

Ukazał się już drugi tomik serii.

O książkę „Teoria względności” Andrzeja Szymachy i Jana Piotra Lasoty pytajcie we wszystkich księgarniach.

Ilustracje Julian Bohdanowicz, redaktor Maria Boniecka, cena 20 zł, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.

SPIS TREŚCI

NUMERU 8(80)

O roli intuicji i teorii
 w rozwoju biologii —
 Grzegorz Mendel
*prof. dr Władysław
 J. H. Kunicki-Goldfinger* stl. 2

Gwiazda neutronowa jako
 model pulsara
doc. dr Paweł Haensel str. 5

Obliczamy π (III)
dr Marcin E. Kuczma str. 8

Zadania str. 10

Patrz w niebo str. 11

Mała Delta str. 12

Komputerowa analiza
 obrazów wizualnych
mgr inż. Zenon Kulpa str. 14

Klasyczne pole o małym
 zasięgu
doc. dr Michał Świącki str. 16

Rysunki techniczne:
Bogusław Kretkiewicz

W następnym numerze:
O punktach stałych

„Delta”
 matematyczno-fizyczno-astronomiczny
 miesięcznik popularny
 Polskiego Towarzystwa
 Matematycznego, Polskiego
 Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
 Towarzystwa Astronomicznego
 wydawany przy poparciu
 Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny:

- doc. dr Jerzy Bartke
- doc. dr Andrzej Bączyński
- doc. dr Bolesław Gleichgewicht
- prof. dr Kazimierz Goebel
- doc. dr Bolesław Grabowski
- dr Jan Hanasz
- doc. dr Bolesław Iwaszkiewicz
- doc. dr Tadeusz Iwiński
- doc. dr Andrzej Januszajtis
- doc. dr Tadeusz Jarzębowski
- prof. dr Leon Jeśmanowicz
- dr Henryk Kaczorek
- prof. dr Marek Kuczma
- mgr Andrzej Mąkowski
- prof. dr Bohdan Paczyński
- prof. dr Zdzisław Pawlak
- prof. dr Arkadiusz Piekara
- doc. dr Sławomir Ruciński
- prof. dr Konrad Rudnicki
- prof. dr Zbigniew Semadeni
- doc. dr Grzegorz Sitarski

- prof. dr Józef Smak
- prof. dr Jan Stankowski
- doc. dr Kazimierz Stępień
- prof. dr Mieczysław Subotowicz
- doc. dr Stefan Turnau
- prof. dr Jerzy Wdowczyk
- doc. dr Andrzej Woszczyk
- prof. dr Janusz Zakrzewski —
 wiceprzewodniczący
- prof. dr Wojciech Żakowski —
 przewodniczący

Redaguje Kolegium w składzie:

- Bożena Jaworska-Kordos — ilustracje
- dr Marek Kordos — red. nac.
- dr Andrzej Krasieński
- dr Michał Szurek
- dr Krzysztof Prażmowski — red. techn. graf.
- mgr Krystyna Szypcio — sekr. red.
- doc. dr Michał Świącki — z-ca red. nac.

Adres Redakcji

ul. Hoża 69 pok. 151,
 00-681 Warszawa

Zakład Narodowy im.
 Ossolińskich — Wydawnictwo
 Wrocław, Oddział w Warszawie
 Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.
 wyd.; 2,50 ark. druk.;
 papier offsetowy III kl. 80 g. 61 × 86
 Wydrukowano w Drukarni im.
 Rewolucji Październikowej
 Warszawa, ul. Mińska 65
 Nr zam. 674/12/80 O-115

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60—, cena prenumeraty półrocznej zł 30—

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach:

— do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i cały rok następnny
 — do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego.
 Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienie w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”.

Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW, oraz prenumeratorki indywidualni zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTA”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.

Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.

Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Konto PKO I OM W-wa 1531-912

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7 00-068 Warszawa, Poland or with

— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland.

— Earls Court Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain,
 — Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia

Cena 1 egzemplarza zł 5— nr indeksu 35723/35550

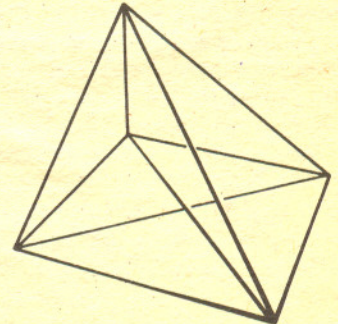
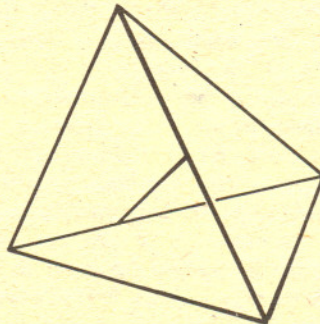


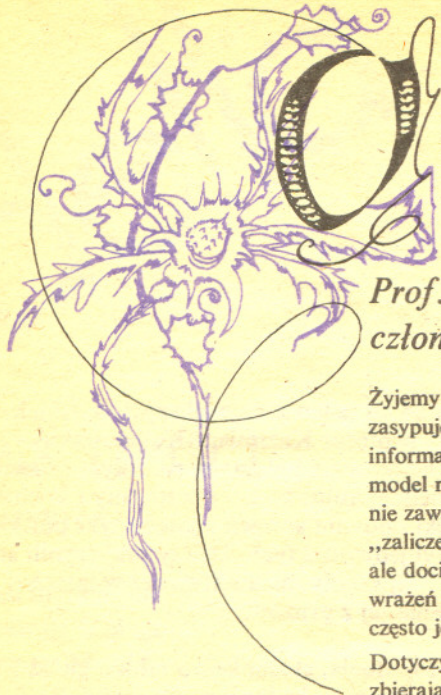
18 czerwca zmarł nagle na serce w wieku 84 lat jeden z największych polskich uczonych tego stulecia, wielki matematyk, profesor Kazimierz Kuratowski. Dzięki swoim znakomitym osiągnięciom naukowym był znany na całym świecie; dzięki mądrości, dobroci, życzliwości i wielkiej kulturze był szanowany i kochany przez współpracowników i uczniów; dzięki oddaniu sprawie matematyki polskiej i niezwykłym talentom organizacyjnym był jednym z tych, którzy przyczynili się najbardziej do wspaniałego rozkwitu polskiej szkoły matematycznej w latach międzywojennych i, później, do podniesienia jej z gruzów.

Głównym przedmiotem jego badań była topologia, stosunkowo młoda gałąź matematyki zajmująca się — mówiąc najogólniej — badaniem własności rozmaitych przestrzeni, od przestrzeni trójwymiarowej, w której żyjemy, przez jej odpowiedniki wyższych wymiarów z nieskończonym włącznie, aż do całkiem abstrakcyjnych przestrzeni, które pojawiają się w rozmaitych rozważaniach matematycznych. Profesor Kuratowski poświęcił topologii blisko 200 prac naukowych i wielką, dwutomową, napisaną po francusku monografię — syntezę *Topologie*; dzieło to, tłumaczone na kilka języków, ulepszane i uzupełniane w kolejnych wydaniach, jest od blisko czterdziestu lat podstawą księgozbioru każdego topologa.

W swoich pracach wprowadzał nowe pojęcia, przedstawiał nowe metody, podawał nowe twierdzenia. W pracy doktorskiej, ogłoszonej w roku 1922, podał słynną aksjomatykę przestrzeni topologicznych przyjmującą jako pojęcie pierwotne operację domknięcia zbioru; rozstrzygnął w ten sposób ostatecznie, co powinny znaczyć słowa **przestrzeń topologiczna**. Był jednym z twórców i propagatorów tzw. metody kategorii, polegającej na dowodzeniu istnienia w danej klasie obiektów matematycznych pewnych obiektów osobliwych (jak np. funkcja ciągła nie mająca w żadnym punkcie pochodnej) przez traktowanie całej klasy jako przestrzeni topologicznej. Nie sposób wyliczyć tutaj nawet najważniejszych z jego znakomych twierdzeń, które dotyczą m.in. budowy continuów, własności miar, hierarchii zbiorów borelowskich oraz istnienia selektorów. Niech jedno, szczególnie piękne i proste, ale bynajmniej nie łatwe, posłuży jako przykład.

Twierdzenie Kuratowskiego: *Jeżeli krzywa lokalnie spójna zawiera jedynie skończenie wiele krzywych zamkniętych (tj. krzywych homeomorficznych z okręgiem) i jest niesplaszczalna (tj. nie można jej przekształcić homeomorficznie na podzbiór płaszczyzny), to wtedy musi ona zawierać podzbiór homeomorficzny z jedną z dwu następujących krzywych niesplaszczalnych:*





roli intuicji i teorii w rozwoju biologii — Grzegorz Mendel

*Prof. dr Władysław J. H. KUNICKI-GOLDFINGER,
członek korespondent PAN*

Żyjemy w dziwnych czasach. Eksplozywnie postępująca rewolucja naukowo-techniczna zasypuje nas nowymi faktami, nowymi osiągnięciami technicznymi, sphywa na nas lawiną informacji — ważnych, mniej ważnych i zupełnie nieważnych. A jednocześnie konsumpcyjny model naszego życia każe nam gromadzić wszystko bez wyboru: nowe wyroby i urządzenia, nie zawsze niezbędne; nowe podróże i wycieczki, których celem nie jest poznanie czegoś, ale „zaliczenie” modnej miejscowości czy kraju; nowe informacje — nie wybierane świadomie, ale docierające do nas bez naszego wyboru, z wszechobecnych „publikatorów”. W natłoku wrażeń i pseudowrażeń, w pośpiechu i gonitwie za uzyskaniem jeszcze czegoś, co nam zresztą często jest całkiem niepotrzebne — gubimy perspektywę, zdolność do refleksji i oceny.

Dotyczy to również naszych zapatrywań na naukę i jej rozwój. Zdaje się nam, że liczni naukowcy zbierają obserwacje, robią eksperymenty, a potem z prostej ich sumacji tworzy się nauka. Czy tak jest naprawdę? Zastanówmy się nad tym, jako przykład biorąc rozwój nauki już dziś rewolucjonizującej nasze życie, nauki przyszłości — genetyki.

Genetyka, formalnie rzecz biorąc, kończy w tym roku 80 lat życia. Ale podstawowa koncepcja tej dyscypliny została sformułowana już przed 114 laty, 34 lata za wcześnie, by mogła zostać zaakceptowana i wchłonięta przez naukę.

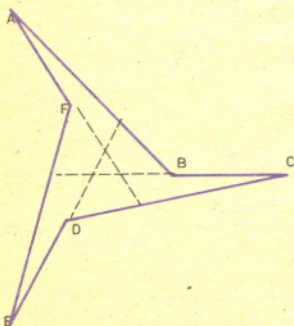
Dziedziczenie cech przez potomstwo znane było człowiekowi od bardzo dawna. Racionalnie wytłumaczyć zjawisko dziedziczenia było jednak trudno. Starożytni Grecy sądzili, że płód powstaje przez koagulację krwi matki przez nasienie ojca. Stąd wnioskowano, że cechy dziedziczy się przez krew. Ślady tego dawnego poglądu odnajdujemy i dziś w takich sformułowaniach, jak „koń czystej krwi angielskiej”, „błękitna krew”, „półkwi Arab” itd. Z czasem zdano sobie sprawę, że to nie krew jest nosicielem cech dziedzicznych. Szukając wyjaśnień, stworzono koncepcję pangenezy. Twórca jej, Maupertuis, w połowie XVIII w. wysunął przypuszczenie, że w rozwijającym się jaju gromadzą się jakieś „cząstki” pochodzące z każdej części organizmu i zapewniające odtworzenie takiego samego organizmu potomnego. Koncepcję tę przyjął m.in. sam Karol Darwin, uważając, że cząstki takie, wytwarzane przez każdą komórkę, wędrują do gamet, warunkując odtwarzanie podobnych struktur i funkcji. Jednocześnie wierzono jednak, że dziedziczą się cechy nabyte, tj. te, które pojawiają się w dorosłym organizmie pod wpływem różnych czynników zewnętrznych. Tak sądził jeden z pierwszych ewolucjonistów, Lamarck, a i Darwin nie był przekonany o niesłuszności takiego zapatrywania. Wiara w dziedziczenie cech nabytych nie osłabiała jednak przekonania, że podstawowe cechy potomstwo dziedziczy po swoich rodzicach. Przekonanie to leżało zresztą u podstaw wszelkich zabiegów hodowlanych, zmierzających do otrzymania lepszych, bardziej przydatnych ras zwierząt hodowlanych i roślin uprawnych. Zabiegi te wykonywał już człowiek w czasie rewolucji neolitycznej, około 8 do 10 tysięcy lat temu, gdy udomowiono najważniejsze zwierzęta hodowlane i zaczęto uprawiać zboża, jarzyny i owoce. Działania to miało jednak charakter czysto empiryczny, nie opierając się na żadnej ogólnej wyjaśniającej koncepcji. Nawet zorganizowana działalność selekcyjna hodowców angielskich w XVIII i początkach XIX w., lub wyhodowanie buraka cukrowego przez francuską firmę Vilmorin-Andrieux et Cie za czasów Napoleona, miały taki empiryczny charakter.

