scharakteryzować następująco:

- dana jest funkcja $f: A \rightarrow R$, gdzie A jest pewnym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych R ,
- znajdujemy te wszystkie liczby $x \in A$, dla których $f(x) = 0$.

Jeżeli dane jest równanie $f(x) = 0$, to interesują nas dwa pytania, a mianowicie:

- czy istnieje rozwiązanie tego równania (w tym momencie nie interesujemy się sprawą, co jest rozwiązaniem)?
- w przypadku pozytywnej odpowiedzi na pytanie 1) zastanawiamy się, jak wyznaczyć rozwiązania.



W wielu przypadkach dysponujemy tylko odpowiedzią na pytanie 1). Weźmy na przykład równanie

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x - x = 0.$$

Jeżeli sporządzimy wykresy funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ i $g(x) = x$, to

widocznym jest, że wykresy te mają dokładnie jeden punkt wspólny. To znaczy, że nasze równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie. Widocznym jest również, że rozwiązanie to jest liczbą z przedziału $(0, 1)$, natomiast nie potrafimy prosto wyznaczyć tej liczby.

Pojęcie punktu stałego, którym będziemy zajmować się w tym artykule, jest ściśle związane z pojęciem rozwiązania równania. Zaczniemy od prostej uwagi. Niech A będzie podzbiorem trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej R^3 i niech $f: A \rightarrow R^3$ będzie pewnym odwzorowaniem. Nic nie stoi na przeszkodzie, aby zapytać, dla jakich $x \in A$ mamy $f(x) = 0$, gdzie $0 = (0, 0, 0)$ jest punktem o zerowych współrzędnych w R^3 . Widzimy więc, że „szkolne” pojęcie równania ma sens nie tylko w przypadku funkcji o dziedzinie i przeciwdziedzinie rzeczywistej. Postawmy tę sprawę w trochę zmienionej postaci. Rozpatrzmy funkcję (cały czas słowa funkcja i odwzorowanie traktujemy jako synonimy) $f: X \rightarrow X$, gdzie X jest dowolnym zbiorem. Pytamy, czy istnieje $x \in X$ takie, że $f(x) = x$. Element $x \in X$ taki, że $f(x) = x$ nazywamy *punktem stałym* odwzorowania f . Jeżeli weźmiemy $X = A \subset R^3$, to pytanie o istnienie punktu stałego odwzorowania $f: X \rightarrow X$ jest równoważne pytaniu o istnienie rozwiązania równania $g(x) = 0$, gdzie $g: X \rightarrow R^3$ jest dane wzorem: $g(x) = f(x) - x$. W ogólnej sytuacji pytanie o istnienie punktu stałego odwzorowania $f: X \rightarrow X$ jest po prostu pytaniem o istnienie rozwiązania równania $f(x) = x$ (takie równanie ma sens na dowolnym zbiorze!).

Mam nadzieję, że te wstępne uwagi umotywowały Czytelnikom potrzebę zajmowania się punktami stałymi. Przejdźmy obecnie do spraw zasadniczych w tym artykule. Na początek odnotujmy, że w odniesieniu do punktów stałych można sformułować pytania analogiczne do 1) i 2) powyżej. Pierwsza część naszej dyskusji o punktach stałych będzie dotyczyła pytania 1). Dla ustalenia uwagi umawiamy się, że przez X stale oznaczać będziemy pewien podzbiór R^3 oraz że przez odwzorowanie $f: X \rightarrow X$ będziemy rozumieć odwzorowanie ciągłe. Wyjaśnimy, w krótkiej formie, jak rozumieć w tym przypadku ciągłość odwzorowania.

Niech $x = (x_1, x_2, x_3)$ i $y = (y_1, y_2, y_3)$ będą dwoma punktami w R^3 . Przypomnimy, że odległość tych punktów wyraża wzór:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

Mówimy, że ciąg punktów $\{x^n\} \subset X$ jest zbieżny do punktu $x \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg liczb rzeczywistych $\{d(x^n, x)\}$ jest zbieżny do liczby zero. Odwzorowanie $f: X \rightarrow X$ nazywamy *ciągłym*, jeżeli dla każdego ciągu $\{x^n\} \subset X$ zbieżnego do punktu $x \in X$ ciąg wartości $\{f(x^n)\}$ jest zbieżny do punktu $f(x)$.

Będziemy mówić, że zbiór X ma własność punktu stałego, jeżeli każde (ciągłe) odwzorowanie $f: X \rightarrow X$ ma punkt stały. Podanie warunków wystarczających na to, aby dany zbiór miał własność punktu stałego, dawałoby w pełni zadowalającą odpowiedź na interesujące nas pytanie 1), postawione w odniesieniu do punktów stałych. Nietrudno podać proste przykłady zarówno na „tak” jak i na „nie”. Jeżeli na przykład $X = \{x_0\}$ jest zbiorem jednopunktowym, to oczywiście ma własność punktu stałego, ale już zbiór dwupunktowy $X = \{x_0, x_1\}$ własności tej nie ma (dlaczego?). Zbiór $X = R^3$ również nie ma własności punktu stałego, gdyż na przykład odwzorowanie $f: R^3 \rightarrow R^3$ dane wzorem: $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 1, x_2 + 1, x_3 + 1)$ nie ma punktów stałych. Pewną odpowiedź na pytanie, jakie zbiory mają własność punktu stałego, daje twierdzenie Brouwera.

Twierdzenie Brouwera. *Kula K^3 ma własność punktu stałego.*

Pojęcie ciągłości odwzorowań omówione jest dokładnie np. w książce A. Lelka *Zbiory*, PZWS 1966. W Delcie o podobnych sprawach pisała M. Moszyńska (1/1975 i 5/1975).

Ponieważ wskaźniki na dole (x_n) oznaczają często współrzędne punktów, autor stawia wskaźniki wyrazów ciągu na górze. Ten symbol nie ma tu nic wspólnego z potęgowaniem.

Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881—1966) — matematyk holenderski, znany głównie ze swoich prac z zakresu topologii i logiki. Cytowane obok twierdzenie o punkcie stałym pochodzi z 1910 roku.

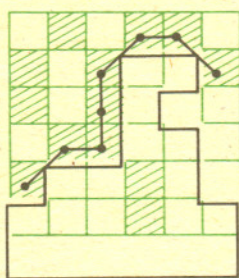
K^3 oznacza tu domkniętą kulę jednostkową w R^3 , tj.

$$K^3 = \{x \in R^3 : d(x, 0) \leq 1\}.$$

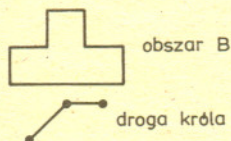


Rozwiązanie zadania M 235

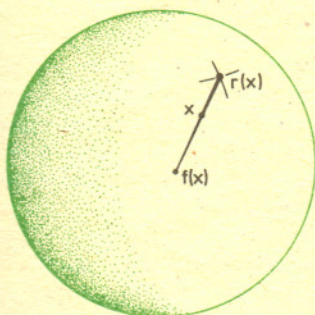
Powiększmy szachownicę, dodając przy jej dolnym brzegu jeden rząd pól nie zamalowanych, i rozpatrzmy obszar A złożony ze wszystkich pól, do których może dotrzeć wieża wychodząc z danego rzędu i nie przechodząc przez pola zamalowane. Teza naszego zadania jest równoważna temu, że A zawiera pewne pole przy górnym brzegu szachownicy. Przypuśćmy, że tak nie jest. Dołączając do A wszystkie pola leżące całkowicie wewnątrz niego, otrzymamy nowy obszar B , również nie zawierający pól przy górnym brzegu szachownicy, którego brzegiem jest zamknięta łamana. Niech teraz a i b będą punktami tej łamanej leżącymi odpowiednio na lewym i prawym boku szachownicy i najbliższymi górnemu jej brzegowi (gdymy na bocznych krawędziach szachownicy takich pól nie było, wieża mogłaby przejść z dołu do góry). Łamana a zawiera drogę łączącą a i b , przebiegającą powyżej dolnego brzegu szachownicy i rozdzielającą pola zamalowane od nie zamalowanych. Król może przejść od lewego do prawego brzegu szachownicy po zamalowanych polach przyległych do tej drogi — wbrew założeniu.



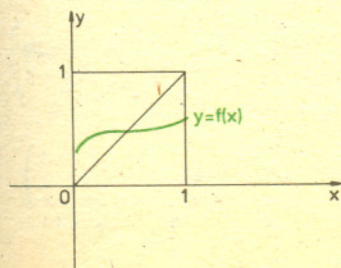
pole zamalowane



$$S^2 = \{x \in K^3 : d(x, 0) = 1\} = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$



Porównaj zadan e M237.



Do sprawy dowodu, jak również komentarza uzupełniającego powyższe twierdzenie wrócimy później. Obecnie omówimy niektóre konsekwencje twierdzenia Brouwera. Poznamy inne zbiory mające własność punktu stałego.

Przypuśćmy, że dany jest zbiór X oraz dwa odwzorowania (ciągłe) $g: X \rightarrow K^3$ i $h: K^3 \rightarrow X$ takie, że $(h \circ g)(x) = x$ dla każdego $x \in X$ oraz $(g \circ h)(x) = x$ dla każdego $x \in K^3$. Wtedy mówimy, że zbiór X jest homeomorficzny z K^3 . Na przykład kula domknięta K_1^3 o środku w punkcie $(1,1,1)$ i promieniu 1 jest homeomorficzna z K^3 ; odpowiednie odwzorowania $g: K_1^3 \rightarrow K^3$ i $h: K^3 \rightarrow K_1^3$ dane są wzorami: $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 1, x_2 - 1, x_3 - 1)$, $h(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 1, x_2 + 1, x_3 + 1)$.

Proponujemy Czytelnikowi zastanowić się, jak wykazać, że każda kula domknięta (o dowolnym środku i dowolnym promieniu), każdy prostopadłościan, każdy ostrosłup jest homeomorficzny z K^3 . Dysponujemy więc całkiem bogatą klasą zbiorów homeomorficznych z K^3 . Prawdziwy jest następujący wniosek z twierdzenia Brouwera:

Każdy zbiór homeomorficzny z K^3 ma własność punktu stałego.

Istotnie, rozpatrzmy odwzorowanie $f: X \rightarrow X$. Wykażemy, że f ma punkt stały. Oznaczmy przez $g: X \rightarrow K^3$ i $h: K^3 \rightarrow X$ odwzorowania ustalające homeomorfizm. Wtedy złożenie $g \circ f \circ h$ jest odwzorowaniem K^3 w K^3 i na mocy twierdzenia Brouwera istnieje punkt $x \in K^3$ taki, że $(g \circ f \circ h)(x) = x$. Z ostatniej równości wynika, że $(h \circ g \circ f)(h(x)) = h(x)$ i ponieważ $(h \circ g \circ f \circ h)(x) = (f \circ h)(x)$ otrzymujemy, że $f(h(x)) = h(x)$. Pokazaliśmy więc, że odwzorowanie f ma punkt stały $h(x)$.

