

SPIS TREŚCI

NUMERU 6(78)

Rachować i mierzyć z głową	str.	1
Obliczamy π (I) <i>Dr Marcin E. Kuczma</i>	str.	2
Zadania	str.	4
Złożoność obliczeniowa algorytmów <i>Doc. dr Antoni Kreczmar</i>	str.	5
Promieniowanie elektromagnetyczne: punkt widzenia <i>Dr Jan A. Gaj</i>	str.	8
Teleskopy nowej generacji <i>Mgr Tomasz Chlebowski</i>	str.	10
Mała Delta	str.	12
Patrz w niebo	str.	14
Ciała niebieskie odkryte przy biurku <i>Prof. dr Józef Smak</i>	str.	16

Rysunki techniczne

Bogusław Kretkiewicz

Nasza okładka:

Roczna suma opadów na łądach
kuli ziemskiej wg. radzieckiego
Wielkiego Atlasu Świata.
Trzy części mapy wykonano
w różnych projekcjach.

wyk. *Antoni Kordos*

Dnia 18.06.1980 zmarł

prof. dr Kazimierz KURATOWSKI

członek rzeczywisty PAN

jeden z twórców topologii

współtwórca Polskiej Szkoły Matematycznej

CZŁOWIEK

który podniósł matematykę polską z ruiny po II wojnie światowej

Autor Delt

„Delta”
matematyczno-fizyczno-astronomiczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny:
doc. dr Jerzy Bartke
doc. dr Andrzej Bączynski
doc. dr Bolesław Gleichgewicht
prof. dr Kazimierz Goebel
doc. dr Bolesław Grabowski
dr Jan Hanasz
doc. dr Bolesław Iwaszkiewicz
doc. dr Tadeusz Iwiński
doc. dr Andrzej Januszajtis
doc. dr Tadeusz Jarzembowski
prof. dr Leon Jeśmanowicz
dr Henryk Kaczorek
prof. dr Marek Kuczma
mgr Andrzej Mąkowski
prof. dr Bohdan Paczyński
prof. dr Zdzisław Pawlak
prof. dr Arkadiusz Piekara
doc. dr Sławomir Ruciński
prof. dr Konrad Rudnicki
prof. dr Zbigniew Semadeni
doc. dr Grzegorz Sitarski

prof. dr Józef Smak
prof. dr Jan Stankowski
doc. dr Kazimierz Stępień
prof. dr Mieczysław Subotowicz
doc. dr Stefan Turnau
prof. dr Jerzy Wdowczyk
doc. dr Andrzej Woszczyk
prof. dr Janusz Zakrzewski —
wiceprzewodniczący
prof. dr Wojciech Żakowski —
przewodniczący
Redaguje Kolegium w składzie:
mgr Tomasz Chlebowski
Bożena Jaworska-Kordos — ilustracje
dr Marek Kordos — red. nac.
dr Andrzej Krasieński
dr Krzysztof Prażmowski — red. techn. graf.
dr Michał Szurek
mgr Krystyna Szypcio — sekr. red.
doc. dr Michał Święcki — z-ca red. nac.

Adres Redakcji
ul. Hoża 69 pok. 151,
00-681 Warszawa
Zakład Narodowy im.
Ossolińskich — Wydawnictwo
Wrocław, Oddział w Warszawie
Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.
wyd.; 2,50 ark. druk;
papier offsetowy III kl. 70 g. rol. 61 cm
Wydrukowano w Drukarni im.
Rewolucji Październikowej
Warszawa, ul. Mińska 65
Nr zam. 427/12/80 O-115

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60—, cena prenumeraty półrocznej
zł 30—

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach:
— do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i cały rok następny
— do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego.
Jednostki gospodarki uosobnionej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienie w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”.
Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW, oraz prenumeratorki indywidualni zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.
Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej

Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

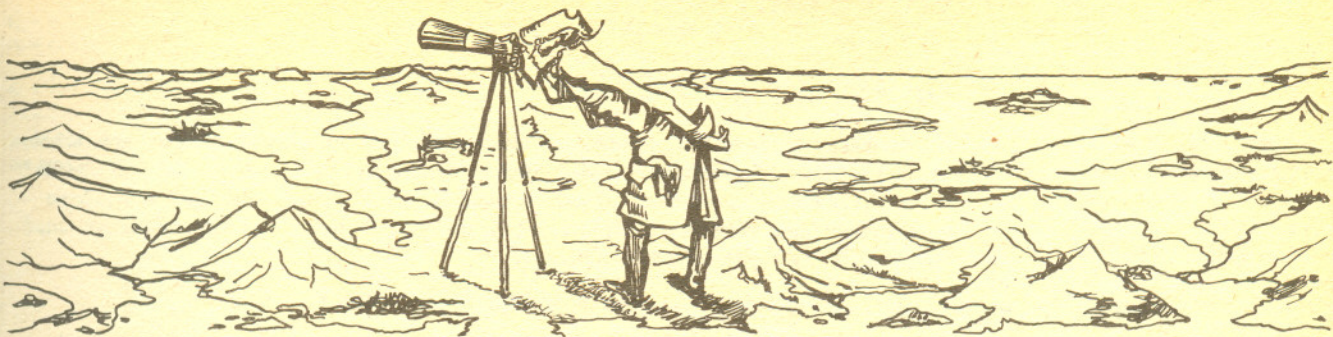
Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTA”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.
Sprzedż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.
Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Konto PKO I OM W-wa 1531-912

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław
w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa
w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7
00-068 Warszawa, Poland or with
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68,
Bundesrepublik Deutschland.
— Earls Court Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain,
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia

Cena 1 egzemplarza zł 5— nr indeksu 35723/35550



Obliczenia i przyrządy — podstawowe narzędzia weryfikacji naszych hipotez i teorii naukowych. Powszechnie uznane za najbardziej żmudną i niewdzięczną stronę pracy przedstawicieli nauk ścisłych. Często wypowiada się pogląd, że przyrządy to domena bezmyślnych choć fachowych techników, a rachunki — równie bezmyślnie zaprogramowanych komputerów. Zapomina się przy tym zwykle, że konieczność uniknięcia zbyt złożonych obliczeń zmuszała w czasach przedkomputerowych do tworzenia zupełnie nowych metod rachunkowych, które często rewolucjonizowały całą gałąź nauki. Dość wspomnieć o zasadach wariacyjnych wymyślonych przez Hamiltona jedynie w celu ułatwienia rozwiązywania trudnych zadań z mechaniki. Jest też dosyć oczywiste, że bezmyślne posługiwanie się nawet najwspanialszymi przyrządami nie ma nic wspólnego z działalnością naukową. Czyż bowiem odkrylibyśmy kiedykolwiek planetę Pluton, gdybyśmy nie wiedzieli, że (i gdzie) należy jej szukać...

A neutrino nie zostawiające żadnego śladu w żadnej aparaturze? Bezmyślny komputer odrzuciłby wszelkie reakcje zainicjowane przezeń, jako niezrozumiałe fluktuacje — gdyby odpowiednia hipoteza nie wymagała istnienia takiej cząstki.

Postaramy się w tym numerze Deltę przekonać Was, że walka z rachunkami i aparaturą nie musi wcale być nudną, rzemieślniczą pracą. Łatwo sobie wyobrazić, jak bezładniejszą pracą jest np. obliczanie liczby $1000! = 1000 \cdot 999 \cdot 998 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Jaką jednak frajdę musiał mieć Stirling, gdy odkrył, że z rozsądną dokładnością wystarczy posłużyć się wzorem

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \dots\right).$$

A jak obliczyć pole powierzchni pod krzywą, której postaci funkcyjnej nie znamy?

Kratkować drobno powierzchnię i liczyć kratki, czy też przybliżyć krzywą wielomianami? Nie! Z niezłą dokładnością otrzymamy żądany wynik wycinając powierzchnię nożyczkami i wążąc ją. Podobnie środek ciężkości nieregularnej figury płaskiej znajdziemy zawieszając ją (wraz z pionem) w dwóch różnych położeniach. Żmudne całkowanie wcale nie jest potrzebne. Przedstawione proste przykłady i pomysły mają pewną wspólną cechę charakterystyczną dla wszelkiej przyrodniczej działalności naukowej. Otrzymane powyższymi metodami wyniki są mianowicie niedokładne, choć uzyskiwaną dokładność można wedle życzenia dowolnie zwiększać. I chociaż rozwiązania ścisłe, analityczne, mają często fundamentalne znaczenie teoretyczne, to jednak metody przybliżone są zupełnie wystarczające do opisu obserwowanych wybranych przez daną teorię aspektów rzeczywistości. Żadna bowiem skończona (a więc rozsądna) teoria nie może opisać ściśle żadnego rzeczywistego obiektu. Nie ma sensu opisywanie w ramach dynamiki Newtona, wpływu powstających odształceń jabłka na jego ruch po desce. Odształcenia te to przecież zupełnie inna (zresztą nie istniejąca) teoria. Nie mają więc też sensu zbyt dokładne pomiary i obliczenia parametrów owego ruchu.

W historii fizyki znane są przykłady stosowania, w celu uzyskania wyniku liczbowego, metod nieźbyt poprawnych, czy nawet logicznie błędnych. Zaczął tę działalność sam Newton całkując i różniczkując tak, że dzisiejszemu matematykowi włosy się jeża. Wyniki były jednak poprawne. Intuicja, czy też głębokie zrozumienie? Nikt nie wie, czy zagadnienie ruchu trzech i więcej ciał niebieskich ma jednoznaczne rozwiązanie. A jednak stosuje się tu pewne metody przybliżone nie wiedząc nawet, czy odpowiedni ciąg kolejnych przybliżeń ma w ogóle jakąś granicę. I znów wyniki są znakomite. Wreszcie elektrodynamika klasyczna uznana powszechnie za jedną z najdoskonalszych teorii. A jednak... Rozważmy ruch ładunku elektrycznego w polu elektrostatycznym. Poruszający się ładunek wytwarza własne pole elektromagnetyczne i ruch odbywa się w polu sumarycznym. Własne pole może więc działać na ładunek hamując go lub przyspieszając, a przy okazji ładunek ten promieniuje — traci część swojego pola. A ponieważ elektryczne pole własne maleje ze wzrostem odległości od ładunku, jak $1/r$, więc dla $r \rightarrow 0$ owa siła samooddziaływania zmierza do nieskończoności. Co robić? Zapomnieć o elektrodynamice, czy o tej nieskończoności? Rzecz polega na tym, że w takim opisie podzieliłiśmy formalnie energię własną cząstki obdarzonej ładunkiem na energię związaną z własnym polem elektrycznym oraz resztę, przy czym energia elektryczna okazała się nieskończona. Jest to oczywiście podział nieszczyśliwy, bowiem w doświadczeniu obserwuje się zawsze energię sumaryczną. Dopiero ona musi być skończona. Owa nieznaną bliżej reszta musi więc być nieskończona tak, by suma była już porządną. Drzyjcie matematycy! Niestety dotychczas nie udało się zbudować formalizmu, w którym nie występowałby taki nieźbyt rozsądny podział.

Na zakończenie jeszcze trochę o przyrządach. A mianowicie o pięknej i prostej metodzie otrzymywania bardzo dużych energii. Jak uzyskać energię powiedzmy 100 GeV dla zderzenia protonu z protonem. Energia w układzie odniesienia środka masy E_{sm} wiąże się z energią w układzie laboratorium E_{lab} przez przybliżony związek

$$E_{sm} \simeq \sqrt{2m_p E_{lab}},$$

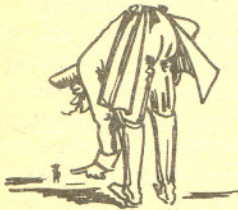
gdzie m_p to masa protonu wynosząca około 1 GeV. Tak więc w celu uzyskania $E_{sm} = 100$ GeV trzeba przyspieszyć protony do kolosalnej energii $E_{lab} = 5000$ GeV i zderzyć je z protonami spoczywającymi w laboratorium. Można jednak postąpić znacznie prościej i taniej. Wystarczą dwa akceleratory ustawione naprzeciw siebie i przyspieszające protony do energii 50 GeV. 50 GeV plus 50 GeV to przecież 100 GeV, a układ środka masy sam się zrobił. Prawda jakie to proste? Wystarczyło pomyśleć. No właśnie — pomyśleć. Mówiąc na wstępie o niewdzięcznej pracy rachunkowej i pomiarowej zapomnieliśmy wspomnieć o podstawowym przyrządzie i aparacie obliczeniowym. O naszym mózgu. Dzięki niemu bezładniejsze rachunki mogą zmienić się w ciekawą pracę a żmudne nawet pomiary nabrać głębokiego sensu.

Dr Marcin E. KUCZMA

„Kuć i orać
W dzień zawzięcie,
Bo plonów
Niema bez trudu!
Złocisty szczęścia okręcie,
Kołyszysz...
Kuć!
My nie czekajmy cudu.
Robota
To potęga ludu”.

