

SPIS TREŚCI

NUMERU 7(79)

Historia i fizyka gwiazd neutronowych <i>Doc. dr Paweł Haensel</i>	str. 1
Obliczamy π <i>Dr Marcin E. Kuczma</i>	str. 4
Zadania	str. 6
Mała Delta	str. 7
Matematyka nowym rodzajem sportu?!	str. 10
Kącik filatelistyczny	str. 14
Niektóre problemy towarzyszące rozwojowi energetyki <i>Dr inż. Jacek Jędrzejowski</i>	str. 15
Patrz w niebo	str. 17

Rysunki techniczne:

Bogusław Kretkiewicz

W następnym numerze:

Nagrody Nobla

„Delta”
 matematyczno-fizyczno-astronomiczny
 miesięcznik popularny
 Polskiego Towarzystwa
 Matematycznego, Polskiego
 Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
 Towarzystwa Astronomicznego
 wydawany przy poparciu
 Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny:
 doc. dr Jerzy Bartke
 doc. dr Andrzej Bączyński
 doc. dr Bolesław Gleichgewicht
 prof. dr Kazimierz Goebel
 doc. dr Bolesław Grabowski
 dr Jan Hanasz
 doc. dr Bolesław Iwazskiewicz
 doc. dr Tadeusz Iwiński
 doc. dr Andrzej Januszajtis
 doc. dr Tadeusz Jarzębowski
 prof. dr Leon Jeśmanowicz
 dr Henryk Kaczorek
 prof. dr Marek Kuczma
 mgr Andrzej Mąkowski
 prof. dr Bohdan Paczyński
 prof. dr Zdzisław Pawlak
 prof. dr Arkadiusz Piekara
 doc. dr Sławomir Ruciński
 prof. dr Konrad Rudnicki
 prof. dr Zbigniew Semadeni
 doc. dr Grzegorz Sitarski

prof. dr Józef Smak
 prof. dr Jan Stankowski
 doc. dr Kazimierz Stępień
 prof. dr Mieczysław Subotowicz
 doc. dr Stefan Turnau
 prof. dr Jerzy Wdowczyk
 doc. dr Andrzej Woszczyk
 prof. dr Janusz Zakrzewski —
 wiceprzewodniczący
 prof. dr Wojciech Żakowski —
 przewodniczący

Redaguje Kolegium w składzie:
 mgr Tomasz Chlebowski
 Bożena Jaworska-Kordos — ilustracje
 dr Marek Kordos — red. nac.
 dr Andrzej Krasieński
 dr Michał Szurek
 dr Krzysztof Prażmowski — red. techn. graf.
 mgr Krystyna Szypcio — sekr. red.
 doc. dr Michał Świącki — z-ca red. nac.

Adres Redakcji
 ul. Hoża 69 pok. 151,
 00-681 Warszawa
 Zakład Narodowy im.
 Ossolińskich — Wydawnictwo
 Wrocław, Oddział w Warszawie
 Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.
 wyd.; 2,50 ark. druk.;
 papier offsetowy III kl. 80 g. 61×86
 Wydrukowano w Drukarni im.
 Rewolucji Październikowej
 Warszawa, ul. Mińska 65.
 Nr zam. 562/12/80 O-115

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60, — cena prenumeraty półrocznej zł 30, —

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach:

— do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i cały rok następny

— do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego.

Jednostki gospodarki społecznej instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienia w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”.

Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW, oraz prenumeratę indywidualni zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej

Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTA”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.

Sprzedż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.

Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Konto PKO I OM W-wa 1531-912

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7 00-068 Warszawa, Poland or with

— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland.

— Earls Court Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain,

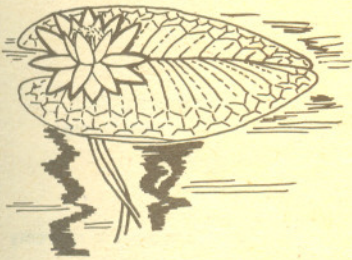
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia

Cena 1 egzemplarza zł 5, — nr indeksu 35723/35550

Historia i fizyka gwiazd neutronowych

Doc. dr Paweł HAENSEL

Wartości liczbowe stałych fizycznych użytych w artykule
 Prędkość światła $c = 2,998 \cdot 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$
 Stała grawitacyjna $G = 6,672 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$
 Masa Słońca $M_{\odot} = 1,989 \cdot 10^{33} \text{ g}$
 Promień Słońca $R_{\odot} = 6,28 \cdot 10^{10} \text{ cm}$
 Promień Ziemi $R_Z = 6,36 \cdot 10^8 \text{ cm}$
 Dogodną jednostką energii stosowaną przy opisie własności gazu neutronowego jest $1 \text{ MeV} = 1,602 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 1,602 \cdot 10^{-6} \text{ erg}$
 Stała Boltzmanna $k_B = 8,617 \cdot 10^{-11} \text{ MeV K}^{-1}$
 Stała Plancka podzielona przez 2π , $\hbar = 6,82 \cdot 10^{-22} \text{ MeV s}$
 Masa neutronu $m = 1,675 \cdot 10^{-24} \text{ g}$
 Energia spoczynkowa neutronu $mc^2 = 939,5 \text{ MeV}$



Wyprowadzenie wzoru wiążącego pęd Fermiego p_F z gęstością ρ oraz wzoru na średnią energię fermionu, \bar{E}_{kin} , można znaleźć w podręczniku „Podstawy Fizyki Współczesnej” R. M. Eisberga (PWN, Warszawa 1968) Rozdział XII, § 6. W celu wyprowadzenia wzoru na P wykorzystacie należy związek

$$P = - \frac{dE}{dV},$$

gdzie E jest energią gazu zamkniętego w naczyniu o objętości V . Czytelnik może wyprowadzić powyższe równanie wychodząc z pierwszego prawa termodynamiki oraz definicji ciśnienia. Uwaga: wszystkie rozważania prowadzone są przy $T = 0 \text{ K}$. Wzory na pęd Fermiego i ciśnienie gazu neutronowego w $T = 0 \text{ K}$ najwygodniej jest zapisać wprowadzając gęstość liczbową neutronów $n = N/V$. Otrzymamy wówczas

$$p_F = 3,1n^{1/3} \hbar,$$

$$P = 1,9n^{5/3} \frac{\hbar^2}{m} = 5,4 \cdot 10^3 n^{5/3} \text{ cm}^5 \text{ atm},$$

gdzie jednostką n jest cm^{-3} .

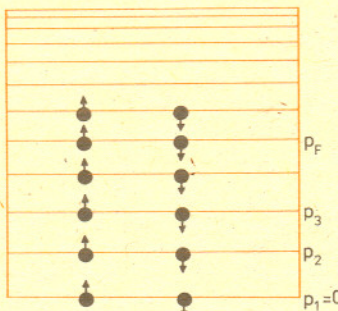
Pojęcie gwiazd neutronowych pochodzi z roku 1932, w którym odkryto neutron. Autorem tego odkrycia był pracujący w Cambridge angielski fizyk James Chadwick. Kiedy wiadomość o tym dotarła do kierowanego przez Nielsa Bohra Instytutu Fizyki Teoretycznej Uniwersytetu Kopenhaskiego, Bohr, Leon Rosenfeld i Lew Landau spędzili cały wieczór dyskutując możliwe konsekwencje istnienia neutronu. Wtedy właśnie Landau zasugerował możliwość istnienia gwiazd neutronowych.

Rozumowanie prowadzące do pojęcia gwiazdy neutronowej przedstawia się następująco. Neutron jest obojętną elektrycznie cząstką elementarną o spinie $\hbar/2$. Układ wielu nieoddziałujących cząstek o spinie połówkowym — fermionów — (a więc i doskonały gaz neutronowy) podlega prawom statystyki Fermiego-Diraca (1926), a w szczególności — zasadzie wykluczenia Pauliego (1925). Idea gwiazdy neutronowej wynika z dyskusji możliwości równowagi dwóch przeciwstawnych czynników: ciśnienia gazu neutronowego wynikającego z zasady Pauliego oraz wzajemnego przyciągania grawitacyjnego neutronów.

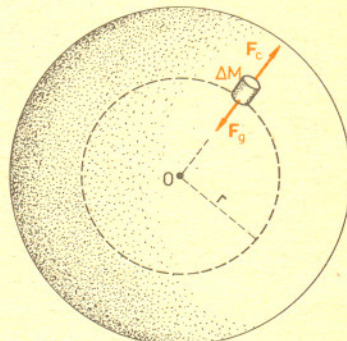
Rozważmy układ N neutronów (gaz neutronowy) znajdujący się w naczyniu o objętości V . Pomińmy siły oddziaływania między neutronami i rozważmy doskonały gaz neutronowy w stanie o najniższej energii — w stanie podstawowym. Będzie to stan odpowiadający temperaturze zera bezwzględnej $T = 0 \text{ K}$. Gęstość gazu neutronowego wynosi $\rho = Nm/V$, gdzie m jest masą neutronu. Ponieważ rozważamy stan o najniższej energii, zaś energia neutronów sprowadza się do ich energii kinetycznej, więc na pierwszy rzut oka wydaje się, że stan ten osiągnięty będzie wówczas, gdy wszystkie neutrony będą miały pęd $p_i = 0$. Ale oznaczałoby to, w języku mechaniki kwantowej, że N neutronów znajduje się w stanie $p_i = 0$. Jest to sprzeczne z zasadą Pauliego, zgodnie z którą w każdym stanie mogą się znaleźć tylko dwa neutrony o przeciwnie skierowanych spinach. Pozostałe $N-2$ neutrony zajmą

stany o pędach większych od zera, przy czym każdy i -ty stan ($i = 2, 3, \dots, \frac{1}{2}N$; zakładamy dla uproszczenia, że N jest parzyste) będzie zajęty przez dwa neutrony o przeciwnie skierowanych spinach. Jest to przedstawione schematycznie na Rys. 1.

W stanie podstawowym maksymalny pęd neutronu wynosi p_F ; nosi on nazwę pędu Fermiego. Wszystkie stany o pędach $p_i > p_F$ są puste (nieobsadzone), zaś stany o pędach $p_i \leq p_F$ są zajęte (obsadzone). Rachunek wskazuje, że pęd Fermiego p_F jest w prosty sposób związany z gęstością gazu neutronowego: $p_F = a\rho^{1/3}$, gdzie a jest stałą.

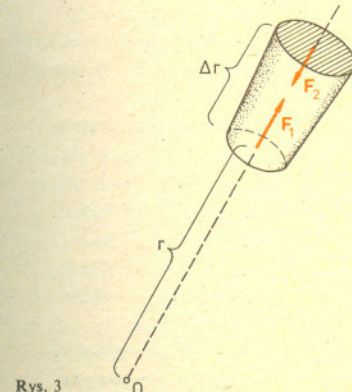


Rys. 1

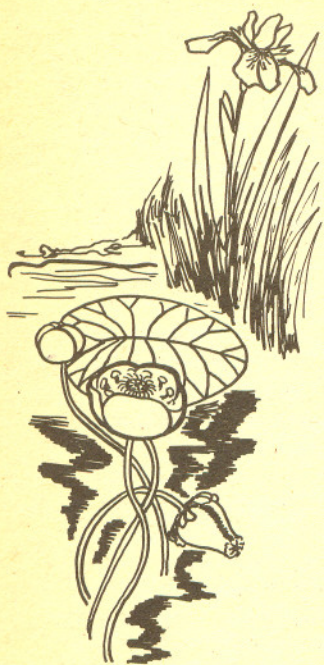


Rys. 2

Gaz neutronów, które poruszają się wewnątrz naczynia z prędkościami zawartymi między zerem a p_F/m , wywiera ciśnienie na ścianki naczynia. Ciśnienie to rośnie wraz z gęstością zgodnie ze wzorem $P = b\rho^{5/3}$ (b jest stałą). Po to, aby rozważany przez nas układ znajdował się w stanie równowagi, siły wynikające z ciśnienia gazu neutronowego i dążące do zwiększenia objętości, w której się on znajduje, powinny być zrównoważone przez siły, które dążą do ściśnięcia tego gazu. Takie właśnie siły pochodzą od przyciągania grawitacyjnego między neutronami. Prześledźmy dokładnie warunki równowagi. Niech nasz układ N neutronów tworzy kulę o promieniu R i masie $M = Nm$. Rozważmy mały element tej kuli o masie ΔM znajdujący się w odległości r od środka kuli (Rys. 2). Po to, aby element ten znajdował się w spoczynku, siła wynikająca z ciśnienia, F_c musi być zrównoważona przez siłę F_g , z jaką kula o promieniu r przyciąga ten element. W celu otrzymania równania formułującego ten warunek przyjrzyjmy się elementowi ΔM w powiększeniu (Rys. 3). Dla uproszczenia założmy, że jest on małym walcem, którego wysokość wynosi Δr , zaś pole podstawy S . Ponieważ gęstość gazu neutronowego (materii neutronowej) wewnątrz walca jest w przybliżeniu



Rys. 3



Informacje biograficzne

Niels Bohr (1885—1962), duński fizyk teoretyk, był jednym z twórców teorii kwantów, wniósł poważny wkład do teorii jądra atomowego. Założyciel i długoletni kierownik Kopenhaskiego Instytutu Fizyki Teoretycznej (obecnie Instytut Nielsa Bohra). Nagroda Nobla w 1922 r. za teorię atomu.

Sir James Chadwick (ur. 1891), fizyk angielski, specjalista z zakresu doświadczalnej fizyki jądrowej. W roku 1919 wspólnie z E. Rutherfordem przeprowadził pierwszą sztuczną reakcję jądrową. Nagroda Nobla w 1935 r. za odkrycie neutronu.

Antony Hewish (ur. 1924), radioastronom angielski. Nagroda Nobla w 1974 r. za odkrycie pulsarów.