Do wypowiedzenia innej konsekwencji z twierdzenia Brouwera potrzebujemy pojęcia retraktu. Przypuśćmy, że $A \subset X \subset R^3$. Zbiór A nazywać będziemy retraktem zbioru X wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje (ciągłe) odwzorowanie $r: X \rightarrow A$ takie, że $r(x) = x$ dla każdego $x \in A$. Niech A będzie średnicą leżącą na osi x_1 kuli K^3 . Wtedy A jest retraktem K^3 , gdyż funkcja $r: K^3 \rightarrow A$ dana wzorem $r(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, 0)$ spełnia wymagane żądania. Można podać wiele przykładów retraktów. Proponujemy Czytelnikowi zastanowienie się nad tą sprawą. Sądymy, że na podstawie powyższego przykładu Czytelnik potrafi powiedzieć, dlaczego każda średnica K^3 jest retraktem K^3 , a także dlaczego przekrój K^3 dowolną płaszczyzną jest retraktem K^3 . Jako przykłady retraktów prostopadłościanów i ostrosłupów mogą służyć krawędzie i ściany boczne. Dla jasności dodajmy, że retrakty nie muszą mieć tak „regularnych kształtów” jak w powyższych przykładach. Na przykład łuk leżący w prostopadłościanie łączący dwa punkty na przeciwległych ścianach jest retraktem tego prostopadłościanu.

Przykładów zbiorów mających własność punktu stałego dostarcza nam następujący wniosek z twierdzenia Brouwera:

Retrakt zbioru posiadającego własność punktu stałego ma również własność punktu stałego.

Przypuśćmy, że X ma własność punktu stałego i A jest retraktem X . Dysponujemy dwiema funkcjami: $r: X \rightarrow A$, $r(x) = x$ dla każdego $x \in A$, oraz $i: A \rightarrow X$, $i(x) = x$. Tak więc mamy $(r \circ i)(x) = x$ dla każdego $x \in A$. Proponujemy Czytelnikowi przeprowadzić dowód tego wniosku stosując metodę analogiczną jak w dowodzie wniosku pierwszego (informacja $(r \circ i)(x) = x$ w pełni wystarcza!).

Okazuje się, że związek pomiędzy twierdzeniem Brouwera i pojęciem retraktu jest głębszy. Oznaczmy przez S^2 sferę jednostkową (tj. powierzchnię kuli K^3).

Twierdzenie Brouwera jest równoważne temu, że S^2 nie jest retraktem K^3 .

Dowodzimy tego metodą niewprost. Przypuśćmy, że istnieje odwzorowanie $r: K^3 \rightarrow S^2$ takie, że $r(x) = x$ dla każdego $x \in S^2$. Wtedy odwzorowanie $f: K^3 \rightarrow K^3$ dane wzorem: $f(x) = -r(x)$ nie ma punktu stałego. Na odwrót, jeżeli przypuścimy, że istnieje odwzorowanie $f: K^3 \rightarrow K^3$ bez punktów stałych, to można określić funkcję (ciągłą) $r: K^3 \rightarrow S^2$ taką, że $r(x) = x$ dla każdego $x \in S^2$ (patrz rysunek).

Twierdzenie Brouwera sformułowaliśmy, dla prostoty, dla kuli $K^3 \subset R^3$. W gruncie rzeczy jest ono prawdziwe dla dowolnej kuli domkniętej K^n w przestrzeni euklidesowej n -wymiarowej R^n i co więcej, przedstawione wyżej wnioski z twierdzenia Brouwera pozostają prawdziwe dla podzbiorów R^n . Wiemy już, że kula domknięta K^2 na płaszczyźnie R^2 jest retraktem K^3 , dalej, dowolny odcinek $[a, b]$ jest retraktem pewnej kuli domkniętej w R^3 (zawsze możemy znaleźć taką kulę, aby odcinek $[a, b]$ był jej średnicą). Nie jesteśmy w stanie dać nawet szkicu dowodu twierdzenia Brouwera dla K^2 lub K^3 , gdyż wymaga on znajomości wielu dodatkowych faktów. Natomiast w przypadku odcinka $[a, b]$ dowód jest elementarny. Naszkicujemy go dla odcinka $[0, 1]$. Niech $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ będzie funkcją ciągłą. Wykres tej funkcji leży w kwadracie $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$. Funkcja f ma punkt stały wtedy i tylko wtedy, gdy jej wykres ma punkt wspólny z przekątną kwadratu. Przypuśćmy, że wykres f nie przecina przekątnej kwadratu. Z tego, że funkcja ciągła na odcinku musi przyjmować wszystkie wartości pośrednie pomiędzy danymi wynika, że wykres f leży całkowicie nad przekątną lub leży całkowicie pod przekątną kwadratu. Jeżeli wykres f leżałby całkowicie nad przekątną, to funkcja f nie mogłaby być określona w punkcie $x = 1$

Jeżeli natomiast wykres f leży całkowicie pod przekątną, to funkcja f nie byłaby określona w punkcie $x = 0$. Za każdym razem otrzymujemy sprzeczność z tym, że f jest określona na $[0, 1]$.

Ostatnią część tego artykułu poświęcimy sprawie istnienia i metodzie wyznaczania punktów stałych. Zbiór $X \subset R^3$ nazywamy domkniętym w R^3 , jeżeli dla każdego ciągu punktów $\{x^n\} \subset X$ z tego, że ciąg $\{x_n\}$ jest zbieżny do punktu $x \in R^3$, wynika, iż $x \in X$.

Odwzorowanie $f: X \rightarrow X$ nazywamy *związującym* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje λ , $0 \leq \lambda < 1$ takie, że dla dowolnych $x, y \in X$ spełniona jest nierówność:

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda \cdot d(x, y).$$

Pozostawiamy Czytelnikowi podanie przykładów odwzorowań związujących.

Twierdzenie Banacha. *Jeżeli C jest domkniętym podzbiorem R^3 , to każde odwzorowanie związujące $f: X \rightarrow X$ ma dokładnie jeden punkt stały.*

Dowód. Niech x^1 będzie dowolnym punktem X . Określamy: $x^2 = f(x^1)$, ..., $x^n = f(x^{n-1})$, Z określenia i założenia o związaniu mamy: $d(x^{n+1}, x^n) = d(f(x^n), f(x^{n-1})) \leq \lambda \cdot d(x^n, x^{n-1})$, co znaczy, że przy wzroście n odległość pomiędzy x^{n+1} i x^n maleje. Uwaga ta pozwala pokazać (patrz margines), że ciąg x^n jest zbieżny do pewnego punktu x , a ponieważ X jest domkniętym podzbiorem R^3 , to $x \in X$. Z tego, że f jest odwzorowaniem ciągłym (wynika to natychmiast z tego, że jest odwzorowaniem związującym!), ciąg $\{f(x^n)\}$ jest zbieżny do $f(x)$. Z drugiej strony ciągu $\{f(x^n)\}$ i $\{x^n\}$ różnią się tylko o jeden wyraz, skąd $f(x) = x$. Twierdzimy, że x jest jedynym punktem stałym odwzorowania f . Istotnie, jeżeli $x' \neq x$ jest również punktem stałym f , to na mocy założenia mamy: $d(f(x'), f(x)) \leq \lambda \cdot d(x', x)$ i wobec równości $f(x') = x'$, $f(x) = x$ otrzymujemy $d(x', x) \leq \lambda \cdot d(x', x)$, ale ostatnia nierówność jest niemożliwa, bo $0 \leq \lambda < 1$ i $x \neq x'$.

Powyższy dowód twierdzenia Banacha podaje metodę wyznaczania punktu stałego. W tym celu wystarczy wystartować od dowolnego punktu $x^1 \in X$, rozpatrzyć tak zwany ciąg iteracji tego punktu, tj. ciąg $\{x^n\}$, gdzie $x^n = f(x^{n-1})$. Granica ciągu iteracji jest (jedynym) punktem stałym odwzorowania f . Godnym odnotowania jest fakt, że ciąg iteracji ma zawsze tę samą granicę niezależną od x^1 . Twierdzenie Banacha sformułowaliśmy tylko w przypadku domkniętych podzbiorów R^3 , w istocie jest ono prawdziwe dla podzbiorów domkniętych dowolnej przestrzeni euklidesowej R^n , co więcej, istnieje klasa przestrzeni metrycznych zwanych zupełnymi, dla których twierdzenie to pozostaje w mocy.

Odnotujmy, że złożenie odwzorowania związującego z retrakcją lub homeomorfizmem nie musi być odwzorowaniem związującym (podajcie przykłady!). Oznacza to, że metodą stosowaną w przypadku twierdzenia Brouwera nie można wyprowadzić wniosków z twierdzenia Banacha.

Obecnie wyjaśnimy, czy twierdzenie Banacha pozostaje prawdziwe dla retraktów i zbiorów homeomorficznych z podzbiorem domkniętymi przestrzeni euklidesowej. Zauważmy na początek, że jeżeli A jest retraktem X , to A jest domkniętym podzbiorem X . Istotnie, jeżeli $\{x^n\} \subset A$ i $\lim x^n = x$, to $\lim r(x^n) = r(x)$, ale $r(x^n) = x^n$, bo $x^n \in A$. Zatem ciągi $\{x^n\}$ i $\{r(x^n)\}$ są identyczne i w konsekwencji $r(x) = x$. Wobec tego $x \in A$, co dowodzi, że A jest domkniętym podzbiorem X . Wobec tego twierdzenie Banacha pozostaje prawdziwe dla retraktów podzbiorów domkniętych w przestrzeniach euklidesowych (bo są one również podzbiorem domkniętymi przestrzeni euklidesowych). Jednakże wypowiedzenie tego wniosku nie dostarcza nam ani jednego nowego przykładu zbioru, dla którego prawdziwe jest to twierdzenie.

A co się dzieje w przypadku zbiorów homeomorficznych z podzbiorem domkniętymi w przestrzeniach euklidesowych? Twierdzenie Banacha jest oczywiście prawdziwe dla zbioru liczb rzeczywistych R (jedno z możliwych uzasadnień otrzymujemy po zauważeniu, że R jest retraktem R^3 !). Odcinek $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ jest homeomorficzny z R (odpowiedni homeomorfizm ustala funkcja $\text{tg}: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow R$ i funkcja odwrotna do tg). Jednakże dla odcinka $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ twierdzenie Banacha jest nieprawdziwe. Aby się o tym przekonać, rozpatrzmy funkcję $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. Widzimy, że f jest odwzorowaniem związującym ($\lambda = \frac{1}{2}$) i nie ma punktów stałych, gdyż $f(x) = x$ zachodzi tylko dla $x = -\frac{\pi}{2}$, ale $-\frac{\pi}{2} \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Wprost z określenia odwzorowania związującego mamy

$$d(x^m, x^n) \leq \lambda^m d(x^0, x^{n-m}).$$

Z kolei dla odległości $d(x^0, x^k)$ mamy oszacowanie

$$d(x^0, x^k) \leq \frac{1 - \lambda^k}{1 - \lambda} d(x^0, x^1),$$

łatwe do udowodnienia np. przez indukcję. Przyjmując $k = n - m$ i pomijając składnik $-\lambda^k$ w liczniku ostatniego ułamka dostajemy (dla $n \geq m$)

$$d(x^n, x^m) \leq \frac{\lambda^m}{1 - \lambda} d(x^0, x^1).$$

Ponieważ $\lambda < 1$, więc prawa strona staje się dowolnie mała, gdy m (a więc i n) jest dostatecznie duże. Zatem ciąg $\{x^n\}$ spełnia warunek-Cauchy'ego i wobec założonej zupełności przestrzeni X jest ciągiem zbieżnym do pewnego punktu $x \in X$.

Ma to znaczenie przy rozwiązywaniu równań różniczkowych (p. artykuł M. Kuczmy).

Przestrzenie zupełne — to takie przestrzenie metryczne, w których spełnienie warunku Cauchy'ego przez ciąg implikuje zbieżność tego ciągu. Przestrzeń euklidesowa i wszystkie jej domknięte podzbiory są zupełne.