Rewolucyjną koncepcję tworzącą podstawę genetyki, nauki o dziedziczeniu, stworzył w 1866 r. Grzegorz Mendel, choć realnych skutków ta rewolucyjna myśl nie wywarła. Czas jeszcze nie dojrzał do przyjęcia koncepcji wyprzedzającej go o bezmała pół stulecia. Potomstwo nigdy nie jest zupełnie podobne do rodziców. Dostrzega się w nim pewną zmienność. Zmienność tę odczytywano jako ciągłą i ilościową. Wzrost, barwa sierści, skóry, oczu, włosów, ogólna budowa ciała, zmieniały się w potomstwie w sposób ciągły; pomiędzy poszczególnymi osobnikami notowano nie ostre różnice, lecz stopniowe zmiany. Analiza tego rodzaju zbiorczych cech, wykazujących nieprzerwany szereg stanów przejściowych, jest bardzo trudna, a sposób ich dziedziczenia właściwie nie do rozwikłania. Obserwowano wprawdzie też cechy mające właściwości jakościowe. Były to pewne anomalie dziedziczne. Tak więc w połowie XVIII w. Maupertuis, Réamur i Bonnet zauważyli, że anomalia, polegająca na występowaniu dodatkowego, szóstego palca u dłoni, dziedziczy się tylko w pewnych rodzinach. Pod koniec XVIII w. Lort opisał ślepotę na barwy, a wkrótce potem, w 1794 r., fizyk, chemik i biolog,



Rozwiązanie zadania M 233.

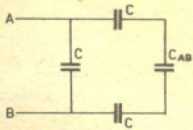
Nie istnieje punkt, z którego widać równocześnie bok BC , DE i AF . Każdą parę boków można widzieć w całości z pewnego punktu wewnątrz $ABCDEF$ (dlaczego)?





Rozwiązanie zadania F 79.

Pojemność przedstawionego na rysunku układu kondensatorów nie ulegnie zmianie, gdy układ ten powiększymy o jeden element. Zatem cały układ jest równoważny następującemu prostemu układowi:



którego pojemność znów wynosi C_{AB} . Korzystając ze wzorów na pojemność układu kondensatorów połączonych równolegle i szeregowo, mamy

$$C_{AB} = C + \frac{1}{\frac{2}{C} + \frac{1}{C_{AB}}}$$

Rozwiązując to równanie otrzymujemy

$$C_{AB} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})C.$$

John Dalton wykazał, że anomalia ta występuje jedynie u mężczyzn, a dziedziczy się tylko za pośrednictwem matki. Anomalię tę dziś nazywamy daltonizmem. W połowie XIX w. ksiądz Jan Dzierżoń, z zamiłowania pszczelarz o dużych osiągnięciach naukowych (był doktorem honoris causa Uniwersytetu w Monachium), opisał wyniki krzyżowania pszczoł rasy włoskiej i niemieckiej. Stwierdził on, że trutnie z takiej krzyżówki nigdy nie są mieszańcami; połowa z nich jest rasy włoskiej, połowa — rasy niemieckiej. Sam Dzierżoń napisał: „jakby naturze trudno było połączyć oba gatunki w jedną rasę”. Były to jednak tylko oderwane obserwacje, nie ujęte w żaden koherentny racjonalny system.

Dla jasności obrazu powiedzmy jak wówczas wyglądał stan wiedzy biologicznej. Wiedziانو już wówczas, w wyniku badań Mirbela, Lamarcka, Dutrochet, Browna, Schultzego i Schwanna, że organizmy zbudowane są z komórek zawierających protoplazmę z umieszczonym w środku jądrem. Ale o tym, że jądro komórkowe związane jest z dziedziczeniem cech nie wiedziانو nic. Dopiero w 1866 r., w roku ogłoszenia przez Mendla pracy przedstawiającej rezultaty co najmniej ośmioletnich badań, Haeckel ogłosił hipotezę, wiążącą jądro ze zjawiskami dziedziczenia.

Była to jednak wówczas tylko teoretyczna hipoteza. Eksperymentalne jej potwierdzenie przyszło znacznie później. Dopiero w 1875 r. Hertwig opisał zapłodnienie jaja przez plemnik, a w tym samym roku polski badacz Strasburger, opisał chromosomy, którym obecną nazwę nadał 13 lat później Waldayer. W 1879 r. Flemming dał opis podziału jądra, dziś nazywanego mitozą, a w 1883 r. van Beneden, badając rozwój jaj (oogenezę) i plemników (spermatogenezę) u glisty ludzkiej, *Ascaris*, wykrył podział redukcyjny jądra, mejozę, w czasie którego powstają gamety o liczbie chromosomów o połowę mniejszej niż w komórkach somatycznych organizmu. W czasach Mendla wiadomości z biochemii komórki były jeszcze skromniejsze.

Wprawdzie białka wykrył Mulder już w 1839 r., ale ich budowę i charakter wielocząsteczkowy rozpoznano dopiero w XX w. Kwasy nukleinowe opisali Miescher i Kossel w latach siedemdziesiątych ubiegłego wieku, ale na poznanie ich struktury i funkcji trzeba było następnych 70 lat.

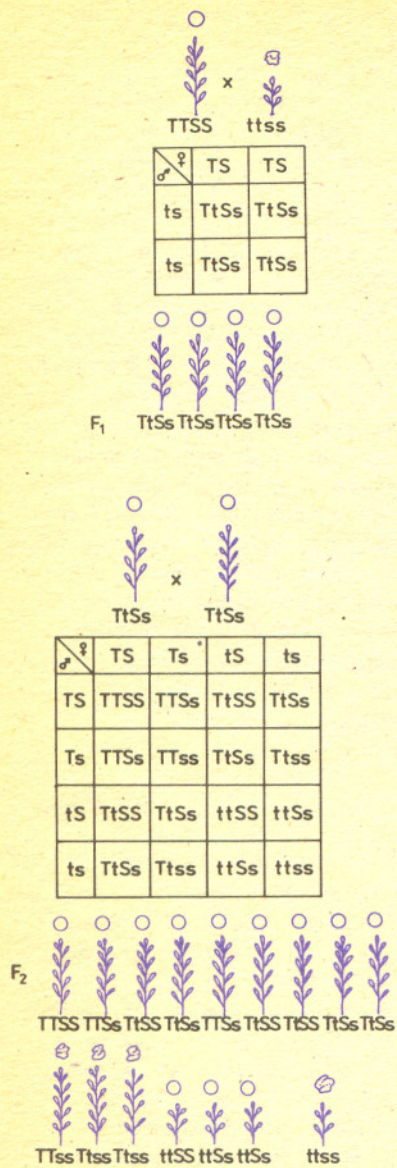
Wiemy już zatem, co Mendel mógł wiedzieć, a czego znać nie mógł, bo wykryte zostało wiele lat po jego pracy. I choć Mendel z ówczesnym stanem biologii był na pewno dobrze zaznajomiony, studiował bowiem przez dwa lata przyrodę i matematykę na Uniwersytecie Wiedeńskim i był w stałym kontakcie z życiem naukowym, znajomość ta była tak znikoma, że dla opracowania jego koncepcji nie mogła być przydatna. Ciągłe tu mówimy o koncepcji Mendla, ale nie wyjaśniliśmy na czym ona polega. Wyjaśnienie to zaczniemy nie od samej koncepcji, a od doświadczeń za pomocą których Mendel ją uzasadniał.

Jako obiekt doświadczalny wybrał on groch. Jest to roślina samopylna. Hodując groch przez wiele lat, otrzymał linie stabilne, odznaczające się jakościowymi, stałymi cechami, jak np. wysokość pędu, powierzchnia ziarna — gładka lub pomarszczona. Następnie chroniąc rośliny przed samozapyleniem i zapylając je sztucznie, krzyżował różne linie. W najprostszym przypadku krzyżówka dotyczyła roślin różniących się tylko jedną cechą. Na przykład krzyżował rośliny wysokie z niskimi. Zbierał następnie nasiona i wysiewał je, otrzymując pokolenie „synowskie” tzw. F_1 . Okazało się, że w pokoleniu tym wszystkie rośliny są wysokie, mimo że pochodzą z krzyżówki wysokich z niskimi. Z kolei krzyżował między sobą osobniki pokolenia F_1 , zbierał nasiona, wysiewał je i otrzymywał następne pokolenie tzw. F_2 . W tym pokoleniu 3/4 roślin było wysokich, a 1/4 niskich. Mendel krzyżówki takie prowadził dalej, aż do 7 i 8 pokolenia, w naszych rozpatrywaniach ograniczymy się jednak tylko do pokoleń F_1 i F_2 . Otrzymany wynik wymagał jakiegoś wyjaśnienia. Wyjaśnienie, zaproponowane przez Mendla, opiera się na pewnych założeniach przyjmowanych przez niego a priori. Po pierwsze założył on, że każda z badanych przezeń jednostkowych, stabilnych, jakościowych cech jest zależna od istnienia w organizmie jakiegoś „czynnika”. Czynnika tego bliżej nie określał, dodatkowo jednak zakładał, że w organizmie rośliny znajdują się zawsze po dwa takie czynniki, natomiast w gametach (w jajach i w pyłku) jedynie po jednym. Czynniki te, określające dane cechy, oznaczał symbolami literowymi. Np. cechę „wysokie rośliny” oznaczmy przez T , a małe — przez t . Rośliny wysokie mają dwa czynniki T , możemy je więc określić symbolem TT , rośliny małe — odpowiednio tt . Gamety roślin dużych będą miały po jednym czynnikiem i zawsze będzie nim T ; podobnie gamety roślin małych będą miały po jednym czynnikiem, ale będzie nim t . Gdy je skrzyżujemy, otrzymamy wynik jak na rys. 1. Wszystkie rośliny pokolenia F_1 będą miały po dwa różne czynniki, T i t . Mendel dodatkowo założył, że pewne czynniki mają właściwość dominacji: T dominuje nad t . Dominacja tłumaczy nam dlaczego wszystkie mieszańce Tt są wysokie. Każdy osobnik pokolenia F_1 wytwarza jednak gamety z różnymi czynnikiemami, albo T albo t . Wynik krzyżówki pokolenia F_1 pokazuje rys. 1. W pokoleniu F_2 otrzymamy 1/4 osobników z czynnikami TT , 1/2 z czynnikami Tt — wszystkie one, wskutek dominacji T nad t , będą wysokie. Tylko 1/4 osobników będzie miała dwa czynniki t i te będą niskie.

Krzyżować można z sobą osobniki różniące się dwiema cechami, np. wysokością i budową ziarna. Mendel krzyżował z sobą osobniki wysokie o gładkich nasionach z osobnikami niskimi o szorstkich nasionach. W pokoleniu F_1 wszystkie osobniki były wysokie z ziarnami gładkimi,



Rys. 1



Rys. 2

ale w pokoleniu F_2 tylko 9/16 było wysokich i z ziarnami gładkimi, 3/16 było wysokich o ziarnach szorstkich, 3/16 niskich o ziarnach gładkich, a jedynie 1/16 niskich o ziarnach szorstkich. Czytelnik, oznaczając symbolem S gładkość ziarna, a symbolem s jego szorstkość, zechce sobie wyjaśnić sam ten typ dziedziczenia przy pomocy rys. 2. Konieczne jest jednak, by przyjął za Mendlem jeszcze jedno dodatkowe założenie — że różne czynniki (np. T i S) oraz cechy przez nie warunkowane rozdzielają się pomiędzy gamety niezależnie. Mendel, rzecz jasna, wykonał o wiele więcej różnych doświadczeń. Jak wspominaliśmy, wybrał on 7 jednostkowych stabilnych cech i przeprowadził liczne krzyżówki między osobnikami różniącymi się tymi cechami. Krzyżowanie kontynuował przez wiele pokoleń, a całość pracy zajęła mu ponad 8 lat. Dla uzmysłowania sobie co Mendel osiągnął wystarczy jednak rozpatrzeć podane tu przykłady. Ale co właściwie Mendel zrobił i co osiągnął? Krzyżowaniem różnych roślin zajmowano się przecież od starożytności, przez całe średniowiecze, aż do czasów Mendla. Wielkość koncepcji Mendla nie kryje się za licznymi doświadczeniami, ale za koncepcją, która leżała u ich podstaw i którą w rezultacie uzasadniały.

Nauka nie polega bowiem na skrzętnym i pracowitym zbieraniu obserwacji i doświadczeń, choć jest ono niezbędnym elementem składowym nauki. Tak jak budowa bazyliki św. Piotra nie polegała na skrzętnym i pracowitym składaniu kamieni, ale na realizacji koncepcji Michała Anioła i Bramante'go, naturalnie poprzez odpowiednie składanie tychże kamieni. Podobnie, nowe istotne osiągnięcia nauki wyrastają z genialnych koncepcji, a realizowane są także poprzez pracowite składanie „kamieni” — obserwacji i wyników doświadczeń.

Koncepcja mogła oczywiście powstać, gdy Mendel zebrał już pewną liczbę obserwacji wstępnych, sugerujących mu jakieś prawidłowości. Koncepcja ta stała się bodźcem i wyznacznikiem kierunku dalszych doświadczeń, które miały ją uzasadnić. Mendel, w odróżnieniu od wszystkich poprzedników, skwantyzował cechy. Sugerować mógł się znanymi już opisami dziedzicznych anomalii, wynikami Dzierżonia, a także obserwowaną przez siebie stabilnością wybranych jednostkowych, jakościowych cech grochu. Pewien wpływ na jego sposób myślenia mógł też mieć rozkwitający wówczas w nauce atomizm. Mendel zrobił jednak coś więcej. Nie interesował się dziedziczeniem cech przez poszczególne osobniki, ale przez całe populacje kolejnych pokoleń, otrzymywanych przez krzyżowanie. Zastosował więc metodę statystyczną. Rachunek statystyczny znany już był przed nim, a nawet dla celów badania dziedziczności próbował wykorzystywać go przyjaciel Darwina, Galton. Ale dopiero połączenie kwantyzacji cech z rachunkiem statystycznym okazało się płodne, a to osiągnął Mendel.