Lew Dawidowicz Landau (1908—1968), radziecki fizyk teoretyk. Autor fundamentalnych prac z zakresu wielu dziedzin współczesnej fizyki teoretycznej — m.in. twórca teorii przejść fazowych w termodynamice, teorii nadciekłości Helu II i teorii normalnej cieczy fermionowej. Autor (wraz z I. M. Lifszycem) wielotomowego podręcznika „Fizyka Teoretyczna”. Nagroda Nobla w 1962 r. za teorię cieczy kwantowych.

Jacob Robert Oppenheimer (1904—1967), amerykański fizyk teoretyk. Autor fundamentalnych prac z różnych dziedzin fizyki teoretycznej. W latach 1943—1945 kierował pracami nad budową amerykańskiej bomby atomowej; był zwany „ojcem bomby atomowej”.

stała, więc $\Delta M = S\Delta r \rho(r)$. Oznaczmy ciśnienie działające na górną podstawę walca przez P_2 , na dolną zaś — przez P_1 . Wartości sił F_1 i F_2 są więc równe $F_1 = SP_1$ i $F_2 = SP_2$. Ciśnienie wewnątrz kuli neutronowej jest funkcją odległości od środka kuli $P = P(r)$, a więc $P_1 = P(r)$, $P_2 = P(r + \Delta r)$. Siły działające na boczną powierzchnię walca równoważą się. Wypadkowa sił F_1 i F_2 ma wartość

$$(1) \quad F_c = F_1 - F_2 = S(P_1 - P_2)$$

i skierowana jest ku powierzchni kuli, ponieważ $P_1 > P_2$. Siła przyciągania grawitacyjnego F_g jest równa sile, z jaką masa $\mathcal{M}(r)$ zawarta w kuli o promieniu r przyciąga masę ΔM ,

$$(2) \quad F_g = - \frac{G \mathcal{M}(r) \rho(r) S \Delta r}{r^2}.$$

Warunek równowagi ma więc postać:

$$(3) \quad \frac{dP}{dr} = - \frac{G \mathcal{M}(r) \rho(r)}{r^2},$$

gdzie wykorzystaliśmy definicję pochodnej

$$\frac{dP}{dr} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{P(r + \Delta r) - P(r)}{\Delta r}.$$

Warunek ten musi być spełniony w każdym punkcie kuli neutronowej. Zastosowanie tego warunku do naszego problemu, w którym zależność ciśnienia od gęstości dana jest wzorem $P = b \rho^{5/3}$ prowadzi do wniosku, że konfiguracje równowagi są realizowane przy

$$(4) \quad N \approx 10^{57}, \quad M = Nm \approx M_{\odot}, \quad R \approx 10 \text{ km}.$$

Otrzymana przez nas „gwiazda neutronowa” jest niezwykle gwiazdą. Jej średnią gęstość możemy oszacować stosując wzór $\bar{\rho} = M \left(\frac{4\pi}{3} R^3 \right)^{-1}$. Otrzymamy wtedy $\bar{\rho} \approx 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$. Znak „ \approx ”

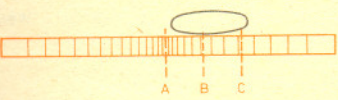
we wzorze na ρ i we wzorach (4) mówi o tym, że są to oszacowania. Wyniki uzyskane przy bardziej realistycznych założeniach będą różnić się o czynnik „kilka” (dwa, trzy, ale nie pięćdziesiąt!) od naszych oszacowań. Gęstość $\bar{\rho}$ jest rzeczywiście olbrzymia: 3 cm³ materii „gwiazdy neutronowej” waży tyle co cała ludność Ziemi. To, że nazwę gwiazdy neutronowej piszemy tutaj w cudzysłowie, nie jest przypadkowe. Rachunki przeprowadzone przez teoretyków w okresie dwóch ostatnich dziesięcioleci prowadzą do wniosku, że prawdziwa gwiazda neutronowa składa się wprawdzie przede wszystkim z neutronów, ale w jej materii znajdziemy również kilkuprocentową domieszkę protonów, elektronów, mionów i — być może — hiperonów. Stąd, nasza kula neutronowa jest „gwiazdą neutronową” tylko w cudzysłowie. Gdzie we Wszechświecie należy szukać takich niezwykle małych, gęstych i zimnych gwiazd? W jakich warunkach powstają gwiazdy neutronowe? Pierwszą hipotezę dotyczącą warunków narodzin gwiazdy neutronowej podali astrofizycy amerykańscy, Baade i Zwicky w roku 1934. Sformulujemy ją w wersji, która wydaje się obecnie, po 45 latach, najbardziej prawdopodobna.

Rozważmy gwiazdę o masie 8—10 M_{\odot} znajdującą się na ostatnim etapie jej „życia”. Zapasy paliwa jądrowego wyczerpują się; gwiazda składa się wówczas z gorącego, gęstego jądra maksymalnej gęstości rzędu 10^8 g cm^{-3} i o masie większej niż $1,4 M_{\odot}$ (np. $2M_{\odot}$) oraz znacznie rzadszej otoczki. Jądro gwiazdy jest zbudowane z końcowych produktów procesu spalania jądrowego (jądra żelaza, krzemu) oraz elektronów. W pewnym momencie, w wyniku stosunkowo powolnych procesów zachodzących jeszcze w jądrze gwiazdy naruszony zostaje warunek równowagi: ciśnienie materii nie jest już w stanie zrównoważyć ciężenia grawitacyjnego. W ciągu ułamka sekundy jądro gwiazdy „zapada się” — kurczy, jego rozmiary maleją. W momencie, gdy gęstość centralnej, najgęstszej części zapadającej się gwiazdy przekroczy wartość $10^{14} \text{ g cm}^{-3}$, średnia odległość między nukleonami w materii, z której zbudowane jest jądro gwiazdy, będzie rzędu 10^{-13} cm . Do akcji wkraczą wówczas oddziaływania jądrowe, których zasięg wynosi właśnie około 10^{-13} cm i które są silnie odpychające dla odległości między nukleonami mniejszej niż ok. $0,4 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$. Dalsze „ściskanie” najgęstszej części jądra gwiazdy staje się praktycznie niemożliwe. Rzadsze warstwy gwiazdy „spadające” z olbrzymią prędkością (dochodzącą do 0,1 c) odbijają się od najgęstszej części jądra i uciekają na zewnątrz tworząc w zderzeniu ze „spadającą” na centrum gwiazdy materią falę uderzeniową. Połączenie efektów silnej emisji i absorpcji neutron oraz efektów magnetohydrodynamicznych prowadzi do wybuchu gwiazdy, któremu towarzyszy wydzielenie olbrzymiej energii, rzędu 10^{51} ergów. Dla porównania, całkowita energia wypromieniowana przez Słońce w ciągu roku wynosi $1,2 \cdot 10^{41}$ ergów. Wybuchająca gwiazda może być widoczna na Ziemi i nosi nazwę supernowej. Supernowa zaobserwowana przez astronomów chińskich w roku 1054 była widoczna na niebie we dnie przez 3 tygodnie, a w nocy — przez 2 lata. Otoczka gwiazdy w wyniku wybuchu oddzieliła się od gęstego jądra; w przypadku supernowej z 1054 r. tworzy obecnie rozszerzający się obłok świecącego gazu — mgławicę Kraba. Jądro gwiazdy, o masie rzędu M_{\odot} i gęstości rzędu $10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ — to gwiazda neutronowa. Początkowo, bezpośrednio po narodzeniu, temperatura na powierzchni gwiazdy neutronowej jest rzędu 10^8 K , po upływie kilkuset lat obniża się do około 10^6 K . Podobnie, temperatura



Rozwiązanie zadania F 78

Woda nie zwilża rozżarzonej powierzchni. Kształt kropli jest więc taki jak na rysunku. Kropla przypomina zatem wiszący poduszkiwiec, którego chaotyczne ruchy spowodowane są fluktuacjami wypływu pary. Obecność „poduszki parowej” zmniejsza znacznie opory ruchu i, dzięki niewielkiemu przewodnictwu cieplnemu, przedłuża czas życia kropli. Jeżeli temperatura powierzchni płyty obniża się od środka ku brzegowi, to temperatura, średnio biorąc, jest w obszarze AB kropli wyższa niż w BC. Zatem średnia prędkość pary w obszarze pierwszym jest wyższa niż w drugim. Siła wywołana tą różnicą odsuwa kroplę od rozżarzonego środka płyty.



we wnętrzu gwiazdy, która początkowo była rzędu 10^{10} K, spada do wartości 10^8 K. Dla materii o zwykłej, „ziemskiej” gęstości (rzędu 10 g cm^{-3}) lub gęstości typowej dla wnętrza zwykłych gwiazd (np. 100 g cm^{-3} w pobliżu środka Słońca) byłaby to bardzo wysoka temperatura, wpływająca w bardzo silny sposób na własności tej materii. W naszym przypadku średnia energia kinetyczna ruchu cieplnego neutronów, odpowiadająca temperaturze

$$T = 10^8 \text{ K, wynosi } \bar{E}_T = \frac{3}{2} k_B T \cong 0,01 \text{ MeV. Jednocześnie, przy gęstości } \rho = 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$$

średnia energia kinetyczna neutronów w rozważanym poprzednio modelu doskonałego gazu fermionów w temperaturze $T = 0 \text{ K}$ jest

$$E_{\text{kin}} = \frac{3}{5} \frac{p_F^2}{2m} = 18 \text{ MeV.}$$

Tak więc wpływ temperatury $T = 10^8 \text{ K}$ na ruch neutronów w tak gęstej materii jest doprawdy znikomy. Przeprowadzając nasz rachunek ciśnienia dla temperatury zera bezwzględnej popełniliśmy błąd rzędu $(E_T/\bar{E}_{\text{kin}}) \cdot 100\% = 0,05\%$. W bardzo dobrym przybliżeniu materię we wnętrzu gwiazdy neutronowej możemy traktować jako materię o temperaturze zera bezwzględnego.

Gaz neutronowy o gęstości rzędu $10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ wywierałby ogromne ciśnienie na ścianki naczynia, w którym byłby zamknięty. W naszym prostym modelu dla gęstości $\rho = 3 \cdot 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ ciśnienie to wynosi $P = 7,5 \cdot 10^{27} \text{ atm}$. Po to, aby siły wynikające z takiego ciśnienia zostały zrównoważone przez ciśnienie grawitacyjne zmierzające do „ściśnięcia” kuli neutronowej, potrzeba pół grawitacyjnych o gigantycznym natężeniu. Dla kuli neutronowej o masie $M = M_\odot$ i promieniu $R = 10 \text{ km}$ otrzymujemy wartość przyspieszenia pola grawitacyjnego na powierzchni $g_{\text{GN}} = \frac{GM_\odot}{R^2} \cong 10^{11} g_z$, gdzie g_z jest przyspieszeniem pola grawitacyjnego

na powierzchni Ziemi. Jest to rzeczywiście gigantyczne pole grawitacyjne. Praca, którą trzeba byłoby wykonać podnosząc kulkę o masie 1 g z powierzchni takiej kuli neutronowej na wysokość 1 cm , jest równa w przybliżeniu pracy, którą wykonalibyśmy podnosząc masę 10 ton z powierzchni Ziemi na wysokość 1 km !

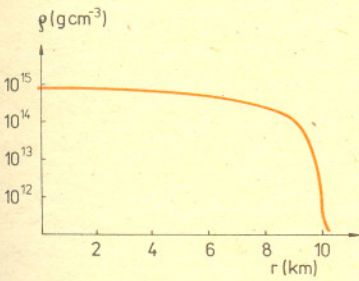
Przy tak olbrzymich gęstościach, jakich spodziewamy się w gwiazdach neutronowych, materia zaczyna wywierać istotny wpływ na własności przestrzeni, w której się znajduje. Związek między własnościami materii i własnościami geometrycznymi przestrzeni jest opisany przez Ogólną Teorię Względności (OTW) sformułowaną przez Alberta Einsteina w 1916 r. Kula neutronowa — model gwiazdy neutronowej — była jednym z pierwszych badanych teoretycznie obiektów, dla którego efekty wynikające z modyfikacji geometrii przestrzeni przez materię były duże; dla najcięższych „gwiazd neutronowych” zmiany w stosunku do wartości obliczonych przy stosowaniu newtonowskiej teorii grawitacji (równanie (3)) sięgały kilkudziesięciu procent.

Pierwsze szczegółowe obliczenia dotyczące własności „gwiazd neutronowych” wykonał w ramach OTW Jacob Robert Oppenheimer i jego współpracownicy w roku 1939. Oprócz wyników, dotyczących gęstości materii w „gwieździe neutronowej” oraz związku między masą „gwiazdy neutronowej” i jej promieniem, uzyskali oni bardzo ważny wynik będący konsekwencją stosowanej przez nich OTW. Mianowicie, konfiguracja równowagi „gwiazdy neutronowej” mogła istnieć tylko dla $M < M_{\text{maks}}$. Bardziej masywna „gwiazda neutronowa” musiała się nieuchronnie „zapaść” do postaci zadziwiającego obiektu o promieniu równym tzw. promieniowi grawitacyjnemu $R_g = 2GM/c^2$. Obiekt taki nazywamy obecnie czarną dziurą. Wykonane w ciągu ostatnich lat rachunki uwzględniające skomplikowaną naturę materii, z której zbudowane są gwiazdy neutronowe, wskazują, że $M_{\text{maks}} \cong 2 \div 2,5 M_\odot$. Zauważmy, że używając modelu kuli nieoddziałującego gazu neutronowego Oppenheimer i Volkoff uzyskali w 1939 roku $M_{\text{maks}} = 0,73 M_\odot$. Różnica między tymi dwiema wartościami M_{maks} odzwierciedla ważną rolę oddziaływań jądrowych, które są uwzględniane w obecnych rachunkach. Wyniki najnowszych obliczeń przedstawione są na Rys. 4 i 5.