Jak pies goni zająca po Warszawie, czyli jeszcze o punktach stałych

Okrąg na płaszczyźnie nie ma własności punktu stałego (dla odwzorowań ciągłych).

Antypodyzm, czyli przekształcenie okręgu przyporządkowujące każdemu punktowi — punkt po przeciwnej stronie średnicy, nie ma punktów stałych.

Spójrzmy teraz na figurę \mathcal{W} zwaną „okręgiem warszawskim” (nazwa nie jest aluzją do układu sieci komunikacyjnej stolicy, lecz przypomina czasy, w których Warszawa była centrum światowej topologii).

Ma okrąg warszawski własność punktu stałego, czy nie? Wskazując ciągle odwzorowanie \mathcal{W} w siebie nie mające punktu stałego dajemy negatywną odpowiedź na postawione pytanie.

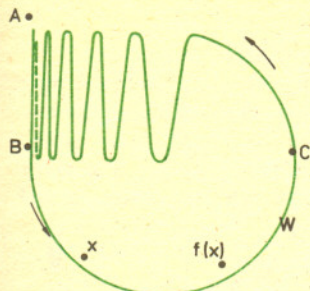
W przypadku zwykłego okręgu negatywnej odpowiedzi dostarczył antypodyzm, niestety tym razem bezużyteczny. Może więc nasze pytanie ma odpowiedź pozytywną? Właśnie! Niech f będzie dowolnym ciągłym odwzorowaniem \mathcal{W} w siebie. Zabawmy się w psa i zająca. Psem niech będzie punkt $x \in \mathcal{W}$, zającem punkt $f(x) \in \mathcal{W}$. Pies startuje z punktu A (rysunek) i porusza się w kierunku punktów B, C i dalej serpentykami (są one utworzone przez fragment wykresu funkcji

$x \rightarrow \sin \frac{1}{x}$) w stronę odcinka AB . Zając ucieka przed psem i znajduje się wobec tego przed nim

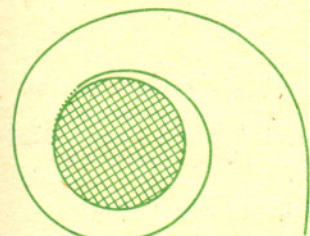
(strzałki wskazują kierunek). Przypuśćmy, że uda mu się umknąć, tzn. każdy punkt x znajduje się za $f(x)$. Każdy punkt $q \in AB$ jest granicą ciągu punktów q_1, q_2, \dots z „serpentykowej” części zbioru \mathcal{W} . Ponieważ jednak każdy punkt $f(q_i)$ znajduje się przed punktem q_i , więc ciąg $f(q_1), f(q_2), \dots$ jest zbieżny do punktu należącego do odcinka AB , a więc (ciągłość!) $f(q) \in AB$.

Widzimy, że odwzorowanie f przekształcać musi odcinek AB znów w ten sam odcinek. Musi mieć zatem punkt stały, bo odcinek domknięty ma własność punktu stałego (patrz artykuł L. Górniewiczza). Proponujemy Czytelnikowi zbadanie, czy figura złożona z koła i zagęszczającej się wokół niego spirali (rys. 2) ma własność punktu stałego, czy nie.

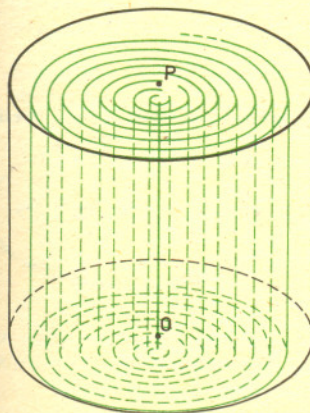
Na rysunku 3 widzimy dwie dość podobnie wyglądające figury, z których jedna ma własność punktu stałego, a druga nie. Łatwo to udowodnić, znów puszczając po nich psa i zająca.



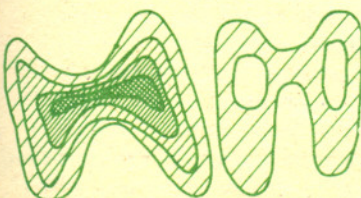
Rys. 1. Okrąg warszawski.



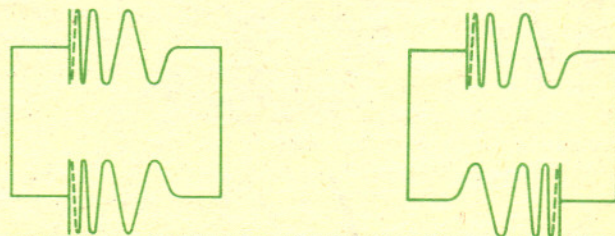
Rys. 2. Czy ta figura ma własność punktu stałego, czy nie?



Rys. 4. Puszka Kinoshity.



Rys. 5. Przestrzeń ściągalna i przestrzeń nieściągalna.



Rys. 3. Figura po lewej ma własność punktu stałego, figura po prawej nie ma.

Następny rysunek 4 przedstawia jeszcze jedną figurę, która „powinna mieć” własność punktu stałego, a nie ma. Figura ta, zwana „puszką Kinoshity”, jest cylindrycznym pudełkiem z jednym denkiem i włożoną do środka spiralnie zwiniętą (nieskończoną) taśmą. Przestrzeń ta „powinna mieć” własność punktu stałego, bo jest domknięta, ograniczona i „ściągalna”: można ją łagodnie ściągnąć do punktu, nie zaklejając przy tym żadnej dziury (najpierw ściągamy cały walec do podstawy, potem podstawę do punktu). Przestrzenie ściągalne mają zaś wiele własności takich samych jak przestrzenie jednopunktowe. „Nie ma”, bo wyobraźmy sobie następujące przekształcenie: najpierw obracamy całą puszkę o mały kąt. Punkty stałe mogą być tylko na pionowej osi puszeki. Wobec tego przesuwamy nieco odcinek OP do góry, umieszczając go częściowo w spirali na wierzchu puszeki. Wymaga to „wessania” choćby małego kółka denka wokół punktu O w odcinek OP , ale to nic nie szkodzi.

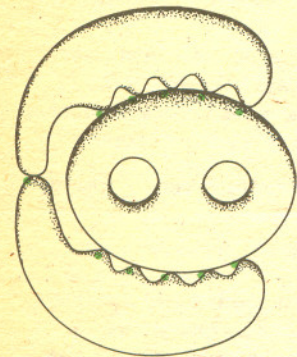
Trzeba ponadto lekko naciągnąć górną spiralę (oraz jej najbliższe otoczenie) tak, aby blisko punktu P nasze przekształcenie pokrywało się z wykonanym „przesunięciem” odcinka OP , a przy brzegu górnej podstawy — z wykonanym na początku obrotem.

Przedstawione przykłady mają ilustrować, że pojęcie „własności punktu stałego” jest nieco nietypowe i trudno znaleźć ogólną i głęboką jego teorię. Chyba że... (p. artykuł Krzysztofa S. Nowińskiego).

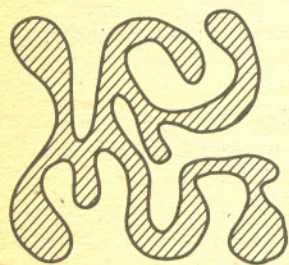
(opr. red. na podstawie listu mgr. Sławomira KWASIKA.)

Nie będziemy tu podawać ścisłej definicji powierzchni, ograniczymy się tylko do przykładów: sfera, torus, preceł z n dziurami, butelka Kleina, płaszczyzna rzutowa, hiperboloidea... Nie są powierzchniami: koło z brzegiem, kula, sfera z doczepionym odcinkiem itp. Zakładamy także, że nasze powierzchnie są gładkie, bez „kantów”, ostroży, dziobków itp. Wykluczamy na przykład powierzchnię stożkową, dwie sfery styczne i powierzchnię stromego dachu (albo kawałek grani tatrzańskiej koło Żabięgo Konia).

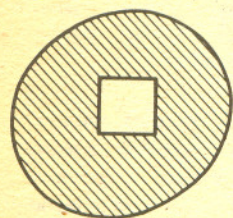
Wielościanem topologicznym nazywamy zbiór homeomorficzny z sumą wielościanów wypukłych (przez wielościan rozumiemy także wielokąt, odcinek i punkt).



Takich powierzchni nie rozpatrujemy.



Obszar jednorodny.



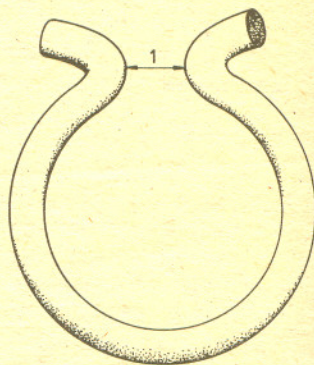
Obszar niejednorodny.

Punkty stałe, geodezja i charakterystyka Eulera

Mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

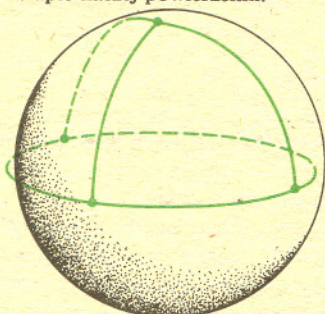
Przykłady zaprezentowane w innych artykułach tego numeru Deltę sugerują, że o punktach stałych przekształceń trudno jest powiedzieć coś więcej, niż da się wyciągnąć z twierdzeń Brouwera i Banacha. Zauważmy jednak, że rozpatrywane tam obiekty są dość skomplikowane, lokalnie wręcz „dzikie”. Jeżeli ograniczymy się w naszych rozważaniach do węższej klasy „porządných” przestrzeni (konkretnie: wielościanów topologicznych), będziemy mogli już wypowiedzieć szereg ciekawych, nietrywialnych twierdzeń opisujących istnienie punktów stałych odwzorowań ciągłych.

Twierdzenia te wymagają jednak dość rozbudowanego aparatu algebraicznego, ograniczymy się więc do przypadku powierzchni i odwzorowań „mało ruszających punkty”. Aby sprecyzować, co znaczy, że przekształcenie „mało rusza punkty”, zauważmy najpierw, że dla każdej powierzchni istnieje taka stała $A > 0$, że dwa punkty odległe mniej niż o A można połączyć dokładnie jednym najkrótszym łukiem, leżącym całkowicie na tej powierzchni. Kierunek takiej krzywej zależy w sposób ciągły od położenia punktów. Możemy teraz powiedzieć, że przekształcenie f mało rusza punkty, jeżeli odległość x od $f(x)$ jest stale mniejsza od wyżej wspomnianej stałej A .



Dla sfery o promieniu r stała A wynosi $2r$, dla torusa o promieniu zewnętrznym R i wewnętrznym r mamy $A = \min(2r, 2R)$, dla powierzchni na rysunku powyżej $A = 1$.

Na powierzchniach możemy rysować mapy. Mapę nazwiemy „dobrą”, jeżeli każde państwo tworzy obszar jednorodny (rysunek) i w żadnym punkcie nie schodzą się cztery granice (ani więcej). Mapa Afryki nie jest „dobra” (Botswana, Zambia, Namibia i Zimbabwe dotykają się w jednym punkcie), ale i w Europie istnienie Republiki San Marino zmienia własności topologiczne mapy. Punkty zbiegu trzech granic nazwiemy wierzchołkami mapy, a termin „granica” będzie oznaczał wspólny odcinek linii granicznej między kolejnymi wierzchołkami. Przypomnijmy teraz, że charakterystyką Eulera powierzchni \mathcal{M} nazywamy liczbę $\chi(\mathcal{M}) = w - k + n$, gdzie w jest liczbą wierzchołków, k — liczbą granic, a n — liczbą państw na „dobrej” mapie naszej powierzchni.