Nie było to jednak wystarczające, aby odpowiednio zaplanować sprawdzające doświadczenia. Konieczne były dodatkowe założenia, nie wynikające z żadnej obserwacji. Założeniem pierwszym Mendla było to, że każdej jednostkowej cesze odpowiada i warunkuje ją odrębny „czynnik”, zachowujący się jak korpuskuła, a występujący w somatycznych komórkach w liczbie podwójnej, zaś w gametach pojedynczo. Przypomnijmy sobie stan wiedzy biologicznej za czasów Mendla, o którym mówiliśmy na wstępie — nie wiadano, że jądro ma coś wspólnego z dziedziczeniem, nie znano przebiegu jego podziału, chromosomów, podziału redukcyjnego, nie istniało pojęcie genu. Biochemia była jeszcze w powijakach. Żadne obserwacje, żadne znane fakty nie sugerowały istnienia materialnych, cząstkowych czynników, tak się zachowujących. Mendel, jak zaznaczyliśmy, założył ponadto, że różne „czynniki” przy powstawaniu gamet dzielą się niezależnie od siebie oraz, że gdy dwa czynniki określają tę samą cechę, np. wysokość rośliny, charakter powierzchni ziarna, to jeden z tych czynników dominuje nad drugim.

Ogólna koncepcja i dodatkowe założenia pozwoliły Mendlowi na wyjaśnienie zasadniczego mechanizmu dziedziczenia. To, że prawidłowości przezeń wykryte nie zawsze się sprawdzają, mogło być mu nie znane, lub, co prawdopodobniejsze, było przezeń pomijane. Odchylenia te dla wyjaśnienia wymagały bowiem nowych wiadomości i założeń, na które było o wiele za wcześnie. Wybór obiektu doświadczalnego, w którym odchylenia tych nie ma, zdaje się za tym przemawiać.

Koncepcje i wyniki Mendla wyprzedziły naukę; dla współczesnych mu były nie do przyjęcia, odmówiono ich publikacji w czasopiśmie naukowych. Ogłosił je w lokalnych wydawnictwach Brna, dzięki czemu w ogóle przetrwały. Wszelkie notatki i materiały pozostawione przez Mendla w klasztorze Augustianów w Brnie następcą jego na stanowisku opata kazał bowiem spalić.

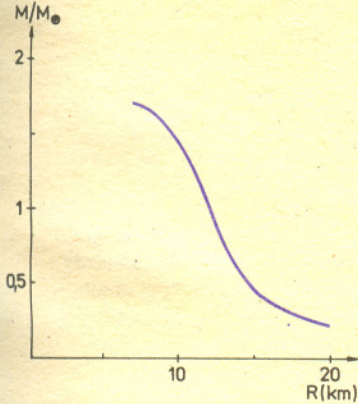
Koncepcje Mendla, prawidłowości przezeń wykryte, wyjaśnienia przez niego zaproponowane odżyły na nowo w r. 1900 w pracach de Vriesa, Corrensa i Tschermacka. I tak pisał o tym Correns: „Myślałem, że znalazłem coś nowego. Potem przekonałem się jednak, że opat Grzegorz Mendel z Brna otrzymał w latach sześćdziesiątych (XIX w.) takie same wyniki w swoich obszernych eksperymentach nad grochem, trwających wiele lat, jak wyniki moje i de Vriesa. Wyjaśnił je też tak samo, o tyle, o ile to było możliwe, w r. 1866”.

Myślę, że prace Mendla są jedną z najlepszych ilustracji roli intuicji i „rau” o jej rolę w postępie nauki.

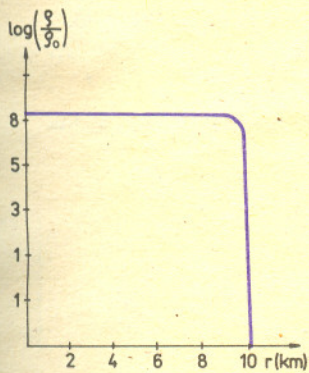


Rozwiązanie zadania M 234.
 Gdyby $p_1 = aq^{n_1}$, $p_2 = aq^{n_2}$, $p_3 = aq^{n_3}$,
 (możemy założyć, że $n_1 < n_2 < n_3$),
 to $\frac{p_2}{p_1} = q^{(n_2 - n_1)}$ i $\frac{p_3}{p_2} = q^{(n_3 - n_2)}$,
 a więc $\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{n_3 - n_2} = \left(\frac{p_3}{p_2}\right)^{n_2 - n_1}$, czyli
 $p_2^{(n_3 - n_1)} = p_2^{(n_3 - n_2)} \cdot p_1^{(n_2 - n_1)} =$
 $= p_3^{n_2 - n_1} \cdot p_1^{n_3 - n_2}$, co jest
 niemożliwe z uwagi na jednoznaczność
 rozkładu na czynniki pierwsze.

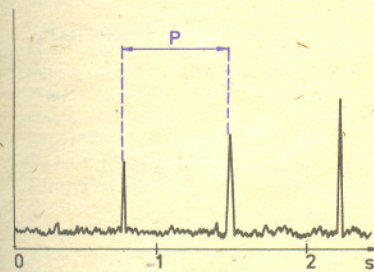
Wartości ważniejszych stałych fizycznych i astronomicznych, znajomość których potrzebna jest do zrozumienia artykułu:
 Stała grawitacyjna $G = 6,672 \cdot 10^{-8} \text{cm}^3 \text{g}^{-1} \text{s}^{-2}$
 Masa Słońca $M_{\odot} = 1,989 \cdot 10^{33} \text{g}$
 Promień Słońca $R_{\odot} = 6,9598 \cdot 10^5 \text{km}$
 Jasność Słońca $L_{\odot} = 3,9 \cdot 10^{33} \text{erg} \cdot \text{s}^{-1}$



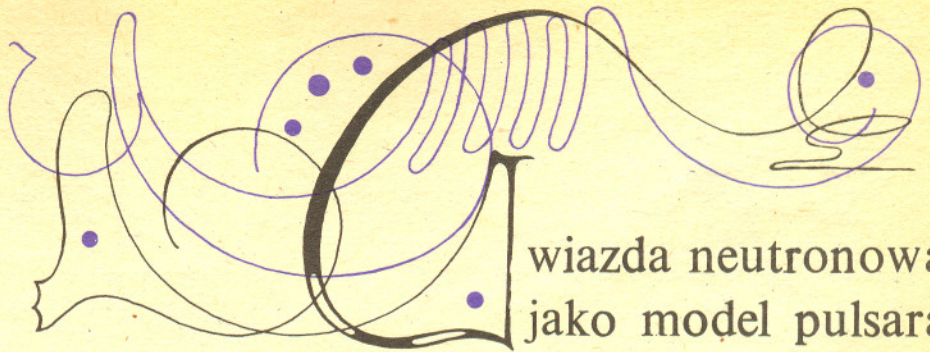
Rys. 1a. Typowy teoretyczny związek między masą i promieniem gwiazdy neutronowej dla mas z przedziału $0,25 M_{\odot} < M < M_{\text{max}}$. M_{max} jest maksymalną masą stabilnej gwiazdy neutronowej.



Rys. 1b. Typowy otrzymany teoretycznie rozkład gęstości ρ dla masywnej gwiazdy neutronowej o masie $M = 1,3 M_{\odot}$ jako funkcji odległości od środka gwiazdy r . Na osi rzędnych odkładany jest logarytm ρ/ρ_0 , gdzie $\rho_0 = 10^6 \text{g/cm}^3$. Widać, że w bardzo dobrym przybliżeniu gwiazdę taką można traktować jako jednorodną kulę o promieniu $R = 10 \text{km}$ i gęstości nieco ponad 10^{15}g/cm^3 .



Rys. 2. Wykres zarejestrowanego promieniowania jednego z pierwszych obserwowanych pulsarów, PSR 0329+54. Na osi rzędnych odkładane jest natężenie rejestrowanego promieniowania, na osi odczytanych — czas w sekundach. Zmierzony okres $P = 0,714 \text{s}$.



wiazda neutronowa jako model pulsara

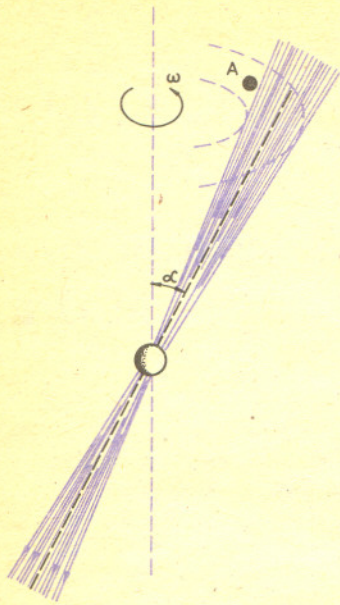
Doc. dr Paweł HAENSEL

Pojęcie gwiazdy neutronowej zostało wprowadzone w latach trzydziestych bieżącego stulecia, bezpośrednio po odkryciu neutronu. Najprostszy model gwiazdy neutronowej to zimna, złożona z neutronów kula o promieniu ok. 10 km i masie rzędu masy Słońca, M_{\odot} . Kula ta znajduje się w równowadze dzięki temu, że potężne siły grawitacyjne są zrównoważone przez siły wynikające z ciśnienia niesłychanie gęstej (gęstość rzędu 10^{14}g/cm^3) materii neutronowej. Z punktu widzenia teorii ewolucji gwiazd, gwiazda neutronowa jest jednym z możliwych końcowych etapów ewolucji dostatecznie masywnej gwiazdy. Powstaje ona po „śmierci energetycznej” gwiazdy. Badania teoretyczne prowadzone w ciągu ostatnich dziesięcioleci i wykorzystujące informacje zebrane przez fizykę jądrową oraz fizykę cząstek elementarnych dają dość skomplikowany obraz struktury gwiazdy neutronowej. Przede wszystkim, składa się ona głównie z neutronów, ale zawiera również pewną domieszkę protonów, elektronów i mionów, zaś w swoich najgęstszych, centralnych partiach zawiera również hiperony. Równowaga kuli supergęstej materii osiągnięta jest dzięki równoważeniu sił grawitacyjnych przez siły wynikające z ciśnienia barionów (neutrony, protony, hiperony). Wynikający z obliczeń teoretyków jakościowy obraz gwiazdy neutronowej — to kula chłodnej materii, składającej się głównie z neutronów, dla której związek między masą i promieniem jest pokazany na rys. 1a. Masywne gwiazdy neutronowe mają masę około $1 \div 2 M_{\odot}$, promień około 10 km, a ich średnia gęstość sięga 10^{15}g/cm^3 . Do roku 1967 gwiazdy neutronowe były tylko teoretyczną ciekawostką. Na początku 1968 roku grupa radioastronomów angielskich kierowana przez A. Hewisha opublikowała pierwsze dane dotyczące nowych, zadziwiających obiektów astronomicznych — pulsarów. Wkrótce po tym epokowym odkryciu astrofizyk amerykański T. Gold zasugerował, że pulsary mogą być szybko obracającymi się i wytwarzającymi bardzo silne pola magnetyczne gwiazdami neutronowymi. Niespodziewanie okazało się, że model zaproponowany przez Golda nie ma konkurentów. Do wniosku, że obracająca się gwiazda neutronowa jest jedynym rozsądnym modelem pulsara, prowadzić może już analiza zakresu częstotliwości impulsów.

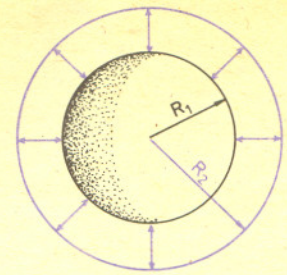
Jedną z podstawowych charakterystyk pulsara jest okres P obserwowanych pulsacji (rys. 2). Obecnie znamy ponad 320 pulsarów; ich okresy P mieszczą się w przedziale $0,033 \text{s} \leq P \leq 4,3 \text{s}$. Promieniowanie emitowane przez pulsary jest promieniowaniem elektromagnetycznym. Jest to przede wszystkim promieniowanie z zakresu fal radiowych (częstotliwość rzędu 100 MHz), chociaż istnieje około 10 pulsarów emitujących również promienie X. Najlepiej zbadany pulsar z mgławicy Kraba, PSR 0531+21 (o najkrótszym obserwowanym okresie $P = 0,033 \text{s}$), wysyła także promieniowanie w widzialnej i podczerwonej części widma, jak również w obszarze rentgenowskim i promieni gamma. Okres P jest niezwykle stałą charakterystyką pulsara; typowe zmiany P polegają na jego wydłużeniu o $\Delta P \approx 10^{-8} P$ na rok.

Mechanizm zegarowy musi być oparty na periodycznym zjawisku fizycznym o częstoci kołowej $\omega = 2\pi/P$. Układ emitujący promieniowanie musi dysponować olbrzymim zapasem energii tak, aby można było pogodzić ogromną stabilność okresu P oraz wielkie strumienie energii emitowane przez pulsary. Szacuje się na przykład, że pulsar PSR 0531+21 z mgławicy Kraba traci w ciągu 1 sekundy ponad 25 000 razy więcej energii niż Słońce!

Typowe zjawiska periodyczne w fizyce to ruch obrotowy oraz ruch drgający. W jaki sposób można pogodzić jednostajny ruch obrotowy gwiazdy z periodycznymi impulsami obserwowanymi na Ziemi? Wystarczy założyć, że obracająca się gwiazda emituje skolimowaną wiązkę promieniowania w ustalonym względem niej kierunku, który nie pokrywa się z kierunkiem osi obrotu (rys. 3c). Po to, aby w ruchu drgającym lub obrotowym zgromadzone były olbrzymie zapasy energii, drgać lub obracać się muszą obiekty o możliwie dużych masach. Muszą to być jednocześnie obiekty dostatecznie małe (a więc bardzo gęste), które przy szybkich obrotach lub drganiach nie uległyby rozerwaniu. Jedynymi kandydatami do zbudowania modelu pulsara są więc najmniejsze i najgęstsze gwiazdy: białe karły (masa M rzędu M_{\odot} , promień R rzędu kilku tysięcy kilometrów, typowa gęstość 10^6g/cm^3), oraz gwiazdy neutronowe (M rzędu M_{\odot} , R rzędu 10 km, typowa gęstość 10^{14}g/cm^3).