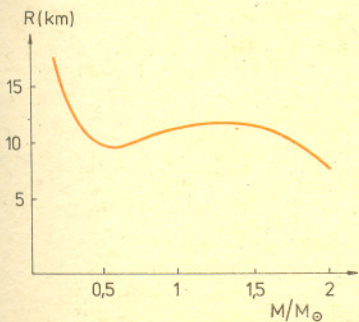
Na rys. 4 pokazany jest typowy rozkład gęstości w gwieździe neutronowej, zaś na Rys. 5 zobrazowano związek między masą gwiazdy neutronowej a jej promieniem. Gwiazda neutronowa o masie $M > M_{\text{maks}}$ nie może istnieć, ponieważ ciśnienie materii, z której jest zbudowana, nie jest w stanie pokonać sił ciężenia grawitacyjnego. Dla $M = 3M_\odot$ promień czarnej dziury wynosi $R_g = 9 \text{ km}$. Własności czarnych dziur są inne niż własności gwiazd neutronowych, w szczególności czarna dziura może mieć dowolnie dużą masę.

Podstawowe prace teoretyczne dotyczące gwiazd neutronowych powstały ponad 40 lat temu. Ale aż do roku 1967, kiedy to astronom angielski Antony Hewish wraz ze swoimi współpracownikami odkrył pulsary, nie wiadomo było, czy te zadziwiające obiekty istnieją rzeczywiście we Wszechświecie. Odkrycie pulsarów dokonane zostało w tym samym mieście angielskim — Cambridge — w którym w 1932 roku Chadwick odkrył neutron. Uważamy obecnie, że pulsary — to szybko obracające się gwiazdy neutronowe. Do chwili obecnej zostało wykrytych około 320 pulsarów.

W kolejnym artykule pokażemy, w jaki sposób gwiazda neutronowa może być modelem tłumaczącym obserwowane własności pulsarów.



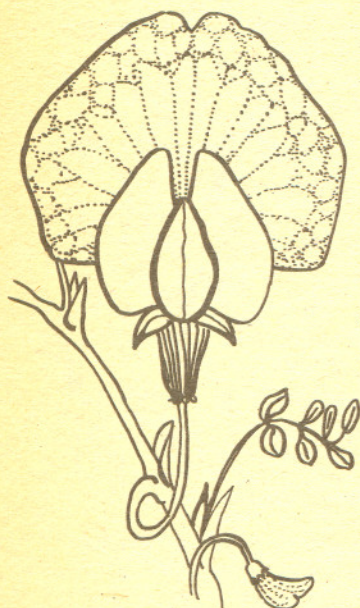
Rys. 4



Rys. 5

Obliczamy π (II)

Dr Marcin E. KUCZMA



W poprzednim numerze mówiliśmy o rozwijaniu funkcji w szeregi potęgowe. Jako przykład posłużyła nam funkcja arcus tangens. Wyprowadziliśmy rozwinięcie

$$(1) \quad \arctg x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots, \quad |x| \leq 1,$$

skąd przez podstawienie $x = 1$ dostaliśmy wzór Leibniza

$$(2) \quad \frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Sumy częściowe szeregu po prawej stronie wzoru (2) dają wymierne przybliżenia liczby π . Niedogodność stanowi jednak to, że szereg ten jest zbieżny bardzo powoli.

Spróbujmy do naszego zagadnienia wykorzystać własności całkiem innej klasy szeregów funkcyjnych: szeregów trygonometrycznych. Są to szeregi postaci

$$(3) \quad a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + (a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x) + \dots$$

A czy każdą funkcję 2π -okresową można, przez odpowiedni dobór współczynników a_n, b_n przedstawić jako sumę pewnego szeregu postaci (3)? Tu kilka słów wyjaśnienia na temat, skąd się wzięło to zagadnienie. Funkcję okresową można uważać za analityczny opis pewnego zjawiska fizycznego — ruchu drgającego. Szczególnym rodzajem drgań są tzw. drgania proste, tj. takie, gdzie wykresem jest linia sinusoidalna. Nietrudno przekonać się, że wykresem każdej funkcji typu $a \cos nx + b \sin nx$ jest sinusoida; mamy bowiem równość

$$(4) \quad a \cos nx + b \sin nx = A \sin(nx + \alpha),$$

gdzie $A = \sqrt{a^2 + b^2}$, zaś α jest wartością taką, że $\sin \alpha = a/A$, $\cos \alpha = b/A$. Tak więc wyrażenie typu (4) opisuje drgania proste o częstotliwości $n/2\pi$, amplitudzie A i przesunięciu w fazie α . Widzimy zatem, że problem rozwijalności danej funkcji okresowej $f(x)$ w szereg trygonometryczny (3) odpowiada zagadnieniu rozkładu ruchu okresowego na sumę drgań prostych o częstotliwościach $n/2\pi$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Jest to bardzo klasyczne zagadnienie mechaniki.

Przypuśćmy, że pewna funkcja okresowa $f(x)$ jest sumą szeregu postaci (3). Ustalmy liczbę naturalną n i pomnożmy $f(x)$ przez $\sin nx$

$$(5) \quad \begin{aligned} f(x) \sin nx &= a_0 \sin nx + \\ &+ a_1 \cos x \sin nx + b_1 \sin x \sin nx + \\ &+ a_2 \cos 2x \sin nx + b_2 \sin 2x \sin nx + \\ &\dots \\ &+ a_n \cos nx \sin nx + b_n \sin nx \sin nx + \\ &\dots \end{aligned}$$

Całkując otrzymaną równość w przedziale $\langle -\pi, \pi \rangle$ otrzymujemy:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = (\text{suma całek składników po prawej stronie}).$$

(Przy całkowaniu sum nieskończonych konieczna jest pewna ostrożność — por. uwagi w poprzednim numerze; nie wdając się w szczegóły, ograniczymy się do stwierdzenia, że bardzo słabe założenia o funkcji f wystarczą, żeby takie całkowanie było dopuszczalne). Łatwy

rachunek pokazuje, że całki $\int_{-\pi}^{\pi}$ wszystkich składników po prawej stronie wzoru (5) są zerami, z wyjątkiem jednego — mianowicie tego, w którym $\sin nx$ mnożymy przez $\sin nx$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi. \quad \text{Stąd dostajemy}$$

$$(6) \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \pi b_n.$$

Całkiem podobnie wykazuje się, że

$$(7) \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \pi a_n, \quad (n \geq 1) \quad \text{oraz} \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2\pi a_0.$$

Wzory te pokazują, że współczynniki a_n, b_n w szeregu (3) są wyznaczone przez funkcję f jednoznacznie — otrzymuje się je obliczając powyższe całki i dzieląc przez π .

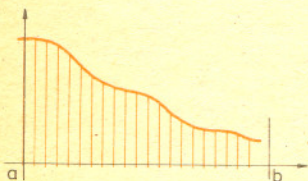
Nie daje nam to odpowiedzi na pytanie: czy każda funkcja 2π -okresowa daje się przedstawić w postaci (3)? Otóż — nie! Mając daną funkcję 2π -okresową f , możemy z nią związać — całkiem formalnie — szereg (3), w którym współczynniki a_n, b_n zdefiniowane są przez formuły (6), (7). Szereg ten nazywa się szeregiem Fouriera funkcji f . Piszemy:

$$(8) \quad f(x) \sim a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots$$

Całkę funkcji ciągłej f po przedziale $\langle a, b \rangle$ można określać jako przyrost dowolnej funkcji pierwotnej F :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Geometrycznie, wyraża ona (w przypadku funkcji stale dodatnich) pole obszaru zawartego pomiędzy przedziałem $\langle a, b \rangle$ osi Ox i wykresem funkcji f na tym przedziale.



Znaczek \sim wyraża niewiele: tylko tyle, że współczynniki a_n, b_n wyznaczone zostały według wzorów (6), (7). Z poprzednich rozważań wynika, że jeśli f w ogóle rozwija się w szereg trygonometryczny, to tym szeregiem jest właśnie szereg Fouriera funkcji f i żaden inny. Chcielibyśmy, by znaczek \sim we wzorze (8) można było zastąpić znakiem $=$. Tak być jednak nie musi. Może się zdarzyć, że otrzymany szereg jest rozbieżny dla każdej wartości x ! Może się też zdarzyć, że w pewnych punktach szereg ten jest zbieżny, ale ... wcale nie do wartości $f(x)$. Żeby jednak nie popaść w rozpacz, zaznaczmy od razu, że istnieją liczne twierdzenia pozytywne. W ogromnej mierze ich autorem lub inspiratorem jest matematyk niemiecki pochodzenia francuskiego Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805—59), którego pomysł polegał na wyrażeniu n -tej sumy częściowej szeregu (8) w formie pewnej całki. Nie możemy tu przytoczyć pełnego wywodu; ograniczymy się do sformułowania jednego z licznych twierdzeń Dirichleta:

Zalóżmy, że funkcja 2π -okresowa f jest przedziałami monotoniczna. Wówczas: jeśli f jest ciągła w punkcie x , to we wzorze (8) zachodzi równość; jeśli f jest nieciągła w punkcie x , to szereg we wzorze (8) zbieżny jest do sumy równej średniej arytmetycznej granic lewostronnej i prawostronnej funkcji f w tym punkcie (rys. 1).

Przejdźmy teraz do przykładów. Weźmy (rys. 2) funkcję 2π -okresową f , równą 1 w przedziale $(0, \pi)$ i -1 w przedziale $(-\pi, 0)$. Obliczając jej współczynniki Fouriera według wzorów (6), (7) dostajemy: $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = 0, b_2 = b_4 = b_6 = \dots = 0, b_n = 4/\pi n$ dla n nieparzystych.

Zatem
$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x \dots \right).$$

Dla $x = \frac{1}{2} \pi$ zachodzi równość, w myśl twierdzenia Dirichleta (jest to punkt ciągłości).

Oczywiście $f\left(\frac{1}{2} \pi\right) = 1$. Podstawiając $x = \frac{1}{2} \pi$ dostajemy

$$1 = \frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right).$$

czyli ... znów wzór Leibniza (2).

Rozważmy teraz (rys. 3) funkcję 2π -okresową g , daną w przedziale $\langle -\pi, \pi \rangle$ wzorem

$$f(x) = x^2. \text{ Formuły (6) i (7) dają nam teraz } a_0 = \frac{1}{3} \pi^2, a_n = (-1)^n 4/n^2, b_1 = b_2 = b_3 = \dots = 0.$$

Stąd $g(x) \sim \frac{1}{3} \pi^2 + 4 \left(-\cos x + \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{16} \cos 4x - \dots \right)$.

Rozważana funkcja jest ciągła we wszystkich punktach, więc znak \sim można zastąpić równością. Podstawiając $x = \pi$ otrzymujemy

$$\pi^2 = \frac{1}{3} \pi^2 + 4 \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots \right), \text{ skąd po przekształceniu}$$

$$(9) \quad \frac{1}{6} \pi^2 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

Jest to wzór Eulera (matematyk szwajcarski Leonhard Euler (1707—83) doszedł do niego na drodze innych rozważań).

Jaką dokładność przybliżenia dają sumy częściowe szeregu we wzorze Eulera? Oznaczmy n -tą sumę częściową przez s_n , a przez r_n — to, co zostaje („reszta” albo „ogon”):

$$s_n = 1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n^2}, \quad r_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots, \quad \frac{1}{6} \pi^2 = s_n + r_n.$$

Spójrzmy teraz na rysunek 4. Krzywa na tym rysunku to wykres funkcji $1/x^2$ w przedziale

$\langle n, \infty \rangle$. Pole obszaru zacieniowanego równa się $\int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{n}$.

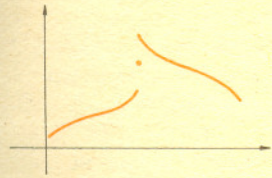
Pole obszaru pod „górnymi schodami” równa się $\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots = \frac{1}{n^2} + r_n$;

pole obszaru pod „dolnymi schodami” równa się $\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots = r_n$.

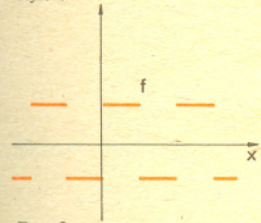
Zatem $r_n < \frac{1}{n} < \frac{1}{n^2} + r_n$, czyli

$$(10) \quad 0 < \frac{1}{n} - r_n < \frac{1}{n^2}.$$

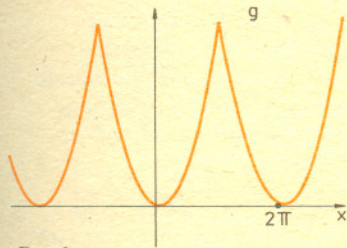
Znaczy to, że r_n (czyli błąd popełniany przez zastąpienie liczby $\frac{1}{6} \pi^2$ przez s_n) jest wielkością rzędu $1/n$.



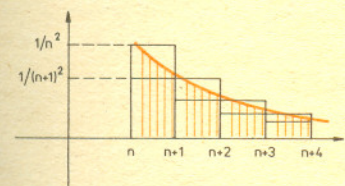
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Całka \int_a^{∞} tzw. całka niewłaściwa jest wartością graniczną całek \int_a^x gdy $x \rightarrow \infty$.

Sytuacja jest więc nie lepsza, niż w przypadku wzoru Leibniza. Ale tylko na pozór. Możemy bowiem zastosować taką sztuczkę: do n -tej sumy częściowej dodajemy jeszcze składnik $\frac{1}{n}$;

$$s_n + \frac{1}{n} = \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n}.$$

Z uzyskanych oszacowań (10) wynika, że otrzymana wielkość — oznaczmy ją przez t_n — daje przybliżenie liczby $\frac{1}{6}\pi^2$ z nadmiarem, z błędem mniejszym niż $1/n^2$: $0 < t_n - \frac{1}{6}\pi^2 < \frac{1}{n^2}$.