Kazimierz Cwojdziański

Cytowany wyżej wiersz opublikował Kazimierz Cwojdziański w 1930 roku w czasopiśmie „Parametr” z następującym anonsem: Autor prosi Redakcję, by wezwała Czytelników do napisania lepszego wiersza. Za najładniejszy, elegancki i dowcipny wiersz Autor powyższego wypłaci 50 złotych polskich. Twórcy zbyt lichych wierszyków zapłacą karę do 10 złotych. Autor chce sam być sędzią! Przepis redakcji „Parametru”. Redakcja niezwłocznie zwróciła się do Autora z żądaniem zapłacenia 10 złotych kary. Przepis redakcji „Delty”. I my czekamy na liche wierszyki (100 zł).



Dla $x \in (-1, 1)$, arc $\sin x$ jest to jedyna liczba $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ taka, że $\sin \alpha = x$.
Dla $x \in \mathbb{R}$, arc $\operatorname{tg} x$ jest to jedyna liczba $\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ taka, że $\operatorname{tg} \beta = x$.

Ułamek $\frac{833719}{265381}$ ma rozwinięcie 3,14159265358... i daje wobec tego przybliżenie π z dokładnością do 12 znaków. Do zapamiętania tego ułamka mamy następujący dwuwiersz

Dividing top lot through (a nightmare)
by a number below, you approach π

Zamiast przekładać na polski, od razu zapłaciliśmy sobie 100 zł.

Nie jest naszą rzeczą analizować wartości literackie przytoczonego utworu. Jest on powszechnie znany, trafił nawet do niektórych wydań szkolnych podręczników geometrii. Dlaczego właśnie geometrii? Stworzony bowiem został według „geometrycznej” recepty zalecającej, aby kolejne wyrazy miały ściśle określoną liczbę liter; o treść mniejsza. Długości wyrazów mają odpowiadać kolejnym cyfrom zapisu dziesiętnego liczby π :

$$\pi = 3,14159265358979323846264\dots$$

Istnieje wiele innych tekstów ułożonych według tej samej recepty; niektóre z nich (w różnych językach) cytuje S. Jeleński w swojej wdzięcznej książce „Śladami Pitagorasa”, wraz z innymi ciekawostkami na temat π .

Czytelnicy wiedzą o liczbie π co nieco. Określana jako stosunek długości okręgu do średnicy, nazywana czasem *ludolfiną* — od imienia matematyka i filozofa holenderskiego Ludolfa van Ceulen (1540—1610), który się nią z upodobaniem zajmował — jest jedną z ważniejszych stałych w matematyce. Prastare geometryczne zadanie skonstruowania odcinka długości π metodami platońskimi („kwadratura koła”) jest nierozwiązalne, bowiem liczba ta nie jest *algebraiczna* — co zostało udowodnione w roku 1882 przez Lindemanna. Niealgebraiczność pociąga niewymierność. Tak więc zapis dziesiętny π nie jest skończony ani nawet okresowy. Można co najwyżej wyznaczać coraz to dalsze cyfry tego zapisu, a do ich zapamiętania używać wierszyków podobnych do przytoczonego na wstępie.

Czy jednak nasi Czytelnicy postawili sobie kiedyś pytanie: jak te cyfry wyznaczać? Skąd właściwie wiadomo, że pierwsze 23 cyfry po przecinku są właśnie takie, jak wyżej napisaliśmy? Narysować bardzo duży okrąg i bardzo dokładnie wymierzyć?

Nonsens!

Trudno również zawierzyć *metodzie doświadczalno-probabilistycznej*. Co to za metoda? Bierzemy duży arkusz papieru w linie (najlepiej całą płaszczyznę) i rzucamy nań kawałek patyczka o długości równej odstępowi między liniami. Rzucamy z wysoka (najlepiej z nieskończoności) bacząc przy tym, aby położenie patyczka po upadku na papier było całkowicie losowe, z równomiernym rozkładem prawdopodobieństwa. Wówczas prawdopodobieństwo tego, że patyczek po upadku nie przetnie żadnej linii wyraża się wielkością $1 - 2/\pi$. Wystarczy więc prowadzić ewidencję „przeciął — nie przeciął” w serii rzutów i rzucac dostatecznie długo ($n \rightarrow \infty$). Odpowiedni iloraz będzie dążył do podanej wartości... Kiedyś, w latach szczenięcych, przeprowadziłem to doświadczenie, rzucając przez godzinę (nie pamiętam, jakie było n). Wyszło mi, że π leży gdzieś między 2 a 5. Dziś, po latach, wydaje mi się, że ten wynik należy uznać za bardzo pomysłny...

Aby móc potraktować sprawę poważnie, chcąc znaleźć wymierne przybliżenie liczby π z zadaną z góry dokładnością, uciec się musimy do metod analizy matematycznej. A konkretnie — do pojęcia *szeregu i całki*.

Aparat ten zastosujemy do funkcji trygonometrycznych oraz odwrotnych do nich — funkcji *cyklometrycznych*: *arcus sinus* i *arcus tangens*.

Te ostatnie mają pewną bardzo pożyteczną własność, na której zasadza się większość znanych metod przybliżania π : ich pochodne są funkcjami elementarnymi:

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arc} \sin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{d}{dx} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Jednocześnie wartości tych funkcji w pewnych punktach „wygodnych dla rachunków” (np. w punkcie $x = 1$) wyrażają się wymiernie przez π :

$$\operatorname{arc} \sin 1 = \frac{1}{2} \pi, \quad \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1 = \frac{1}{4} \pi.$$

O tym, jak można wykorzystać zespół tych własności, przekona nas następujące rozumowanie. Rozpatrzmy postęp geometryczny $1, q, q^2, q^3, \dots$. Wiemy, że jeśli iloraz q spełnia nierówność $|q| < 1$, to suma wyrazów tego postępu równa jest $1/(1-q)$:

$$(1) \quad \frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots, \quad |q| < 1.$$

Suma po prawej stronie ma nieskończenie wiele składników; jest to przykład szeregu nieskończonego.

Spójrzmy na wyrażenie po lewej stronie nie jak na stałą wartość, ale jak na funkcję zmiennej q , przebiegającej przedział $-1 < q < 1$. Składniki szeregu po prawej stronie są funkcjami potęgowymi, o coraz większych wykładnikach naturalnych. Szereg tego typu nazywamy szeregiem *potęgowym*.

Liczbę s nazywamy sumą szeregu $\sum a_n$:
 $s = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ jeśli ciąg sum częściowych:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ &\dots \\ s_n &= a_1 + \dots + a_n \end{aligned}$$

jest zbieżny do s . Szereg jest zbieżny, jeśli ma sumę (skończoną).

Funkcja F nazywa się *funkcją pierwotną* funkcji f , jeśli f jest pochodną F . Dla funkcji x^k pierwotna ma postać

$$\frac{1}{k+1} x^{k+1} + C.$$

π liczbą algebraiczną?

Jednym z pierwiastków równania

$$11x^5 - 17x^4 - 42x^3 - 37x^2 - 27x + 42 = 0$$

jest z dokładnością do 13 cyfr po przecinku
 3,1415926535897.



Jeżeli p_n jest długością obwodu wielokąta foremnego o n bokach wpisanego w koło o średnicy 1, to oczywiście $\lim p_n = \pi$. Zbieżność ta nie jest jednak szybka, np. dla $n = 6 \cdot 2^4$ otrzymamy $p_n = 3,1415926535902\dots$, a $\pi = 3,1415926535897\dots$. Znacznie jednak szybciej do granicy π dąży ciąg

$$p'_n = p_n + \frac{1}{2^2-1} (p_n - p_{n/2});$$

jeszcze szybciej ciąg

$$p''_n = p'_n + \frac{1}{2^4-1} (p'_n - p'_{n/2}),$$

a jeszcze szybsza jest zbieżność dla

$$p'''_n = p''_n + \frac{1}{2^6-1} (p''_n - p''_{n/2}), \text{ itd.}$$

Dokładność przybliżenia $\pi = p^m$ (m przecinków na górze) jest rzędu n^{-2m} . Dla 24-kąta już p'''_{24} daje 8 prawidłowych cyfr po przecinku. Ta metoda pozwala obliczać π rzeczywiście szybko, łatwo i przyjemnie.

Wzór (1) daje więc nam przedstawienie funkcji $1/(1-q)$ w postaci sumy szeregu potęgowego. Mówimy, że funkcja ta *rozwija się* w przedziale $(-1, 1)$ w szereg potęgowy $1 + q + q^2 + q^3 \dots$. Podstawmy $q = -x^2$. Dostajemy

$$(2) \quad \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots, \quad |x| < 1.$$

Otrzymaliśmy rozwinięcie w szereg potęgowy funkcji $1/(1+x^2)$, oczywiście także w przedziale $(-1, 1)$. A funkcja ta — to nic innego, niż pochodna funkcji *arcus tangens*. Całkując równość (2) dostajemy zatem

$$(3) \quad \text{arc tg } x = x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{7} x^7 + \dots, \quad |x| \leq 1.$$

Jest to rozwinięcie funkcji $\text{arc tg } x$. Dlaczego napisaliśmy słabą nierówność: $|x| \leq 1$? Wkrótce się wyjaśni.

Przy całkowaniu może się pojawić dodatkowy składnik — tzw. stała całkowania (jeśli F jest funkcją pierwotną funkcji f , to również każda funkcja postaci $F+C$, gdzie C jest dowolną stałą, także jest funkcją pierwotną f). Sprawdzamy jednak, że w punkcie $x = 0$ obie strony wzoru (3) przyjmują wartość 0, więc nie należy dodawać do prawej strony żadnej stałej.

Całkując sumę, wystarczy scałkować wszystkie składniki i wyniki zsumować. Jest to znana reguła dla sum skończonych. Czy jednak można tak postępować z sumami nieskończonymi? Odpowiedź ogólna brzmi: nie. Ale zaraz zastrzec trzeba, że istnieją różne dodatkowe założenia, przy których postępowanie takie jest prawidłowe. Szeregi potęgowe mają tę miłą własność, że w ich przypadku wspomniane założenia są zawsze spełnione. Tak więc wyprowadzenie wzoru (3) z (2) było poprawne — przynajmniej dla $|x| < 1$.

Tożsamość (3) zachodzi zatem w przedziale $-1 < x < 1$. Ale, w odróżnieniu od szeregu we wzorze (2), szereg we wzorze (3) jest zbieżny również dla $x = \pm 1$. Z ogólnych własności szeregów potęgowych wynika, że w takim przypadku prawdziwość wzoru (3) przenosi się na te dwie dodatkowe wartości. A to właśnie jest nam potrzebne: podstawiając $x = 1$ i uwzględniając, że $\text{arc tg } 1 = \frac{1}{4} \pi$, otrzymujemy wzór

$$(4) \quad \frac{1}{4} \pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Wzór ten zawdzięczamy G. W. Leibnizowi (1646—1716). Stąd i nazwa: *wzór Leibniza*.

Jeśli teraz urwiemy sumowanie na dowolnym miejscu, czyli weźmiemy sumę częściową szeregu (4),

to otrzymamy pewną liczbę wymierną, stanowiącą przybliżoną wartość liczby $\frac{1}{4} \pi$. Przybliżenie

to jest, *wzecz jasna*, tym lepsze, im dalej urwiemy sumowanie. Możemy w ten sposób uzyskać przybliżenie z dowolną dokładnością. Tyle teoria. A praktyka? O tym za chwilę. Warto tymczasem zwrócić uwagę na niewątpliwie korzyści płynące z przedstawienia funkcji w postaci sum szeregów potęgowych. Korzyścią najbardziej chyba oczywistą — choć nie jedyną — jest możliwość znajdowania przybliżonych wartości rozpatrywanych funkcji w dowolnych punktach danego przedziału. Do wyznaczenia π użyliśmy wzoru (3), kładąc $x = 1$. Ale podstawiając za x dowolną liczbę z przedziału $(-1, 1)$ możemy w ten sam sposób wyznaczyć wartość $\text{arc tg } x$ zadaną z góry dokładnością. Wykorzystując rozwinięcia potęgowe można sporządzić tablice wartości rozmaitych funkcji.

Są tu jednak kłopoty. Okazuje się, że nie każda funkcja — nawet bardzo regularna — daje się rozwinąć w szereg potęgowy. A jeśli nawet się daje — trzeba umieć to rozwinięcie znaleźć! Nie zawsze jest to łatwe... Istnieją bardzo liczne metody rozwijania w szeregi potęgowe. Opis tych metod, wraz z wykładem teorii tych szeregów, a także ze wzorami przedstawiającymi rozwinięcia konkretnych funkcji (np. logarytm, sinus, cosinus), można znaleźć w każdym podręczniku analizy matematycznej.