Rys. 3a. Ciasny układ podwójny. Gwiazdy obracają się z prędkością kątową ω wokół osi przechodzącej przez środek masy układu.



Rys. 3b. Pulsująca radialnie gwiazda, której promień zmienia się periodycznie w przedziale $R_1 \leq R \leq R_2$.

Rys. 3c. Obracająca się gwiazda neutronowa emituje silnie skolimowaną wiązkę promieniowania w kierunku tworzącym kąt α z osią obrotu (model „latarni morskiej”). Oś symetrii wiązki związana jest z obracającą się gwiazdą. Obserwator znajdujący się w ustalonym punkcie A przestrzeni (do którego może dotrzeć promieniowanie) będzie rejestrował krótkie impulsy rozdzielone okresem $P = 2\pi/\omega$.

Kilka modeli pulsara, które można byłoby zaproponować, przedstawionych jest na rys. 3. Ciasny układ podwójny na rys. 3a, złożony z dwóch białych karłów, białego karła i gwiazdy neutronowej bądź dwóch gwiazd neutronowych nie może wchodzić w rachubę. Przy prędkości kątowej ω rzędu 10 s^{-1} układ taki promieniowałby olbrzymie ilości energii w postaci fal grawitacyjnych, co doprowadziłoby do bardzo szybkiego zwiększania P . W czasie krótszym od kilku dni obie gwiazdy układu podwójnego spadłyby na siebie. Rozważmy następnie model pulsującego białego karła lub gwiazdy neutronowej (rys. 3b). Interesujące są tylko pulsacje, w których gwiazda zachowuje kształt kulisty (drgania radialne). Drganiom naruszającym symetrię sferyczną towarzyszyłaby bowiem emisja fal grawitacyjnych, co prowadziłoby w konsekwencji do silnego tłumienia i zaniku tych drgań. Z drugiej strony, teoretycznie wyliczony okres podstawowych drgań radialnych białych karłów wynosi co najmniej 2 s. W przypadku gwiazd neutronowych typowy okres drgań radialnych jest stanowczo za mały (rzędu 10^{-3} s). Drgania te są zresztą silnie tłumione. Tak więc, jedynym modelem pulsara wydaje się być szybko obracający się biały karzeł lub gwiazda neutronowa (rys. 3c). Rozważmy przypadek białego karła obracającego się z prędkością kątową ω (rys. 4). Po to, aby biały karzeł nie uległ rozerwaniu pod działaniem sił odśrodkowych, siła odśrodkowa F_{od} , która działa na znajdujący się na równiku element o masie Δm , musi być mniejsza od siły ciężarnej F_g . Ponieważ $F_{od} = \Delta m \omega^2 R$, zaś $F_g = \Delta m \frac{MG}{R^2}$, więc wprowadzając średnią gęstość białego karła

$$\bar{\rho} = M / \frac{4}{3} \pi R^3$$

możemy warunek $F_{od} < F_g$ przepisać w postaci

$$\omega < \omega_{max} = \sqrt{G \frac{4\pi}{3} \bar{\rho}}$$

Przy typowej dla białego karła gęstości średniej $\bar{\rho} = 10^6 \text{ g/cm}^3$ otrzymamy $\omega_{max} \approx 0,5 \text{ s}^{-1}$, podczas gdy dla pulsara PSR-0531+21 $\omega = 190 \text{ s}^{-1}$. Tak więc jedynym kandydatem pozostaje obracająca się gwiazda neutronowa, dla której przy $\bar{\rho} = 10^{14} \text{ g/cm}^3$ otrzymalibyśmy $\omega_{max} \approx 5000 \text{ s}^{-1}$. Taka wartość ω_{max} jest blisko 30 razy większa niż ω odpowiadająca najszybciej „pulsującemu” pulsarowi.

Szybko obracająca się gwiazda neutronowa stanowi gigantyczny rezerwuuar energii kinetycznej. Rozważmy najlepiej dotychczas zbadany pulsar PSR 0531+21 z mgławicy Kraba, dla którego znamy wartość pochodnej okresu względem czasu

$$\frac{dP}{dt} = 4,2 \cdot 10^{-13}$$

Obliczmy zmianę (w ciągu 1 s) energii kinetycznej wynikającą z takiego właśnie zwolnienia ruchu obrotowego

$$\frac{d}{dt} E_{ob} = \frac{d}{dt} \frac{I\omega^2}{2} = -\frac{4}{P^3} \pi^2 I \frac{dP}{dt},$$

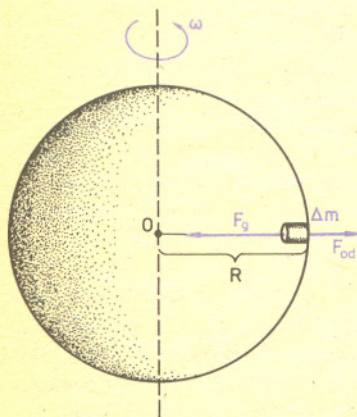
gdzie I jest momentem bezwładności gwiazdy neutronowej. Zakładając, że $M = M_{\odot}$ zaś $R = 10 \text{ km}$, otrzymamy oszacowanie

$$I = \frac{2}{5} MR^2 = 0,8 \cdot 10^{41} \text{ g} \cdot \text{cm}^2,$$

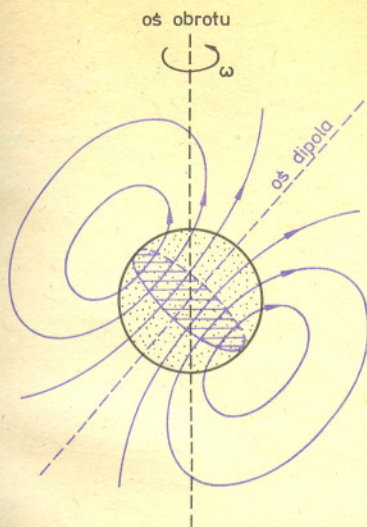
a więc

$$\frac{d}{dt} E_{ob} = -1,2 \cdot 10^{38} \text{ erg/s.}$$

Ilość energii traconej w naszym modelu przez pulsar z mgławicy Kraba w ciągu 1 sekundy jest więc 31 000 razy większa niż energia wypromieniowana w ciągu 1 sekundy przez Słońce!



Rys. 4. Rysunek pomocniczy do wyznaczenia ω_{max} .



Rys. 5. Wirująca gwiazda neutronowa wytwarzająca dipolowe pole magnetyczne, które wiruje wraz z gwiazdą. Oś dipola tworzy pewien kąt z osią obrotu gwiazdy. Silnie skolimowane promieniowanie elektromagnetyczne będzie emitowane w wiązce, której oś symetrii jest osią dipola.

Na co zamienia się ta tracona energia ruchu obrotowego? Obserwowana moc promieniowania emitowanego przez mgławicę Kraba (w obszarze rentgenowskim i optycznym) jest szacowana na 10^{38} erg/s. Obserwacje astronomiczne wykazują poza tym, że mgławica Kraba rozszerza się, przy czym to rozszerzanie się ma charakter ruchu jednostajnie przyspieszonego. Moc potrzebna do podtrzymania takiego jednostajnie przyspieszonego ruchu materii w mgławicy jest szacowana na około 10^{38} erg/s. Do momentu odkrycia pulsara PSR 0531+21 nie było wiadomo, skąd mgławica Kraba czerpie tak olbrzymie ilości energii. Nasze oszacowania prowadzą do wniosku, że może ona promieniować i rozszerzać się „na koszt” pulsara. Powstaje zasadnicze pytanie: w jaki sposób obracająca się gwiazda emituje te olbrzymie ilości energii? W modelu zaproponowanym w 1969 roku przez T. Golda zakłada się, że obracająca się gwiazda neutronowa wytwarza dipolowe pole magnetyczne, przy czym oś dipola nie pokrywa się z osią obrotu (rys. 5).

Oszacujmy rząd wielkości natężenia pola magnetycznego w pobliżu powierzchni gwiazdy neutronowej. W tym celu wykorzystajmy fakt olbrzymiego przewodnictwa elektrycznego materii, z której zbudowana jest gwiazda neutronowa. Teoretyczne rachunki wskazują, że przewodnictwo to jest rzędu 10^{12} razy większe niż przewodnictwo miedzi w temperaturze pokojowej. Dla naszych oszacowań możemy materię w gwieździe neutronowej traktować praktycznie jako nadprzewodnik. Typowa gwiazda neutronowa o promieniu $R = 10$ km powstała najprawdopodobniej w wyniku ewolucji „normalnej” gwiazdy o promieniu rzędu $R_1 \approx 10^6$ km i typowej wartości indukcji pola magnetycznego $B_1 \approx 10$ Gs. Ponieważ materia gwiazdy jest znakomitym przewodnikiem i może być również praktycznie traktowana jako nadprzewodnik, więc w czasie kurczenia się strumień indukcji przez przekrój poprzeczny pokazany na rys. 5 musi być stały (patrz tekst pod rys. 6). Stąd na wartość B charakterystyczną dla gwiazdy neutronowej otrzymujemy oszacowanie

$$B = B_1 \frac{R_1^2}{R^2} \approx 10^{10} B_1 \approx 10^{11} \text{ Gs.}$$

Gwiazdom neutronowym powinny więc towarzyszyć gigantyczne pola magnetyczne. Istnienie szybko rotującego wraz z gwiazdą neutronową pola magnetycznego o olbrzymim natężeniu ma zasadnicze znaczenie dla zrozumienia mechanizmu emisji pulsarów. Energia wypromieniowana w czasie 1 sekundy przez wirujący dipol przedstawiony na rys. 5 będzie dana wzorem

$$L_{\text{dip}} = A\omega^4,$$

gdzie stała A zależy od wartości momentu dipolowego oraz kąta między osią obrotu i osią dipola. Przyrównując L_{dip} do straty energii kinetycznej ruchu obrotowego

$$\frac{d}{dt} E_{\text{ob}} = -A\omega^4$$

otrzymamy związek

$$\frac{d\omega}{dt} = -C\omega^3,$$

gdzie C jest inną stałą. Biorąc pod uwagę, że $\omega = 2\pi/P$, otrzymujemy równanie

$$P \frac{dP}{dt} = D,$$

gdzie D jest pewną stałą. Tak więc

$$\frac{d}{dt} P^2 = 2D,$$

czyli

$$P^2 - P_0^2 = 2Dt,$$

gdzie P_0 jest okresem obrotu w chwili narodzin pulsara ($t = 0$). Zakładając, że obecny okres P jest znacznie dłuższy od P_0 otrzymamy

$$P^2 \approx 2Dt,$$

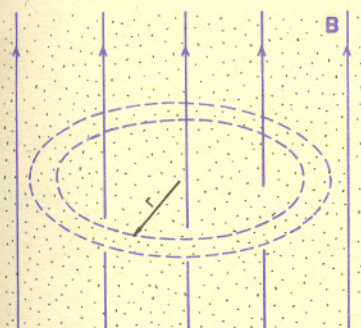
czyli

$$\frac{1}{2} P \frac{dP}{dt} = t,$$

gdzie t jest wiekiem pulsara. Podstawiając wartości $P = 0,033$ s i $dP/dt = 4,3 \cdot 10^{-13}$ odpowiadające pulsarowi PSR 0531+21 z mgławicy Kraba otrzymamy następujące oszacowanie wieku tego pulsara $t \approx 1200$ lat.

Uważa się powszechnie, że pulsar ten powstał w wyniku wybuchu supernowej obserwowanej przez astronomów chińskich w 1054 roku, zaś sama mgławica Kraba — to wyrzucone w wyniku eksplozji zewnętrzne warstwy (otoczka) gwiazdy, która uległa wybuchowi. Tak więc faktyczny wiek tego pulsara wynosi 924 lata, w całkiem niezłej zgodności z naszym prostym oszacowaniem.

Większość znanych pulsarów to obiekty znacznie starsze; wiek jednego z najwcześniej odkrytych pulsarów, PSR 1133+16 ($P = 1,188$ s) szacuje się na $5 \cdot 10^6$ lat i jest to typowy wiek obserwowanych pulsarów.



Rys. 6. Rozważmy ośrodek o bardzo dużym przewodnictwie, z którego wycinamy cienki pierścień o promieniu r . Załóżmy teraz, że ośrodek ten „kurczy się” zwiększając swoją gęstość. Odległości między cząsteczkami tego ośrodka, a więc również i promień naszego pierścienia, maleją. Jak zmieniać się będzie pole magnetyczne w ośrodku? Zmiany strumienia $\Phi_B = \pi r^2 B$ indukowałyby prąd o natężeniu I wywołany przez siłę elektromotoryczną $E = \left| \frac{d\Phi_B}{dt} \right|$ w pierścieniu, $E = RI$.

Jeżeli więc przewodnictwo ośrodka jest tak wysokie, że opór pierścienia jest praktycznie równy zero ($R = 0$), to prąd wywołany przez $E \neq 0$ miałby nieskończenie duże natężenie! Oznaczałoby to, że w pierścieniu wydzielona jest nieskończona moc EI . Jedynym wyjściem z tej sytuacji jest założenie, że $E = 0$, a więc $\Phi_B = \text{const}$, czyli $Br^2 = \text{const}$.