Stąd dostajemy $0 < \sqrt{6t_n} - \pi < \frac{1}{n^2}$.

Obliczając $6t_n$ np. dla $n = 100$ i wyciągając pierwiastek kwadratowy otrzymujemy więc wartość przybliżoną liczby π z dokładnością czterech znaków po przecinku. To już jest coś; czynności te możemy wykonać na kieszonekowym czterodziałaniowym kalkulatorze w ciągu kilkunastu minut.

Rozpatrując funkcje x^4, x^6, x^8, \dots na przedziale $\langle -\pi, \pi \rangle$, przedłużając je przez okresowość do funkcji ciągłych na całej prostej R , rozwijając w szereg Fouriera, uwzględniając twierdzenie Dirichleta i wreszcie podstawiając $x = \pi$ dostajemy wzory analogiczne do wzoru Eulera, wyrażające liczby π^k przez sumy szeregów $\sum 1/n^k$, $k = 4, 6, 8, \dots$ I tak:

$$(11) \quad \frac{1}{90}\pi^4 = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots, \quad \frac{1}{945}\pi^6 = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \dots$$

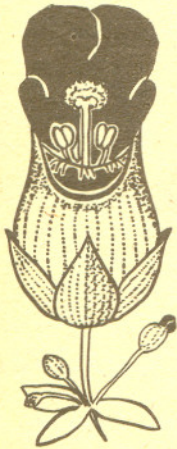
Czy wzory te nadają się do obliczania π ? I tak, i nie. Prawda, że szeregi są zbieżne coraz szybciej;

ale dochodzą współczynniki $\frac{1}{90}, \frac{1}{945}$ (dalsze mianowniki rosną w ogromnym tempie), no

i dochodzi konieczność wyciągania pierwiastka: czwartego, szóstego stopnia itd. Obniża to, rzecz jasna, efektywność przybliżania. Spójrzmy jednak na wzory (9) i (11) „od drugiej strony”. Zapomnijmy na chwilę o naszym zadaniu; w końcu, liczba π jest dość dokładnie znana. Samej zbieżności szeregów $\sum 1/n^2, \sum 1/n^4, \sum 1/n^6$ dowodzi się prościutko metodami bardzo elementarnymi. Ale wzory (9) i (11) dają nam wartości sum tych szeregów — trudne do wyznaczenia innym sposobem. Rozwijając w szereg Fouriera rozmaite funkcje i podstawiając za x różne punkty przedziału $\langle -\pi, \pi \rangle$ możemy w ten sposób wyznaczyć sumy bardzo wielu szeregów liczbowych — miła to i pożyteczna zabawa.

Naiwnością byłoby sądzić, że teoria szeregów trygonometrycznych została stworzona po to, by wyznaczać kolejne cyfry rozwinięcia π , czy też po to, by obliczać sumy szeregów liczbowych podobnych do tych, które występują we wzorach (9) i (11). Jest to ogromna teoria o nieprzebranym bogactwie zastosowań — praktycznych i teoretycznych. Ale to już zupełnie inna historia.

W następnym — trzecim i ostatnim — odcinku naszego serialu zaprezentujemy Czytelnikom jeszcze inne wzory wyrażające π jako wynik operacji granicznych na liczbach wymiernych. Uzasadniona jest nadzieja, że dokładność aproksymacji będzie coraz lepsza...



Znacznie mniej wiemy o sumie odwrotności trzech potęg liczb-naturalnych, czyli o sumie

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots$$

Przedstawiony na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Helsinkach w 1978 roku wynik Apéry'ego mówiący, że liczba ta jest niewymierna, został określony mianem „sensacyjnego”.



Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 229. Pociąg przejechał 320 km w 4 godziny. Wykazać, że pewien odcinek tej drogi o długości 80 km przejechał dokładnie w 1 godzinę.

Rozwiązanie na str. 12.

M 230. Czy można zabawkę wykonaną z plasteliny wg rysunku 1 zdeformować — bez rozrywania i ponownego sklejania — tak, aby przybrała postać przedstawioną na rys. 2? Chyba nie — wystarczy narysować okręgi A, B i C , by przekonać się, że rozłączyć ich nie można. Czy na pewno?

Rozwiązanie na str. 15.

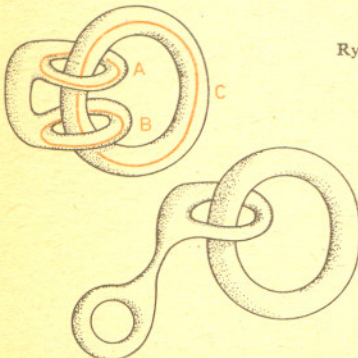
M 231. Czy można ułożyć rozkład jazdy pociągu spełniającego warunki zadania M 229 tak, aby każdy studwudziestokilometrowy odcinek drogi był przebywany w czasie różnym od 1,5 godziny? Rozwiązanie na str. 10.

Redaguje doc. dr Michał ŚWIĘCKI

F 78 Na rozgrzanej do czerwoności płycie metalowej krople wody wykonują bezładne ruchy. Dlaczego? Jak będzie wyglądał ruch kropeł na poziomej płycie rozgrzanej tak, że tylko jej środek jest rozżarzony?

(T. Tratkiewicz)

Rozwiązanie na str. 3.



Rys. 1

Rys. 2



Wiemy dobrze, że woda zwilża czystą powierzchnię szkła, nie zwilża jednak powierzchni zatłuszczonej, chociażby warstwa tłuszczu była prawie niewidzialna. Cząsteczki wody stanowczo sprzeciwiają się łączeniu z cząsteczkami tłuszczu. Zjawisko to wyjaśniamy przez założenie, że cząsteczki tłuszczu są niesymetryczne i łączą się między sobą tak, że na powierzchni tłuszczu znajdują się jedynie nieaktywne końce cząsteczek. Dlatego właśnie tłuszcze nie rozpuszczają się w wodzie i dlatego woda rozlana na tłustej powierzchni skupia się w krople zupełnie tak samo jak rtęć rozlana na stole.

Wiele jest zjawisk, o których przebiegu decyduje niechętny stosunek wody i tłuszczu. I tak na przykład naoliwioną igłę położyć możemy na wodzie. Igła pograży się w wodzie tylko na tyle, że na powierzchni powstanie niewielkie zagłębienie. Zupełnie tak, jak gdyby woda pokryta była skórką lekko uginającą się pod ciężarem igły.

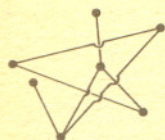
Jeszcze bardziej uderzający jest widok pływającego sita drucianego posmarowanego tłuszczem. Sito zanurzamy do roztopionej parafiny, po wyjęciu potrząsamy tak, aby oczka nie były zalepione i czekamy aż wyschnie. Pływać będzie z łatwością obciążone nawet dosyć znacznym ładunkiem. Sito można również napełnić wodą. Wodę należy wlewać powoli na kawałek papieru, który można następnie usunąć. Gwałtowne poruszenie napełnionego sita powoduje przerwanie błonki wodnej i woda rzęśistym deszczem spada na podłogę.

Gdy nalejemy wody sodowej do czystej i gładkiej szklanki, bardzo nieliczne pęcherzyki gazu wydostają się na powierzchnię. Woda bowiem ściśle przylega do ścianek szklanki i pęcherzyki rozpuszczonego dwutlenku węgla nie mają gdzie powstawać. Jeśli jednak powierzchnia szklanki będzie nieco zanieczyszczona lub szorstka, zobaczymy całe sznurki pęcherzyków unoszące się w górę. Nie tworzą się one prawie nigdy pośrodku szklanki z wodą sodową. Jeżeli zanieczyszczony fragment powierzchni jest dostatecznie duży, to powstające pęcherzyki mają tendencję do łączenia się, gdyż większym pęcherzykom łatwiej wypierać otaczającą je wodę. Zjawisko to wyjaśnia przebieg pewnego prostego doświadczenia, które możemy wykonać z bańkami mydlanymi. Dwie bańki różnej wielkości uczepiamy u przeciwległych końców tej samej rurki. Obserwujemy, że powietrze z mniejszej bańki przepływa całkowicie do większej i mniejsza bańka znika.

Po tej dygresji powróćmy jeszcze do szklanki z wodą sodową. Sznurczki drobnych pęcherzyków, które widzieć można niekiedy, powstają często w w określonych punktach powierzchni szklanki. Są to miejsca, w których występują drobne nierówności szkła. Na takich nierównościach nie może ukształtować się większy pęcherzyk. Gdy tylko bowiem zacznie powstawać, natychmiast odrywa się.

Zróbmy wreszcie jeszcze jedno doświadczenie. Potrzebne nam do tego będzie małe winogrono bądź zatłuszczona mała kulka szklana (można próbować też z innymi małymi owocami pod warunkiem, że nie zostaną z nich starte małe włoski na powierzchni). Woda nie zwilża winogrona, gdy więc wrzucimy je do szklanki z wodą sodową (lepszy byłby szampan), opadnie na dno i na jego powierzchni zbierają się będą w dużej ilości pęcherzyki gazu. Wkrótce zostaje pokryte warstwą pęcherzyków wyglądających jak perełki i wskutek ich lekkości wypływa na powierzchnię. Tam część pęcherzyków odrywa się od niego pękając przy zetknięciu z powietrzem i winogrono znów opada na dno, gdzie osiadają na nim nowe pęcherzyki. Winogrono wypływa ponownie. Powtarza się to będzie przez wiele minut aż do chwili, gdy w wodzie sodowej zabraknie gazu. Właściwość niektórych ciał przyciągania do siebie pod wodą pęcherzyków i wydostawania się wraz z nimi na powierzchnię jest wykorzystywana w metalurgii do oddzielenia pewnych związków metali od zmieszanych z nimi w rudzie skał i kamieni. Zmieloną drobno mieszaninę zaprawia się wodą i dodaje nieco oliwy. Okruchy zawierające metal pokrywają się błonką oliwy i po ubiciu takiego ciasta w pianę wydostają się na wierzch tworząc gęsty spieniony kożuch.

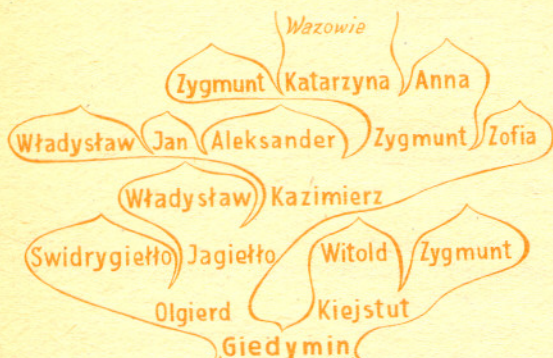
Połączmy kilka (albo więcej) punktów liniami (rys. 1), umawiając się, że linie nie przecinają się. Możemy tak się umówić, bo w razie czego puścimy jedną linię dołem (tunelem) a drugą górą (wiaduktem). To co narysowaliśmy nazywa się *grafem*, linie to jego *krawędzie*, a punkty — *wierzchołki*.



Rys. 1 Graf, jego krawędzie i wierzchołki

Rys. 3 Drzewo

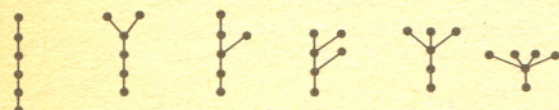
Gdy król miał kilku synów, tron obejmował najstarszy (chyba, że młodszy był sprytny i silniejszy) i on kontynuował główną linię rodu. Pozostali synowie i córki spychani byli do linii bocznych. Rysowano graf zwany drzewem genealogicznym (rys. 2). Jeżeli nie było małżeństw między krewnymi, to taki graf nie miał zamkniętych obwodów, czyli jak mówią matematycy, cykli.



Rys. 2

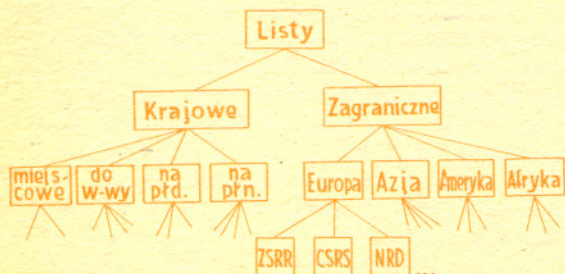
Schematyczny rysunek drzewa też nie ma cykli, bo gałęzie nie zrastają się (rys. 3). Jeżeli wejdziemy na drzewo, musimy schodzić tą samą drogą — chyba że drzewo rośnie w dżungli a my jesteśmy małpą i przeskoczmy sobie na sąsiednie..

Drzewem nazywamy w matematyce właśnie graf nie mający cykli i spójny, a więc taki, że każde dwa wierzchołki są połączone, choć niekoniecznie bezpośrednio. Drzewo tworzy np. rzeka wraz z dopływami — przynajmniej dopóki dopływy te nie zostaną połączone kanałami. Z dwóch punktów można utworzyć tylko jedno drzewo, z trzech — też tylko jedno, z czterech — 2, i dalej z pięciu, sześciu itd. — 3, 6, 11, 23, 47, 106, 235, 551, ... (rys. 4).



Rys. 4 Oto 6 różnych drzew, jakie można utworzyć z 6 punktów

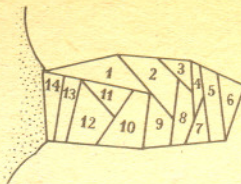
Drzewa służą matematikom nie tylko do rekreacji. Na rysunku 5 widzimy, że proces sortowania listów da się zilustrować za pomocą pewnego drzewa.



Rys. 5

Drzewa



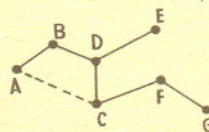


Na rysunku 6 widzimy poletka ryżowe, oddzielone od siebie i od okalającego je jeziora groblami. Poletka te trzeba zalać i w tym celu należy zrobić wyrwy w groblach. Widzimy, że przez usunięcie kilku krawędzi z grafu (który tworzą groble) powstało drzewo. Teoria grafów i drzew przydaje się w wielu działach matematyki, szczególnie w działach zbliżonych do zastosowań.