Wróćmy do wzoru 4 i spróbujmy wyznaczyć przybliżoną wartość liczby π . Już zsumowanie pierwszych siedmiu składników doprowadza do dzielenia liczb sześciocyfrowych, jeśli chcemy wynik dostać w postaci dziesiętnej. A wynik ten to (pi razy oko) liczba 3,284... Daleko do celu! Kartka papieru i ołówek okazuje się być wyposażeniem niewystarczającym. Bierzymy kalkulator kieszonkowy do obliczania kolejnych odwrotności. Po stu działaniach jeszcze nie mamy ustalonej... drugiej cyfry po przecinku. Nic w tym dziwnego: oznaczmy przez s_n sumę n początkowych składników naszego szeregu. Widzimy, że ciąg wartości s_1, s_2, s_3, \dots oscyluje

wokół liczby $\frac{1}{4} \pi$, przy czym

$$|s_{n+1} - s_n| = \frac{1}{2n+1}.$$

Znaczy to, że z dwóch kolejnych wartości przybliżonych s_n, s_{n+1} co najmniej jedna daje błąd większy niż $\frac{1}{4n+2}$. A jeszcze trzeba ten błąd pomnożyć przez 4 (bo przecież interesuje nas liczba π , a nie $\frac{1}{4}\pi$). Więc nie tędy droga do obliczenia π ; lub raczej wiedzie tędy droga, ale bardzo żmudna, niewiele skuteczniejsza, niż rzucanie patyczkiem na poliniowaną płaszczyznę. Po prostu: szereg (4) okazuje się być bardzo powoli zbieżny. Więc może by spróbować z funkcją arcus sinus? Procedura jest zasadniczo ta sama, co w przypadku funkcji arcus tangens. Najpierw znajduje się rozwinięcie pochodnej $1/\sqrt{1-x^2}$, potem się całkuje. Wyprowadzenie jest jednak bardziej skomplikowane niż poprzednio, również wynik mniej zachęcający:

$$(5) \quad \arcsin x = x + \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} x^7 + \dots, \quad |x| \leq 1.$$

Po podstawieniu $x = 1$:

$$\frac{1}{2} \pi = 1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$$

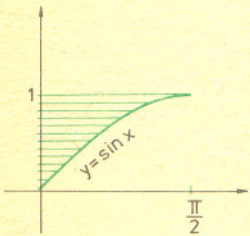
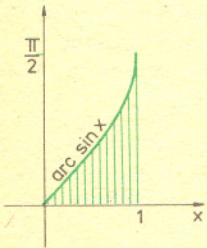
Ten szereg nie jest wcale zbieżny szybciej niż szereg (4). W połączeniu ze skomplikowaną postacią jego składników powoduje to, że do naszego celu jest on jeszcze mniej dogodny.

Interesujące jest natomiast samo przedstawienie funkcji arcus sinus w formie sumy szeregu potęgowego (5).

Gdy już mowa o funkcji arcus sinus, nadmieniamy tu, że w metodzie doświadczalno-probabilistycznej, opisaniej na początku, wspomniana wartość prawdopodobieństwa $1 - 2/\pi$ jest wynikiem obliczenia całki

$$\frac{2}{\pi} \int_0^1 \arcsin x \, dx.$$

Czytelnicy znający trochę technikę całkowania mogą bez trudu sprawdzić, że całka ta istotnie równa jest $1 - 2/\pi$. Wszystkim natomiast proponujemy zastanowienie się, dlaczego badane prawdopodobieństwo wyraża się taką właśnie całką. A za miesiąc pokażemy różne inne ładne wzory, w których występuje magiczna liczba π .



Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 226. Uzasadnić następujący sposób poprawiania przybliżonej wartości x pierwiastka kwadratowego z liczby a większej od jedności:

$$x' = x + \Delta/2 - \Delta^2/8x, \quad \text{gdzie } \Delta = \frac{a}{x} - x = \frac{a-x^2}{x}$$

Rozwiązanie na str. 16.

M 227. Siatkę linii równoległych o stałych odstępach a nałożono na krzywą na płaszczyźnie i policzono liczbę przecięć krzywej z prostymi siatki. Operację powtórzono sześciokrotnie, obracając siatkę za każdym razem o 30° . Wykazać, że łączna liczba przecięć jest w przybliżeniu proporcjonalna do długości krzywej i znaleźć współczynnik proporcjonalności.

Rozwiązanie na str. 16

M 228. Na prostokąt $ABCD$ nakładamy siatkę hiperbol równoosiowych $xy = n$ tak, aby jego boki AB i AC padły na asymptoty (osie x i y).

Jak wykorzystać ten „przyrząd” do mierzenia pola trójkąta?

Rozwiązanie na str. 6

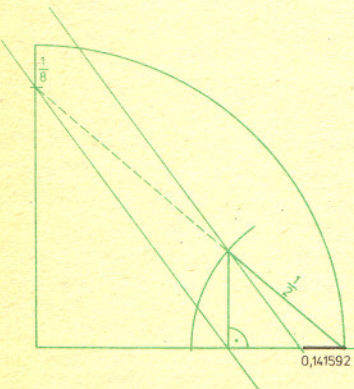
Redaguje doc. dr Michał ŚWIECKI

F 77. Dwie równoległe płyty zanurzone pionowo do połowy

- (a) w cieczy zwilżającej materiał obu płyt,
- (b) w cieczy nie zwilżającej żadnej z płyt oraz
- (c) w cieczy zwilżającej jedną i nie zwilżającej drugiej płyty.

Jaki będzie kierunek sił działających między płytami w każdej z opisanych sytuacji?

Rozwiązanie na str. 7.



π liczbą konstruowalną?

Doc. dr Antoni KRECZMAR



Jednym z głównych nurtów rozwoju współczesnej informatyki jest dążenie do konstruowania coraz lepszych algorytmów. Kiedy mówimy, że jeden algorytm jest lepszy od drugiego, mamy na myśli pewną ich własność. Może to na przykład dotyczyć większej precyzji otrzymanywnych wyników albo mniejszej liczby zmiennych pomocniczych potrzebnych do przechowywania wyników pośrednich, czyli mniejszego obciążenia pamięci komputera. A może uznamy, że dany algorytm jest lepszy, ponieważ jest bardziej uniwersalny lub dlatego, że jego sformułowanie jest bardziej zwarte i czytelne? Każda z powyżej wymienionych własności może być dokładnie sformułowana, a następnie używana jako miara jakości algorytmu. Niemniej jest pewna własność algorytmów, której światowa literatura informatyczna od ponad 10 lat poświęca najwięcej uwagi. Jest to mianowicie czas wykonania algorytmu.

W latach trzydziestych naszego stulecia matematycy zajmujący się podstawami matematyki rozwiązali wiele problemów dotyczących teorii algorytmów. Głównym pytaniem jakie sobie stawiali, a następnie starali się rozwiązać, było pytanie o istnienie algorytmu dla danego zadania. Klasyfikowano wówczas zadania na dwie grupy. Pierwszą tworzyły zadania rozstrzygalne, to znaczy te, dla których istnieje algorytm, drugą — zadania nierozstrzygalne, dla których algorytm nie istnieje.

Zadania rozstrzygalne nie wzbudzały wielkiego zainteresowania. Jeżeli stwierdzono, że jakiś problem jest rozstrzygalny, świadczyło to o jego małym stopniu skomplikowania. Cóż bowiem mogło być interesującego na przykład w rachunku zdań? Przecież rachunek zdań jest rozstrzygalny, co więcej algorytm sprawdzania, czy dana formuła rachunku zdań jest spełnialna, jest bardzo prosty. Wystarczy bowiem dla wszystkich zmiennych występujących w takiej formule podstawić na wszelkie możliwe sposoby wartości logiczne „prawda” i „fałsz” i sprawdzać, czy dla takich podstawień wartością formuły będzie „prawda”. Jeżeli formuła jest spełnialna, to na takie podstawienie trafimy. Ponieważ zaś takich różnych podstawień jest skończona ilość, to po skończonej liczbie kroków poznamy odpowiedź na zadane pytanie. Nikt nie miał jednak wówczas zamiaru stosować takich algorytmów dla bardzo skomplikowanych formuł, na przykład o 100 zmiennych.

Burzliwy rozwój technologii w latach sześćdziesiątych i siedemdziesiątych pozwolił na zbudowanie komputerów o olbrzymich pamięciach i niesłychanie szybko liczących procesorach. To wspaniałe narzędzie daje możliwość wykonywania algorytmów dla bardzo dużych zadań. Ale kwestia wyboru algorytmu nie jest już teraz obojętna, tak jak to było wtedy, gdy stosowalność algorytmu miała sens li tylko teoretyczny. Chcemy bowiem, by nasz algorytm był jak najlepszy. I okazało się, że kluczową własnością, która ma wielki wpływ na zakres wykorzystania algorytmu, jest jego czas działania.

U zarania epoki komputerów wydawało się, że wszystko, co jest rozstrzygalne, będzie mógł w przyszłości wykonać komputer. Ale niestety praktyka ostatnich dwudziestu lat dowodzi czegoś innego. Są bowiem problemy rozstrzygalne, których nawet najszybszy komputer nie może w rozsądnym czasie rozwiązać. Dlaczego tak jest i na czym właściwie polega to ograniczenie? Przedstawmy sprawę bardziej precyzyjnie.

Możemy powiedzieć, że to, co chcemy liczyć, jest opisane pewną funkcją $f: D \rightarrow W$ ze zbioru danych D w zbiór wyników W . Na przykład dla rachunku zdań zbiorem danych jest zbiór wszystkich formuł zdaniowych, natomiast zbiorem wyników jest dwuelementowy zbiór wartości logicznych „prawda” i „fałsz”. Dla danej formuły α , $f(\alpha)$ = „prawda” wtedy i tylko wtedy, gdy formuła α jest spełnialna.

Rozważmy jeszcze dla przykładu kluczowy problem algebry liniowej, tj. rozwiązywanie układu równań liniowych. Zadanie to polega na znalezieniu wektora rozwiązań $x = [x_j]$, $j = 1, \dots, n$ układu postaci $Ax = b$, gdzie A jest macierzą kwadratową $A = [a_{ij}]$, $i, j = 1, \dots, n$, a b jest wektorem wyrazów wolnych $b = [b_j]$, $j = 1, \dots, n$. Zakładamy ponadto, że A jest macierzą nieosobliwą, zatem układ równań, zgodnie z twierdzeniem Cramera, ma jednoznaczne rozwiązanie. Przyglądając się uważnie temu zadaniu możemy stwierdzić, że dane dla takiego zadania stanowią: liczba równań, wartości elementów macierzy A oraz wartości elementów wektora b . Zbiorem wyników są wektory x . Funkcja, którą chcemy liczyć jest określona następująco:

$$f(n, A, b) = x \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } Ax = b.$$

Jeżeli f jest funkcją, którą chcemy liczyć na komputerze, to musimy znaleźć algorytm Al ją liczący. Algorytm Al musi dla danego elementu d ze zbioru D policzyć wartość w ze zbioru W taką, że $f(d) = w$. Zakładamy przy tym, że algorytm ten jest jednorodny, to znaczy jeden dla całej funkcji f , a nie oddzielnie dobierany dla różnych danych d . Aby dla danej d algorytm Al wyliczył wynik w , musi on wykonać pewną liczbę operacji elementarnych. Sam rodzaj takich operacji może zależeć od tego, jakie f liczymy. Dla rachunku zdań chodzi tu o operacje logiczne, a dla układu równań liniowych będą to operacje arytmetyczne.

Tablicę współczynników układu równań

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2,$$

.....

.....

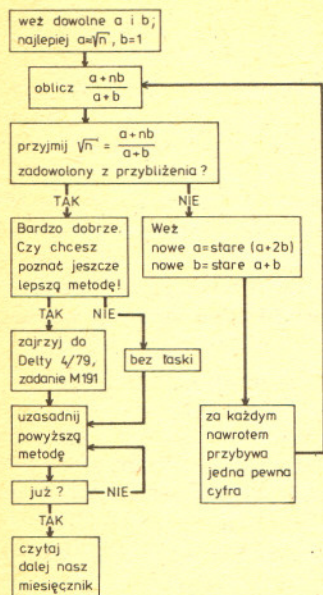
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

nazywamy jego macierzą, a układ taki zapisujemy skrótnie: $Ax = b$. W teorii układów równań liniowych dowodzi się, że warunkiem rozwiązalności powyższego układu jest, by wyznacznik jego macierzy był różny od zera.

Autor używa w artykule słowa „liczyć” w znaczeniu „obliczać”. Choć mówią tak i piszą chyba wszyscy matematycy, jest to pewne wykroczenie przeciwko regułom polszczyzny.

Jak obliczyć \sqrt{n} ?

Na przykład tak.