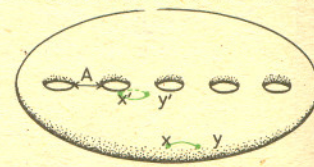


Sfera: 4 wierzchołki, 4 obszary, 6 granic. Charakterystyka Eulera = 2.



Torus: 4 wierzchołki, 4 obszary, 8 granic. Charakterystyka = 0.

Punkty x, y są bliskie, x' i y' — dalekie.



Preceł z 5 dziurami (charakterystyka Eulera preceła z n dziurami = $2 - 2n$).

Możemy teraz sformułować nasze

Twierdzenie. Jeżeli charakterystyka Eulera powierzchni \mathcal{M} jest różna od zera, to każde odwzorowanie ciągle $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ ma punkt stały.

Wynika stąd łatwo (jak?)

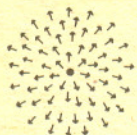
Wniosek. Jeżeli przekształcenie ciągle dwuwymiarowej sfery w siebie nie ma punktu stałego, to znajdzie się na niej taki punkt, który przechodzi na punkt do niego antypodyczny.

Nasze twierdzenie wynika zaś z następującego twierdzenia Poincarégo-Hopfa-Lefschetza:

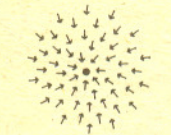
Jeżeli V jest takim polem wektorów stycznych do \mathcal{M} , że jedynymi jego miejscami zerowymi są „źródła”, „ujścia” i „siodła”, to liczba „źródeł” + liczba „ujść” — liczba „siodła” = $\chi(\mathcal{M})$.

Istotnie, jeżeli przekształcenie f mało rusza punkty \mathcal{M} , to przyporządkowując każdemu punktowi $x \in \mathcal{M}$ wektor o kierunku najkrótszej krzywej łączącej x z $f(x)$ i o długości równej odległości x od $f(x)$ otrzymamy pole V wektorów stycznych do \mathcal{M} . Jeżeli teraz f nie ma punktów stałych, to pole V nie ma miejsc zerowych i wtedy $\chi(\mathcal{M}) = 0$.

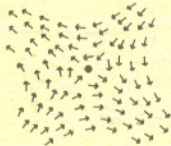
Pole wektorów stycznych otrzymujemy przyporządkowując (w sposób ciągły) punktom $x \in \mathcal{M}$ wektory styczne do \mathcal{M} w x . Miejscem zerowym takiego pola nazywamy punkt, w którym przyporządkowany wektor styczny jest zerowy. Na powierzchni zwartej takie pole może mieć tylko skończenie wiele miejsc zerowych.



Źródło.



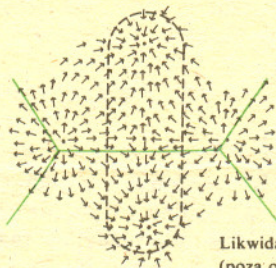
Ujście.



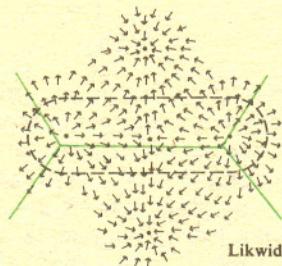
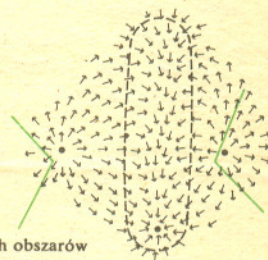
Siodło.

Dowód twierdzenia Poincarégo-Hopfa-Lefschetza składa się z dwóch części. W pierwszej, dość skomplikowanej, ale wyraźnie pomocniczej pokazuje się, że liczba po lewej stronie równości jest taka sama dla wszystkich pól. Tę część dowodu pominiemy. W części drugiej buduje się już konkretne pole spełniające napisaną w tezie twierdzenia równość. A robi się to tak: Rysujemy na \mathcal{M} dobrą mapę, a potem budujemy pole mające w każdym wierzchołku źródło, na każdej krawędzi siodło i w każdym obszarze ujście.

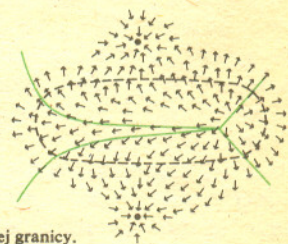
Można wyobrazić sobie górski krajobraz, w którym wierzchołki są szczytami gór, granice — grzaniami i obszary — nieckowatymi dolinami. Pole nasze jest wtedy polem kierunków największego nachylenia stoków, inaczej: polem kierunków ścieku wody. Możemy także narysować „komiks”, ilustrujący dowód następującego uzupełnienia twierdzenia Poincarégo-Hopfa-Lefschetza: Na powierzchni o charakterystyce χ istnieje pole mające a) w przypadku $\chi \geq 0$ dokładnie χ źródeł i ujść, a bez siodła, b) $-\chi$ siodła, za to bez źródeł i ujść, gdy $\chi < 0$. W tym „komiksie” redukujemy liczbę krawędzi, obszarów i wierzchołków mapy, przebudowując odpowiednio pole:



Likwidacja granicy i scalenie dwóch obszarów (poza oznaczonym pasem nic nie zmieniamy).



Likwidacja jednego wierzchołka i jednej granicy. Znowu nie zmieniamy nic poza oznaczonym pasem.



Mowa tu o trójkątach topologicznych (por. uwaga na marginesie w początku artykułu).

Średnica obszaru — to kres górny odległości jego punktów.

Dojdziemy w ten sposób do minimalnej konfiguracji, spełniającej warunki naszego twierdzenia. Twierdzenie Poincarégo-Hopfa-Lefschetza i idea jego dowodu są bardzo charakterystyczne dla szeregu twierdzeń tzw. analizy globalnej, w której poszukuje się zależności między informacjami o lokalnej postaci pewnego obiektu (tu: lokalną postacią pola V), a opisem globalnym (tu: charakterystyką $\chi(\mathcal{M})$). Aby pokazać, jak szeroki jest wachlarz tego typu twierdzeń, podamy dwa w pewnym sensie dualne „geodezyjne” opisy $\chi(\mathcal{M})$. Przypuśćmy, że na powierzchni \mathcal{M} mamy mapę, której obszary są trójkątami krzywoliniowymi o średnicach mniejszych niż określona na początku stała A — a ich granice — odcinkami najkrótszych krzywych łączących wierzchołki. Oznaczmy przez $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ kąty pomiędzy kierunkami krzywych łączących tworzących granicę k -tego obszaru w jego wierzchołkach. Wtedy

$$\sum (\alpha_k + \beta_k + \gamma_k - \pi) = 2\pi \cdot \chi(\mathcal{M}).$$

Jeżeli teraz zastąpimy granice przez odcinki łączące wierzchołki, a obszary przez trójkąty płaskie, to w wierzchołku w_i otrzymamy kąt bryłowy o kątach płaskich $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Oznaczmy:

$$\Delta_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n - 2\pi.$$

Wtedy $\sum \Delta_i = -2\pi \cdot \chi(\mathcal{M})$. I znów „lokalne” opisy kształtu powierzchni \mathcal{M} doprowadziły nas do zależności, w której występuje pewien „globalny” niezmiennik powierzchni.

OSTRZEŻENIE DLA NAS WSZYSTKICH

Spojrzeni na siebie. George nie miał żadnych emocjonalnych sekretów przed żoną, ale było coś, czego jej nigdy nie powiedział. Studiował matematykę i zamierzał zostać matematykiem. Jednakże w obliczu czystej nauki, owych zimnych Himalajów intelektu, zawiodła go odwaga, po czym szybko zwrócił się ku światu, w którym żyć można ciepło, dostatnio i łatwo. Będąc mądrym mężczyzną oraz zdolnym urzędnikiem państwowym wykonywał proste dla niego funkcje, przez co nieraz czuł, że jego umysł leży odłogiem i że los pozbawił go wielkości. Żonie o tych sprawach nie mówił ani o tym że nigdy nie przestanie gardzić sobą za to fiasko.

Iris Murdoch, „Przypadkowy człowiek”
tłumaczenie Zdzisława Bohdanowicza



Rusza się czy nie?

Każdą liczbę kulek ułożonych w przegródkach prostokątnego pudełka można przemieścić tak, aby żadna z nich nie znalazła się z powrotem w tej samej przegródce. No, żeby było ściśle, to każdą większą od 1. Możemy to zrobić na bardzo wiele sposobów; jeżeli to kogoś interesuje, to proszę, jest wzór dla n kulek:

$$n! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{1}{n!} \right).$$

Ale punktów prostokąta (takich jakby nieskończenie małych kulek) nie można już tak dokładnie przemieszczać: jeżeli tylko nie pozwolimy naszego prostokąta rozdzierać, to zawsze znajdzie się taki punkt, który padnie znów na siebie. To jest twierdzenie Brouwera, dowód jest trudny.

Gdy wyrzucimy z samolotu mapę kraju, nad którym przelatujemy, to pewien punkt mapy (i tylko jeden) upadnie na ten punkt w terenie, który właśnie przedstawia. To zupełnie jasne, a podobne twierdzenie jest prawdziwe i w bardzo abstrakcyjnych przestrzeniach i w „dużych” artykułach tego numeru Delty jest nazywane zasadą Banacha.

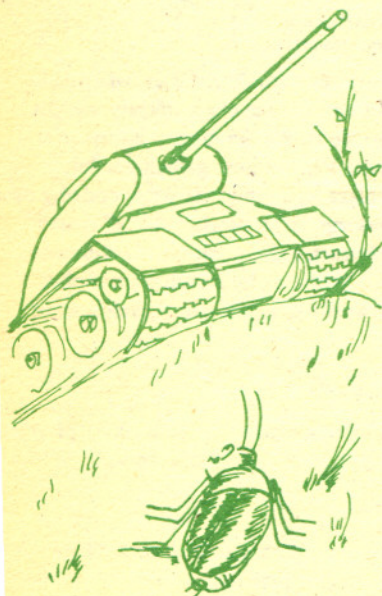
Każdy obrót płaszczyzny ma swój środek, a przestrzeni — oś. Zatem na obracającej się kuli są zawsze dwa punkty, które nie poruszają się. Oś obrotu możemy znaleźć nawet wówczas, gdy kula toczy się całkiem bezładnie. Wprawdzie może się ona też zmieniać, ale w każdym momencie czasu jakaś oś jest.

W najszybciej nawet pędzącym pociągu są punkty, które przez chwilę nie poruszają się. W każdym momencie prędkość tego punktu koła wagonu, który styka się z szyną, jest równa zero — za to górny koniec toczy się z podwójną prędkością. Nie wierzycie? A jakie są prędkości (względem ziemi, oczywiście) górnej i dolnej części gaśienicy jadącego czołgu? No tak, dolna część leży przez pewien czas nieruchomo, za to gdy staje się górną, musi nadrabiać zaległości i bieć dwa razy szybciej niż cały czołg. I tak jest dla każdej gaśienicy: długiej, krótkiej i takiej zupełnie, ale to zupełnie podobnej do koła też.