Najkrótsza sieć telefoniczna łącząca kilka miejscowości tworzy drzewo (gdyby nie była drzewem, to moglibyśmy opuścić jedno połączenie, a miasta byłyby dalej połączone). Widać to na rysunku 7. Przerwanie jednej takiej sieci w dowolnym miejscu dzieli zbiór wszystkich miast — wierzchołków na dwa państwa-podzbiory, które nie mogą się ze sobą porozumiewać (bo okrężnych linii nie ma). Taką najkrótszą sieć między danymi kilkoma punktami możemy łatwo zbudować. Wszystkie odległości pomiędzy danymi miastami piszemy od najmniejszej do największej.

Jeżeli miast jest n , to tych odległości jest aż $\frac{n(n-1)}{2}$.

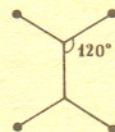
Teraz rysujemy po kolei odcinki łączące miasta (przeprowadzamy kable); jeśli dwie lub więcej odległości są równe, kolejność ich uporządkowania nie ma znaczenia.



Rys. 7 Najkrótsza sieć telefoniczna łącząca kilka miast jest drzewem

Przestrzegamy przy tym następującej zasady: jeżeli narysowanie nowego odcinka (przeprowadzenie kabla) spowodowałoby powstanie cyklu — tego odcinka nie rysujemy. Są i inne metody budowy „najkrótszego drzewa”. Każdy wierzchołek łączymy z najbliższym, a potem ... domyślcie się, Czytelnicy!

Gdy przyjmemy, że przy budowie najkrótszego drzewa między danymi punktami można dodawać nowe wierzchołki (budować stacje przekaźnikowe), problem staje się bardzo trudny. Nie wiadomo, ile i gdzie stacji zbudować. Ale na szczęście każdy bawił się w dzieciństwie w bańki mydlane. Wiemy, że wobec działania napięcia powierzchniowego błonka mydlana rozpina się na szkielecie np. z drutu tak, by mieć minimalne pole. Jeżeli dwie równoległe płyty ze szkła lub plastyku połączymy prostopadłymi sztabkami i zanurzymy całość do roztworu mydła (dobry jest także płyn do mycia naczyń) a następnie wyjmemy, to ujrzymy rozwiązanie problemu najkrótszej sieci (rys. 8).



Rys. 8 Najkrótsza sieć między czterema punktami.

Bez detergentów lub choćby zwykłego mydła musielibyśmy się napracować znacznie bardziej.

Zwróćmy na koniec uwagę na to, że linie minimalnej sieci dochodzące do „stacji przekaźnikowych” tworzą między sobą kąty 120° . To nie przypadek, ale pora już kończyć opowiadanie.

Matematyka nowym rodzajem sportu?!

Pod takim tytułem ukazał się 19 marca 1957 roku w jednej z gazet w Chicago artykuł, w którym czytamy:

Grupa inżynierów, zaniepokojona pogłębiającymi się brakami w tym zawodzie, postanowiła zorganizować dla młodzieży zawody matematyczne w posługiwaniu się suwakiem. Organizatorzy mają nadzieję sprawić, że matematyka będzie równie popularna jak sport.

Pierwsze z planowanej serii zawodów odbyły się wczoraj w podmiejskiej Wheaton High School. Startowały siedmioosobowe drużyny, wyposażone w suwaki logarytmiczne. Zawody przebiegały nieco podobnie do pisemnych konkursów ortografii. Dyktowano zadania, które uczestnicy starali się jak najszybciej rozwiązać, gdyż od tego zależała liczba zdobytych punktów.

Za The Mathematics Magazine (1958), skąd zacytowaliśmy informację o tym konkursie, przytaczamy jedno z zadań:

Kiedy Rosjanie prześcigną nas co do liczby inżynierów, jeśli wiadomo, że kształcą 81 000 inżynierów rocznie, a my 28 000?

Obecnie my mamy 642 000, a Rosjanie 396 000 inżynierów.

Odejść na emeryturę ani zgonów nie uwzględniamy.

Zwycięzcą konkursu został George Guerin z Hinsdale High School i w nagrodę dostał oczywiście suwak logarytmiczny. Obecnie jest już z pewnością poważnym inżynierem. Ciekawe, czy organizuje zawody dla młodzieży w posługiwaniu się kalkulatorem? Jeśli tak, mielibyśmy zadanie:

Ilu Amerykanów powinno stanąć jeden na drugim, aby ten ostatni mógł wskoczyć do statku „Sojuz” w jego perigeum? Zakładamy, że przeciętny wzrost Amerykanina wynosi 180 cm, perigeum Sojuza — 207 km, a rekord świata w skoku wzwyż — 235 cm. Ugięcia osób, znajdujących się na dole piramidy nie uwzględniamy.

Zarty żartami, ale do niektórych badań matematycznych trzeba rzeczywiście mieć żyłkę sportową. Matematyczne wyścigi „formuły I” czyli poszukiwanie coraz to

większej liczby pierwszej nie wymagają może od zawodników błyskawicznego refleksu i żelaznej kondycji, ale i tam i tu rekordy biją kierowcy (— naukowcy)

fabryczni na specjalnie podrasowanym sprzęcie. Najnowszy rekord należy do Davida Slowinski’ego, który na maszynie CRAY-1 osiągnął znakomity wynik

$2^{44497} - 1$. Obliczenia wykonano 8 kwietnia 1979 roku, a była to niedziela (taniej, 7500 dolarów za godzinę pracy maszyny). Nie wiemy, ile czasu to trwało, ale

szybkość CRAY-a jest wprost niewiarygodna. Dość powiedzieć, że wykazanie za pomocą tzw. testu Lucasa-Lehmera, iż liczba $2^{8191} - 1$ jest pierwsza, zajęło

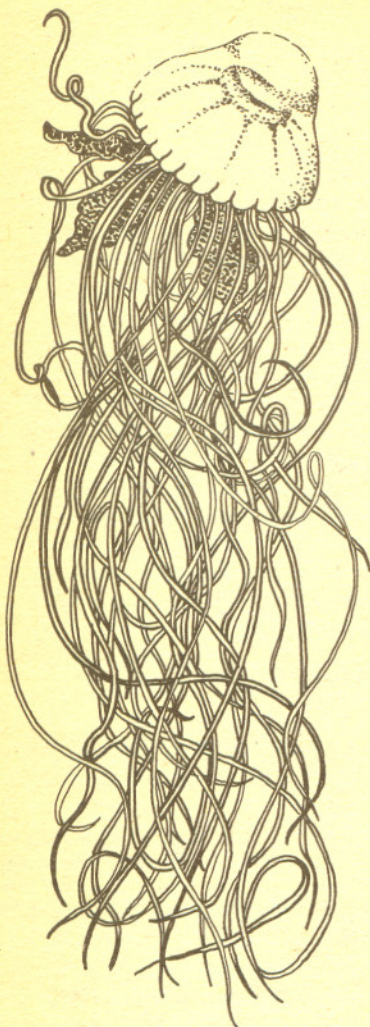
w 1959 roku 100 godzin maszynie ILLIAC-I, 5 godzin i 12 minut maszynie IBM 7090 w 1962 roku, 49 minut ILLIAC-owi II w 1963 roku, 3 minuty i 10 sekund

maszynie IBM 360/91 w 1971 roku a 10 sekund (dziesięć!) odpowiednio zaprogramowanemu CRAY-owi. Zgodnie z przyjętym w tym sporcie zwyczajem

rekord stał się oficjalny po sprawdzeniu go przez poprzedniego rekordzistę, Curta Nolla.

Historia rekordu świata w wyścigu po największą liczbę pierwszą

Liczba	Ile cyfr	Rok	Kto
$2^{127} - 1$	39	1876	Lucas
$\frac{1}{17} (2^{148} + 1)$	44	1951	Ferrier
$1 + 114(2^{127} - 1)$	41	1951	Miller + Wheeler + EDSAC 1
$180(2^{127} - 1)^2 + 1$	79	1951	Miller + Wheeler + EDSAC 1
$2^{521} - 1$	157	1952	Lehmer + Robinson + SWAC
$2^{607} - 1$	183	1952	„ „ „
$2^{1279} - 1$	386	1952	„ „ „
$2^{2203} - 1$	664	1952	„ „ „
$2^{2281} - 1$	687	1952	„ „ „
$2^{3217} - 1$	969	1957	Riesel + BESK
$2^{4253} - 1$	1 281	1961	Hurwitz + Selfridge + IBM 7090
$2^{4423} - 1$	1 332	1961	„ „
$2^{9689} - 1$	2 917	1963	Gillies + ILLIAC 2
$2^{9941} - 1$	2 993	1963	„ „
$2^{11213} - 1$	3 376	1963	„ „
$2^{19937} - 1$	6 002	1971	Tuckerman + IBM 360
$2^{21701} - 1$	6 533	1978	Noll + Nickel + CYBER 174
$2^{23209} - 1$	6 987	8 II 1979	Noll + CYBER 174
$2^{23209} - 1$	6 987	23 II 1979	Slowinski + CRAY 1
$2^{44497} - 1$	13 395	8 IV 1979	Slowinski + CRAY 1



Rozwiązanie zadania M 231.

Oznaczmy przez $v(t)$ prędkość pociągu w chwili t i niech

$$v(t) = \begin{cases} 160 \text{ km/godz gdy } t \in (0, 1/3) \cup \\ \cup (1\frac{5}{6}, 2\frac{1}{6}) \cup (3\frac{2}{3}, 4) \\ \frac{160}{3} = 53\frac{1}{3} \text{ km/godz gdy } t \in \\ \in (\frac{1}{3}, 1\frac{5}{6}) \cup (2\frac{1}{6}, 3\frac{2}{3}). \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że warunki zadania są spełnione, a równocześnie w ciągu 1,5 godziny pociąg przebywa co najwyżej

$$\frac{1}{3} \cdot 160 + \left(1\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{160}{3} = 115\frac{5}{9} \text{ km.}$$

Trwają też poszukiwania jak największych bliźniaczych (tj. różniących się o 2) liczb pierwszych. Obecny rekordowy wynik to 703-cyfrowe $1159142985 \cdot 2^{2304} \pm 1$. Sądzymy, że bliźniaczych liczb pierwszych jest nieskończenie wiele, ale dowodu jeszcze nikt nie podał. Gdyby tak rzeczywiście było to liczba

$$E = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{\ln p_n}$$

byłaby równa zero (przez p_n oznaczyliśmy n -tą kolejną liczbę pierwszą). Wprawny Czytelnik wykaże, że $E \leq 1$, ale poprawienie tego wyniku do $E < 1$ (Erdős) wymagało już pewnego wysiłku. Potem rezultat Erdősa poprawiali Rankin ($E \leq 57/59$), Ricci ($E \leq 15/16$) oraz Bombieri i Davenport ($E \leq (2 + \sqrt{3})/8 = 0,4665 \dots$). Śmierć Davenporta przerwała jego wysiłki przeskoczenia 0,46. W 1972 r. Piltiaj z Saratowa osiągnął $E \leq (2\sqrt{2} - 1)/4 = 0,4571 \dots$, a w 1973 Huxley poprawił to na 0,4463... bijąc w 1977 r. własny rezultat o blisko cztery tysiączne: $E \leq 0,4425 \dots$.

Klasyczną, ale bardzo trudną technicznie konkurencją jest Wielkie Twierdzenie Fermata. W 1637 roku Piotrowi Fermatowi nie chciało się sięgnąć po dodatkową kartkę, aby na niej zapisać dowód, że równanie

$$x^n + y^n = z^n$$

nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych x, y, z (jeśli tylko $n > 2$). Dowód, który podobno znalazł Fermat, nie mieścił mu się na magiesie czytanej przez niego książki... ale wielcy i mali matematycy do dziś nie potrafią dowieść tego twierdzenia. Od czasu do czasu ktoś tylko powiększa zbiór wykładników n , dla których równanie Fermata na pewno nie ma rozwiązań. Jednym z najnowszych wyników jest 125 000 (Samuel, Wagstaff, 1978): jeżeli rozwiązanie jest, to na pewno wykładnik n jest większy niż 125 000. Nie ma więc nadziei, aby ewentualny kontrprzykład (czyli rozwiązanie równania) znalazł komputer. Uprawianie Wielkiego Twierdzenia Fermata wymaga znacznej sprawności ogólnej i długiego treningu specjalistycznego. Liczne próby nieprzygotowanych amatorów przypominają próby bicia rekordu świata w skoku o tyczce... bez tyczki („... cholernie przeszkadza na rozbiegu...”).

Wiele samozaparcia wymaga obliczanie kolejnych (gdzieś tak od dwudziestej...) cyfr rozwinięcia π , $\sqrt{2}$, e lub innej liczby niewymiernej. Ta konkurencja przypomina trochę rzut oszczepem: znana od dawien dawna, efektywna, wyniki długie, a nieco niezdrowa i łatwo w niej o kontuzje. O ile wiemy, aktualny rekord w π pochodzi aż z 1967 roku: 500 000 miejsc po przecinku.