Ustaliliśmy, jakie elementarne operacje wykonuje algorytm $A1$ możemy określić koszt czasowy wykonania algorytmu $A1$ dla danej d . Będzie to liczba wykonanych przez algorytm $A1$ elementarnych operacji dla danej d . Tak rozumiany koszt oznaczymy przez $c(A1(d))$. Określamy teraz rozmiar danej z rozważanego przez nas zbioru danych D . Na przykład dla rachunku zdań, za rozmiar danej możemy przyjąć długość formuły, a dla układu równań liniowych może to być liczba równań. Rozmiar danej jest zawsze liczbą naturalną. Będziemy ją oznaczać dla danej d w następujący sposób: $|d|$.

Definiujemy koszt czasowy działania algorytmu dla danych długości n jako

$$T(n) = \max \{c(A1(d)) : d \in D \text{ i } |d| = n\}.$$

A więc jako globalny koszt algorytmu dla danych rozmiaru n bierzemy maksimum kosztów wykonania algorytmu dla wszystkich danych tego rozmiaru.

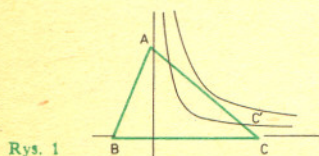
Załóżmy, że funkcja f jest wszędzie określona i że algorytm $A1$ dla każdego danych d wykonuje skończoną liczbę kroków. Wówczas $c(A1(d)) < +\infty$. Jeżeli ponadto dla rozmiaru n zbiór danych tego rozmiaru jest skończony albo $c(A1(d))$ zależy tylko od n , to $T(n) < +\infty$. Dla zadania spełnialności rachunku zdań mamy ten pierwszy przypadek, gdyż liczba różnych formuł długości n jest skończona. Dla układu równań liniowych możemy przyjąć, że czas działania algorytmu nie zależy od wielkości współczynników występujących w tych równaniach, tylko od liczby tych równań. Zatem zachodzi ten drugi przypadek.

Jeżeli już wszystko mamy ustalone, to znaczy algorytm, operacje elementarne, które wliczamy do kosztu algorytmu i rozmiar danych, to możemy precyzyjnie badać własności funkcji kosztu T . Ale własnością, która nas najbardziej interesuje, jest szybkość wzrostu tej funkcji. Im bowiem szybciej ta funkcja rośnie, tym wolniej działa nasz algorytm. I tym, co gra tu najważniejszą rolę jest rząd wielkości tej funkcji, a nie dokładne współczynniki. Jeżeli T jest rzędu n , to znaczy, że od pewnego miejsca koszt algorytmu zachowuje się zawsze jak funkcja liniowa i bez względu na to, na jakim komputerze zaprogramujemy ten algorytm, to będzie się on w sensie czasu działania zachowywał jak funkcja liniowa. Natomiast jeżeli T jest rzędu 2^n , to czas ten będzie się zachowywał jak funkcja wykładnicza zmiennej n . Spójrzmy na poniższą tabelę:

Algorytm	rzęd T	maksymalny rozmiar zadania, które komputer może policzyć w czasie 1 godziny	maksymalny rozmiar zadania po dziesięciokrotnym przyspieszeniu komputera
A_1	n	s_1	$10s_1$
A_2	$n \lg_2 n$	s_2	$\approx 10s_2$
A_3	n^2	s_3	$\approx 3,16 s_3$
A_4	n^3	s_4	$\approx 2,15 s_4$
A_5	2	s_5	$\approx s_5 + 3,3$

Rozwiązanie zadania M 228.

Przyłóżmy siatkę tak, jak na rys. 1, i oznaczmy na niej położenie wierzchołka C .

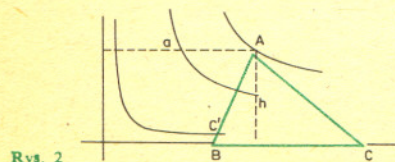


Jeżeli teraz przesuniemy ją tak, jak to wskazuje rys. 2, to wierzchołek A znajdzie się na hiperboli o równaniu $xy = 2S_{ABC}$.

Tak więc $(2 + \sqrt{3}) \frac{l}{a} < n < (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \frac{l}{a}$, czyli $3,73 \frac{l}{a} < n < 3,87 \frac{l}{a}$, $n \approx 3,8 \cdot l$.

Gdy teraz będziemy przybliżać krzywą łamonymi otrzymamy analogiczną zależność dla długości krzywej.

Uwaga: Omówiliśmy w tym zadaniu działanie tzw. longimetru Steinhausa opisanego w jego książce „Kalejdoskop Matematyczny”.



Ostatnia kolumna tej tabeli wskazuje, jak wielki wpływ na rozmiar zadania, które w określonym czasie danym nam do dyspozycji chcemy rozwiązać, ma rząd funkcji T . Jeżeli uda się nam znaleźć algorytm, którego rząd kosztu będzie mniejszy, da to znacznie większe przyspieszenie obliczeń, niż wielokrotne nawet przyspieszenie działania komputera. Konstruowanie zatem coraz szybszych algorytmów jest bardzo ważnym zadaniem stojącym przed współczesną informatyką. Ponadto w sposób naturalny pojawiają się także ciekawe pytania teoretyczne. Czy dla danego zadania określonego funkcją f istnieje algorytm optymalny, to znaczy taki, którego koszt T ma najmniejszy rząd? Koszt tego optymalnego algorytmu, o ile istnieje, nazywamy kosztem zadania. Poszukiwanie kosztu zadania polega najczęściej na konstruowaniu coraz lepszych algorytmów, czyli na tak zwanym poprawianiu oszacowania górnego, oraz na wykazywaniu, że każdy algorytm rozwiązujący to zadanie musi mieć dostatecznie duży koszt, czyli na poprawieniu oszacowania dolnego. Jeżeli oszacowanie górne i dolne spotykają się, oznacza to, że znaleziony został koszt zadania, ale jak dotąd dla niewielu zadań udało się taki koszt znaleźć.

Przedstawimy teraz analizę kosztu zadania na przykładzie dwóch problemów, o których wspominaliśmy już poprzednio. Zajmiemy się najpierw zadaniem rozwiązywania układów równań liniowych. Ponieważ wykazano, że koszt tego zadania jest równy kosztowi mnożenia dwóch macierzy kwadratowych przedstawimy, jak wygląda stan badań nad tym drugim zadaniem. Mając dane dwie macierze $A = [a_{ij}]$, $i, j = 1, \dots, n$ oraz $B = [b_{jk}]$, $j, k = 1, \dots, n$ ich iloczyn

określamy jako macierz $C = [c_{ik}]$ ($i, k = 1, \dots, n$) gdzie $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk}$. Możemy zatem

wyliczyć C wykonując (dla każdego $i, k = 1, \dots, n$) n mnożeń oraz $n-1$ dodawań. Razem n^3 mnożeń oraz $n^3 - n^2$ dodawań. Możemy więc powiedzieć, że koszt bezpośredniego algorytmu jest rzędu n^3 . Przez wiele lat sądzono, że jest to algorytm najszybszy, próbowano nawet tego dowodzić.

Eliminacja Gaussa to najbardziej popularny i znany każdemu algorytm rozwiązywania układów równań liniowych. Polega on na wyznaczeniu jednej z niewiadomych względem innych z któregośkolwiek z równań, podstawieniu do pozostałych, wyznaczeniu następnej niewiadomej itd. Koszt tego algorytmu jest rzędu n^3 .

W 1969 roku V. Strassen opublikował krótką pracę pod tytułem „Eliminacja Gaussa nie jest optymalna”. V. Strassen zauważył, jak można pomnożyć dwie kwadratowe macierze 2 na 2 używając mniej niż 8 mnożeń. Wprowadźmy oznaczenia:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \quad A \cdot B = \begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}$$

Stosując zwykle mnożenie liczymy według wzorów:

$$r = a \cdot e + b \cdot g \quad s = a \cdot f + b \cdot h \quad t = c \cdot e + d \cdot g \quad u = c \cdot f + d \cdot h$$

co wymaga 8 mnożeń i 4 dodawań.

Wykonajmy teraz te obliczenia sposobem na pozór bardzo dziwnym. Najpierw policzmy 7 następujących wyrażeń:

$$p_1 = (a+d)(e+h) \quad p_2 = (c+d)e \quad p_3 = a(f-h) \quad p_4 = d(g-e) \\ p_5 = (a+b)h \quad p_6 = (c-a)(e+f) \quad p_7 = (b-d)(g+h)$$

a następnie liczymy iloczyn według wzorów:

$$r = p_1 + p_4 - p_5 + p_7 \quad t = p_2 + p_4 \quad s = p_3 + p_5 \quad u = p_1 + p_3 - p_2 + p_7$$

Łatwo sprawdzamy poprawność powyższych wzorów. Następnie zauważmy, że ten sposób liczenia wymaga tylko 7 mnożeń, choć aż 18 operacji addytywnych (tzn. dodawań lub odejmowań). Co więcej, przy wskazywaniu poprawności tych wzorów nie posługiwaliśmy się przemiennością mnożenia (co nasz uważny Czytelnik z łatwością dostrzeże). Zatem a, b, c, d, e, f, g, h , mogą być macierzami kwadratowymi tych samych wymiarów i powyższe wzory będą w dalszym ciągu poprawne. Jeżeli mnożenie kosztuje tyle samo co dodawanie, to oczywiście pomnożenie dwóch macierzy 2 na 2 metodą Strassena nie daje zysku, wręcz stratę. Ale przecież mnożenie dwóch macierzy jest znacznie bardziej kosztowne niż ich dodawanie lub odejmowanie. Załóżmy więc, że dwie dane macierze A i B są wymiaru 2^k na 2^k i potraktujemy je jako macierze 2 na 2, gdzie a, b, c, d, e, f, g, h są podmacierzami o wymiarach 2^{k-1} na 2^{k-1} . Sprowadzamy teraz rekurencyjnie zadanie pomnożenia A przez B do zadania pomnożenia 7 razy macierzy o wymiarach dwa razy mniejszych oraz do wykonania 18 operacji addytywnych na tych podmacierzach. Koszt takiego algorytmu będzie wyrażał się następującym wzorem rekurencyjnym:

$$T(1) = 1 \quad T(2^k) = 7 \cdot T(2^{k-1}) + 18 \cdot 2^{k-2}$$

Wykazujemy łatwo przez indukcję, że $T(2^k) = 7^{k+1} - 6 \cdot 4^k$. Zatem dla $n = 2^k$ $T(n) = 7 \times 7^{k+1} - 6n^2$, czyli $T(n)$ jest rzędu $n^{1.587}$. Można tak zmodyfikować ten algorytm, aby w tym samym (co do rzędu) czasie wykonywał mnożenie macierzy kwadratowych dowolnych wymiarów, niekoniecznie 2^k . Ale $\lg_2 7$ równa się około 2,81 czyli algorytm Strassena wyprzedza zwykły algorytm, który jest rzędu n^3 .

Zastosowanie chwytu Strassena z mnożeniem macierzy o małych wymiarach starano się w dalszym ciągu wykorzystać. Dla macierzy 2 na 2 mniej niż 7 mnożeń uzyskać się nie da (wykazano to na początku lat siedemdziesiątych). S. Winogradowi udało się natomiast poprawić liczbę operacji addytywnych, mianowicie zredukował ją do 15. Może któremuś Czytelnikowi uda się znaleźć rozwiązanie Winograda, ale uprzedzam, że zadanie jest trudne. Na tym sprawa utknęła i przez prawie 10 lat nie było nowych istotnych wyników. Wydawało się nawet, że algorytm Strassena jest optymalny i koszt zadania jest rzędu $n^{1.587}$. Dopiero w 1978 roku V. Pan opublikował pracę pod tytułem „Algorytm Strassena nie jest optymalny”. V. Pan znalazł algorytm działający w czasie rzędu $n^{2.79}$. W rok później grupa czterech matematyków z Pizy zaatakowała problem w trochę inny sposób niż Strassen i Pan (praca V. Pan'a opierała się na podobnej zasadzie co algorytm Strassena) i stosując metody aproksymacyjne uzyskali rząd $n^{2.7799}$. Są także i nowsze wyniki, jeszcze nie opublikowane (podobno A. Schönhage skonstruował algorytm, którego koszt jest prawie rzędu $n^{2.5}$).

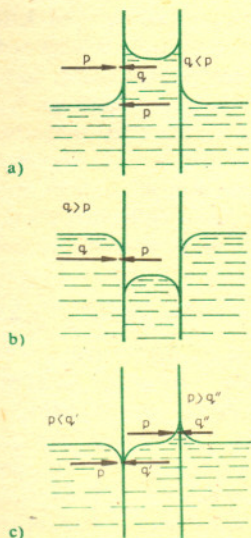
Ale jak dotąd nie znamy kosztu zadania mnożenia dwu macierzy. Jedyne znane dolne oszacowanie wynosi n^2 , gdyż tyle informacji przynoszą same dane, zatem niemożliwe jest pomnożenie dwu macierzy w mniejszej liczbie operacji arytmetycznych.