Obliczamy Π (III)

Dr Marcin E. KUCZMA

Opowiedzieliśmy już Czytelnikom co nieco o przedstawianiu różnych funkcji w postaci sum szeregów nieskończonych: potęgowych, trygonometrycznych. Na podobieństwo szeregów — czyli sum nieskończonych — rozważa się też nieskończone iloczyny, określane jako wartości graniczne iloczynów częściowych czyli „coraz dłuższych” iloczynów skończonych. Wiemy, że wielomian stopnia n mający n pierwiastków można przedstawić jako iloczyn czynników liniowych:

$$a(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n).$$

Niektóre funkcje nie będące wielomianami, mające nieskończenie wiele miejsc zerowych, dopuszczają podobne przedstawienie, przy czym liczba czynników jest nieskończona. Taką funkcją jest np. sinus:

$$(1) \quad \sin x = x \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{3\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{3\pi}\right) \dots$$

Nie każdą funkcję da się tak ładnie zapisać. Teoria iloczynów nieskończonych jest skomplikowana, a praktyczne wyznaczanie rozwinięć konkretnych funkcji — trudne.

Uwierzmy tymczasem w prawdziwość wzoru (1) i podstawmy $x = \frac{1}{2}\pi$; oto wynik:

$$1 = \frac{1}{2}\pi \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \left(1 + \frac{1}{6}\right) \dots,$$

czyli, po prostym przekształceniu

$$(2) \quad \frac{1}{2}\pi = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots$$

Jest to wzór Wallisa (John Wallis, 1616—1703).

O ile wyprowadzenie ogólnego wzoru (1) jest trudne, o tyle wykazanie jego szczególnego przypadku — wzoru (2) — jest całkiem łatwe, jeśli się zastosuje inną metodę. Przyjrzyjmy się

funkcjom: $1, \sin x, \sin^2 x, \sin^3 x, \dots$ na przedziale $\left\langle 0, \frac{1}{2}\pi \right\rangle$. Oznaczmy

$$(3) \quad A_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx, \quad B_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Oczywiście

$$(4) \quad A_{n+1} < B_n < A_n.$$

Czytelnicy, znający trochę rachunek całkowy, sprawdzą z łatwością wzór rekurencyjny

$$(5) \quad A_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} A_n, \quad B_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} B_n,$$

$$A_0 = \frac{1}{2}\pi, \quad B_0 = 1.$$

Wstawiając pierwszy z wzorów (5) do (4) i dzieląc stronami przez A_n dostajemy

$$\frac{2n+1}{2n+2} < \frac{B_n}{A_n} < 1,$$

więc stosunek B_n/A_n dąży do jedności. Ale jednocześnie stosunek ten wyraża się równością

$$\frac{B_n}{A_n} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1},$$

łatwą do udowodnienia przez indukcję przy wykorzystaniu wzorów rekurencyjnych (5).

W ten sposób dochodzimy do iloczynu nieskończonego (2) i do wzoru Wallisa.

Szybkość zbieżności tego iloczynu jest — co tu kryć — niewielka. Jedyną praktyczną zaletą jest prostota rachunków; kolejne iloczyny częściowe wyznacza się korzystając z banalnej reguły — mnożenia przez właściwą liczbę parzystą i dzielenia przez odpowiednią nieparzystą. Przy operowaniu szeregami mnożenie przeplata się z dodawaniem. Obliczenie, dajmy na to, setnego przybliżenia iloczynu (2) daje błąd tego samego rzędu, co wzięcie setnej sumy częściowej szeregu $\Sigma 1/n^2$; ale nakład pracy bez porównania mniejszy.

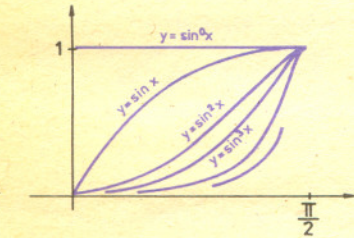
W poprzednim odcinku pokazaliśmy metodę sumowania szeregów $\Sigma 1/n^k$, gdy k jest liczbą parzystą. Przytoczyliśmy wzory:

$$\frac{1}{6}\pi^2 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots,$$

$$\frac{1}{90}\pi^4 = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots,$$

$$\frac{1}{945}\pi^6 = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \dots$$

(6)



Oto jeszcze inne wzory na π :

$$\pi = \frac{10}{3} - 24 \left(\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} - \dots \right)$$

(J. P. Ballantine)

$$\pi = 3,15 - 360 \left(\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} - \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} + \dots \right)$$

(J. P. Ballantine)

$$\frac{17 \cdot \pi^4}{360} = 1 + \left(\frac{1 + \frac{1}{2}}{2} \right)^2 + \left(\frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{3} \right)^2 + \dots$$

(H. F. Sandham)

$$\pi = 2 + \frac{(1!)^2 \cdot 2^2}{3!} + \frac{(2!)^2 \cdot 2^3}{5!} + \frac{(3!)^2 \cdot 2^4}{7!} + \frac{(4!)^2 \cdot 2^5}{9!} + \dots$$

(Jerome C. R. Li)

Leonhardowi Eulerowi zawdzięczamy niezwykle interesujące spostrzeżenie, że suma szeregu takiej postaci jest jednocześnie wartością pewnego iloczynu nieskończonego:

$$(7) \quad 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^k}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3^k}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5^k}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{7^k}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{11^k}} \cdot \dots$$

Cóż to za liczby: 2, 3, 5, 7, 11, ..., które pojawiają się w poszczególnych czynnikach tego iloczynu? Odpowiedź dość nieoczekiwana, ale widoczna: są to kolejne liczby pierwsze. Stąd wielkie znaczenie wzoru (7) w teorii liczb. Lewa jego strona to słynna funkcja „dzeta” Riemanna. W połączeniu z wzorami (6) uzyskujemy teraz nowe wzory na wymierne przybliżenie π^2 , π^4 , π^6 . Ponieważ ciąg liczb pierwszych szybciej dąży do nieskończoności, niż ciąg wszystkich liczb naturalnych, więc iloczyn po prawej stronie wzoru (7) jest szybciej zbieżny, niż szereg po lewej stronie tegoż wzoru. Tyle, że nie znamy wzoru (efektywnego!) na n -tą liczbę pierwszą. Czytelnikom, którzy chcieliby pójść śladami wielkiego Eulera i odtworzyć dowód tożsamości (7) (zachodzącej dla wszystkich wartości $k > 1$, niekoniecznie naturalnych), zdradzimy, że nie jest to wcale trudne; trzeba tylko każdy z czynników po prawej stronie zapisać jako sumę odpowiedniego szeregu geometrycznego:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p^k}} = 1 + \frac{1}{p^k} + \frac{1}{p^{2k}} + \frac{1}{p^{3k}} + \dots$$

Dalszy ciąg rozumowania, wzorem matematyków starogreckich, skwitujemy słówkiem: Patrz! Oczywiście, co kto zobaczy, zależy od tego, jaki ma wzrok... Euler dojrzał lewą stronę wzoru (7).

A teraz porzućmy ten temat i przypomnijmy sobie rozwinięcie funkcji arcus tangens w szereg potęgowy:

$$(8) \quad \operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{7} x^7 + \dots, \quad |x| \leq 1.$$

Od wyprowadzenia tego wzoru rozpoczęliśmy nasze rozważania analityczne przed dwoma miesiącami. Podstawienie $x = 1$ dało nam szereg Leibniza, zbieżny bardzo powoli do sumy $\frac{1}{4} \pi$. Skąd ta „opieszalskość”? Składnikami szeregu (8) są funkcje potęgowe; jedynka jest w ogóle nieczuła na potęgowanie. Punkt $x = 1$ jest końcowym punktem przedziału $-1 \leq x \leq 1$, czyli przedziału tych wartości x , dla których szereg (8) jest zbieżny. Jasne jest, że zbieżność będzie tym szybsza, im bliżej zera wybierzemy punkt x .

Ale wartości funkcji $\operatorname{arctg} x$ dla x wymiernych, $|x| < 1$, nie wyrażają się wymiernie przez π .

Z kłopotem tym można sobie poradzić w bardzo prosty i sprytny sposób. Niech $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$,

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{1}{3}; \text{ zatem } \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}, \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{3}, \text{ skąd}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = 1.$$

Oczywiście $0 < \alpha + \beta < \frac{1}{2} \pi$, a jedyną liczbą w tym przedziale, której tangens równa się 1, jest liczba $\frac{1}{4} \pi$. Otrzymaliśmy więc równość $\alpha + \beta = \frac{1}{4} \pi$, czyli

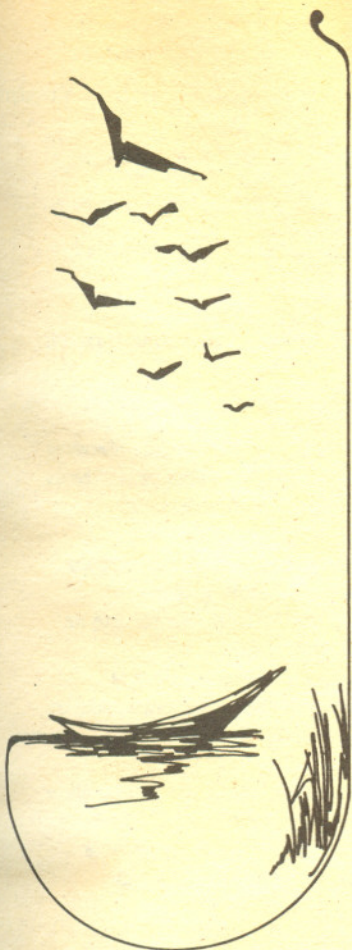
$$(9) \quad \frac{1}{4} \pi = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3}.$$

Podstawiając we wzorze (8) $x = \frac{1}{2}$ oraz $x = \frac{1}{3}$ dostajemy szeregi zbieżne bardzo szybko (wykładniczo). Sumy częściowe tych szeregów dodane do siebie dadzą, z uwagi na równość (9), dobre przybliżenie liczby $\frac{1}{4} \pi$.

Tę metodę można jeszcze usprawnić. Zachodzi na przykład równość

$$\frac{1}{4} \pi = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}.$$

Wyprowadza się ją zupełnie tak samo, jak poprzednią. Autorem tego pomysłu jest matematyk angielski J. Machin (1685—1751).



Rozwiązanie zadania M 232.

Obliczmy na dwa sposoby liczbę punktów mających obie współrzędne naturalne i leżących na hiperboli $xy = N$ i pod nią; licząc kolumnami otrzymamy

$$\left[\frac{N}{1} \right] + \left[\frac{N}{2} \right] + \dots + \left[\frac{N}{N} \right],$$

a licząc wzdłuż hiperboli $xy = n \leq N$ otrzymamy

$$\tau(1) + \tau(2) + \dots + \tau(N).$$



Na hiperboli $xy = n$ leży $\tau(n)$ punktów całkowitych

$$\left[\frac{N}{1} \right] + \left[\frac{N}{2} \right] + \dots + \left[\frac{N}{N} \right]$$



Ci z czytelników naszego kącika, którzy uważnie patrzą w niebo, zauważyli zapewne szybki spadek jasności jednej z gwiazd nad wschodnim horyzontem. Świeci czerwono w gwiazdozbiorze Wieloryba i nosi katalogową nazwę *o Ceti*. W momencie, kiedy ten numer Deltę ukazał się w kioskach, gwiazda ta pewnie jest już ledwo widoczna gołym okiem, chociaż na początku lipca była drugą co do jasności gwiazdą w Wielorybie, a kiedy powstawał ten artykuł, nie widać jej było nawet przez amatorskie lunety. Polski astronom XVII w., Heweliusz, nadał jej nazwę *Mira*, co znaczy po łacinie Cudowna. Jest to pierwsza, najwcześniej odkryta gwiazda okresowo zmienna na niebie. Odkrycia tego dokonał 13 sierpnia 1596 r. holenderski astronom David Fabricus. Wydawało mu się, że jest to tzw. *gwiazda nowa* i kiedy stracił ją z oczu, nie spodziewał się zobaczyć jej jeszcze raz. W 1603 r., kiedy znowu była jasna, Bayer, układając pierwszy nowoczesny katalog gwiazd (ten, z którego pochodzą greckie nazwy literowe), nie zdając sobie sprawy z jej zmienności nazwał ją *o* (omikron), określił jej położenie i jasność. Jego następcy porównując wyniki swoich obserwacji z zapisami Bayera mogli uświadomić sobie charakter zmienności gwiazdy i jej okres. Na podstawie prowadzonych od 1638 r. stałych obserwacji stwierdzono, że okres ten waha się od 304 dni do 355, średnio przyjmując wartość 331^d48 . W minimum jasności *Mira* ma wielkość 9^m3 , po czym w ciągu średnio 112 dni jej jasność wzrasta do wielkości maksymalnej ok. 3^m5 (rys. 1).

Obecnie znamy ponad 4000 gwiazd, które zostały zaklasyfikowane do grupy z etykietką „typu *Mira Ceti*”. Oto ich podstawowe charakterystyki:

- bardzo duża amplituda zmian jasności od 4^m nawet do 10^m ,
- okresy od 60 do 700 dni,
- niedokładna powtarzalność krzywych zmian i
- wszystkie *Miry* są czerwonymi olbrzymami.