W trudnym roku 1943 wykładowca jednego z amerykańskich college'ów, Horace S. Uhler postanowił obliczyć wszystkie cyfry liczby $1000! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 997 \cdot 998 \cdot 999 \cdot 1000$. Z początku wystarczał mu ołówek, potem pracował na biurowym arytmometrze i co kilka miesięcy publikował swoje kolejne wyniki (100!, 150!, 200!, itd.) w The Mathematical Gazette. Alianci wygrali wojnę, nad Japonią wybuchły bomby atomowe, ukończono kanał Wołga-Don, zdobyto pierwszy szczyt ośmiotysięczny, wynaleziono maszyny matematyczne i rozpoczęto ich produkcję, a Uhler wciąż publikował: 600!, 650!, 700!, 750! (dziś z taką liczbą publikacji można zostać co najmniej docentem). Pewnego jesienno-go dnia 1953 roku spotkał w parku swego dawnego koleżę, który teraz pracował przy obsłudze maszyny UNIVAC. „Załatwię ci czas na maszynę” — obiecał. 27 października 1953 r. UNIVAC w $2\frac{1}{2}$ minuty obliczył iloczyn $751 \cdot 752 \cdot \dots \cdot 1000$ i pomnożył przez podane mu przez Uhlera 750! „To najszczęśliwszy dzień w moim życiu — powiedział Uhler, gdy zobaczył swoje $1000! = 4023872600770937735 \dots 00000$ (249 zer na końcu).

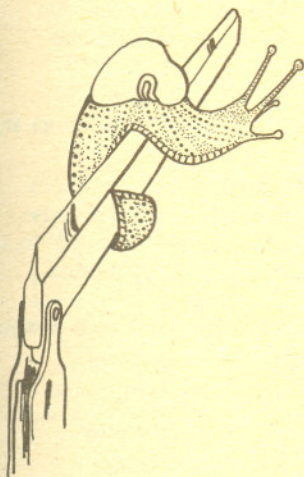
Dziś nie ma już w wielkim sporcie prawdziwych amatorów, ale upowszechnienie przyrządów elektronicznych spowodowało znaczne zwiększenie dopływu utalentowanej młodzieży do trudnych, acz dziwacznych konkurencji obliczeniowych. Redakcja Deltę nie ma pewności, czy znany jej rezultat

$$4^{10} + 6^{10} + 7^{10} + 9^{10} + 3^{10} + 0^{10} + 7^{10} + 7^{10} + 7^{10} + 4^{10} = 4679307774 \text{ (tyle cyfr, jaki wykładnik)}$$

jest rekordem świata w konkurencji, którą reprezentuje (czyli gimnastycę artystycznej), ale chyba tak jest, choć wynik jest dość stary (1963). Przestrzegamy jednak, że gimnastyka artystyczna nie jest jeszcze dyscypliną olimpijską i poprawienie cytowanego wyniku nie przyniesie rekordzście dużej sławy.

Różnica $p_{n+1} - p_n$ może też być oszacowana przez pewną potęgę p_n : gdy n dąży do nieskończoności, to przy każdym $\varepsilon > 0$ różnica $p_{n+1} - p_n$ jest wielkością nieskończenie małą względem pewnej potęgi $p_n^a + \varepsilon$, gdzie a jest pewną stałą. Najlepsze znane dziś oszacowanie dla a uzyskali w zeszłym roku D. R. Heath-Brown i matematyk warszawski H. Iwaniec. Nie należy go mylić z Haliną Iwaniec (Wisła Kraków), gwiazdą polskiej koszykówki.

Matematyk niemiecki Edmund Landau miał pocztówkę z wydrukowanym tekstem, które wysyłał autorom dowodów Wielkiego Twierdzenia Fermata: „Na stronie w wierszu jest błąd”. (Znalezienie błędu należało do docenta katedry, którą kierował Landau).



Nietrudno przedstawić liczbę 1 w postaci sumy odwrotności różnych liczb $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$. Znacznie trudniej (a jak?) zrobić to przy dodatkowym założeniu, że liczby stojące w mianownikach są nieparzyste, a nie można (dlaczego?) tego dokonać biorąc tylko liczby pierwsze. Skoro tak, to dopuścimy do startu liczby semipierwsze. Tak nazywamy liczby będące iloczynem dwu różnych liczb pierwszych (np. 6, 85, 187, 3992003). Czy można przedstawić 1 jako sumę odwrotności liczb semipierwszych? Jak to zrobić, by składników było jak najmniej? Mamy nadzieję, że każdy z naszych Czytelników spostrzeże od razu, że 48 składników wystarczy:

$$1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \frac{1}{26} + \frac{1}{33} + \frac{1}{34} + \frac{1}{35} + \frac{1}{38} + \frac{1}{39} + \\ + \frac{1}{46} + \frac{1}{51} + \frac{1}{55} + \frac{1}{57} + \frac{1}{58} + \frac{1}{62} + \frac{1}{65} + \frac{1}{69} + \frac{1}{77} + \frac{1}{82} + \frac{1}{85} + \frac{1}{86} + \\ + \frac{1}{87} + \frac{1}{91} + \frac{1}{93} + \frac{1}{95} + \frac{1}{115} + \frac{1}{119} + \frac{1}{123} + \frac{1}{133} + \frac{1}{155} + \frac{1}{187} + \frac{1}{203} + \\ + \frac{1}{209} + \frac{1}{215} + \frac{1}{221} + \frac{1}{247} + \frac{1}{265} + \frac{1}{287} + \frac{1}{289} + \frac{1}{319} + \frac{1}{323} + \frac{1}{391} + \\ + \frac{1}{689} + \frac{1}{731} + \frac{1}{901}$$

i wyrówna w ten sposób rekord świata należący od 1978 roku do Amerykanina Allana Johnsona. Ta konkurencja należy wyraźnie do lekkoatletyki (biegi długie).

Nie tracą na popularności i stare arystokratyczne sporty, wśród nich „narzutka Mrs Perkins”, rodem z samego Cambridge. Celem tej gry jest złożenie kwadratu z kwadratów mniejszych, każdy inny. Przed wojną próbowało to zrobić (bezsukcesywnie) wielu matematyków m.in. i nasz reprezentant Hugo Steinhaus, a jako pierwszy zeszył narzutkę p. Perkins (z 55 kawałków) matematyk niemiecki Sprague w 1939 roku. W rok później Stone i Tutte obyli się 28 kawałkami, przy czym przy próbach konstrukcji wykorzystywali teorię sieci elektrycznych. Dalsze kamienie milowe tej konkurencji to 26 kwadracików (Stone, Tutte, Smith i Brooks, 1945) i 24 (Wilcox, 1948). Ten ostatni rekord wytrzymał 30 lat, aż w 1978 roku Holender Dwijvestijn osiągnął 21 pkt (tj. kawałków) i ku niewątpliwemu zmartwieniu Mrs. Perkins wykazał, że mniej kwadracików nie wystarczy. Myli się jednak ten kto sądzi, że „narzutki” nie można już dalej uprawiać. Jak w koszykówce, należy tylko zmodernizować zasady i gra znów atrakcyjna:

Dany kwadrat $n \times n$ rozciąć na jak najmniejszą liczbę mniejszych kwadratów. Długości boków mają być względnie pierwszymi liczbami naturalnymi, mogą się jednak powtarzać.

Wiadomo, że w tej zmodernizowanej wersji minimalna liczba kwadratów jest nie mniejsza niż $\log_2 n$, nie przekracza jednak $\min(6 \log_2 n, 6 \sqrt[3]{n} + 1)$. Rekordy do pobicia zaczynają się od $n = 14$ (dla $n = 14, 15, 16, 17$ najlepszy wynik to 12, ale może możliwe jest 11; dla $n = 18, 19, 20, 21, 22, 23$ — 13, a czy można 12? itd.)

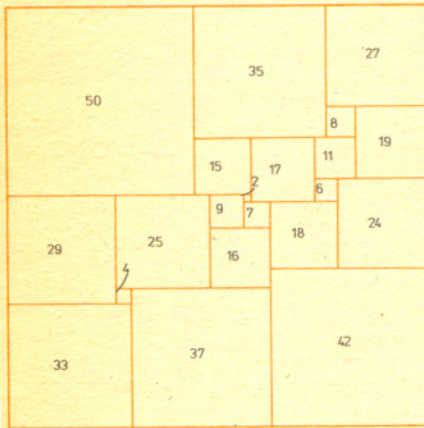
Czy można rozciąć pięciokąt foremny na 5 części tak, aby dało się z nich potem złożyć kwadrat? Spójrzmy na rysunek 1. Środek A cięciwy \overline{PS} pięciokąta $PQRST$ łączymy ze środkiem U podstawy \overline{QR} (oczywiście $\overline{AU} \perp \overline{QR}$).

Prowadzimy \overline{AV} równoległe do \overline{PT} , a ze środka Y boku \overline{TS} wystawiamy prostopadłą (albo: łączymy Y z Q) aż do przecięcia z \overline{PS} . Z tych części składamy kwadrat (rysunek 2). Ejże? Obliczymy dość łatwo (albo znajdziemy odpowiednie wzory w tablicach logarytmicznych W. Wojtowicza), że na rysunku 2

$$AP = x = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = 0,951 \dots$$

$$PN = \frac{1}{2} a = \frac{1}{4} \sqrt{2(5-\sqrt{5})} = 0,588 \dots$$

(za jednostkę długości przyjęliśmy promień koła opisanego na pięciokącie).

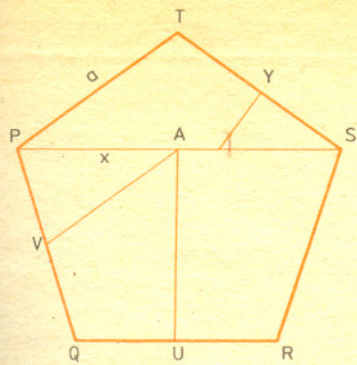


Wyobraźmy sobie, że do górnego i dolnego brzegu kwadratu podłączony jest prąd i że opór całego kwadratu wynosi R . Jeżeli kwadrat nasz jest pocięty na pewną liczbę segmentów, to opór każdego segmentu jest wprost proporcjonalny do jego długości, a odwrotnie proporcjonalny do szerokości. Zatem jeżeli te segmenty są kwadratami, to wszystkie mają jednakowy opór. Innymi słowy, pocięcie dużego kwadratu na małe kwadraciki wyznacza sieć elektryczną, w której pewna liczba oporników o tym samym oporze R jest połączona tak, by opór całej sieci też był równy R . Odwrotnie, mając taką sieć, możemy dostać pewne informacje o możliwości podziału kwadratu na mniejsze kwadraciki. Wiele informacji na ten temat zawiera m.in. artykuł Marka Penszki w „Problemach”, nr 1/1980.

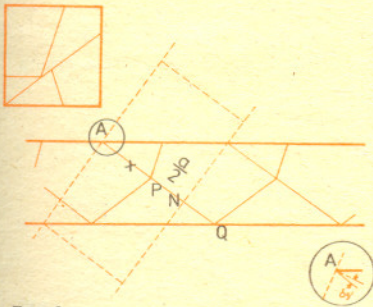


Rozwiązanie zadania M 229.

Niech dla $t \in (0, 3)$ funkcja $s(t)$ będzie określona przez: $s(t)$ — droga przejechana w czasie $(t, t+1)$. Gdyby dla wszystkich t było $s(t) < 80$ km, to droga przejechana w 4 godziny byłaby równa $s(0) + s(1) + s(2) + s(3) < 320$. Podobnie wykluczamy przypadek $s(t)$ stale większego niż 80 km. Funkcja s jest ciągła, a zatem dla pewnego t_0 mamy $s(t_0) = 80$ km.



Rys. 1



Rys. 2

Natomiast AN , jako długość boku kwadratu o polu równym polu pięciokąta jest równa

$$AN = \sqrt{\frac{5}{8} \sqrt{2(5 + \sqrt{5})}} = 1,542... \neq 0,951... + 0,588... = 1,539...$$

A zatem A , P , oraz N nie leżą na jednej prostej. Proste AP i AN tworzą kąt ok. $0^\circ 9'$. Możliwe do wykrycia dopiero bardzo precyzyjnym rysunkiem albo obliczeniami z dokładnością do czterech cyfr znaczących!

Jeżeli ktoś znajdzie nieoszukany podział pięciokąta foremnego na pięć części, z których można złożyć kwadrat, poprawi najlepszy znany do tej pory wynik o 1 pkt. Widzieliśmy oto przed chwilą, że w matematycznych sportach też można faulować.

W 1972 roku Harry Lindgren, urzędnik w Biurze Patentowym w Canberra (któż to jeszcze zaczynał swoją karierę w Urzędzie Patentowym?) wydał książkę o rozcinaniu figur (i składaniu z nich nowych). Książka ta jest dostępna w Polsce dzięki rosyjskiemu przekładowi i zawiera wiele ćwiczeń z pięknej dyscypliny sportu: jak pociąć coś na najmniejszą liczbę części, z których da się następnie złożyć inne coś? Ale to już nie tylko zabawa, bo blisko stąd do zagadnienia rozpoznawania obrazów przez komputer, a to już takie ważne, że ho, ho!

A poszukiwanie coraz szybszych algorytmów (Delta 6/1980) np. rozwiązywania układów równań liniowych? Sport to, czy poważne badania? Nie ma wątpliwości, że... no, co?

A pogoń za coraz ogólniejszymi definicjami, twierdzeniami, lepszymi metodami? A budowa dróg pozwalających na szybkie dotarcie do dziewiętych gór? Tyle o „sporcie w matematyce”. A „matematyka w sporcie”? Banki informacji, wykresy, tabele, analiza szans? Dlaczego lepiej rzucać dyskiem pod wiatr niż z wiatrem? Czy wiatr przeszkadza długodystansowcom więcej im w twarz na prostej, czy pomaga — bo na przeciwległej prostej ich popycha? Czy zawsze opłaca się wygrać, by wygrać naprawdę? Dlaczego 1:1 to „zwycięski remis”? To wszystko ważne, ale niezbyt głębokie ani nawet niezbyt interesujące matematycznie. Zaciekawiał nas jednak artykuł Michaela Deakina (*The Mathematical Gazette*, 1967) „Oszacowanie możliwości w lekkiej atletyce”. Autor analizował historię rekordu świata w biegu na jedną milę i starał się odgadnąć, po jakiej krzywej idą wyniki. Ostatnim uwzględnionym przez Deakina rekordem było 3:53,6 Michela Jazy (19 oficjalny rekord świata w tej konkurencji, licząc od 4:12,6 Tabera w 1915 r.), a krzywą, którą zaproponował była

$$Y = a - \frac{2b}{\pi} \arctg(cn + p),$$

gdzie n — numer kolejnego rekordu, Y — odchyłka wyniku od 4 minut (w dziesiątych sekundy), natomiast

$$a = 195, \quad b = 455, \quad c = 0,05, \quad p = 0,15.$$

Możemy stąd łatwo obliczyć, jaką granicę ludzkich możliwości przewidywał Deakin:

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a - \frac{2b}{\pi} \arctg(cn + p) \right) = \dots$$

Może ktoś z Czytelników w przerwach w transmisji z Moskwy sprawdzi, jak spełniły się przepowiednie Deakina sprzed 13 lat. A może zaproponujecie inną krzywą?