Z problemem spełnialności formuł rachunku zdań sytuacja jest jeszcze bardziej skomplikowana. Bezpośredni algorytm, o którym wspominałem na początku jest bardzo kosztowny. Wymaga on bowiem wykonania obliczeń w koszcie rzędu 2^n . Co więcej, nie znamy do dziś żadnego algorytmu rozwiązującego to zadanie w koszcie wielomianowym, to znaczy rzędu n^k dla pewnej stałej k . Znalazienie takiego algorytmu lub udowodnienie, że go nie ma jest centralnym otwartym problemem złożoności obliczeniowej. Mogłoby się wydawać, że jego znaczenie jest niewielkie, gdyż dotyczy dziedziny bardzo specyficznej, jaką jest rachunek zdań. Otóż, niestety, okazuje się, że olbrzymią większość zadań z zakresu programowania dyskretnego, kombinatoryki, optymalizacji, teorii grafów itp. może być sprowadzona do problemu spełnialności rachunku zdań. Dolne oszacowanie kosztu tego zadania wynosi n . Jak widać pomiędzy n i 2^n jest wielka luka, znacznie większa niż pomiędzy n^2 i $n^{2.5}$. Dla równań liniowych algorytm eliminacji Gaussa jest całkiem zadowalający, dla rachunku zdań nie znamy takiego zadowalającego algorytmu. Zatem i tego zadania, i do niego podobnych, wspomnianych powyżej, nie da się w ogóle rozwiązywać na komputerach, chyba że rozmiary danych są bardzo małe.



Rozwiązanie zadania F 77.

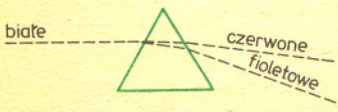
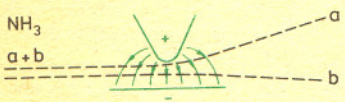
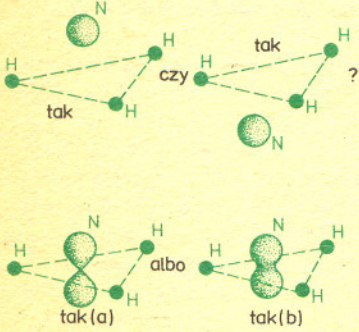
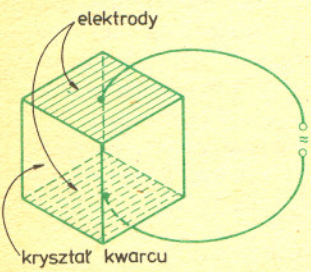
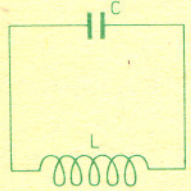
Ciśnienie w powietrzu oraz w cieczy na jej poziomej powierzchni jest równe ciśnieniu atmosferycznemu p . W związku z tym ciśnienie wywierane na zanurzoną część płyty przez ciecz tworzącą menisk wklęsły jest mniejsze od ciśnienia atmosferycznego, zaś przez ciecz tworzącą menisk wypukły musi być większe od ciśnienia atmosferycznego. Dzięki zjawisku włoskowatości nie ma równowagi ciśnień działających na zewnętrzne i wewnętrzne płaszczyzny płyty. Widać to łatwo na rysunku, którego analiza przekonuje, że płyty w przypadku (a) i (b) przyciągają się, podczas gdy w przypadku (c) odpychają.



Promieniowanie elektromagnetyczne: punkt widzenia

Dr Jan A. GAJ

Definicja: Punktem widzenia nazywamy produkt przejścia granicznego, w którym horyzont zawęża się coraz bardziej, coraz bardziej, aż wreszcie...
 Stało się to dziś rano. Borykając się jak co dzień z przerażającym moją siłą zadaniem wypędzenia z głowy resztek snu, doznałem nagle olśnienia. Cały chaos zagadnień, problemów i problemików związanych z pojęciem fal elektromagnetycznych skupił się w jeden punkt: oscylator harmoniczny. Chwila namysłu upewniła mnie, że w powstałej sytuacji muszę pisać o wykrywaniu czyli detekcji promieniowania elektromagnetycznego, mało tego, nawet w tej wąskiej dziedzinie wybrać zagadnienie selektywności wykrywania czyli umiejętności określania, z jaką częstością promieniowania mamy do czynienia. W dodatku dokonałem (nie zdradź mnie, Czytelniku) czysto tendencyjnego wyboru metod detekcji, które dostarczą poparcia moim wypaczonym poglądom.



Praktycznych metod detekcji promieniowania wybór tendencyjny

1. Fale radiowe

(1 m – 10⁴ m)

Sercem odbiornika radiowego jest obwód rezonansowy, składający się w swoim klasycznym wydaniu z kondensatora *C* i cewki indukcyjnej *L*. W obwodzie tym ładunek elektryczny po jednorazowym pobudzeniu będzie drgać z częstością własną $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.

Zmieniając parametry obwodu rezonansowego — najczęściej pojemność kondensatora — dostrajamy się do żądanej stacji. Odmianą obwodu rezonansowego jest rezonator kwarcowy: kryształ kwarcu ma określoną przez swoje parametry mechaniczne częstość drgań własnych. Drgając wytwarza on napięcie elektryczne dzięki efektowi piezoelektrycznemu i odwrotnie: przykładając zmienne napięcie o częstości jego drgań własnych do nałożonych nań metalowych elektrod można go pobudzić do drgań. Dzięki temu kryształ kwarcu może służyć jako element selektywny w odbiorniku. Wadą jego jest znikoma możliwość przestrajania czyli zmiany częstości własnej.

2. Mikrofale

(10⁻³ – 1 m)

Używa się tu również obwodów rezonansowych, wprawdzie o innym wyglądzie, ale tej samej zasadzie działania, co klasyczny obwód LC. Chciałbym jednak zatrzymać się na niezwykle ciekawym przykładzie, jakim jest maser amoniakalny. Rolę rezonatora spełniają w nim cząsteczki amoniaku. Mają one symetrię trójkątną z trzema atomami wodoru w narożach trójkąta równobocznego i atomem azotu... właśnie: trochę nad, czy trochę pod płaszczyzną trójkąta? Zależy, jak cząsteczkę odwrócimy — odpowiesz z pewnością. Niezupełnie, ponieważ — i tu widać dziw mechaniki kwantowej — atom azotu jest *zarazem* nad i pod płaszczyzną trójkąta. Ściślej — jest tam i tu z równym prawdopodobieństwem. Praktycznie wygodnie to sobie wyobrazić, że rozmyta chmura materii atomu azotu rozciąga się jak na rysunku, trochę nad i trochę pod płaszczyzną utworzoną przez wodory. Okazuje się — tu musisz mi, Czytelniku, po prostu uwierzyć — że ta chmura ma dwa stany równowagi: w jednym (a) w obszarze między atomami wodoru nie ma ani trochę atomu azotu, w drugim stanie (b) chmura atomu azotu włącza się między atomy wodoru, do czego, jak łatwo uwierzyć, potrzebna jest pewna praca, a więc energia stanu b jest nieco wyższa niż energia stanu a. Przy przejściu cząsteczki ze stanu a do b lub odwrotnie, ładunek jądra i elektronów atomu azotu, a właściwie całej cząsteczki, wykonuje drgania ze ściśle określoną częstością własną $f_0 = 2,39 \cdot 10^{10}$ Hz. Już widzisz rezonansowy charakter takiego tworu? Ale najciekawsze jeszcze przed nami. Jeżeli fala elektromagnetyczna o częstości f_0 pada na cząsteczkę w stanie a (który nazywamy podstawowym), będzie ona pochłaniana przekazując swoją energię cząsteczce w procesie absorpcji. Jeśli fala pada na cząsteczkę w stanie b, również pobudzi ją do drgań, ale wtedy drgający ładunek będzie sam wysyłał falę w zgodnej fazie z falą pobudzającą i oddawał jej energię przechodząc do stanu a. Ten proces nazywamy emisją wymuszoną. Ależ to wspaniały rezonator — powiesz. Wystarczy wybrać z amoniaku wszystkie cząsteczki w stanie b i puścić na nie fale elektromagnetyczne, a amoniak wzmocni tylko te, które mają częstość jego drgań własnych. Dokładnie na tym polega maser. Jego nazwa jest skrótem terminu angielskiego Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation — wzmocnienie mikrofal przez wymuszoną emisję promieniowania. Wydzielenie cząsteczek w stanie b odbywa się przez przepuszczenie strumienia pary amoniaku przez silne niejednorodne pole elektryczne.

3. Światło widzialne

(4 · 10⁻⁷ m – 8 · 10⁻⁷ m)

Jak świetnie wiemy, wydzielenie promieniowania o jakiejś częstości z pełnego widma światła białego może być wykonane za pomocą pryzmatu. Istota działania pryzmatu polega na tym, że współczynnik załamania szkła jest różny dla różnych częstości fali świetlnej. Oznacza to, że szkło reaguje silniej na jedne fale (fioletowe, o większej częstości) niż na inne (czerwone, o niższej częstości). Łatwo to sobie wytłumaczyć traktując zbiór atomów szkła jako oscylatory o częstości wyższej niż częstość światła widzialnego — gdzieś w nadfiolecie. Częstość światła fioletowego jest bliższa częstości własnej niż częstość światła czerwonego — stąd różnie

popudzają one atomy szkła i różnie załamują się w pryzmacie. Nawiasem mówiąc, nadfiolet jest rzeczywiście silnie pochłaniany przez szkło. Niestety jednak nie dla jednej wybranej częstotliwości, ale w szerokim obszarze widmowym. Lepiej więc traktować szkło jako zbiór oscylatorów o różnych częstotliwościach własnych w obszarze nadfioletu, co w niczym nie umniejsza słuszności poprzedniego rozumowania.

4. Promienie γ

(... - 10^{-15} m)

A gdzie tu oscylator? Oczywiście w jądrze atomowym. Zawiera ono cząstki: neutrony i protony ściśnięte potężnymi siłami jądrowymi do obszaru o rozmiarach rzędu 10^{-13} cm a więc 10^5 razy mniejszych od rozmiarów atomu. Tak wielkim siłom wiążącym odpowiadają bardzo wielkie częstotliwości własne drgań materii jądrowej. Obecność naładowanych protonów w jądrze zapewnia możliwość pobudzenia tych drgań falą elektromagnetyczną. Jeżeli więc znajdujemy pierwiastek a ściślej izotop, który pochłania badane promieniowanie γ , wiemy że częstotliwość tego promieniowania jest równa częstotliwości drgań własnych jąder izotopu.

Oscylator harmoniczny czyli teoria ci wszystko wyjaśni

Przykładem oscylatora harmonicznego jest kulka zawieszona na sprężynie. Jeżeli wychylimy kulkę o odcinek x od położenia równowagi, posłuszna prawu Hooke'a sprężyna zadziała na nią siłą F proporcjonalną do wychylenia i przeciwnie do niego skierowaną

$$F = -kx.$$

Siła ta nada kulce przyspieszenie a zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona:

$$a = \frac{F}{m} = -\frac{k}{m}x.$$

Ponieważ przyspieszenie jest pochodną prędkości względem czasu a ta z kolei pochodną położenia (tu wychylenia) względem czasu, zapisując przyspieszenie w formie drugiej pochodnej otrzymujemy zależność:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x. \quad (1)$$

Powyższe równanie jak wiadomo, opisuje ruch harmoniczny

$$x(t) = A \sin(2\pi f_0 t), \quad \text{gdzie } f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

W naszym przykładzie mamy do czynienia z oscylacjami wychylenia x . Przez oscylator harmoniczny będziemy rozumieli ogólnie twór, w którym jakaś wielkość x spełnia równanie (1), to znaczy jej druga pochodna względem czasu jest proporcjonalna do niej samej z ujemnym współczynnikiem. Ogólne, wyprowadzone z równania (1), własności oscylatora nie zależą od tego, czy jest to kulka na sprężynie, wahadło czy elektryczny obwód drgający. Dla tego ostatniego, jak można znaleźć w podręcznikach, odpowiednie równanie ma postać:

$$\frac{d^2U}{dt^2} = -\frac{1}{LC}U,$$

a więc drga w tym przypadku napięcie na obwodzie (połączonych równolegle cewce i kondensatorze).