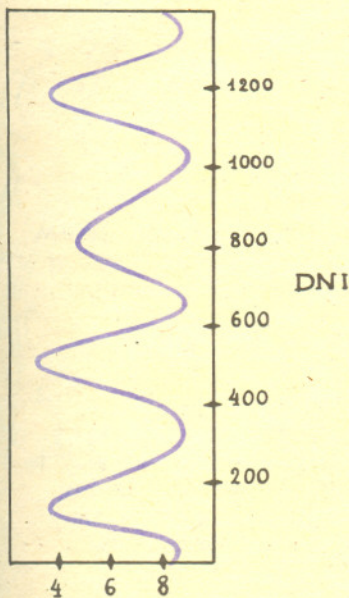
Odległość do *o Ceti* wynosi 220 lat świetlnych (67,5 parseka), z tego można wyznaczyć, że jej jasność wizualna w minimum jest nieco mniejsza niż jasność Słońca, podczas gdy w czasie średniego maksimum jest ok. 250 razy większa. W 1779 r., w czasie najjaśniejszego znanego maksimum, *Mira* była 1100 razy jaśniejsza niż Słońce. Jej średni promień jest 2 razy większy niż średnia odległość Ziemi od Słońca (o 30% większy niż promień orbity Marsa!).

Używając w ostatnim zdaniu słowa „średni”, zdradziliśmy już charakterystyczną cechę *Mir* wyjaśniającą zmienność ich jasności. Rzeczywiście gwiazdy te pulsują — okresowo zmieniają swoje rozmiary. Mechanizm, który napędza te pulsacje, jest taki sam, jak we wszystkich maszynach cieplnych.

Gwiazda zwiększa swe rozmiary liniowe o ok. 20%, natomiast jej jasność całkowita wzrasta 2,5-krotnie zbliżając się do maksimum. Jak więc wytłumaczyć ogromną amplitudę zmian jasności wizualnej? Jest to przykład, jakie znaczenie ma uwzględnianie rozkładu widmowego czułości oka, o czym pisaliśmy w poprzednim odcinku. W minimum *Mira* jest jedną z najzimniejszych gwiazd — temperatura jej atmosfery wynosi 1900 K i ogromna większość energii emitowana jest w podczerwieni; natomiast w maksimum temperatura powierzchni osiąga ok. 2500 K i dlatego obserwujemy ogromny wzrost jasności.

Sama *Mira* jest poza tym o tyle nietypowa, że znajduje się ona na orbicie o promieniu 2 razy większym niż odległość Neptuna od Słońca wokół małej, niebieskiej i masywnej gwiazdy, z powierzchni której wygląda jak czerwona bania 15 razy (w jednostkach kątowych) większa niż nasz Księżyc widziany z Ziemi. Widać więc, że *Miry* to bardzo ciekawe obiekty. Mimo, że obserwujemy je od 350 lat (ogromna większość obserwacji tych gwiazd wykonywana jest przez amatorów), nie umiemy jeszcze dzisiaj zbudować dokładnych modeli numerycznych symulujących zmienność *Mir*. Główną trudnością jest brak modelu „oddziaływania” pulsacji z silną konwekcją, która zachodzi w otoczkach tych gwiazd.

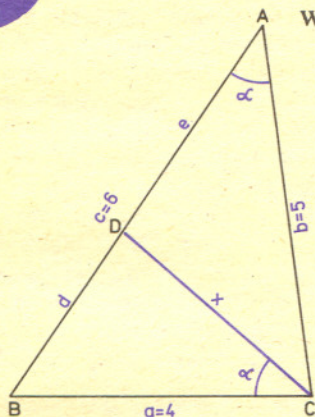
Dla tych natomiast, którzy nie zobaczyli tym razem *Miry Ceti*, mamy pociechę: na początku listopada przypadnie maksimum jasności gwiazdy χ Cygni (okres 407 dni). Osiągnie ona wielkość gwiazdową 2^m5 , po czym nastąpi spadek blasku. Radzimy jednak obserwować wzrost jasności, ze względu na lepsze warunki — gwiazdozbiór Łabędzia późną jesienią zbyt wcześnie zachodzi.



WIELKOŚCI
GWIAZDOWE

delta mała delta

Podwojone kąty w trójkątach



Czy można zbudować trójkąt, którego boki są liczbami całkowitymi, a jeden z kątów jest dwa razy większy od drugiego? Można. Spójrz na trójkąt o bokach 4, 5, 6. Jeśli poprowadzimy w tym trójkącie odcinek CD tak, jak to narysowano, wówczas trójkąty BDC i BCA są podobne (dlaczego?). Zatem

$$\frac{d}{4} = \frac{4}{6}, \quad \text{czyli} \quad d = \frac{8}{3}, \quad \text{a więc} \quad e = 6 - d = \frac{10}{3}.$$

$$\text{Ale} \quad \frac{x}{4} = \frac{5}{6}, \quad \text{więc} \quad x = \frac{10}{3}.$$

Ponieważ $x = e$, więc trójkąt ADC jest równoramienny, kąt ACD równy jest α , czyli kąt ACB jest 2α . Badany trójkąt jest więc taki, o jaki nam chodziło.

Dokładnie tak samo można zbadać, czy w danym trójkącie któryś z kątów jest podwojeniem innego. Boki nie muszą przy tym być całkowite. Sprawdź, który z kątów w trójkątach o bokach 28, 33, 16 i 9, 7, 12 jest podwojeniem innego. A w trójkącie 3, 4, 5?

Takie sprawdzanie jest mało ciekawe. Ciekawsze jest znalezienie własnego przykładu. Popróbuj.

A czy potrafisz odpowiedzieć na pytania:

- 1) Czy istnieje trójkąt prostokątny o żądanej własności?
- 2) A trójkąt równoramienny?
- 3) Czy któryś z boków „dobrego” trójkąta może być równy 1? A 2 lub 3?
- 4) Czy można zbudować „dobry” trójkąt, którego jeden z boków równy jest z góry zadanej liczbie naturalnej (większej od 3)?
- 5) Przeprowadzając rachunek „na literach” (oznaczenia jak wyżej) dowiadujemy się, że w każdym trójkącie spełniającym dany warunek zachodzi związek

$$c^2 - a^2 = a \cdot b.$$

Czy każda trójka liczb naturalnych o tej własności wyznacza „dobry” trójkąt?

Pokombinuj i prześlij nam wyniki swoich przemyśleń. Uwaga! Na kopercie adresowanej do redakcji Delta dopisz Mała Delta. Czekam.



Dziwne ybzcil

113797 jest liczbą pierwszą i pozostanie taką, gdy przeczytamy ją wspak: 797311. Obie jej trzycyfrowe grupy 113 i 797 są liczbami pierwszymi (czytane wspak także). Możemy zamienić 113 na 131 i wszystko będzie tak samo: 131797 i 797131 są pierwsze.

Wbrew pozorom jest dużo liczb o podobnych własnościach.

Równość $651 \cdot 156 = 372 \cdot 273$ nie zmienia się, gdy przeczytać ją wspak $372 \cdot 273 = 651 \cdot 156$.

Między liczbami pierwszymi 4652353 i 4652507 nie ma żadnej innej liczby pierwszej. Jest to największy znany odstęp między kolejnymi liczbami pierwszymi.

Czy przyroda używa narzędzi?

Pytanie na pozór głupie. A jednak...

Jeśli woda spada z progu wodospadu o wysokości kilku metrów na lite podłoże skalne i robi to stale przez 50 000 lat (co w geologii jest takim sobie — niezbyt długim czasem: tyle mniej więcej trwa typowy zimny okres lodowej), to efekt jej działania jest na ogół mizerny — powstanie płytkie, szerokie zagłębienie (chyba, że skała pod wodospadem jest rozpuszczalna w wodzie, na przykład jest to wapień — ale to już inna historia). Jeśli jednak koryto potoku za wodospadem zwęża się, albo wodospad wlewa się w szczelinę lodowca, tak że pod spadającą wodą powstaje wir, i jeśli w ten wir dostaną się kamienie — efekt będzie radykalnie różny. Kręcące się w wirze kamienie atakują skałę tak skutecznie, że w ciągu tego samego czasu potrafią wywiercić studnię kilkumetrowej głębokości. Studnie takie, zwane marmitami, można w Polsce obserwować na przedgórzu Sudetów: w Karpaczu w potoku Łomnica oraz w Szklarskiej Porębie w potoku Kamienna.

Mamy tu więc klasyczny świder wiertniczy, i to skrzyżowany z młynem, bo równocześnie kamienie obtaczają się w bardzo zgrabne kule, które czasem bywają znajdowane na dnie marmitów. Działa to wprawdzie bardzo powoli i w zupełnie niewiadomym celu, ale na tej samej zasadzie, co odpowiednie urządzenia zbudowane przez ludzi.



Lodowiec sunący dnem doliny górskiej żłobi swoje podłoże ze znaczną siłą, lecz powoduje to szybkie pogłębianie doliny tylko wtedy, gdy wyścielają ją luźne materiały: głązy, żwiry, pokruszona skała. Litą skałę lód lodowca poleruje i ściera w stosunkowo powolnym tempie. Lód ten niesie jednak w sobie liczne głązy, które spadły na powierzchnię lodowca z otaczających go ścian skalnych, a następnie dostały się w pobliże dna, np. wskutek wpadnięcia do szczeliny. Głaz, wmarznięty od spodu w płynący lód, potrafi rozorać litą skałę rowem głębokim na kilkanaście centymetrów. Rowki takie, na skałach wygładzonych lodowcem, można obserwować w Tatrach, np. na progu Czarnego Stawu nad Morskim Okiem albo w Dolinie za Mnichem.

Rozorać, napisaliśmy — i nieprzypadkowo. Czy nie jest to coś w rodzaju pługu? Albo łopaty, czy, wraz z lodowcem, spychacza? Powolny wprawdzie, ale za to jakże skuteczny! 400 tysięcy lat wystarczy, aby wyorać dolinę głęboką na 200—300 m, i to w twardych skałach.

Co może zrobić ze skałą wiatr? Proszę nie pukać się w czoło. Jeśli wiatr niesie wyłącznie czyste powietrze — to rzeczywiście nic. Jeśli jednak skała stoi wśród piaszczystej pustyni, wiatr stale niesie piasek, zaś od czasu do czasu, gdy jest silny, podrywa na niewielką wysokość nawet drobne kamyczki. Wydaje się Wam może, że uderzenia ziarnkami piasku są delikatną pieszczotą nie dającą trwałych skutków? Jeśli ktoś z Was miał okazję znaleźć się na plaży lub na dużym polu suchego śniegu podczas silnego wiatru, mógł się przekonać, że dotkliwie kłujące w skórę uderzenia ziarenek piasku lub kryształków śniegu wcale nie są pieszczotliwe. Jeśli więc uderzana nimi powierzchnia nie jest zbyt twarda, np. jest to piaskowiec wystawiony pod wiatr brzegami warstw, wystarczy kilkaset tysięcy lat takiej działalności, aby skała została „nadgryziona” w widoczny sposób. Jeśli samotna skała piaskowcowa jest zbudowana tak, że jej górna część składa się z warstw twardych (które są na ogół grube), zaś dolna — z miękkich (na ogół cieńszych), to dolna część skały, mniej odporna i silniej szlifowana piaskiem, będzie niszczona szybciej niż górna — i powstanie coś w rodzaju grzyba z korzeniem i kapeluszem. Pięknie wykształcone grzyby skalne można zobaczyć w paśmie Gór Stołowych w Sudetach, niedaleko Kudowy. Co prawda powstały one dzięki kruszeniu skały przez zamarzającą i rozmarzającą wodę, ale dobrze naśladują kształt „prawdziwych” grzybów skalnych.

Tu narzuca się porównanie niesionego przez wiatr piasku ze szlachetniejszym narzędziem — dłutem rzeźbiarskim. Uprawiana przez przyrodę twórczość należy niewątpliwie do sztuki abstrakcyjnej, lecz tu przynajmniej rozumiemy proces tworzenia.

Istnieje teoria (nie, bynajmniej nie fizyczna ani nie biologiczna), która mówi, że właśnie dzięki używaniu narzędzi drogi ewolucyjne gatunku ludzkiego i gatunku małp człekokształtnych rozeszły się. Innymi słowy, używanie narzędzi ukształtowało istotę myślącą. Czy to znaczy, że przyroda jest istotą myślącą? Zostawmy odpowiedź na to pytanie zwolennikom wspomnianej teorii, do których autor nie należy. Niech męczą się sami.

My spróbujmy odpowiedzieć na inne pytanie. Przecież woda spadająca wodospadem ma taką samą energię niezależnie od tego, czy w wirze są kamienie, czy nie. Dlaczego więc skutki są w obu przypadkach tak jaskrawo różne? Lodowiec bez kamieni ma ten sam praktycznie ciężar i porusza się z taką samą prędkością, jak lodowiec z wmarzniętymi głązami. Dlaczego głązy szorują o tyle skuteczniej? Energia wiatru nie zależy od tego, czy niesie on piasek, czy nie. Czemu więc sam wiatr nie potrafi rzeźbić?

Myszę, że będziecie umieli sami to wyjaśnić, jeśli wykonacie dwa proste eksperymenty:

1. Spróbujcie oskrobać marchewkę... gołą dłonią. Śmieszny pomysł co? Jedynym wynikiem tej próby będzie ubrudzona ręka i nieco oczyszczona marchew. A teraz zróbcie to samo nożem, choćby i tępą stroną. Wcale nie jest potrzebna większa siła. Co Wam to mówi? A co by było, gdyby trzonek noża był tak samo płaski jak ostrze i gdybyście przy skrobaniu musieli naciskać na jego ostrą krawędź?

2. Spróbujcie wbić gwóźdź w deskę gołą ręką... Brr, lepiej nie próbujcie. A teraz młotkiem — z tą samą siłą. Co Wam to mówi?

A może znacie więcej przykładów narzędzi, których używa przyroda?