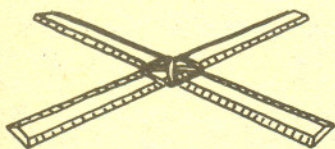
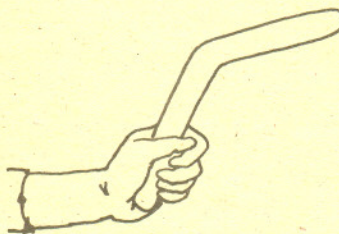
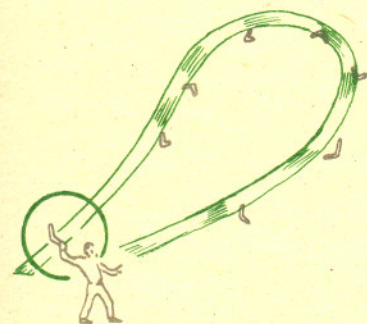
Zerową prędkość chwilową ma siatkarz „zawieszony” w wysokości nad siatką, skoczek do wody w szczytowym punkcie swego lotu (zdjęcie wyjdzie na pewno nie poruszone), a nawet planety na niebie zatrzymują się na moment. No, tak naprawdę to nie, ale tak to widzimy z Ziemi, a przecież ruch jest względny.

Gdy wracamy szosą z Zakopanego do Krakowa, tuż za Rdzawką pojawia się z prawej strony w dole Rabka. Po kilku minutach jazdy znów widzimy ją po prawej w dole, mniej więcej w tym samym miejscu za oknem. A nieopodal Wieliczki pociąg objeżdża górę ze stożkowym obeliskiem na szczycie i też zabawne jest obserwować, że obelisk przez dobrych kilka minut jest w tym samym miejscu za oknem.

Słyszeliście o satelitach stacjonarnych, prawda? To taki sputnik, który obiega Ziemię w 24 godziny, a że Ziemia też kręci się pod nim w tempie 1 obrót na 24 godziny, to widzimy go stale w tym samym punkcie nieba. Taki satelita musi koniecznie wisieć nad równikiem, a nigdy nad punktem poza nim. Wyobraźmy sobie, że ten satelita połączony jest drabinką sznurową z punktem, nad którym się stale znajduje. Po tej drabince wspina się człowiek. W którym punkcie zacznie nic nie ważyć? Bo „na dole” waży normalnie, a w satelicie już nic. A może będzie tracił wagę stopniowo? Czy jeżeli odwiążemy koniec drabinki przy satelicie, to spadnie ona na Ziemię, czy nie?



Bumerang



Upuszczony swobodnie latawiec spadnie na ziemię niczym kartka papieru. Jednak wystarczy ciągnąć go w kierunku poziomym za sznurek i latawiec wzbije się pięknie w górę. Podobnie i samolot wznosi się dzięki poziomemu napędowi śmigieł. Samolot stojący na lotnisku jest niczym więcej, jak tylko ciężką bryłą żelastwa. W obu wypadkach, na płaszczyznę wznoszącego się latawca jak i na skrzydła lecącego samolotu, działa pewna siła skierowana do góry. Siła tego rodzaju pojawia się zawsze wtedy, gdy pewien dosyć płaski przedmiot porusza się względem powietrza (lub wody). Możemy ją łatwo zaobserwować wystawiając dłoń przez okno rozpędzonego pociągu i ustawiając pod kątem do kierunku ruchu. Przy pewnym kącie nachylenia ręka zacznie „fruwać”.

Zrobić latawiec to nic trudnego. Gorzej przedstawia się sprawa z samolotem. Przydałyby się choć same skrzydła. Połączone w odpowiedni sposób pod kątem nieco większym od prostego tworzą nic innego, jak zwykły bumerang australijski, który nie tylko pięknie lata, ale i potrafi wrócić do rzucającego.

Kto nie lubi majsterkowania, może zrobić bez trudu bumerang innego typu — czteroramienny. Potrzebne są do tego dwie linijki o wypukłej górnej i płaskiej dolnej powierzchni. Linijki łączymy na krzyż silną gumą albo śrubą z nakrętką i bumerang gotów. W żadnym wypadku nie należy używać linijek o metalowych krawędziach. Przekonacie się o tym obserwując, jak gwałtowny może być ruch bumerangu.

Bumerangiem najlepiej rzuca się przy bezwietrznej pogodzie. Gdy wieje słaby wiatr, należy ustawić się doń twarzą, obrócić się w prawo o 45° i rzucać w tym kierunku. Przy rzucie należy trzymać bumerang prawie pionowo za koniec jednego z ramion (dla bumerangu australijskiego płaską stroną od siebie), wziąć zamach zza głowy i rzucić ruchem wirowym w kierunku horyzontu. Nie należy rzucać zbyt mocno. Przy ruchu bumerangu najważniejsze jest bowiem owo wirowanie, a nie siła rzutu. Prawidłowe ustawienie płaszczyzny wirowania zależy od wiatru i rodzaju bumerangu. Czasem musi być ona prawie pionowa, a czasem trzeba ją odchylić od pionu aż o 45° . Przy zbyt silnym nachyleniu siła wznosząca bumerang staje się za duża, bumerang wznosi się zbyt stromo i następnie nurkuje w dół z takim impetem, że może się złamać przy uderzeniu o ziemię. Podczas prawidłowego lotu bumerang zatacza prawie poziome koło. Po powrocie przeważnie zawsze na moment w miejscu lub zatacza małą pętlę, po czym spada na ziemię. Ruch wirowy bumerangu zapewnia stabilność jego lotu. Z tego samego powodu wirujący bąk nie przewraca się, a na poruszającym się rowerze znacznie łatwiej utrzymać równowagę niż na stojącym w miejscu. Płaszczyzna wirowania za każdym razem wykazuje wyraźną niechęć do zmiany. Można ją oczywiście zmieniać „na siłę”, ale i wtedy skutki są raczej nieoczekiwane. I tak na przykład pochYLENIE kręcącego się bąka nie powoduje jego upadku, lecz ruch osi bąka po powierzchni stożka. Inne tego typu doświadczenia można przeprowadzać z kręcącym się szybko kołem rowerowym trzymanym za osie.

Podobne zjawiska, wywołane niejednakową siłą oporu powietrza oraz siłą wznoszenia działającą na różne ramiona bumerangu (szybkość ramion względem powietrza jest różna, a oprócz tego jedno ramię odbija powietrze w kierunku drugiego), powodują, że bumerang zatacza podczas lotu koło, zaś płaszczyzna jego wirowania z prawie pionowej staje się prawie poziomą. Jest to bardzo szczęśliwa okoliczność, gdyż pod koniec lotu ruch wirowy bumerangu jest już stosunkowo powolny i odpowiednio dużą siłą wznoszenia, dla utrzymania go w powietrzu, zapewnia właśnie poziome ustawienie płaszczyzny wirowania.

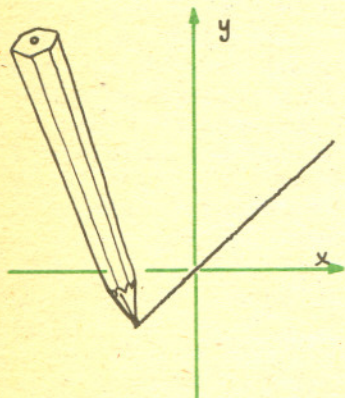
A dlaczego bumerangiem nie może być pojedyncza prosta linijka? Można to zrozumieć dzięki następującemu doświadczeniu. Książkę związaną mocnym sznurkiem rzucamy do góry. Książka w locie może wirować wokół jednej z trzech osi. Wirowanie wokół „skrajnych” osi jest stabilne, lecz przy wirowaniu dookoła „pośredniej” osi książka kiwa się na boki. Podobnie i bumerang w kształcie banana czy też krzyża wiruje stabilnie w płaszczyźnie wyznaczonej przez ramiona. Jednak w przypadku bumerangu prostego konkurują tu dwie prostopadłe płaszczyzny i bumerang kiwa się tracąc swą siłę wznoszenia. Widać to zresztą przy bumerangowym rzucie pojedynczą linijką.

Obserwując ruch różnych bumerangów przy różnych sposobach rzucania można zobaczyć wiele zadziwiających zjawisk. Należy jednak pamiętać, że niektóre bumerangi latają notorycznie źle i nie dają się naprawić przez zmianę profilu ramion. Wtedy trzeba zrobić drugi bumerang — może będzie lepszy.

Małą Deltę przygotowali: M. SZUREK i M. ŚWIĘCKI

O odręcznym wykreślaniu funkcji $y=x$

Jerzy GERESZ



Wyobraźmy sobie, że ktoś wręcza nam ołówek (ale nie daje nam linijki) i poleca wykreślić funkcję $y = x$ w zadanym układzie współrzędnych. Zadanie to sprowadza się do wykreślenia linii prostej, przechodzącej przez początek układu i nachylonej pod kątem 45° do obydwu osi. Przy „odręcznym” wykreślaniu takiej funkcji efekt będzie taki, jak na rysunku obok: wykres nieuchronnie będzie pokrzywiony. Ujmując proces wykreślenia „dynamicznie” powiemy, że kierunek ruchu końcówki ołówka różnił się tu na ogół od właściwego (tego pod kątem 45°). Jednakże patrząc na wykres z rysunku stwierdzamy, że pomimo zniekształceń uwydatnia on szereg specyficznych własności jakościowych funkcji $y = x$. Wykres ten przedstawia funkcję ściśle rosnącą, która wzajemnie jednoznacznie odwzorowuje oś x na oś y , czyli jest odwracalna; można go uważać za wykres funkcji gładkiej, odwrotna do której jest również gładka. Krótko mówiąc — próba odręcznego wykreślenia funkcji $y = x$ doprowadziła do wykreślenia pewnego diffeomorfizmu osi x na oś y .

Spróbujmy wyrazić w ścisłych terminach powyższe intuicje. Zaburzony wykres funkcji $y = x$ jest to wykres funkcji postaci $y = x + s(x)$, gdzie człon $s(x)$ opisuje „zaburzenie”. Odchyłki kierunku ruchu ołówka przy sporządzaniu wykresu są scharakteryzowane wartościami pochodnej $\frac{ds}{dx}(x)$. Przedstawiony wyżej opis sugeruje nam, iż ma miejsce następujący fakt matematyczny:

Funkcja postaci $y = x + s(x)$ dla $s(x)$ o niezbyt dużych wartościach pierwszej pochodnej jest diffeomorfizmem zbioru liczb rzeczywistych na siebie.

Udowodnimy ten fakt.

Z elementarnych twierdzeń rachunku różniczkowego wiemy, że funkcja odwrotna do funkcji wszędzie różniczkowalnej o niezerowych wartościach pochodnej jest również wszędzie różniczkowalna. Cały problem sprowadza się więc do wykazania wzajemnej jednoznaczności

funkcji $y = x + s(x)$ gdy $\left| \frac{ds}{dx}(x) \right|$ jest wszędzie odpowiednio małe. Konkretnie — trzeba wykazać,

że każdej wartości y odpowiada wówczas dokładnie jedno x spełniające równość $x + s(x) = y$. Otóż zauważmy, że równanie $x + s(x) = y$ można napisać w postaci $x = y - s(x)$, a to z kolei można zapisać jako $x = \Phi_y(x)$, gdzie symbol $\Phi_y(x)$ oznacza $y - s(x)$. Widzimy więc, że problem jednoznacznej rozwiązalności równania $x + s(x) = y$ jest równoznaczny z problemem, czy dla każdej wartości y odpowiadające jej odwzorowanie $\Phi_y(\cdot)$ ma dokładnie jeden punkt stały. Stwierdziliśmy, że taka sytuacja ma miejsce dla odwzorowań zwięzających. Zastanówmy się więc, jakie warunki muszą być spełnione, by $\Phi_y(\cdot)$ było zwięzające (w sensie metryki standardowej w $R^1: |x - y|$), czyli aby dla dowolnych $x_1, x_2 \in R^1$ i dla pewnego stałego k ($0 < k < 1$) zachodziło

$$|\Phi_y(x_1) - \Phi_y(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|.$$

Ponieważ $\Phi_y(x) = y - s(x)$, mamy $\Phi_y(x_1) - \Phi_y(x_2) = y - s(x_1) - y + s(x_2) = s(x_2) - s(x_1)$.