Najbardziej nas będzie ciekawić

Reakcja oscylatora na zaburzenie

Zaburzeniem dla oscylatora mechanicznego jest siła, dla elektrycznego napięcie. Ogólnie — człon zależny od czasu, który dodajemy do (umówmy się) prawej strony równania (1):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -4\pi^2 f_0^2 x + F(t). \quad (2)$$

Będziemy rozważać zaburzenie F o sinusoidalnej zależności od czasu ale z dowolną częstotliwością f :

$$F(t) = B \sin 2\pi f t.$$

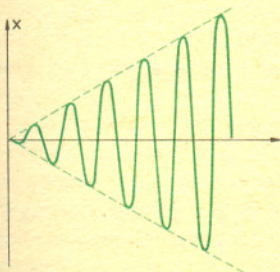
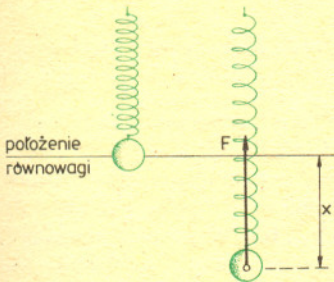
Musimy oczywiście rozważyć dwa przypadki:

1. Pobudzenie rezonansowe $f = f_0$.

Równanie (2), jak łatwo sprawdzić przez dwukrotne zróżniczkowanie i podstawienie, ma wtedy rozwiązanie

$$x(t) = -\frac{B}{4\pi f_0} t \cos 2\pi f_0 t.$$

Są to drgania podobne do harmonicznym z częstotliwością własną, ale o rosnącej proporcjonalnie do czasu amplitudzie. Widać więc, że przy pobudzeniu rezonansowym zmieniamy amplitudę, a więc energię drgań oscylatora, zatem (jeżeli w chwili początkowej był w spoczynku) wykonujemy nad nim pracę.



2. Pobudzenie poza rezonansem $f \neq f_0$.

Proszę Cię, Czytelniku o sprawdzenie przez różniczkowanie, że tym razem rozwiązaniem jest funkcja

$$x(t) = \frac{B}{4\pi^2(f_0^2 - f^2)} \sin 2\pi ft.$$

Opisuje ona drgania o częstości zaburzenia z amplitudą A stałą w czasie, ale zależną od częstości zaburzenia f :

$$A = \frac{B}{4\pi^2(f_0^2 - f^2)}.$$

Ważne są tu dwa wnioski:

1. Przy zbliżaniu się do rezonansu ($f \rightarrow f_0$) amplituda drgań wymuszonych nieograniczenie rośnie. Innymi słowy, reakcja oscylatora na zaburzenie zewnętrzne będzie tym silniejsza, im bliższa rezonansu będzie częstość zaburzenia f .
2. Siła zaburzająca nie wykonuje pracy (amplituda oscylatora, a więc i jego energia drgań, jest stała).

Wynika stąd, że jeśli czynnikiem zaburzającym ma być fala elektromagnetyczna, to jej energia nie będzie pochłaniana poza rezonansem.

Przeczytałeś więc trochę o praktyce i trochę o teorii. Porównałeś jedno z drugim?

Może zaprotestujesz: A gdzie siatka dyfrakcyjna, ugięcie promieni Roentgena na kryształach, licznik Geigera? Przecież to wszystko nie da się podciągnąć pod prymitywny model oscylatora harmonicznego! O niczym więcej nie marzę. Pomyśl i zaproponuj własny punkt widzenia. Jedno zawsze pozostanie wspólne: detekcja fal elektromagnetycznych będzie polegać na wprawieniu w ruch ładunków elektrycznych polem fali i obserwacji skutków tego ruchu — czy będzie to ciepło w termoelemencie, impuls z licznika Geigera czy głos z radiodiodniaka.

Właśnie o tym chciałbym jak najpoważniej Cię przekonać: choć długie fale radiowe na pierwszy rzut oka różnią się ogromnie od promieni γ lub światła, wszystko to są członkowie tej samej rodziny fal elektromagnetycznych.

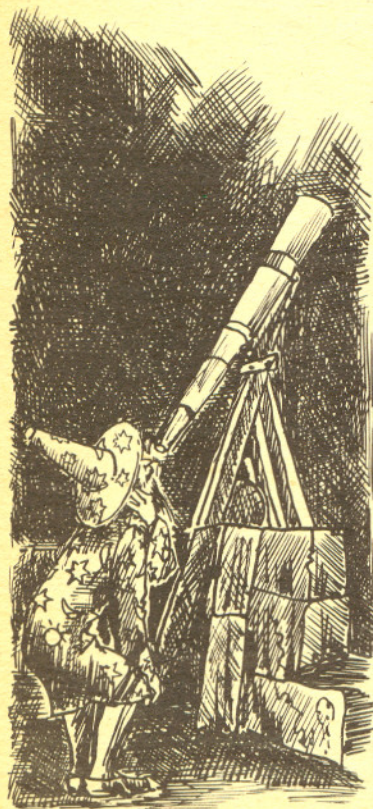
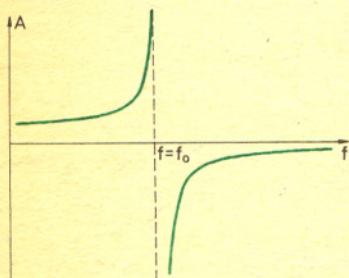
Teleskopy nowej generacji

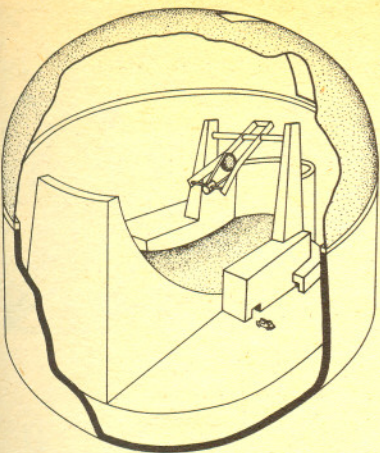
Mgr Tomasz CHLEBOWSKI

Można powiedzieć, że w ciągu trzystu lat od wynalezienia lunety, jej możliwości były większe niż możliwości wyobraźni człowieka. Za pomocą lunety dokonywano odkrywczych obserwacji, które dopiero później ogarniano rozumem — budowano teorie i modele. Jednak w ciągu ostatnich 50 lat wyobraźnia człowieka rozwinęła skrzydła. Przystały nam wystarczać lunety i małe reflektory. Zaczęto budować obserwatoria z teleskopami — gigantami, najpierw zaczęto od 2,5 metrowego teleskopu na Mount Wilson, w latach czterdziestych uruchomiono 5 metrowy reflektor na Mount Palomar. Wydawało się, że jest to już największa możliwa konstrukcja, że koszt każdego większego instrumentu będzie tak duży, że jego budowa będzie zupełnie nieopłacalna; wydawało się, że trudności techniczne będą nie do pokonania, że wpływ zakłócający atmosfery jest już ogromny, jednak w Związku Radzieckim w ostatnich latach uruchomiono jeszcze większy teleskop — o średnicy 6 m. O budowie jeszcze większych luster nikt już nie myśli.

A wyobraźnia nasza sięgnęła już dawno do granic Wszechświata, budujemy modele kosmologiczne i chcemy je weryfikować, sięgając coraz dalej, do coraz słabszych obiektów. Musimy mieć jeszcze czulsze instrumenty. Są dwa wyjścia — jednym są nowe rozwiązania techniczne, drugim — wyjście w kosmos i ostateczne pozbycie się zakłócających wpływów atmosfery. Oba mają swoje dodatnie i ujemne strony. Wielki Teleskop Kosmiczny (Large Space Telescope, „LST”) zostanie wystrzelony w 1983 lub 1984 roku, będzie miał 2,4 metra średnicy, lecz dzięki brakowi atmosfery na orbicie oraz dzięki supernowoczesnemu oprzyrządowaniu będzie skutecznie konkurował z największymi, obecnie istniejącymi, teleskopami na Ziemi. Koszt takiego przedsięwzięcia jest jednak tak ogromny, że wystrzelenia następnego na razie nikt nie projektuje. A więc pozostają nowe rozwiązania naziemne.

Głównym problemem konstrukcyjnym jest sposób uniknięcia gięcia się ogromnego lustra i tubusu w wyniku obrotu instrumentu. Zachowanie stałości kształtu zwierciadła o średnicy np. 10 m z dokładnością do ułamka długości fali świetlnej jest technicznie niemożliwe przy zastosowaniu znanych nam materiałów. Może więc wybudować zamiast jednego 10 metrowego teleskopu — cztery zsynchronizowane 5 metrowe zwierciadła — idea bardzo prosta i otwierająca przed nami właściwie nieograniczone możliwości. Rzeczywiście w tym kierunku idzie większość nowych rozwiązań.





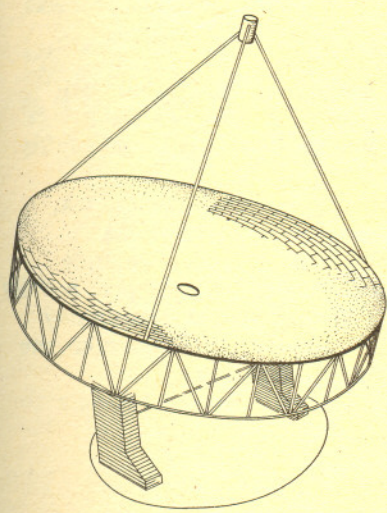
Poligonem dla tego rodzaju pomysłów jest budowany obecnie wielozwierciadłowy teleskop na Mount Hopkins w Arizonie. Ma on sześć luster, każde o średnicy 1,8 m. Zdolność zbierania światła odpowiadać ma 4,5 metrowemu teleskopowi. Synchronizacja i ogniskowanie całego systemu będzie odbywać się za pomocą laserów. Po rozwiązaniu trudności przystąpimy do budowy rzeczywiście ogromnych teleskopów wielozwierciadłowych o możliwościach odpowiadających lustrum o średnicy 25 m! Obecnie specjaliści z Kitt Peak National Observatory opracowują projekty przyszłych systemów.

Najdziwniejszym może rozwiązaniem jest projekt tzw. obrotowego buta. Główne zwierciadło o powierzchni 1750 m² (!) będzie się składało z systemu niezależnie kontrolowanych luster, każde o średnicy 1—2 m. Promień krzywizny układu ma być ok. 50 m, szerokość — 25 m, długość — 75 m. Światło padające na „but” będzie ogniskowane i odbijane przez ruchome wtórne zwierciadło (o średnicy 3,2 m) w kierunku układu detektorów.

Innym, bardziej konwencjonalnym rozwiązaniem jest projekt podobny do dzisiejszych radioteleskopów. Wielka paraboliczna antena o średnicy 25 m będzie składać się z 1032 „płatków”, z których każdy będzie niezależnie ogniskowany i kierowany. Odległość ogniskowa wyniesie 18,75 m, a w ognisku znajdzie się małe (0,5 m) elipsoidalne zwierciadło kierujące światło, zebrane z całej tarczy, w stronę urządzenia odbierającego promieniowanie. Cały instrument znajdzie się również w ogromnej kopule.

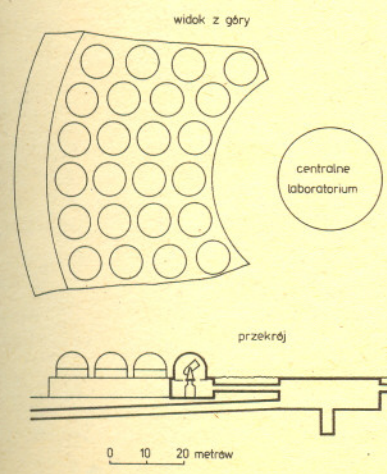
Kolejny projekt to system kilkudziesięciu teleskopów, zupełnie niezależnych, w oddzielnych kopułach, sterowanych jednak przez jeden system i kierujących zebrane światło do wspólnego ogniska. Rozważane są trzy rozwiązania:
 a) 108 teleskopów, każdy o średnicy 2,4 m lub
 b) 16 teleskopów, każdy o średnicy 6,25 m lub
 c) kilka układów omówionych poprzednio.

Wreszcie ostatnią z rozważanych propozycji jest rozwinięcie projektu już istniejącego teleskopu Mount Hopkins. Jest to kilka lub kilkadziesiąt luster przy czym położenie każdego z nich może być korygowane w miarę potrzeb. Tu myśli się nawet czasem o ogromnych zwierciadłach np. układ 6 teleskopów, każdy po 10,2 m średnicy.