Tyle o podobieństwach między sportem a matematyką. A różnice? Są i różnice (zajrzyjcie do Kącika Czytelniczego).

(Sz.)

Rekord świata w biegu na milę

	4:12,8	George	1885
		(nie uznany)	
1	4:12,6	Taber	1915
2	4:10,4	Nurmi	1923
3	4:09,2	Ladoumègue	1931
4	4:07,6	Lovelock	1933
5	4:06,7	Cunningham	1934
6	4:06,4	Wooderson	1937
7	4:06,2	Hägg	1942
8	4:06,2	Anderson	1942
9	4:04,6	Hägg	1942
10	4:02,6	Anderson	1943
11	4:01,6	Anderson	1944
12	4:01,3	Hägg	1945
13	3:59,4	Bannister	1954
14	3:57,9	Landy	1954
15	3:57,2	Ibbotson	1957
16	3:54,5	Elliot	1958
17	3:54,4	Snell	1962
18	3:54,1	Snell	1964
19	3:53,6	Jazy	1965
20	3:51,3	Ryun	1966
21	3:51,1	Ryun	1967
22	3:51,0	Bayi	1975
23	3:49,4	Walker	1975
24	3:49,0	Coe	1979

NIEDZIELI • ECHA NIEDZIELI •



WSZYSTKIE WEKTORY
W JEDNYM KIERUNKU

Kącik filatelistyczny (14)

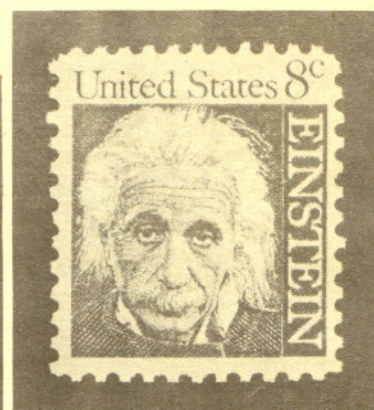
W roku ubiegłym minęło sto lat od daty urodzin *Alberta Einsteina* (1879—1955) i dzisiejszy odcinek „Kącika” poświęcimy temu wielkiemu uczonemu. Einstein urodził się w Ulm, w Niemczech. Studiował matematykę i fizykę na politechnice w Zurychu, gdzie uzyskał dyplom w roku 1900. W roku 1905 opublikował pracę p.t. „O elektrodynamice poruszających się ciał” (Zur Elektrodynamik bewegter Körper), zawierającą podstawowe koncepcje szczególnej teorii względności. W tym samym roku opublikował także prace na temat ruchów Browna i kwantowej teorii promieniowania. Prace te szybko przyniosły mu uznanie i w roku 1909 został profesorem w Zurychu. Następnie był kolejno profesorem w Pradze i Berlinie, a od 1933 roku w Stanach Zjednoczonych. Zajmował się relatywistyczną teorią grawitacji i w roku 1916 opublikował swoje wyniki, tworząc ogólną teorię względności. Następnie, aż do końca życia, pracował nad unitarną teorią pola, stanowiącą połączenie w jedną całość teorii grawitacji i teorii pola elektromagnetycznego. W roku 1921 przyznano mu nagrodę Nobla za wyjaśnienie zjawiska fotoelektrycznego w pracy z roku 1905.

Będąc jednym z ludzi, którzy przyczynili się do skonstruowania w Stanach Zjednoczonych bomby jądrowej, Einstein po zakończeniu wojny prowadził działalność pacyfistyczną, skierowaną przeciwko jądrowej.

Albert Einstein był jednym z największych fizyków wszystkich czasów i twórcą nowoczesnej fizyki. Najbardziej znany jest jako autor teorii względności, aczkolwiek ciekawym jest, że sam nie uważał jej za swoje największe osiągnięcie.

Reprodukujemy kilka nieco dawniejszych znaczków przedstawiających podobiznę Einsteina, wydanych przez poczty Polski, Szwajcarii, USA i Paragwaju. Na tym ostatnim, trójkątnym znaczku figuruje sławne równanie $E = mc^2$. W roku ubiegłym, z okazji stulecia urodzin, podobizna Einsteina ukazała się na znaczkach wielu krajów, m.in. ZSRR, USA, Indii, Włoch, San Marino, a Republika Togo wydała nawet serię składającą się z sześciu znaczków i bloku.

Jerzy BARTKE



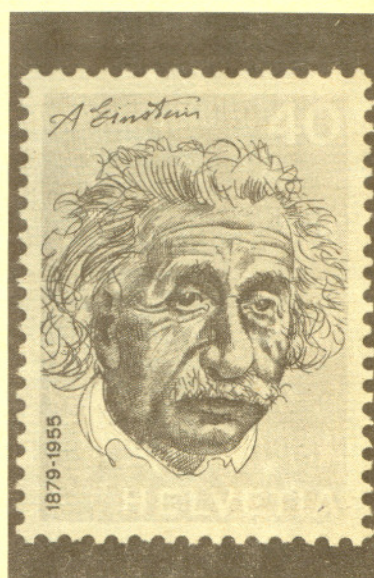
Kącik Czytelniczy

W matematyce wiele wzorów i równań wtedy się tylko sprawdza, jeśli wynik można sprowadzić do jedności lub zera. W pilce taki rezultat napęlnia żalostíą. Pamiętajcie o tym drodzy trenerzy i nie szklíjcie nam oczu wyższą matematyką (...). Jakíe metody zastosujecie, to wasza sprawa. W każdym razie pamiętajcie, że jeśli z tych metod wyjdzie jedność lub zero, to wcale nie będzie oznaczać, że skompromitowała się nauka.

(Jerzy ZMARZLIK w „Przeglądzie Sportowym”, 28.VII.1978)

$$3 = 4 + 3 + 4!$$

Na widok takiej herezji matematyk aż zakipi z oburzenia, gdy jednak cyfry przeliczy na złoto — rachunek będzie w porządku! Bowiem trzy panie z fotografii przedstawia ona Betty Cuthbert, Irene Szewińską i Dawn Fraser, przyp. Delty) równają się w sumie jedenastu złotym medalom olimpijskim! (Przegląd Sportowy, 12.III.80)



Niektóre problemy towarzyszące rozwojowi energetyki

Dr inż. Jacek
JĘDRZEJOWSKI

Jakakolwiek działalność człowieka związana jest nierozdzielnie z przetwarzaniem energii, niezbędnej dla wytwarzania środków konsumpcji. W zaraniu cywilizacji jedyną energią była siła mięśni ludzkich, później, od chwili udomowienia zwierząt, wykorzystywał je człowiek jako siłę napędową.

Istotnym postępowaniem stała się umiejętność rozniecania ognia i uzyskiwania w ten sposób energii cieplnej, która wykorzystywana była przede wszystkim dla ogrzewania. Najłatwiej dostępnym i najwcześniej stosowanym paliwem było drewno. W starożytności zużywano ogromne ilości drewna, nie tylko dla celów opałowych, lecz również dla celów wytwórczych, np. do wytapiania metali, czy wypalania ceramiki. Równocześnie wypalano ogromne obszary zalesione dla uzyskania ziemi uprawnej, tym wydajniejszej, że użyźnionej popiołem. Użytkowanie sił przyrody do celów napędowych rozpoczęło się już dawno; była to przede wszystkim energia wodna i energia wiatrów. Jeszcze w 1850 roku szacowano energię napędową, pochodzącą z mięśni ludzi i zwierząt na 94% całkowitej energii napędowej użytkowanej na świecie.

Po upływie wieku nastąpiła zasadnicza zmiana — 95% energii napędowej dostarczyły paliwa chemiczne stałe, ciekłe i gazowe, około 1% woda i zaledwie 4% ludzie i zwierzęta. Stało się to możliwe na skutek eksploatacji złóż węgla kamiennego i brunatnego, ropy naftowej i gazu ziemnego. Ostatnie dwudziestolecie dostarczyło wprawdzie nowego źródła, a mianowicie energii jądrowej, jednak udział jej w ogólnym bilansie energetycznym jest obecnie znikomy. Przewiduje się stały wzrost wykorzystania energii atomowej, której udział w roku 2000 w Polsce określa się na 20%.

Wzrost liczby ludności i coraz większe jej potrzeby, zmuszają do coraz intensywniejszego przetwarzania dóbr naturalnych w formę łatwo dostępnej energii. Chcemy lepiej mieszkać, lepiej się odżywiać, mieć coraz więcej czasu na odpoczynek i przyjemności — słowem chcemy żyć wygodniej.

Przypatrzmy się jak to zabezpieczenie potrzeb wyrażone w ilości energii uzyskanej z dostępnych naturalnych źródeł (tzw. energia pierwotna) oceniane jest przez współczesną naukę. Dla jasnego przedstawienia zagadnienia przyjmujemy umowny wskaźnik jednostkowego użycia energii pierwotnej, który określa ile kilogramów paliwa umownego należy spalić, aby zaspokoić potrzeby jednego człowieka w ciągu roku. Przez paliwo umowne rozumiemy substancję, która przy przetworzeniu na energię dostarczy 7000 kcal z jednego kg masy. Jednostkowe zapotrzebowanie energii pierwotnej wyraża się różnie w poszczególnych obszarach naszego globu, a nawet w poszczególnych krajach. Zależy ono z jednej strony od poziomu rozwoju cywilizacji, która kształtuje potrzeby i z drugiej strony od warunków ekologicznych, a więc od średniej temperatury, plenności upraw rolnych, aktywności środowiska biotycznego itp.

Wskaźnik jednostkowego zużycia energii pierwotnej na jednego mieszkańca ziemi w kg paliwa umownego

Rok	1950	1960	1970	1980
Świat	1054	1401	1870	2200
Europa	1860	2640	3720	6000
Azja	108	421	470	620
Afryka	175	215	310	450
ZSRR	brak danych	2832	4300	9000
USA	7200	8047	10500	12350
Polska	brak danych	2000	3700	5500

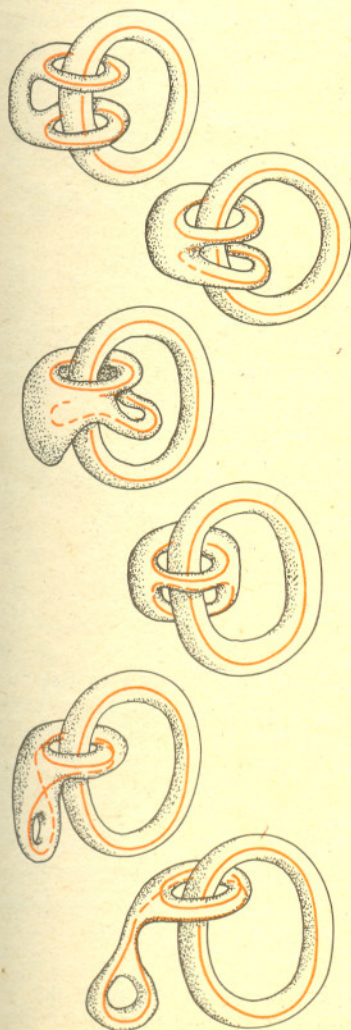
Źródłem pokrycia potrzeb energetycznych w Polsce będzie w najbliższych latach spalanie węgla kamiennego i brunatnego. Zasoby tych surowców w Polsce są dostatecznie duże i przynajmniej do roku 2000 nie musimy się obawiać ich braku. A wykorzystywać je będziemy przede wszystkim w formie energii elektrycznej wytwarzanej w elektrowniach lub w postaci ciepła wytwarzanego w ciepłowniach i elektrociepłowniach.

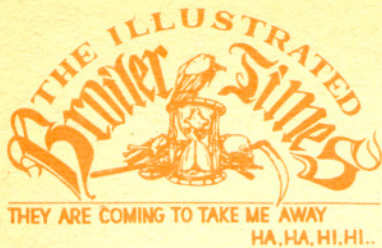
Spalanie węgla związane jest z powstawaniem dużej ilości odpadów zanieczyszczających środowisko. Należy przy tym rozróżnić odpady stałe emitowane do atmosfery w postaci pyłów lub odprowadzane na składowiska w postaci żużlu i popiołu, odpady gazowe emitowane w postaci spalin zawierających gazy toksyczne np. dwutlenek siarki, tlenki azotu oraz tlenki węgla; należy również rozpatrzyć emisję dużych ilości ciepła do otoczenia. Spalenie 1 tony paliwa umownego wiąże się z emisją do otoczenia:

od 15 do 30 kg dwutlenku siarki, od 4 do 7 kg tlenków azotu, od 100 do 300 kg pyłu, żużlu i popiołu i około 4,7 Mcal ciepła.



Rozwiązanie zadania M'230

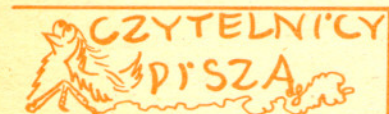




PRASA, RADIO, TELEWIZJA

Mówiono nam niejednokrotnie, że te rzeczy mają ogromne znaczenie, nie dowierzaliśmy i nie dowierzamy nadal. Już mniejsza, jak to się robi, kto to robi, kiedy to robi itd., ale ... /może zostawmy tę uwagę, to zdanie niedopowiedziane nabiera swoistego uroku i mocy. Wszyscy będą się zastanawiali, czy autor nie chciał dokończyć, czy nie wiedział jak, a tymczasem ... Nie, proszę tylko bez gadulstwa! / I mimo wszystko ktoś to czyta. Zdumiewające!