Małą Deltę opracowali: Andrzej KRASIŃSKI i Jan WASZKIEWICZ

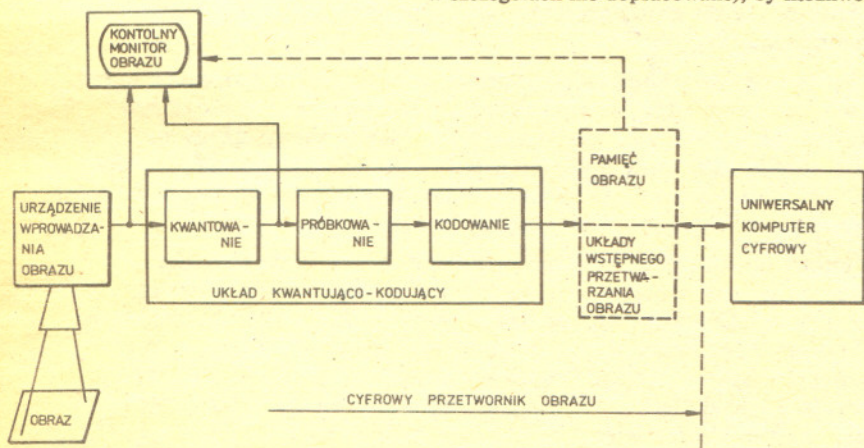
Komputerowa analiza obrazów wizualnych

Mgr inż. Zenon KULPA

W ostatnich latach zaobserwować można burzliwy rozwój jednego z nowszych zastosowań komputerów, mało znanego niespecjalistom, a mianowicie komputerowego przetwarzania i analizy obrazów wizualnych. Jak wiadomo, zmysł wzroku dostarcza człowiekowi około 1000 razy więcej informacji niż następny w kolejności słuch. Ludzie są wzrokowcami — znakomita większość użytecznej dla nich informacji, zarówno pochodzącej z otoczenia, jak i służącej do komunikacji międzyludzkiej, ma postać obrazów optycznych. Nic więc dziwnego, że wraz z postępami mechanizacji i automatyzacji różnych czynności wykonywanych dotychczas bezpośrednio przez człowieka, nadszedł również czas automatyzacji przetwarzania obrazów. Pierwsze prace w tym kierunku pojawiły się jednak dopiero na początku lat sześćdziesiątych. Co prawda, fotografia znana jest już prawie półtora stulecia, a fotokomórka od prawie wieku, lecz nie dają one jeszcze możliwości automatycznego wydzielania z obrazu użytecznej informacji zakodowanej w kształtach i rozmieszczeniu różnorodnych obiektów na obrazie. A uzyskanie takich możliwości pozwala dopiero mówić o automatyzacji analizy obrazów. Tak więc dopiero łączne pojawienie się techniki telewizyjnej (pozwalającej zamieniać obrazy na postać elektroniczną), komputerów elektronicznych (pozwalających przetwarzać informację zakodowaną w postaci elektronicznej) i techniki układów scalonych (umożliwiających budowę dostatecznie złożonych i szybko działających układów przetwarzających i liczących) daje nadzieję uporania się z problemem automatyzacji analizy rzeczywistych obrazów. Ilość informacji, którą trzeba przetworzyć, jest bardzo duża: w średniej klasy komputerowych systemach analizy obrazów jest ona rzędu miliona bitów na 1 obraz, a wzrok przetwarza jej znacznie więcej — w siatkówce oka jest ok. 120 mln pojedynczych fotoreceptorów!

Urządzenia automatycznej analizy obrazów można z grubsza podzielić na wyspecjalizowane i uniwersalne. Te pierwsze przystosowane są do analizy pewnej określonej klasy obrazów i wydzielania z obrazów tej klasy ściśle określonych informacji w sztywny sposób. Przykładem mogą tu być tzw. czytniki pisma, pozwalające wczytywać (np. do komputera lub maszyny drukarskiej) dane w postaci tekstu drukowanego lub maszynopisu. Urządzenie rozpoznaje w tym celu litery alfabetu i inne znaki drukarskie według sztywnego algorytmu, zrealizowanego w konstrukcji urządzenia. Większość urządzeń tego typu jest przy tym przystosowana do czytania tylko jednego ściśle określonego kroju czcionki (lub w najlepszym wypadku kilku krojów). Urządzenia uniwersalne zawierają komputer uniwersalny, za pomocą którego realizowane być mogą teoretycznie dowolne algorytmy przetwarzania, analizy i rozpoznawania obrazów. Urządzenia uniwersalne stosowane są zatem głównie do celów badawczych (opracowywanie nowych metod analizy obrazów) oraz do analizy złożonych obrazów, dla których algorytmy przetwarzania są zbyt skomplikowane (i często w szczegółach nie dopracowane), by możliwe było ich efektywne zrealizowanie sprzętowe.

Urządzenie uniwersalne ma strukturę ogólną podaną na rys. 1: składa się z komputera i z tzw. cyfrowego przetwornika obrazu, służącego do wprowadzania informacji obrazowej do tego komputera. Układ wprowadzania obrazu zamienia obraz optyczny na zbiór reprezentujących go wartości elektrycznych. Układy takie działają na różnych zasadach: może to być np. pojedyncza fotokomórka przesuwana mechanicznie nad obrazem (np. fotografią), układ z plamką świetlną generowaną i przesuwaną na ekranie lampy oscyloskopowej, a następnie rzutowaną na obraz, lub, najczęściej stosowana, kamera telewizyjna. Następnie układ kwantująco-kodujący rozбивa ciągły rozkład jasności (reprezentowanych elektrycznie) na skończoną liczbę oddzielnych punktów (jest to tzw. próbkowanie), jasność każdego z nich



Rys. 1. Ogólna struktura uniwersalnego systemu przetwarzania i analizy obrazów.

Kącik czytelniczy

W jednej z niedawno wydanych popularnych książek o matematyce zauważyliśmy następujące zdanie (cytujemy z pamięci): „ułamek 355/113 wynalazł w V w. p.n.e. chiński uczoney Tsu Chu'ung Chih.” Domyślamy się, że 1/2 wynależli

Babilończycy, 22/7 Archimedes, a $\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$

Newton. Kto z naszych Czytelników wie, kto wynalazł ułamek $\frac{65478958}{79654002}$? A może

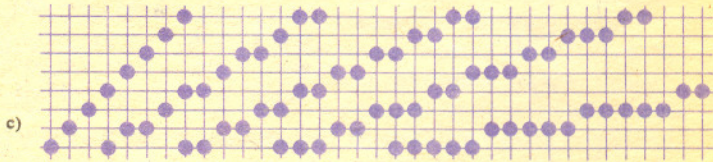
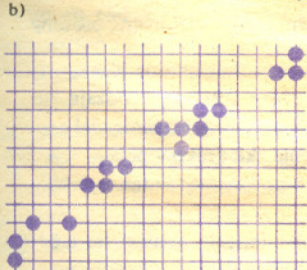
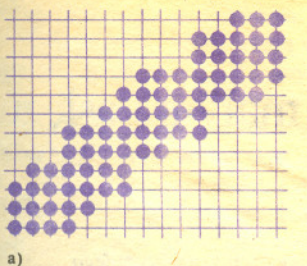
on jeszcze czeka na swojego wynalazcę?

przybliży jednym ze skończonej liczby rozróżnianych poziomów jasności (kwantowanie) i zamienia na wartość cyfrową (kodowanie). W niektórych systemach tak zakodowany obraz zapamiętywany jest, przed przesłaniem do komputera, w dodatkowej pamięci obrazu (skąd porcjami odczytuje go komputer w trakcie przetwarzania) lub też część prostszych operacji przetwarzania wykonywanych jest poza komputerem, przez specjalne układy cyfrowe (np. zliczanie liczby jasnych punktów lub spójnych składowych obrazu). Dla orientacji podajemy, że rozmiary pojedynczego obrazu wahają się w systemach uniwersalnych od 64 × 64 punkty do 1024 × 1024 punkty, a liczba rozróżnianych poziomów jasności punktu od 2 (obraz czarno-biały, bez pośrednich szarości) do 256. Odpowiada to ilości informacji na 1 obraz od 4096 do ponad 8 mln bitów. Średnie parametry: 512 × 512 punktów, 16 poziomów jasności (ponad 1 mln bitów na obraz).

Konieczność zamiany obrazu rzeczywistego (będącego ciągłym rozkładem jasności na dwuwymiarowej płaszczyźnie) na skończoną ilość liczb możliwą do przetworzenia komputerowego, pociąga za sobą konieczność próbkowania obrazu (rys. 1), tj. odczytu

wartości jasności w skończonej liczbie dyskretnych punktów (tzw. punktów rastru). Uzyskany obraz dyskretny może być dopiero przetwarzany w komputerze — podobne przekształcenie obrazu zachodzi zresztą także w siatkówce oka. W rezultacie jednak pojęcia geometryczne używane do opisu obrazów (np. pojęcie linii) tracą swój euklidesowy, ciągły sens. Rzeczywiste linie na obrazie mają skończoną grubość i dokładność rysunku — na skutek dyskretniej struktury rastru i nieuniknionych zakłóceń i błędów próbkowania — zmieniają się w szerokie obszary punktów o poszarpanych brzegach (rys. 2a) lub też ulegają poprzerzywaniu na niespójne fragmenty (rys. 2b). Nawet jednak teoretycznie „idealne” dyskretne linie proste nie są wcale proste (rys. 2c). Rodzi to mnóstwo problemów przy tworzeniu algorytmów analizy obrazów. Linie rzeczywiste próbuje się sprowadzić do „idealnych” — grube „pocienia” się, usuwając z nich punkty brzegowe, a linie poszarpane łączy się uzupełniając przerwy.

Rys. 2. Przykłady rzeczywistych linii dyskretnych: „grubej” (a) i poszarpanej (b) oraz przykłady linii prostych „idealnych” o różnych nachyleniach.



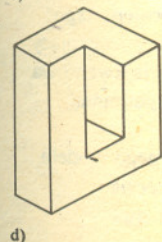
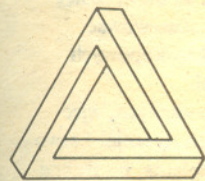
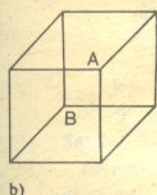
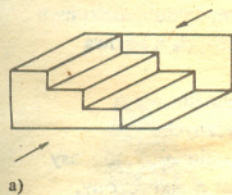
Algorytmy realizujące te operacje nie są jednak proste — muszą bowiem omijać wiele „pułapek” występujących na rzeczywistych obrazach. Gruba linia o poszarpanych brzegach powoduje przy pocienianiu powstanie „gałązek” odchodzących w przypadkowych miejscach od pocienionej linii, a ostre załamania biegu linii są przy pocienianiu zaokrąglane. Może to spowodować np. zamianę litery B na cyfrę 8 (w czytniku pisma). Linie poszarpane przebiegające blisko siebie mogą zostać z kolei przy uzupełnianiu połączone ze sobą („na krzyż”), powodując np. zinterpretowanie biegnących w jednym kierunku warstw komórek na preparacie mikroskopowym tkanki jako siatki nieregularnych linii o kierunku prostopadłym do rzeczywistego... Jeszcze większe trudności sprawia wydzielenie krawędzi obiektów na obrazie, zwłaszcza gdy są one rozmyte w różnym stopniu w różnych miejscach. Niestety, w rzeczywistych obrazach rzadko mamy do czynienia z idealnymi krawędziami.

Nawet jednak po uzyskaniu linii „cienkich”, idealnych, kłopoty nie znikają. Pojawiają się problemy interpretacji — jaki układ punktów rastru należy uznać za dyskretną wersję linii prostej, a jaki nie; jak obliczyć krzywiznę takiej „schodkowej” krzywej (rys. 2c), a jak długość jej odcinka lub obwód nieregularnej figury. Jest oczywiste, że obliczając długość punktowej linii jako sumę odległości kolejnych punktów rastru wzdłuż linii popełniamy spory błąd i to różny dla różnych nachyleń linii (rys. 2c). Badaniem i rozwiązywaniem tego typu problemów zajmuje się dział analizy obrazów zwany teorią obrazów dyskretnych lub geometrią dyskretną. Okazuje się, że ma on wiele punktów stykowych z teorią liczb — abstrakcyjnym działem matematyki, pozornie zupełnie odległym od jakichkolwiek zastosowań praktycznych.

Innego rodzaju problemy wynikają w zastosowaniach automatycznej analizy obrazów do określania trójwymiarowej struktury „ogłądanej” sytuacji, np. w próbach konstrukcji „sztucznego oka” sterującego pracą robotów (przemysłowych lub tzw. „inteligentnych”). Centralnym zagadnieniem jest wtedy określanie trójwymiarowego kształtu obiektu przestrzennego na podstawie jego płaskiego wizerunku (rzutu) na płaszczyźnie obrazu. Jest to zadanie istotnie niejednoznaczne — teoretycznie istnieje nieskończenie wiele różnych obiektów przestrzennych o tym samym dwuwymiarowym rzucie. Oko człowieka (wraz z ośrodkiem wzroku w mózgu) interpretuje płaski wizerunek (obraz, rysunek, fotografię) w większości przypadków jednoznacznie, odtwarzając przestrzenną strukturę przedstawionych obiektów i nie zauważając wręcz innych (choć teoretycznie równie uprawnionych) możliwości. Dążenie do naśladowania tych możliwości oka jest przedmiotem omawianego działu analizy obrazów.