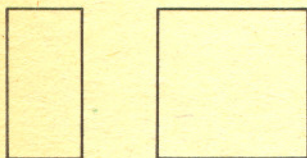
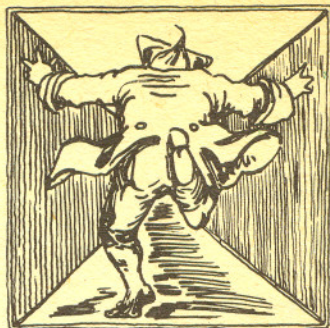


Co będzie można zobaczyć za pomocą opisanych wyżej teleskopów następnego pokolenia („NGT” — Next Generation Telescopes)? Przegląd kilku najciekawszych kandydatów, od których obserwacji spodziewamy się najbardziej rewelacyjnych wyników, rozpoczniemy od obiektów najbliższych:

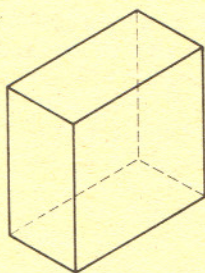
- a) Planetoidy. Dotychczasowe obserwacje pokazują, że można podzielić wszystkie planetoidy ze względu na skład chemiczny, na dwie szerokie klasy — obiekty kamienne i węglowe. Podczas gdy pierwsze z nich są stosunkowo dobrze zbadane, to spośród drugich — które są właściwie czarne — tylko największe dostępne są dotychczasowym teleskopom. Badania planetoid mają ogromne znaczenie przy rozważaniu problemu powstania układu słonecznego, ponieważ pochodzą one prawdopodobnie z wczesnego okresu kondensacji chmury pyłowej w czasie powstawania układu planetarnego.
- b) Wielkie planety. Nowy przyrząd pozwoli na dostrzeżenie szczegółów wielkości 1'' łuku na tarczach planet, oraz określenie prędkości wiatru w ich potężnych atmosferach z dokładnością do 10 m/s, co pozwoli na rozwinięcie nowej gałęzi wiedzy — dynamiki atmosfer.
- c) Najdalsze planety i księżyce. Za pomocą przyszłego teleskopu będzie można rozstrzygnąć problem istnienia atmosfery u Plutona oraz określić skład chemiczny, rozkład ciśnienia i temperatur w atmosferach dalekich planet i Tytana — największego księżycy Saturna.
- d) Najśłabsze gwiazdy. Białe karły i mało masywne, zimne czerwone karły typu M dotychczas nie doczekały się dokładnych obserwacji, teleskop następnej generacji umożliwi nam upewnienie się, jak dużo jest w naszej okolicy tych najczęściej występujących, bardzo starych gwiazd oraz dokładne badania otoczek pyłowych wokół nich.
- e) Badania spektrometryczne. Dzięki ogromnej powierzchni zwierciadeł można będzie otrzymywać dobre widma 100-krotnie słabszych gwiazd niż dotychczas; będzie to miało duże znaczenie dla rozwoju naszej wiedzy o polach magnetycznych gwiazd, składzie chemicznym ich atmosfer, prędkościach radialnych gwiazd i galaktyk.
- f) Kwazary. Tu sięgniemy chyba do „granic Wszechświata”. Dzięki możliwości obserwacji również w podczerwieni będziemy mogli mierzyć i dokładnie analizować dużo większe „przesunięcia ku czerwieni” niż dotychczas.



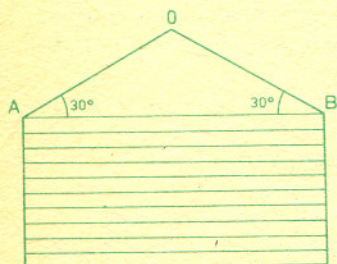
25 metrowy teleskop, współpracujący z elektronicznymi detektorami nowej generacji będzie mógł „sięgnąć” do gwiazd 27 wielkości gwiazdowej. Możliwe, że przy pomocy tego systemu będziemy mogli odkryć bardziej bezpośrednio niż dotychczas jaśniejsze planety krążące wokół bliskich gwiazd. Nowy teleskop NGT, teleskop kosmiczny LST i największe anteny radioteleskopów będą wyznaczać granice możliwości „nowoczesnych lunet” na najbliższe kilkadziesiąt lat. Nie mają one już szans na dogonienie wyobraźni.



Rys. 1



Rys. 2



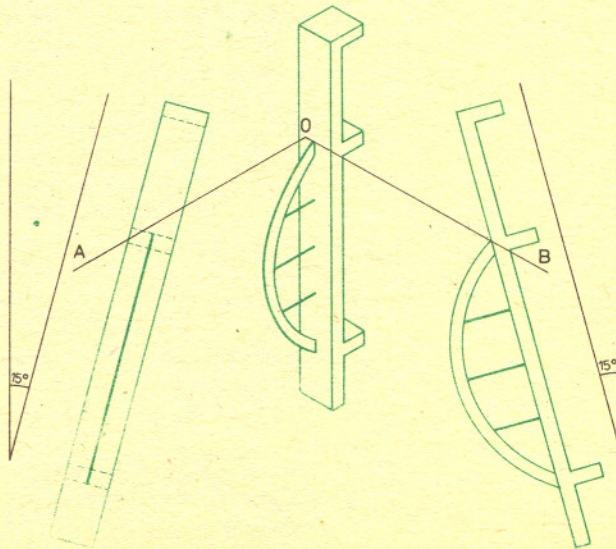
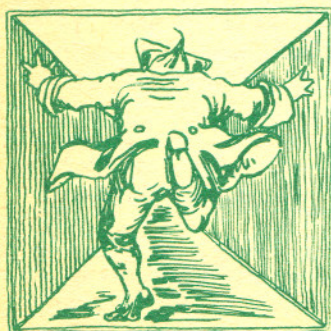
Rys. 3

Nowy przyrząd

Wprawdzie można się zgodzić, że rys. 1 przedstawia prostopadłościan, ale przyznacie chyba, że na rys. 2 ten sam prostopadłościan wygląda o wiele bardziej „przestrzennie”. Ale niestety, wygodniccy kreślarze raczą nas zwykle rysunkami takimi, jak ten pierwszy. Możemy jednak, korzystając z prostego „przyrządu” konstruować łatwo taką perspektywę równoległą na podstawie „rzutów prostopadłych”.

Przyrząd nasz to po prostu kawałek kalki technicznej lub innej folii wycięty tak, jak to przedstawia rys. 3 z naniesioną siatką linii równoległych. A posługujemy się nim tak:

„Rzuty prostopadłe” układamy na kartce papieru tak, jak to przedstawia rys. 4. Przesuwając teraz naszą „ekierkę” tak, by jej dolny brzeg był stale równoległy do dolnego brzegu kartki a ramiona OA i OB przechodziły przez odpowiadające sobie punkty rzutów, zaznaczamy kolejne położenia wierzchołka O — będą to poszukiwane przez nas punkty „perspektywy równoległej”. Linie narysowane na kalce ułatwiają nam zachowanie równoległości położenia „ekierki”.



Rys. 4

O błonce oliwnej



Na pewno często obserwowaliście ciekawe własności baniek mydlanych i innych błonek utworzonych z wody mydlanej. Pisaliśmy już o tym w Delcie. Teraz zajmiemy się innymi błonami, które powstają z oliwy i innych tłustych płynów na powierzchni wody na skutek niejednakowego przyciągania wzajemnego cząsteczek wewnątrz płynu oraz cząsteczek płynu i wody. Dzięki tej różnicy tłuste płyny łatwo oddzielają się od wody i niechętnie rozpuszczają się w niej.

Na czystą, wolną od wszelkich tłustych zanieczyszczeń, powierzchnię wody napyłamy cienką warstwą talku lub innego proszku. Zanurzamy cienką igielkę szklaną w oliwie i, po prawie całkowitym jej wytarciu, dotykamy zatłuszczonym końcem powierzchni wody. Dokoła igły tworzy się momentalnie krąg wolny od proszku. Powstaje cieniutka błonka oliwy o grubości wynoszącej parę dziesięciomilionowych części centymetra — rzędu rozmiarów jednej cząsteczki oliwy. Przy dostatecznie małej ilości oliwy i równomiernym napyleniu powierzchni wody błonka oliwna tworzy całkiem regularne koło. W ten sposób oliwa dąży do utworzenia możliwie najkrótszej granicy z powierzchnią wody. Większa kropla oliwy powoduje oczyszczenie z pyłu większego obszaru powierzchni. I tak za pomocą niewielu kropeł możemy oczyścić powierzchnię wody w dużej wannie. Przez kilkakrotne puszczenie maleńkich kropełek możemy też osiągnąć stan, w którym warstwa pyłu na powierzchni została w kilku miejscach porozrywana na drobne strzępy a pozostała powierzchnia nie jest całkowicie pokryta błoną oliwy. Dotknijmy teraz zatłuszczoną igłą powierzchni w pobliżu jednego ze strzępów pyłu. Zauważymy wówczas jak raptownie strzęp ten zostaje zepchnięty ze swojego miejsca. Świadczy to o bardzo szybkim rozprzestrzenianiu się błony.

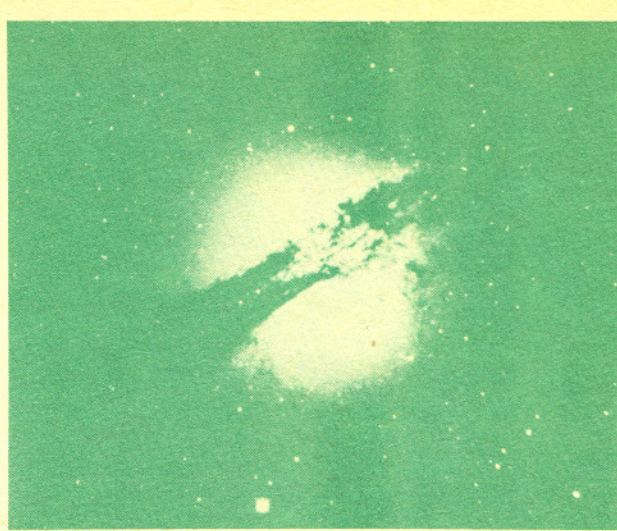
To samo zjawisko jest przyczyną występowania gwałtownych ruchów kryształków kamfory rzuconych na powierzchnię wody. Kamforę możemy otrzymać przez zostawienie na jakiś czas otwartej buteleczki spirytusu kamforowego. Spirytus wtedy szybko odparuje. Rzucone na wodę kryształki rozpuszczają się a powstający roztwór gwałtownie rozprzestrzenia się po powierzchni i kawałek kamfory zostaje odrzucony jak rakieta na czyste miejsce. Po pokryciu całej powierzchni wody roztworem kamfory ruchy kryształków ustają. Gdy puścimy na wodę lekką łożeczkę z przyczepionym z tyłu kawałkiem kamfory, łożeczka szybko popłynie. Ruch łożeczki oraz pływających kawałków kamfory ustanie jednak nagle, gdy na wodę puścimy nieco oliwy.

Wszyscy pewno słyszeli o uspokajaniu wzburzonych fal morskich za pomocą oliwy. Można zaobserwować to w wannie wypełnionej wodą, której powierzchnię wprawimy ręką w gwałtowny ruch. Część powierzchni pokryta oliwą okaże się znacznie spokojniejsza. To znów przejaw znacznej obojętności cząsteczek wody na cząsteczki oliwy. Rozhuśtana powierzchnia wody ma bowiem duże trudności w przekazaniu swych ruchów dużej, gładkiej błonce oliwy, która pływa po wierzchu jak duża elastyczna tratwa.

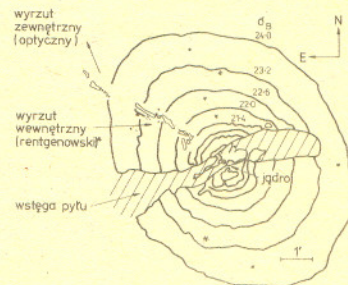
Czerwiec jest miesiącem o najkrótszych nocach na naszych szerokościach geograficznych. Jeśli nie jest to najlepszy miesiąc również pod względem pogody, to właśnie teraz technicy przystępują do napraw i konserwacji teleskopów i innych przyrządów astronomicznych. Jest więc trochę czasu na obejrzenie wyników pracy różnych teleskopów. Obok zamieszczamy kilka zdjęć obiektu znajdującego się w gwiazdozbiore Centaura, który wieczorem góruje na naszym niebie. Słowo „góruje” zostało tu może użyte trochę łą wyrost, ponieważ wieczory czerwcowe są jedyną okazją zobaczenia tylko północnej części tej konstelacji tuż nad południowym horyzontem.

Obiekt przedstawiony na zdjęciu 1 ma prozaiczną nazwę NGC 5128; jest to gigantyczna galaktyka eliptyczna przecięta wstęgą ciemnej materii pyłowej. Dziwny kształt galaktyki zaobserwował pierwszy Herschel w 1847 r. i od tego czasu powstało wiele teorii próbujących tłumaczyć egzotyczny wygląd NGC 5128. Może to pozostałość po zderzeniu galaktyki spiralnej i eliptycznej? Może w jądrze układu nastąpił ogromny wybuch, któremu towarzyszył wyrzut wielkiej ilości masy w określonych kierunkach — obserwujemy przecież taki wyrzut w kierunku północno-wschodnim (rys. 2). Dotychczas nie udało się udzielić odpowiedzi na pytanie, jaki jest mechanizm aktywności galaktyki. Obserwacje w innych długościach fal dostarczają nam nowych informacji na temat NGC 5128. Rys. 3 przedstawia obraz radiowy obiektu nazwanego Centaurus A, który okazał się pokrywać z naszą dziwną galaktyką. Dzięki badaniom radiowym wiemy o istnieniu pól magnetycznych w ogromnych przestrzeniach wokół aktywnego jądra. Jest to, jak widać, zupełnie inny obraz niż zdjęcie optyczne.