Widzimy zatem, że odwzorowanie $\Phi_y(\cdot)$ będzie zwięzające wtedy i tylko wtedy, gdy zaburzenie $s(\cdot)$ dla każdej pary x_1, x_2 spełnia warunek:

$$|s(x_1) - s(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|.$$

Z twierdzenia o wartości średniej w rachunku różniczkowym wiemy, że warunek ten będzie

spełniony, jeżeli pochodna $\frac{ds}{dx}(x)$ w żadnym punkcie nie będzie co do modułu przekraczała ustalonej wartości $k < 1$.

Wykazaliśmy zatem podany wyżej fakt i uściśliliśmy prowizoryczne sformułowanie „przy

niezbyt dużych wartościach pochodnej”: chodzi mianowicie o to, by wartość $\left| \frac{ds}{dx}(x) \right|$ w żadnym punkcie nie przekraczała ustalonej liczby dodatniej $k < 1$.

Bystry Czytelnik powinien w tym miejscu skrzywić się z niesmakiem i zakrzyknąć: \gg A cóż to znowu za rewelacja! Jakieś wyciąganie armaty na wróbla! Przecież jeśli $s(x)$ ma wszędzie pochodną co do modułu ściśle mniejszą od jedności, to funkcja $y = x + s(x)$ będzie wzajemnie jednoznaczna jako funkcja ściśle rosnąca (bo jej pochodna będzie wszędzie dodatnia), i funkcja odwrotna do niej też będzie miała wszędzie pochodną! I po co w to mieszać jakieś odwzorowania zwięzające! \ll Istotnie, gdyby zastosowania zasady Banacha miały się na tym zakończyć, niewiele byłaby ona warta. Ale spójrzmy na przeprowadzone rozumowanie jeszcze raz.

Niech x oznacza teraz nie pojedynczą liczbę, ale cały ich zespół, tzn.

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n).$$

Mówimy, że funkcja $f: R \rightarrow R$ jest diffeomorfizmem (niektórzy piszą: dyfeomorfizmem), jeżeli jest wzajemnie jednoznaczna, różniczkowalna, jej pochodna jest ciągła i stale różna od zera. Pojęciem diffeomorfizmu posługiwaliśmy się w „eseju o pękaniu błony mydlanej” (Delta 5/1976). Tematyka tamtego artykułu ma wiele wspólnego z zagadnieniami opisywanymi obok.

Patrz artykuły M. Kuczmy i L. Górniewicza.

Twierdzenie o wartości średniej mówi, że jeżeli pewna funkcja $s: R \rightarrow R$ jest różniczkowalna, to jej wartości w dwóch punktach $x_1, x_2 \in R$ są związane wzorem

$$s(x_1) - s(x_2) = (x_1 - x_2) \cdot \frac{ds}{dx}(u),$$

gdzie u jest pewnym punktem przedziału (x_1, x_2) .

Twierdzenie o wartości średniej (w odpowiednio zmodyfikowanej postaci) stosuje się również do funkcji wielu zmiennych x_1, x_2, \dots, x_n .

Zasada Banacha (??), czyli co jest nadzwyczajnego w liczbie 6174?

Napiszmy dowolną liczbę czterocyfrową byle nie 1111, 2222, 3333 itd. Z jej cyfr utwórzmy możliwie największą i możliwie najmniejszą liczbę: 9441 i 1449. Wreszcie symbol $|x|$ możemy zdefiniować jako

$$9441 - 1449 = 7992.$$

Zróbmy to samo jeszcze raz:

$$9972 - 2799 = 7173$$

i dalej tak samo 7731 - 1377 = 6354,

$$6543 - 3456 = 3087,$$

$$8730 - 378 = 8352,$$

$$8532 - 2358 = 6174,$$

wreszcie 7641 - 1467 = 6174.

Można powiedzieć: trafiliśmy w punkt stały naszej procedury. Jeżeli wystartujemy z innej liczby, zawsze prędzej czy później osiągniemy 6174.

Poszczególne liczby x_1, x_2, x_3, \dots będziemy nazywać składowymi obiektu x . Mając dwa takie zespoły liczb możemy określić ich dodawanie i odejmowanie

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$x - y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n).$$

$|x_1| + |x_2| + |x_3| + \dots + |x_n|$, gdzie $|x_i|$ jest zwykłym modulem liczby x_i .

Dla dowolnych dwóch zespołów n -liczbowych zachodzi nierówność $|x + y| \leq |x| + |y|$, dzięki czemu funkcja $d(x, y)$ zdefiniowana jako $|x - y|$ jest dobrze określoną metryką (odległością) na zbiorze wszystkich takich zespołów n -liczbowych (który przyjęło się oznaczać R^n).

Wyrażenie $y = x + s(x)$ będziemy interpretować tak: każdemu zespołowi liczb $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ przyporządkowujemy zespół liczb w następujący sposób:

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + s_1(x), x_2 + s_2(x), \dots, x_n + s_n(x))$$

$s(x) = (s_1(x), \dots, s_n(x))$ oznacza tu teraz zespół funkcji rzeczywistych. Otóż przy takiej interpretacji symboli użytych w przedstawionym wyżej rozumowaniu możemy powiedzieć co następuje:

Jeżeli odwzorowanie przeprowadzające przestrzeń R^n w taką samą przestrzeń R^n określone wzorem $y = x$ (nazywa się je odwzorowaniem tożsamościowym) niezbyt mocno zaburzymy dodając do każdej jego i -tej składowej funkcję $s_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ o dostatecznie małych wartościach pochodnych, to otrzymamy odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne: każdemu y będzie odpowiadało tylko jedno x takie, że $y = x + s(x)$. Będzie istniało więc odwzorowanie doń odwrotne. Co więcej, wszystkie składowe tego odwrotnego odwzorowania będą funkcjami różniczkowalnymi względem wszystkich x_1, x_2, \dots, x_n . Odwzorowania o takiej własności nazywają się w analizie diffeomorfizmami — do tej pory słowa tego używaliśmy tylko w odniesieniu do funkcji jednej zmiennej. Wynik naszych rozważań podsumujemy następująco: Odwzorowanie identyfikacyjne przeprowadzające przestrzeń R^n w R^n jest strukturalnie stabilne w tym sensie, że niezbyt duże jego zaburzenia nie są w stanie pozbawić go własności pozostania diffeomorfizmem.

Tak rozumiana stabilność odwzorowania identyfikacyjnego ma ogromne konsekwencje dla analizy, bowiem jedno z podstawowych twierdzeń tej dziedziny, tzn. twierdzenie o lokalnej odwracalności odwzorowań, bardzo prosto sprowadza się do kwestii odwracalności odwzorowania postaci $y = x + s(x)$.

Zainteresowanych odsyłamy do książeczki M. Spivaka \gg *Analiza na rozmaitościach* \ll , PWN, Warszawa 1977, s. 46.

Kącik filatelistyczny (15)



Christiaan Huygens (1629—1695) był holenderskim fizykiem, astronomem i matematykiem. Działał w Hadze i w Paryżu (w latach 1665—1681).

W dziedzinie fizyki badał różne zagadnienia mechaniki, zajmował się pomiarem czasu i skonstruował pierwszy zegar wahadłowy, razem z R. Hooke'm wprowadził stałe punkty termometru (topnienia lodu i wrzenia wody). Przede wszystkim jednak w słynnym „Traktacie o świetle” (*Traité de la lumière*, 1678) podał zarys falowej teorii światła. Sformułował zasadę, zwaną obecnie zasadą Huygensa, w myśl której każdy punkt ośrodka, do którego dochodzi fala, staje się źródłem nowych fal, tzw. fal elementarnych (w ośrodku izotropowym — kulistych), których obwiednia daje nowe położenie czoła fali. Zasada ta wyjaśnia szereg podstawowych zjawisk optycznych (odbicie, załamanie, dyfrakcję) i ma szerokie zastosowanie także przy opisie innych zjawisk falowych (np. powstawanie fali uderzeniowej w ośrodkach ciągłych).

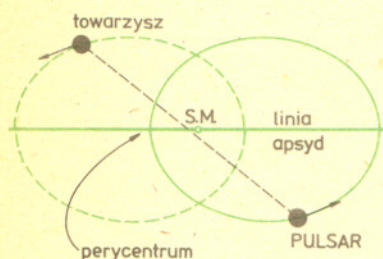
W dziedzinie matematyki Huygens badał własności różnych krzywych, podał sposób obliczania powierzchni brył obrotowych i napisał pierwszy podręcznik rachunku prawdopodobieństwa. Christiaan Huygens prowadził także różnorodne obserwacje astronomiczne za pomocą skonstruowanego przez siebie teleskopu z okularem achromatycznym, a w roku 1680 rozpoczął prace nad konstrukcją „maszyny planetarnej” — prototypu współczesnego planetarium.

Reprodukujemy znaczek z podobizną Ch. Huygensa wydany przez pocztę Holandii w roku 1928.

Jerzy BARTKE

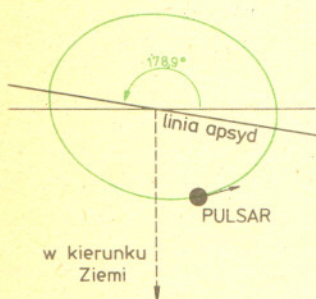
O „podwójnym” pulsarze i efektach relatywistycznych

Mgr Mieczysław PRÓSZYŃSKI

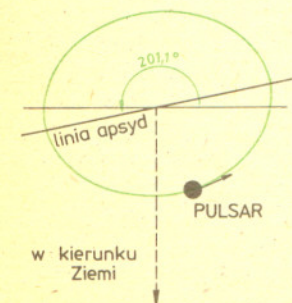


Rys. 1. Układ podwójny. Oba składniki układu krążą wokół środka masy. Perycentrum jest punktem orbity leżącym najbliżej środka masy.

Ustawienie orbity pulsara względem Ziemi w dniu 1.10.1974



Ustawienie orbity pulsara względem Ziemi w dniu 1.01.1980



Rys. 2. Ruch linii apsyd.

1. ODKRYCIE

Historia „podwójnego” pulsara ma swój początek w roku 1974, gdy dwaj astronomowie amerykańscy, R. A. Hulse i J. H. Taylor, rozpoczęli jedno z wielkich poszukiwań pulsarów. W czasie tych łowów, prowadzonych przy pomocy radioteleskopu i komputera, zauważyli, że odstępy między kolejnymi pulsami przychodzącymi z jednego z nowo odkrytych obiektów nie są stałe, lecz zmieniają się cyklicznie, z okresem niecałych ośmiu godzin. Był to pulsar związany w ciasny układ podwójny z inną, niewidoczną gwiazdą. Otrzymał on symbol PSR 1913+16; PSR jest skrótem słowa pulsar, a 1913+16 określa jego położenie na sferze niebieskiej. Oba składniki tego układu podwójnego obiegają się w ciągu 7 godzin i 45 minut we wzajemnej odległości w przybliżeniu równej średnicy Słońca. Odkrycia innych pulsarów z towarzyszami oczekiwano w czasie wszystkich późniejszych „polowań na pulsary”. Ostatnio znaleziono jeszcze jeden taki układ podwójny. Tym razem jedno okrążenie trwa około 1700 dni. Od momentu odkrycia składniki przebiegły ledwie 1/3 pełnego okrążenia.