Dużą pomocą w wyjaśnieniu zasad trójwymiarowej interpretacji obrazów płaskich okazało m.in. znalezienie obrazów sprawiających także oku zasadnicze trudności w określeniu jednoznacznej interpretacji. Są to tzw. figury niejednoznaczne (rys. 3a, b) i figury niemożliwe (rys. 3c, d). Dla figur niejednoznacznych oko znajduje dwie różne, choć równouprawnione interpretacje (dla schodów Schrödera jest to „widok z góry” lub „widok z dołu”; dla sześcienu Neckera albo punkt A jest w głębi, a B bliżej, albo na odwrót). Dla figur niemożliwych oko nie jest w stanie znaleźć żadnej poprawnej interpretacji. Choć czynią one wrażenie pewnych trójwymiarowych obiektów, to ich przestrzenna struktura, sugerowana przez oko, jest niemożliwa do fizycznej realizacji. Figury te mają jednak realizowalną interpretację przestrzenną, lecz niełatwo jest ją znaleźć naszemu oku, tak doskonałemu w innych sytuacjach. Analiza tego typu figur pozwala określić wiele heurystycznych mechanizmów tworzenia w mózgu hipotez percepcyjnych przy trójwymiarowej interpretacji obrazów. Umożliwia to ich modelowanie w komputerowych systemach rozpoznawania obrazów.

Oprócz problemów zasygnalizowanych powyżej, automatyzacja analizy obrazów wymaga rozwiązania mnóstwa innych problemów różnej natury: technicznych (np. konstrukcja dokładnych i niezawodnych układów wprowadzania), informatycznych (np. zagadnienia efektywnego programowania algorytmów przetwarzania), metodologicznych, matematycznych i wielu innych.



Rys. 3. Przykłady figur niejednoznacznych: schody Schrödera (a) i sześcian Neckera (b) oraz figur niemożliwych (c, d).



klasyczne pole o małym zasięgu

Doc. dr Michał ŚWIECKI

Największym osiągnięciem fizyki XIX wieku było wprowadzenie koncepcji pola fizycznego i stworzenie polowej teorii oddziaływań pomiędzy ładunkami elektrycznymi. Ukoronowaniem tego kierunku stała się ogólna teoria względności Einsteina — połowa teorii oddziaływań grawitacyjnych. Najistotniejszym zaś wkładem naszego stulecia jest rozdrobnienie zarówno materii, jak i pola na możliwie najmniejsze kawałki — cząstki elementarne. I tak materię

podzielono na cząstki o spinie (wewnętrznym momencie pędu) równym $\frac{1}{2}$: elektrony, protony

i neutrony, których zachowanie ograniczono zakazem Pauliego nie zezwalającym na to, by w określonym stanie fizycznym znajdowała się więcej niż jedna cząstka każdego rodzaju. W ten sposób udało się wyjaśnić podstawową własność materii, a mianowicie istnienie ciał stałych i cieczy o określonej objętości. Zakaz Pauliego nie obowiązuje składników pola. Dlatego właśnie ogromna liczba fotonów może zajmować ten sam stan tworząc w ten sposób makroskopowe klasyczne pole elektromagnetyczne.

Cząstek elementarnych odkryto znacznie więcej od tych wyżej wymienionych. Znalaziono też nowe rodzaje oddziaływań międzycząsteczkowych — oddziaływania silne wraz z odpowiednim polem składającym się z mezonów oraz oddziaływania słabe z polem, którego składniki nie zostały dotychczas odkryte. Z cząstek tworzących pola silne i słabe można również budować pola klasyczne. Zupełnie tak samo, jak z fotonów pole elektromagnetyczne. Wystarczy zgromadzić około 10^{20} odpowiednich cząstek w każdym mniej więcej miejscu zajmowanym przez pole. Niestety, operacja taka jest praktycznie niewykonalna. Cząstki przenoszące oddziaływania silne i słabe są obdarzone dość dużą masą i wyprodukowanie tak dużej ich ilości napotyka nieprzezwyciężalne trudności energetyczne. Powszechna obecność w naszym życiu codziennym klasycznych pól elektromagnetycznych wiąże się w teorii cząstek elementarnych z zerową wartością masy odpowiedniego składnika — fotonu.

Wartość masy nośnika oddziaływania wiąże się z jeszcze jedną cechą uniemożliwiającą makroskopowe obserwacje pól silnych i słabych. Zasięg działania pól statycznych wytworzonych przez nieruchome ładunki jest mianowicie odwrotnie proporcjonalny do masy odpowiedniej cząstki — składnika pola. Dla fotonu o masie zero zasięg jest nieskończony, czemu odpowiada potencjał pola elektrostatycznego

$$V \sim \frac{1}{r}$$

i siła odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości (prawo Coulomba). W prawie powszechnego ciążenia siła jest również odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości i ewentualny nośnik oddziaływań grawitacyjnych powinien mieć także zerową masę. Jednak oddziaływania grawitacyjne wciąż pozostają ostatnim bastionem teorii pola nie zdobytym przez teorię cząstek elementarnych. Zupełnie odwrotnie przedstawia się sprawa w przypadku oddziaływań silnych i słabych. Masy cząstek przenoszących te oddziaływania są duże, zasięg działania pól statycznych bardzo mały i efektów tego działania nie można zaobserwować w warunkach makroskopowych. Dlatego skazani jesteśmy tu na badanie mikroskopowych oddziaływań zachodzących pomiędzy pojedynczymi cząstkami elementarnymi.

Ponieważ fizyka cząstek elementarnych oparta jest w całości na teoriach kwantowych, więc i występujące w niej obiekty mają własności kwantowe, określone jedynie statystycznie. Łatwo zrozumieć, że budowanie zwartej teorii fizycznej w oparciu o wysoce niekompletne, bo trudne do uzyskania, dane oraz słabo przemawiające do wyobraźni koncepcje statystyczne nie jest wcale proste. Dlatego też postęp na tym polu jest bardzo powolny. Sądzę, że z postępu tego korzyść mogą odnieść nie tylko liczni zwolennicy kwantowej teorii pola, ale także wymierający powoli miłośnicy klasycznej teorii pola fizycznego. Jest tak dlatego, że każda teoria kwantowa ma swój odpowiednik klasyczny. Wystarczy wyobrazić sobie 10^{20} cząstek w jednym mniej więcej miejscu...

Tak więc każda nowa zwarta teoria pola może być przedstawiona w postaci pewnego modelu pola klasycznego. Ostatnio powstała właśnie tego typu teoria. Jest nią jednolita teoria oddziaływań elektromagnetycznych i słabych S. Glashowa, A. Salama i S. Weinberga (Nobel 79). Zgodnie z głoszonym tu poglądem, tę wybitnie kwantową teorię należy przedstawić w dość zrozumiałym intuicyjnie języku pojęć klasycznej teorii pola. Należy jednak przy tym pamiętać, że wszystkie własności oddziaływań słabych zostały wymyślone i odkryte jedynie w trudno dostępnym świecie cząstek elementarnych.

Gdy byłem rybą

W dalekim kraju, za siedmioma rzekami, poważni ludzie wierzą w ściśle prawa rozwoju kultury. Na przykład wierzą w to, że wszystkie religie świata rozwijają się dokładnie według tego samego schematu. Wobec tego, powiadają, wystarczy pojechać do Australii, gdzie rodowici mieszkańcy żyją na poziomie epoki kamiennej, przestudiować ich religię — i już będziemy wiedzieli, jak wyglądała nasza religia przed 10 000 lat. Ponieważ ów daleki kraj jest bardzo postępowy i religia w nim spontanicznie wyginęła, używa się niektórych dawnych świątyń jako muzeów historii religii i ateizmu, które prezentują opisany tu śmiały pogląd.

Metoda ta nasunęła mi pewien pomysł. Podobno zarodek ludzki powtarza w swoim rozwoju kolejne etapy ewolucji najwyżej rozwiniętych organizmów żywych. Byłem więc kiedyś rybą. To dopiero musiało być fajne... Postanowiłem napisać pamiętnik z tego okresu swojego życia. Tylko, psiakość, nic nie pamiętam. Na razie więc kupiłem sobie rybę, wpuściłem do wanny i pilnie obserwuję. Może coś mi się skojarzy.



Zajmiemy się na razie jedynie fragmentem teorii, a mianowicie konstrukcją pola klasycznego o bardzo małym zasięgu działania. Zaczniemy od własności pola elektromagnetycznego. Źródłem tego pola są poruszające się lub nieruchome ładunki elektryczne. Niech więc w pewnym układzie odniesienia spoczywa idealny punktowy ładunek elektryczny. Ładunek ten jest źródłem wypełniającego całą przestrzeń pola elektrostatycznego, którego natężenie (siła działająca na jednostkowy ładunek umieszczony w polu) jest odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości od ładunku oraz wprost proporcjonalne do wartości samego ładunku. Natężenie to jest skierowane od lub do ładunku źródłowego, co zapewnia sferyczną symetrię układu. Ponieważ pole powierzchni kuli o środku w punkcie zajęтым przez ładunek rośnie tak jak kwadrat odległości tej powierzchni od ładunku, zaś natężenie pola maleje jak odwrotność tego kwadratu, więc całkowity strumień pola (iloczyn powierzchni oraz normalnej do niej składowej natężenia) przez każdą taką powierzchnię jest taki sam i równa się ładunkowi umieszczonemu w środku. Można pokazać, że własność ta, zwana prawem Gaussa, nie zależy od kształtu rozpatrywanej powierzchni zamkniętej ani od punktowości samego ładunku (patrz Delta 8/79). W szczególności strumień przez powierzchnię otaczającą obszar elektrycznie obojętny wynosi zero. Ta szczególna własność pola elektrycznego umożliwia posługiwanie się pojęciem linii pola, które zaczynają się na ładunkach elektrycznych. Im większy ładunek, tym większa gęstość linii z niego wybiegających. Oczywiście, każda linia pola musi po wejściu do zamkniętej powierzchni gdzie ją opuścić. Chyba, że napotka w środku jakiś nie zajęty w całości przez inne linie ładunek. Wszystko to jest całkowicie równoważne sformułowanemu poprzednio prawu Gaussa. Jak widzieliśmy prawo to jest spełnione jedynie dla sił odwrotnie proporcjonalnych do kwadratu odległości.

Prawo Gaussa jest spełnione również dla pola magnetycznego. Tyle tylko, że nie są znane pojedyncze źródła tego pola — ładunki magnetyczne — i strumień pola magnetycznego przez każdą powierzchnię zamkniętą wynosi zero. Każdy magnes czy też mała pętla z prądem zachowuje się jak układ dwóch nierozdzielnych ładunków przeciwnego znaku, z których każdy działa siłą odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości. Tak więc linie sił pola magnetycznego nie rozbiegają się do nieskończoności. Zaczynają się one na jednym, a kończą na drugim biegunie magnesu. W przypadku przewodnika z prądem obiegają go po zamkniętych pętlach.

Prawo Coulomba i wynikające z niego prawo Gaussa przypisują ładunkowi elektrycznemu rolę decydującą o sile oddziaływań elektrycznych, im większy bowiem ładunek tym większe natężenie wytworzonego pola. Nie mniej istotna jest inna własność ładunku, a mianowicie prawo jego zachowania spełnione ściśle w każdym elemencie przestrzeni. Głosi ono, że z każdego obszaru tyle samo ładunku wypływa przez powierzchnię, ile go ginie w środku. Prawo to łatwo zrozumieć poprzez koncepcję niezniszczalnych, kończących się tylko na ładunkach, linii pola. Jeżeli bowiem w pewnym obszarze zginął ładunek elektryczny, to albo musiał on wypłynąć wraz ze swymi liniami pola na zewnątrz, albo odpowiednie linie musiały urwać się nagle. W tym drugim przypadku musiałyby one zniknąć równocześnie w całej przestrzeni, a to jest niemożliwe ze względu na ograniczoną prędkość rozchodzenia się wszelkiej informacji w przyrodzie.

Zupełnie podobnie możemy zacząć opisywać inne rodzaje oddziaływań. Wydaje się, że wystarczy wprowadzić nowe rodzaje ładunków i nowe pola wraz z ich liniami. Niestety, napotykamy od razu poważne trudności. Można bowiem wprowadzić pojęcie słabego ładunku materii będącego źródłem pola słabego, ale, jak wiemy, pole to ma wyjątkowo krótki zasięg działania.

Doświadczalnie zasięg oddziaływań słabych jest mniejszy od 10^{-17} cm. W związku z tym siła oddziaływania słabego nie maleje tak, jak odwrotność kwadratu odległości, ale znacznie szybciej. Strumień pola słabego przez powierzchnię sferyczną nie jest więc stały, ale szybko maleje wraz ze wzrostem promienia sfery. Prawo Gaussa przestaje być słuszne i pojęcie linii pola traci sens. Można wprawdzie wprowadzić linie zaczynające się na ładunkach słabych, ale musiałyby one urywać się w próżni w miarę oddalania się od ładunku.

Łatwo stąd widać, że ładunek słaby nie może być wielkością zachowaną.

Sytuacja jest jednak tylko pozornie beznadziejna. Wreszcie ładunek słaby nie musi spełniać prawa zachowania i problem polega na tym, jak wprowadzić linie pola, które kończąc się tylko na ładunkach równocześnie urywałyby się w próżni. Już widać co trzeba zrobić. Należy po prostu wprowadzić ładunki słabe do samej próżni. Taka próżnia wypełniona ładunkiem o odpowiedniej gęstości wychwytuje linie pola słabego, w wyniku czego zasięg oddziaływania staje się dowolnie mały. Samej próżni ani jej ładunku nie możemy oczywiście obserwować. Przynajmniej na razie. W konsekwencji ładunek słaby jest wielkością zachowaną jedynie teoretycznie, nie umiemy bowiem na przykład zaobserwować ruchów ładunków próżniowych.

W ten sposób załatwiliśmy kwestię małego zasięgu oddziaływań słabych. Wprowadzenie takiego zasięgu odpowiada w teorii kwantowej nadaniu cząstkom pola nie równej zeru masy. Cząstki te poprzez oddziaływanie z próżnią uzyskują masę. Podobnie masy wszystkich innych cząstek mogą pochodzić z odpowiedniego ich oddziaływania z wprowadzoną „materiałną” próżnią. Tak się zresztą obecnie uważa.