Morał: NIE TRZEBA ROZUMIEĆ SAMEMU, BY NAUCZYĆ ROZUMIEĆ INNYCH /w przeciwnym razie każda myśl dałaby się przedstawić jako ciąg malejących zmierzających asymptotycznie do zera. A to jest mimo wszystko przesada!



Dziwi mnie, że redakcja poważnego skądinąd czasopisma ma aż takie luki w wykształceniu. Przecież jest oczywiste, że miara mądrości zespołu byłaby sumą miar mądrości jego członków tylko wtedy, gdyby mądrości te były rozłączne. A jak wtedy mogliby w ogóle się dogadać?! Mogę się co najwyżej zgodzić na średnią, ale po co wtedy komitet? Wystarczy wybrać brojlera idealnie średniego i pytać go o wszystko /na przykład co sądzi o IBT/.

BN-70/8139-09

Sam ignorant! /red./

Potępiamy nieodpowiedzialne szkalowanie ciał kolegialnych. Rozum roślinie, multiplikuje się w toku obrad osiągając w ustaleniach końcowych poziom iloczynu mądrości wszystkich członków komitetu.

AW/S 9035

No, toś Pan wymyślił /red./



Młodzieńcze, polityka to nie są fakty, tylko to, co się o nich mówi.

Odprowadzanie tych odpadów do otoczenia wiąże się z powstawaniem najrozmaitszego rodzaju strat. Oszacowanie ilościowe tych strat jest bardzo trudne, w niektórych przypadkach wręcz niemożliwe.

Przekonywające jest ułożenie bilansu strat wywołanych zanieczyszczeniem powietrza:

1. Straty materiałów emitowanych do atmosfery.
2. Straty światła słonecznego i związane z tym zwiększenie zużycia energii elektrycznej na oświetlenie.
3. Straty transportu lotniczego i samochodowego związane z pogarszaniem się widoczności.
4. Korozja metali.
5. Zwiększenie zużycia maszyn i mechanizmów.
6. Niszczenie konstrukcji budowlanych.
7. Niszczenie odzieży.
8. Niszczenie roślinności.

Straty materiałowe wynikające z emisji pyłów do atmosfery są stosunkowo łatwe do określenia na drodze pomiarów wielkości emisji i fizyko-chemicznej analizy emitowanych pyłów. Klasycznym przykładem jest emisja pyłu cementowego z procesu produkcyjnego wypalania klinkieru, czy też emisja pyłów metali w procesie wytopu stali, zawierających nieraz bardzo cenne surowce metali rzadkich, stosowanych jako dodatki stopowe. Według oceny przeprowadzonej w RFN wartość pyłów emitowanych do atmosfery wynosi średnio 4 dolary na tonę.

Nie do pominięcia są straty wynikające z emisji gazów przemysłowych. Charakterystycznym składnikiem tych gazów jest dwutlenek siarki, powstający głównie w wyniku spalania paliw dla celów energetycznych. Można łatwo wykazać, że gdyby udało się odzyskać w pełni dwutlenek siarki powstający w procesach spalania w Polsce, to można by całkowicie pokryć zapotrzebowanie siarki na produkcję kwasu siarkowego. Problem odzysku nie został jednak do tej pory rozwiązany w sposób zadowalający.

Zawieszony w powietrzu pył pochłania światło słoneczne, w wyniku czego w okęgach miejskich i przemysłowych zużycie energii na oświetlenie jest o 10 do 30% większe niż na obszarach nie zanieczyszczonych. Pył zawieszony w powietrzu powoduje absorpcję i rozproszenie światła i ma również wpływ na powstanie mgieł. Na skutek tego nasilenie mgieł w ośrodkach przemysłowych i miejskich jest 2—3 razy większe niż w ośrodkach nie zanieczyszczonych. Powstawanie mgieł ogranicza widoczność, utrudnia transport, a wręcz uniemożliwia transport lotniczy. Dla przykładu można podać, że straty wynikające z jednodniowego zamknięcia dużego lotniska wynoszą setki tysięcy dolarów.

Oszacowanie strat wynikające z korozji metali jest w ogólnym bilansie niemożliwe. Korozji podlegają wszystkie konstrukcje i elementy metalowe, na które oddziałuje powietrze atmosferyczne. Główną przyczyną korozji jest obecność w atmosferze tlenków siarki, które w obecności pary wodnej tworzą kwasy silnie przyspieszające proces niszczenia metali.

Walka z korozją jest uciążliwa i pracochłonna i sprowadza się przede wszystkim do nakładania na metale powłok ochronnych. Dla przykładu można podać, że stalowa konstrukcja wieży Eiffla jest malowana farbami ochronnymi w sposób ciągły — gdy robotnicy, poczynając od szczytu, dojdą do podstawy, już górne partie wieży wymagają nakładania następnej powłoki. Przeprowadzone badania pozwalają na stwierdzenie, że w okęgach przemysłowych stopień korozji jest 1,5 do 5 razy wyższy niż w ośrodkach wiejskich. Stwierdzono również wyraźną korelację między stopniem zużycia metali a stężeniem dwutlenku siarki w atmosferze.

Zanieczyszczenia powietrza wpływają w sposób niszczący na linie przesyłowe wysokiego napięcia, skracając czas ich użytkowania w okęgach przemysłowych do 30%.

Pyły unoszące się w powietrzu powodują również zwiększenie zużycia maszyn, zwłaszcza tam, gdzie występują elementy trące się o siebie. Klasycznym przykładem są szkody w silniku samochodowym, gdzie głównym niebezpieczeństwem jest przedostawanie się pyłów do wnętrza cylindrów i szybkie zużycie gładzi cylindrowej na skutek zwiększonego tarcia gładzi cylindrowej i tłoka. Również oszacowanie strat w budynkach jest bardzo trudne. Dla przykładu można podać, że przeprowadzona w 1959 r. w Paryżu inwentaryzacja budynków wykazała, że straty roczne wynikające ze zniszczenia tynków, elewacji i dachów cynkowych wynoszą około 10 milionów dolarów. Koszty związane z częstszym praniem bielizny i odzieży wynoszą przeciętnie 20 dolarów rocznie na jednego mieszkańca, co oznacza w skali USA stratę sięgającą 4 miliardów dolarów. Oddziaływanie zanieczyszczeń powietrza na roślinność jest wielorakie — można tu wymienić bezpośrednie oddziaływanie kwasów niszczących zieleni, zatykanie pyłami porów oddechowych, zakwaszanie gleby wpływające na zmniejszenie aktywności bakterii wytwarzających azotany, a wreszcie rozpraszanie promieni ultrafioletowych, których działanie niezbędne jest w procesie fotosyntezy dwutlenku węgla.

W Polsce przeprowadzono stosunkowo dokładnie szacunek strat spowodowanych w drzewostanach emisją przemysłowych zanieczyszczeń powietrza. Inwentaryzacja szkód w lasach przeprowadzona w 1965 r. wykazała, że zagrożony jest obszar 250 tys. ha, co stanowi około 3% całkowitej powierzchni lasów, z czego 50 tys. ha przypada na obszary porażone całkowicie. Bezpośrednie straty z tytułu obniżenia przyrostu masy drzewnej oraz kosztów rekultywacji oceniono na 300 milionów zł rocznie, a w przypadku niepodjęcia zdecydowanych kroków straty te mogą osiągnąć w 1985 roku sumę 1,5 miliarda złotych.

Bardzo trudno jest ocenić straty, które ponosi organizm człowieka na skutek zanieczyszczenia powietrza. Życie i zdrowie człowieka jest bezcenne i nieprzeliczone na żadną walutę świata.

W ramach walki o zachowanie naturalnego środowiska, wszystkie środki zmierzają przede wszystkim w kierunku ochrony zdrowia i świata żyjącego, w tym człowieka. Prowadzone są bezustannie wielostronne badania naukowe nad oddziaływaniem zanieczyszczeń powietrza na ludzi i zwierzęta, które pozwalają na określenie stopnia szkodliwości i dopuszczalnych norm zanieczyszczeń powietrza. Aby normy te nie były przekroczone, trzeba w pierwszym rzędzie ograniczyć emisję zanieczyszczeń, a głównie emisję ze spalania paliw dla celów energetycznych. Możliwe są różne drogi postępowania, ale omówienie ich przekracza ramy tego artykułu i, jak mawiał Rudyard Kipling, „to już całkiem inna historia”.

Patrz w niebo

W wakacyjne wieczory, mając więcej czasu, chętniej patrzmy na niebo; górują na nim trzy jasne gwiazdy: Wega, Deneb i Altair. Dziewczyna, z którą w zeszłym roku patrzyłem na letnie gwiazdozbiory, zwróciła mi uwagę na fakt, że w dziobie Łabędzia, prawie na linii łączącej Altair z Węgą świeci gwiazda, u której najłatwiej zauważyć różnicę kolorów jej dwóch składników. Jest nią *Albireo- β Cygni*. Patrząc na ten układ przez niewielką lunetkę widzimy bardzo wyraźną różnicę barw dwóch gwiazd: jaśniejsza jest żółta, natomiast ciemniejsza jest biało-niebieska. Jest to oczywiście odbiciem temperatury, jaka panuje „na powierzchni” każdej z gwiazd. Może być ona rozgrzana do czerwoności, może być żółta albo niebieska. Jednak, podobnie jak metal w hucie, nie bywa „zielona od gorąca” — czy zastanawialiście się — dlaczego? Przecież może tak się zdarzyć, że temperatura atmosfery gwiazdy wynosi ok. 8000 K i największy strumień promieniowania emitowany jest w barwie zielonej. Na fakt, że nie obserwujemy zielonych gwiazd wpływają dwa czynniki: rozkład energii w widmie gwiazdy i czułość oka na kwanty o różnych długościach fali (przezroczystość atmosfery i czułość ewentualnych instrumentów optycznych są prawie takie same w całym zakresie widzialnym — od 4000 do 7000 Å).

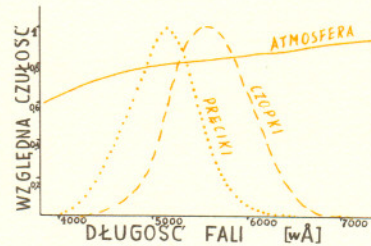
Jeśli tak się składa, że temperatura powierzchni gwiazdy wynosi 8000 K, to oprócz światła zielonego dociera do nas dość dużo kwantów o energiach wyższych i niższych. W sumie mieszanina ta tworzy wrażenie światła białego, żółto-białego lub niebieskawego. Wrażenie to zależy jednak od całkowitej jasności obserwowanego obiektu. Jeśli jest on jasny, to na bodźce świetlne reagują w oku w pierwszym rzędzie tzw. czopki, najbardziej czułe na barwę żółtą. W ciemności, ledwo widoczne obiekty dostrzegane są przez oko dzięki tysiącrotnie czulszym od czopków pręcikom, reagującym przede wszystkim na barwę niebieską. W barwie zielonej mamy zatem niewielką lukę.

Przyjrzyjcie się widmu Słońca, różni się ono niewiele od widma ciała doskonale czarnego o temperaturze 5850 K i największy strumień promieniowania przypada na barwę niebieską, zieloną i żółtą, a jednak widzimy Słońce jako żółto-białą kulę (jest bardzo jasne a jego widmo w zakresie widzialnym jest dostatecznie płaskie). Ciała o temperaturach dużo niższych lub wyższych, mające bardziej strome widma w tym zakresie, już nie będą się nam wydawały białe ani żółte (lub niebieskawe — jeśli są bardzo słabe i widzimy je w ciemności), lecz czerwone, jeśli są zimne ($T < 4000$ K) lub niebieskie jeśli są gorące ($T > 10\,000$ K). Obiekty, których temperatury są inne niż podany zakres i których widmo nie różni się drastycznie

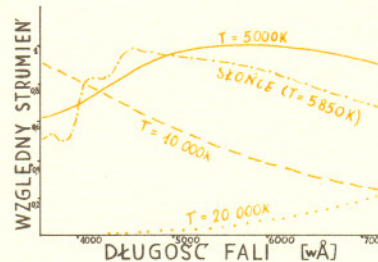
od widma ciała doskonale czarnego promieniują większość energii w tych długościach fal, na które nasz wzrok nie jest już czuły.

Gdybyście w tym miejscu przestali czytać ten artykuł i zaczęli szukać na niebie ciekawych, kolorowych par gwiazd, to poczujecie się oszukani. Bo oprócz par żółto-niebieskich (β Cyg), czerwono-niebieskich (η Per) i żółto-czerwonych (ζ Boo) znajdziecie zapewne pary, w skład których wchodzi również gwiazdy zielone. Np. zielono-niebieski układ β Sco, żółto-zielony γ Del i czerwono-zielony α Her (spróbujcie je znaleźć). Czyżbyśmy o czymś zapomnieli? Otóż nie. Po dokładniejszych badaniach każdej z „zielonych gwiazd” okazywało się, że jest to nierozdzielony przedtem układ dwóch lub trzech gwiazd żółtych i niebieskich. A każdy wie, że gdy zmieszamy żółty z niebieskim, otrzymamy zielony. Czyli nie ma jednak zwykłych, pojedynczych, zielonych gwiazd.

mgr Tomasz CHLEBOWSKI



rys. 1 — zależność przezroczystości atmosfery od długości fali oraz krzywe czułości światłoczułych elementów oka: czopków i pręcików



rys. 2 — rozkład jasności ciała doskonale czarnego o temperaturach 2500 i 1000 K i widmo Słońca o temperaturze efektywnej 5850 K.