Ocenia się, że 60% gwiazd w Galaktyce jest związanych w układach wielokrotnych (złożonych z dwóch lub więcej gwiazd). Spośród 323 znanych nam pulsarów tylko dwa mają towarzyszy. Najwyraźniej więc wolą one samotność. Dzieje się tak prawdopodobnie dlatego, że układy podwójne, w których jeden ze składników przeszedł przez fazę czerwonego olbrzyma i wybuchu supernowej stając się gwiazdą neutronową, nie zapewniają na ogół warunków, by owa gwiazda neutronowa mogła stać się pulsarem radiowym. Nawet mała ilość materii uciekająca z atmosfery aktywnego towarzysza i osadzająca się na gwiazdzie neutronowej zanieczyszcza jej okolice na tyle, by proces, w którym powstaje emisja radiowa, nie mógł zachodzić. Wróćmy jednak do PSR 1913+16. Badając odstępy między poszczególnymi pulsami przychodzącymi z PSR 1913+16 można bardzo dokładnie określić kształt orbity, po której krąży on wokół środka masy układu pulsar + towarzysz. Podczas swego ruchu orbitalnego pulsar to przybliża się nieco do Ziemi, to oddala. Odstępy między odbieranymi pulsami są krótsze, gdy pulsar w momencie ich wysłania poruszał się ku nam, a dłuższe, gdy poruszał się od nas. Jest to efekt Dopplera. I choć odległości do pulsara nie umiemy wyznaczyć zbyt dokładnie (wynosi ona około 6,2 kpc czyli $1,9 \times 10^{17}$ km), jej okresowe zmiany mierzy się dzisiaj z dokładnością do 15 km!

Już z pierwszych pomiarów wynikało, że PSR 1913+16 porusza się po elipsie bardzo spłaszczonej o dłuższej osi w przybliżeniu równej średnicy Słońca. Gdyby gwiazda-towarzysz była gwiazdą dużą, to pulsar w trakcie swego ruchu orbitalnego powinien na pewien czas chować się za nią. A ponieważ żadnych pulsów nie brakuje (czyli nie ma zaćmień pulsara), wnioskujemy, iż drugi składnik systemu ma niewielkie rozmiary, czyli jest gwiazdą gęstą. Najprawdopodobniej jest to również gwiazda neutronowa. Dopuszczalnymi kandydatami są jeszcze: gwiazda helowa lub szybko wirujący biały karzeł, początkowo brano również pod uwagę czarną dziurę.

2. LABORATORIUM DO BADANIA EFEKTÓW RELATYWISTYCZNYCH

Jednym z trzech słynnych eksperymentalnych testów ogólnej teorii względności był ruch perihelium Merkurego. Elipsa, po której Merkury krąży wokół Słońca, zmienia powoli orientację swych osi — obraca się. Jej dłuższa oś, zwana linią apsyd, w ciągu każdych stu lat przesuwa się o kąt $1142'' = 0,31722^\circ$. Z tego 1099'' można wyjaśnić wpływem innych planet (korzystając z teorii grawitacji Newtona). Obrót o pozostałe 43'', a dokładniej o $43'' \pm 0,4''$, wytłumaczył dopiero Albert Einstein przy pomocy swojej teorii względności.

Podobny efekt — tyle, że kilkadziesiąt tysięcy razy silniejszy — powinien wystąpić także w wypadku naszego „podwójnego” pulsara. Przychodzące pulsy pozwalają bardzo dokładnie wyznaczyć wszelkie zmiany orbity. Jeśli drugi składnik układu podwójnego jest gwiazdą neutronową, to trudno marzyć o lepszym laboratorium do badania efektów relatywistycznych i testowania teorii grawitacji. Gdyby jednak był to biały karzeł lub gwiazda helowa, a więc ciała o rozmiarach znacznie większych od gwiazdy neutronowej, to efekty relatywistyczne mieszałyby się z dodatkowymi efektami klasycznymi. „Relatywistyczny” obrót elipsy sumowałby się z „klasycznym” obrotem wynikającym z odkształceń powierzchni gwiazdy-towarzysza bądź z przez pole grawitacyjne pulsara (fale pływowe — w wypadku gwiazdy helowej), bądź z przez szybką rotację (elipsoida obrotowa zamiast kuli — w wypadku białego karła).

3. FALE GRAWITACYJNE?

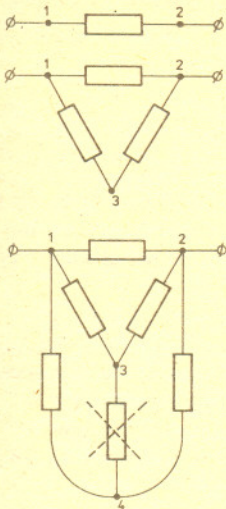
Dzisiaj, po sześciu latach obserwacji prowadzonych w tym niezwykłym laboratorium, prawie wszystko wskazuje na to, iż drugi składnik jest również gwiazdą neutronową. Z a k ł a d a j ą c, że tak rzeczywiście jest, można określić masy obu gwiazd — pulsara i towarzysza. Wynoszą one odpowiednio 1,3 i 1,5 masy Słońca. Byłby to pierwszy bezpośredni pomiar masy gwiazdy neutronowej.

I wreszcie najważniejsze: w ciągu tych pięciu lat stwierdzono, że oprócz przewidywanego obrotu elipsy (pomiar dał tu $4,226^\circ$ na rok), zmieniają się również jej rozmiary. Elipsa się kurczy; pulsar i jego towarzysz powoli spadają na siebie. Oznacza to zmniejszanie się energii mechanicznej układu. Jeśli drugi składnik jest gwiazdą neutronową, to jedynym wytłumaczeniem jest ucieczka energii na zewnątrz, poza układ, w postaci fal grawitacyjnych. Fal tych, o których istnieniu Einstein był przekonany już w roku 1913, na dwa lata przed ostatecznym sformułowaniem ogólnej teorii względności, bez skutku poszukiwano w ciągu ostatnich

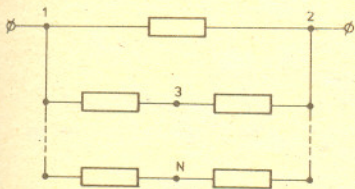


Rozwiązanie zadania F80

Ze względu na symetrię, sposób podłączenia układu do źródła nie gra roli. Rozważmy kolejno $N = 2, 3, 4$.



Z symetrii układu wynika, że potencjały punktów 3 i 4 są równe. Opornik łączący te punkty można więc usunąć nie zmieniając prądów w pozostałych elementach obwodu. Podobna sytuacja ma miejsce przy $N > 4$. Potencjały punktów 3, 4, ..., N są równe i prądy płyną jedynie przez oporniki podłączone bezpośrednio do biegunów źródła. Układ jest więc równoważny następującemu obwodowi



Opór zastępczy takiego połączenia równoległego wynosi

$$\frac{1}{R_N} = \frac{1}{R} + (N-2) \frac{1}{2R} = \frac{N}{2R}$$

czyli

$$R_N = \frac{2R}{N}$$

dwudziestu lat. Ilość energii „zgulbionej” przez nasz układ podwójny zgadza się nieźle z tym, czego w teorii Einsteina oczekuje się dla takiej pary gwiazd i takiej orbity. Inne, konkurencyjne teorie grawitacji, które przewidują w tym wypadku znacznie szybszą ucieczkę energii, zostałyby więc praktycznie obalone, a ogólna teoria względności, najprostsza ze wszystkich teorii grawitacji uważanych do tej pory za zgodne z doświadczeniem, okazałaby się najlepsza.

Tu trzeba dodać, że nie wszyscy relatywiści zgadzają się co do tego, ile dokładnie energii powinno wyciec z takiego układu podwójnego. Rozbieżności te wynikają z różnych przybliżeń czynionych przez nich w trakcie rachunków. Przybliżenia zaś są nieuniknione, bez nich problemu nie da się w ogóle rozwiązać. Gdyby piętnaście lat temu, kiedy nie wiadano jeszcze o istnieniu pulsarów, a gwiazdy neutronowe „istniały tylko na papierze”, ktokolwiek powiedział relatywistom, że dokładność ich rachunków można będzie jeszcze za ich życia sprawdzać w laboratorium... po prostu nie uwierzyliby!

To zaś, czy układ podwójny z PSR 1913+16 jest tym wymarzonym laboratorium, wyjaśni się w ciągu kilku najbliższych lat.



Patrz w niebo

Letnie gwiazdozbiory coraz wcześniej zachodzą, a wysoko na niebie górują konstelacje jesienne — charakterystyczny prostokąt Pegaza i na południe od niego Wodnik (*Aquarius, Aqr*). Jest to najlepszy okres do obserwacji dwóch najpiękniejszych mgławicy planetarnych na naszym niebie — wielkiej mgławicy planetarnej (NGC 7293) w gwiazdozbiornie Wodnika nazywanej często Mgławicą Helikalną i mgławicy planetarnej w Lutni (M 57) nazywanej Mgławicą Pierścieniową. Mgławice te uzyskały nazwę „planetarne”, ponieważ ich wygląd czasami bardzo przypomina tarcze dużych planet. Pierwszym obserwatorom nieba używającym lunet często wydawało się, że odkryli planetę, jednak stwierdziwszy, że obiekty te są „nieruchome” i „gazowe”, nadali im nazwę mgławicy planetarnych.

Mgławica w Wodniku jest uważana za największy i najbliższy obiekt tego typu. Ma rozmiary $12' \times 16'$, czyli zajmuje prawie pół szerokości Księżyca. Pomimo dużych rozmiarów jest ona słaba i ma niewielką jasność powierzchniową. Nie widać jej gołym okiem, jednak już przez lornetkę widoczna jest jako duża mglista plama słabo wyróżniająca się na tle nieba. Druga ze wspomnianych mgławic, M 57, jest niestety widoczna tylko przez większe teleskopy. Wszystkie znane nam podobne obiekty (a jest ich w naszych katalogach ponad 700) są to mniej więcej kuliste otoczki z bardzo rzadkiego gazu, w których centrum znajduje się bardzo gorący, niebieski zdegenerowany karzeł o temperaturze powierzchni często przewyższającej 100000 K. Jest on genetycznie związany z mgławicą, co widać po zbadaniu prędkości gazu. Okazuje się, że wszystkie mgławice są ekspandującymi otoczkami gwiazd centralnych. Prędkości rozchodzenia się wynoszą 10–50 km/s,

średnice od $\frac{1}{20}$ do 1 pc, z czego można wyznaczyć średni wiek mgławicy —

10–20 tysięcy lat. Masa całej wyrzuconej otoczki rozrzucona jest z niewielką dyspersją wokół średniej wartości $0,1 M_{\odot}$.

Mechanizm powstawania mgławicy planetarnych nie został poznany do końca, ale w ogólnym zarysie wyobrażamy go sobie następująco. Gwiazda o masie $1-4 M_{\odot}$, która w trakcie ewolucji wypaliła w jądrze hel, staje się bardzo rozdętym olbrzymem, w którego środku znajduje się skurczone jądro węglowe, a wokół niego w cienkich warstwach pali się hel i wodór. Otoczka takiego czerwonego olbrzyma jest tak rozdęta, że w wyniku pewnych niestabilności może odpląnąć w przestrzeń, a jądro zupełnie tego nie odczuje, stając się po milionach lat stygnącym białym karłem. Lecz zanim to nastąpi, przez tysiąclecia oświetlać będzie ono odpląwającą otoczkę, tworząc piękny efekt mgławicy planetarnej.

mgr Tomasz CHLEBOWSKI

Jak łatwo zauważyć, prostym wnioskiem z twierdzenia Banacha o odwzorowaniach zwężających (p. artykuły J. Geresza, M. E. Kuczmy i L. Górniewiczza) jest *Każde podobieństwo nie będące izometrią ma punkt stały*. Czy łatwo? No bo, że podobieństwo „zmniejszające” musi mieć punkt stały to widać, ale „zwiększające”? W przypadku „zwiększającego” podobieństwa φ zauważamy, że przekształcenie odwrotne φ^{-1} jest podobieństwem „zmniejszającym” i ma wobec tego punkt stały, powiedzmy A . I rachujemy

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(A) &= A, \\ \varphi(\varphi^{-1}(A)) &= \varphi(A), \\ \text{czyli} \quad \varphi(A) &= A,\end{aligned}$$

a więc
czyli
a o to chodziło.

Wynioskować stąd można, że na płaszczyźnie każde podobieństwo nie będące izometrią to podobieństwo spiralne (czyli złożenie jednokładności i obrotu o tym samym środku) lub odbicie dylatacyjne (czyli złożenie jednokładności i symetrii osiowej o osi przechodzącej przez środek jednokładności).

Zauważmy najpierw, że jeżeli podobieństwa φ i φ' tak samo przekształcają (różne) punkty A i B , to albo $\varphi = \varphi'$, albo φ' jest złożeniem φ i symetrii względem prostej $\varphi(A)\varphi(B)$, co widać z rysunku. A wniosek stąd taki, że podobieństwo, o którym wiemy czy zmienia orientację figur, czy nie, jest jednoznacznie określone przez swoje wartości w dwóch punktach. Weźmy pod uwagę podobieństwo nie będące izometrią i jego punkt stały A oraz inny punkt B , który jest przekształcany na B' . Wykonajmy jednokładność o środku A i stosunku

$$\frac{AB'}{AB},$$

która przeprowadzi B na B'' . Teraz, jeśli podobieństwo nie zmienia orientacji, wystarczy złożyć tę jednokładność z obrotem względem A o $\sphericalangle B''AB'$ (podobieństwo spiralne), a jeśli zmienia — z symetrią względem dwusiecznej tego kąta (odbicie dylatacyjne).

A teraz zadanie dla Czytelników.

Znajdowanie punktu stałego w myśl dowodu Banacha jest nieefektywne — jeśli nie trafimy przypadkiem na punkt stały podobieństwa φ , to jest on granicą ciągu punktów

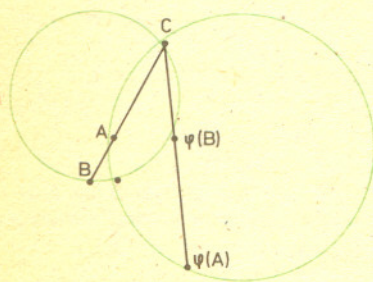
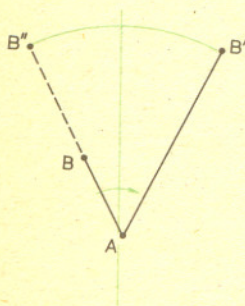
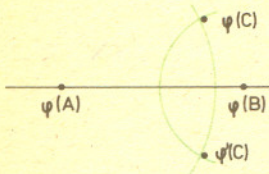
$$P, \varphi(P), \varphi\varphi(P), \varphi\varphi\varphi(P), \dots,$$

gdzie P jest dowolnym punktem.

Mając dane punkty A, B oraz $\varphi(A), \varphi(B)$, gdzie φ jest podobieństwem spiralnym, możemy znaleźć konstrukcyjnie punkt stały tego podobieństwa następującą metodą:

Niech C będzie punktem przecięcia prostych AB i $\varphi(A)\varphi(B)$. Poprowadźmy okręgi przez $A, \varphi(A)$ i C , oraz przez $B, \varphi(B)$ i C . Ich różny od C punkt przecięcia (lub C — gdy są styczne) to właśnie szukany punkt stały (dlaczego?).

No, a jeśli φ jest odbiciem dylatacyjnym? To właśnie jest zapowiedziane zadanie.



Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 235. Pewne pola szachownicy zamalowano tak, że król nie może przejść od lewego do prawego jej brzegu po polach zamalowanych. Udowodnić, że po nie zamalowanych polach może od górnego do dolnego brzegu szachownicy przejść wieża.

Rozwiązanie na str. 5

M 236. Z kwadratu $[0,1] \times [0,1]$ zrobiono szachownicę o n^2 polach. Niech F_1, F_2 będą dowolnymi przekształceniami tego kwadratu w odcinek $[0,1]$. Oznaczamy $F(x) = (F_1(x), F_2(x))$. Wykazać, że istnieją cztery punkty p, q, r, s leżące w jednym polu szachownicy i takie, że $F_1(p) \leq p_1, F_1(q) \geq q_1, F_2(r) \leq r_2$ i $F_2(s) \geq s_2$. Wskazówka: patrz M 235.

Rozwiązanie na str. 3

M 237. Udowodnić twierdzenie Brouwera: Jeżeli F jest przekształceniem ciągłym domkniętego kwadratu w siebie, to istnieje punkt x taki, że $F(x) = x$. Wskazówka: patrz M 236.

Rozwiązanie na str. 1

Redaguje doc. dr Michał ŚWIEŃKI

F 80. Każdy spośród N punktów połączony jest z pozostałymi za pomocą identycznych oporników o oporze R . Znaleźć opór zastępczy takiego układu.

Rozwiązanie na str. 15

(T. Tratkiewicz)





W związku z listem czytelnika AW/S 9035 /IBT - NR 7/80/, który insynuuje nam przeróżne paskudztwa twierdząc, iż ciało kolegialne reprezentuje intelektualnie iloczyn intelektów poszczególnych członków, przytaczamy nie bez przyjemności argument naszego szanownego kolegi z brojlerni w Koźlu Nadodrzańskim.

" $1/10^{10} = 1/10\ 000\ 000\ 000!$ Wasz ostatni korespondent wniósł na pewno swoją ceną $1/1000$ do wielu komitetów. Że też nie można trzymać takich z dala od druku"

PX 1796/y

Magister Pirożyński opowiada

Chciałbym się przedstawić Wam, drodzy Czytelnicy Delty. Nazywam się mgr Pirożyński i mam wyższe wykształcenie. Moje trzy największe pasje to wędkowanie, zestawianie statystyk piłkarskich i metodologia nauk ścisłych. Od czasu do czasu będę dzielił się z Wami swymi refleksjami. Otóż lektura artykułów dr M. E. Kuczmy z nr 6—8/1980 przypomniła mi bezsensowne wysiłki obliczania coraz to dłuższych rozwinięć dziesiętnych π . Ten bezsens trudu pokoleń matematyków pięknie demaskuje autor listu zamieszczonego w angielskiej *Western Morning News* (2.VII.1947). Zachował mi się ten numer, bo ja nigdy nic nie wyrzucam. Cytuję:

Zależność między polem koła a polem opisanego na nim kwadratu jest liniowa i w przybliżeniu da się wyrazić wzorem $S_{koła} = 0,7854 \cdot S_{kwadratu}$. Matematycy od wieków biedzą się nad znajdowaniem dalszych cyfr tego współczynnika proporcjonalności (równego $\frac{\pi}{4}$). Proponuję aby teraz do akcji wkroczyli fizycy i określili pewne standardowe koło (i w przestrzeni — kulę), z których można by otrzymać wszystkie inne. tak jak z linii, cali i stóp są złożone jardy i mile. Przyjęlibyśmy, że pole takiego standardowego koła jest równe, powiedzmy, 0,7854 pola opisanego na nim kwadratu; podobnie jak to robimy przy przeliczaniu naszych miar na panujący na kontynencie system metryczny. Stosunek pola koła do pola kwadratu będzie łatwą do zapamiętania liczbą i problem kwadratury koła sam się rozwiąże.

Sądzę, że teraz, w latach osiemdziesiątych, matematycy już dojrżeli do tego, by postąpić według tej rady sprzed 33 lat. Dla komputera wszystkie liczby są w gruncie rzeczy i tak wymierne. A ja na razie uczę się pierwszych stu cyfr rozwinięcia π :

= 3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679 ...

Nie podobają mi się stwarzane do tego wierszyki w rodzaju kuć i orać. Wolę uniwersalny sposób Richarda Greya, bodajże z 1856 roku. Każdą liczbę można stosunkowo łatwo zapamiętać, jeżeli użyjemy następującego klucza

b	d	t	f	l	s	p	k	n	z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
a	e	i	o	u	au	oi	ei	ou	y

A więc $\pi =$ tafaloudsutuknoint... lub ibobunesutleinotetkos... Oto i wiem i pomnę doskonale! A w roku dzy na pewno wszyscy będziemy musieli posługiwać się takim czy podobnym kodem, tak wiele liczb będzie do zapamiętania.

W związku z cyframi π przypomniło mi się, że niektórzy ludzie są zupełnie głupi. W XIX wieku Shanks wyliczył 724 (pef) cyfry rozwinięcia π , a w 1948 Fergusson aż 810 (eiby). Te dwa obliczenia różniły się od 528 (lek) miejsca. Zauważono, że wśród 700 (pyz) cyfr Shanksa siódemka pojawia się tylko 51 (ub) razy — a „powinna” ok. 70. Obliczenia Fergussona nie wykazywały tej osobliwości. Przez krótki czas matematycy (przynajmniej ci, których to obchodziło) podzielili się na dwa obozy. Jedni uważali, że rację ma Shanks (solidna dziewiętnastowieczna robota) i że nie takie jeszcze wyjątkowe własności ma magiczna siódemka; gdyby to chodziło np. o trójkę, pewnie nie zwróciliby uwagi. Drudzy wierzyli, że w cyfrach rozwinięcia π musi być wszystkiego po równo (co dla mnie jest zupełnie oczywiste i nie rozumiem, po co ten cały spór), no i rzeczywiście rychło okazało się, że Fergusson liczył lepiej, co ja wiedziałem od początku. A w ogóle, to matematycy są czasami jak dzieci.

Widziałem w starym (18.VIII.1948) *Punch*-u taki wierszyk

Science is wonderful
It must amuse a mathematician
Taking up his position
On the sort of weighing machine
We've all seen
To reflect that its internal stress

$$\text{Is } t = \pi \sqrt{\frac{2(P+Q)(l^2+a^2)+Gy^2}{sg(2(P+Q)a+Gs)}}$$

który potem uroczo przerobił Julian Tuwim:

Dlaczego sobie Pani ze mnie kpi,
Cierpieniom moim niech nadejdzie kres,
Siła mojej miłości równa się π
Pomnożone przez ...

Tak, tak, ja też doświadczyłem kpin ze strony ukochanej...

Wracam do mojej π . Zadanie na dzisiaj: nauczyć się od 43 do 51 cyfry.

Wasz
mgr π -żyński



Nie, drogi brojlerze. Odpowiedzialność za coś to anachronizm. Wy będziecie odpowiadać przed nami.