W poszukiwaniu dalszych informacji sięgnięto do zupełnie innych długości fal — do promieni Rentgena. Ponieważ atmosfera ziemska jest zupełnie nieprzezroczysta dla promieni X — zdjęcia wykonano z pokładu specjalnego satelity przeznaczonego do badań źródeł rentgenowskich — EINSTEIN'a (HEAO-2). Obraz, jaki uzyskano dzięki temu satelicie (rys. 4) jest znowu zupełnie inny. Widać bardzo jasne jądro i słabą symetryczną otoczkę.



Rys. 1

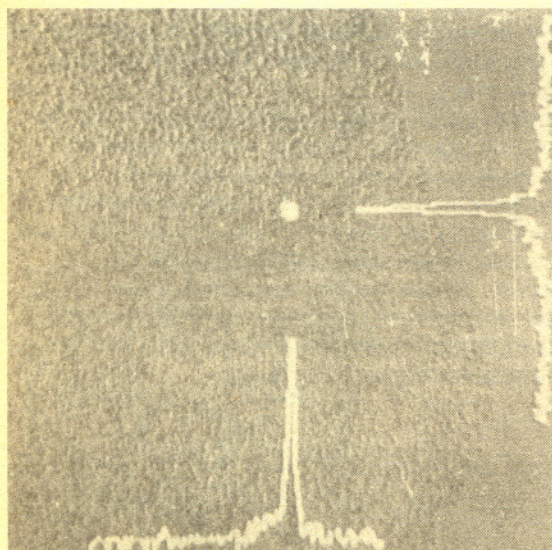


Rys. 2

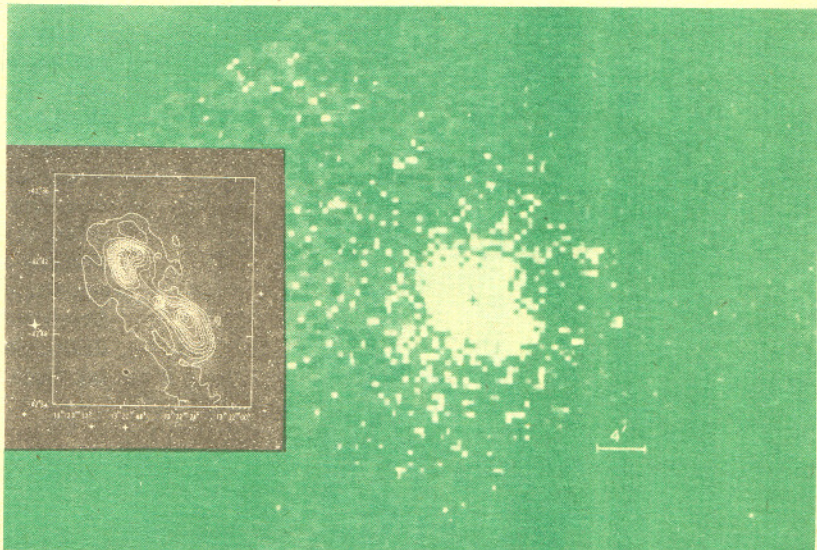
Używając przyrządów o większej zdolności rozdzielczej (rys. 5) możemy dopatrzeć się również „wąsa” w kierunku północno-wschodnim, podobnie jak na dokładnych zdjęciach optycznych, chociaż bliżej jądra (fotony rentgenowskie mają dużo większą energię niż optyczne).

Prawdopodobnie dane uzyskane z analizy zdjęć wykonanych dzięki zastosowaniu najróżniejszych technik obserwacyjnych pozwolą nam na zbudowanie modelu aktywnych jąder galaktyk, zgodnego ze wszystkimi testami obserwacyjnymi.

mgr Tomasz CHLEBOWSKI



Rys. 3



Rys. 5 (wmontowany)

Rys. 4

W numerze 10/79 przedstawiliśmy sposób szybkiego podnoszenia liczb do kwadratu. Pan Zygmunt Bartkowski z Warszawy napisał w związku z tym, że sposób ten w nieco zmodyfikowanej wersji opisany był w książce A. H. Russella „Rapid Calculations”, wydanej w 1937 roku. Na obliczenie 36274^2 czytelnik tej książki otrzymał 30 sekund czasu. Podaną tam metodą osiągnęliśmy ten czas za pomocą kalkulatora, ale dopiero po pewnym treningu.



Nie do wiary

Liczby 2, 5, 27 i 1, 15, 18 mają równe sumy i równe iloczyny. Podobnie 1, 6, 6 i 2, 2, 9; 24, 75, 7 i 70, 30, 6. A oto trzy trójki liczb, których sumy są równe iloczynom:
 $26785 + 12789 + 14976 = 26298 + 16240 + 12012 = 17532 + 25578 + 11140$
 $26785 \cdot 12789 \cdot 14976 = 26298 \cdot 16240 \cdot 12012 = 17532 \cdot 25578 \cdot 11140$.
 Może są i czwórki o tych własnościach?



Zdolny chłopiec

Największą biedę miałem z rachunkami, których uczył mnie sam pan Murdstone. Lekcja zaczynała się zwykle od podobnych pytań: — Jeżeli wejść do sklepu i kupić 5.500 kg sera po 4 i pół złotego za kilogram, to ile zapłacę?
 Nad takim zadaniem ślecziałem nieraz całe godziny.
 (Karol Dickens, *David Copperfield*, cytaty według wydania z 1947 r., str. 34)



Kącik czytelniczy

Prócz pułkownika było pięciu oficerów. Był major Hunter, mały człowiek opętany liczbami, mały człowiek, który — będąc jednostką odpowiedzialną — wszystkich ludzi dzielił bądź na odpowiedzialnych bądź nie przystosowanych do życia. Major Hunter był inżynierem, ale — wyjąwszy okoliczność wojny — nikomu nie przyszłoby do głowy powierzać mu funkcji kierowniczych. Major Hunter ustawiał ludzi w szeregu jak cyfry, dodawał, odejmował i mnożył. Był raczej specem od arytmetyki niż matematykiem. Nic z radości, z muzyki, wielkości matematyki wyższej nigdy nie uderzyło mu do głowy. Ludzie mogli różnić się wzrostem, wagą, czy barwą, podobnie jak różni się 6 od 8, poza tym wszakże niewielkie dzieliły ich różnice. Żenił się parę razy i dotąd nie mógł zrozumieć, dlaczego wszystkie żony stawały się coraz bardziej rozdrażnione, nerwowe, nim wreszcie opuściły go na zawsze.

(John Steinbeck „*Księżyc zaszedł*”, tłum. Kazimiera Muszałówna)



Nie do wiary

$54^5 = 24794911296$ i $2+4+7+9+4+9+1+1+2+9+6 = 54$,
 $54^6 = 72301961339136$ i $7+2+3+0+1+9+6+1+3+3+9+1+3+6 = 54$,
 $54^9 = 3904305912313444$ i $3+9+0+4+3+0+5+9+1+2+3+1+3+4+4+4 = 54$.
 Najtęższe głowy nie mogą zrozumieć, dlaczego suma cyfr 54^7 nie jest równa 54, natomiast złośliwie:
 $53^7 = 1174711139837$ i $1+1+7+4+7+1+1+1+3+9+8+3+7 = 53$.

Baczność, informatycy!

Sposób naprzód wypisania sumy

Można w danym razie wypisać natychmiast sumę wielkiej ilości liczb, nie dodając zupełnie.

Pytanie zachodzi: czy to jest możliwe?

Odpowiedź. Pociągnij linijkę na papierze i wypisz pod nią siedm rzędów cyfr dowolnie pomyślanych, ale z warunkiem, by pierwsza była 3

3873545

Poczem pozwól komuś drugiemu niech wypisze sześć rzędów dowolnych. Następnie sam napisz cztery rzędy wedle przyjętej w tem względzie reguły. W ten sposób wiele osób mogłoby wypisać dobrowolne rzędy cyfr. Kiedy to się wszystko skutecznie, należy porachować pary rzędów, liczbę ostatnią z sumy odjąć od ostatniej cyfry rzędu przeznaczanego na sumę ogólną, liczbę par rzędów napisać na pierwszym miejscu pod linijką i między temi dwoma cyframi wypisać całą sumę wybraną na sumę ogólną.

Ten sposób zacerpnęliśmy z książeczki „Zagadki, rebusy, szarady” wydanej przez nie podpisanego autora w 1882 roku. Gdyby ktoś nam wytłumaczył, o co tu chodzi, być może skończyłyby się nasze kłopoty z rachunkami.



Bardzo trudne zadanie rachunkowe

Zdanie

Liczba $991n^2 + 1$ nie jest pełnym kwadratem jest prawdziwe od $n = 1$ aż do $n = 12055735790331359447442538767$ (a potem już nie)
 Czy Czytelnicy potrafią znaleźć zdanie prawdziwe od $n = 1$ do $n = 12055735790331359447442538768$ (a potem już nie)?



Odpowiedź na bardzo trudne zadanie rachunkowe „ $n > 12055735790331359447442538769$ ”

Rozwiązanie zadania M 227.

Odcinek prostej o długości l nachylony pod kątem α do linii siatki za pierwszym jej przyłożeniem da nam łączną liczbę przecięć

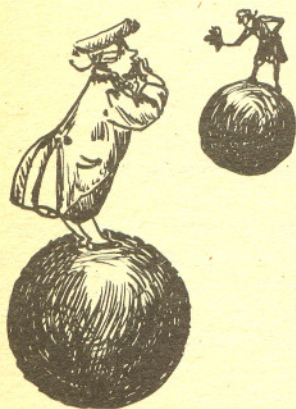
$$h = \left[\frac{l}{a} \sin \alpha \right] + \left[\frac{l}{a} \sin(\alpha + 30^\circ) \right] + \left[\frac{l}{a} \sin(\alpha + 60^\circ) \right] + \dots + \left[\frac{l}{a} \sin(\alpha + 150^\circ) \right],$$

przy czym możemy założyć, że $0 \leq \alpha < 30^\circ$ (dlaczego?).

Gdy l/a jest dostatecznie duże, możemy przyjąć

$$h \approx \frac{l}{a} (\sin \alpha + \sin(\alpha + 30^\circ) + \dots + \sin(\alpha + 150^\circ)) = \frac{l}{a} (\sin \alpha (1 + \cos 30^\circ + \dots + \cos 150^\circ) + \cos \alpha (\sin 30^\circ + \dots + \sin 150^\circ)) = \frac{l}{a} (\sin \alpha + (2 + \sqrt{3}) \cos \alpha).$$

Wyrażenie w nawiasie jest, jak łatwo sprawdzić, zawarte w przedziale $(2 + \sqrt{3}, \sqrt{6} + \sqrt{2})$.



Prof. dr Józef SMAK

Historia nauki zna setki przykładów obiektów i procesów, które zostały najpierw przewidziane przez teorię (czasami tylko przez intuicję badaczy), a dopiero później odkryte w przyrodzie. W taki właśnie sposób biologowie odkrywali „brakujące ogniwa” w łańcuchu ewolucyjnym, fizycy znajdowali i nadal znajdują nowe cząstki elementarne, itd. Pełna takich przykładów jest również historia astronomii.

Najszerzej znana, bo opisana w każdym podręczniku astronomii i w dziesiątkach książek popularnych, jest historia odkrycia Neptuna. Zatem: znacie? znamy!, no to posłuchajcie. Aby jednak nie powtarzać tutaj znanych podręcznikowych opisów, przytoczę opis zawarty w książce „A Manual of Astronomy”, napisanej przez Henry Kiddle'a, a wydanej w Nowym Jorku w 1863 roku, a więc zaledwie 17 lat po odkryciu Neptuna:

„Neptun jest najdalszą znaną planetą w Układzie Słonecznym. Został po raz pierwszy zaobserwowany przez Dra Gallego z Berlina. Położenie tej planety, zanim została odkryta, było określone przez francuskiego matematyka Leverriera na podstawie analizy jej wpływu na ruch planety Uran. (...)

Nowa planeta została odkryta w okolicznościach, które stanowią największy triumf współczesnej nauki, największy odnotowany w kronikach ludzkiej wiedzy. Przez wiele lat obserwowano, że Uran porusza się w sposób niezgodny z przewidywaniami opartymi na najdokładniejszych rachunkach. Jedynym wytłumaczeniem była hipoteza, że w pobliżu Urana musi znajdować się inna planeta powodująca te zakłócenia. W ramach tej hipotezy dwaj matematycy, pan Adams z Anglii i pan Leverrier z Paryża, podjęli się obliczenia położenia tej nieznannej planety.

Nie wiedząc o sobie nawzajem, doszli do niewiele różniących się wyników. Pan Leverrier napisał do Dra Gallego w Berlinie, prosząc go o skierowanie teleskopu na określone miejsce na niebie. Galle zrobił to i znalazł planetę w miejscu odległym zaledwie o 1 stopień od wskazanego przez matematyka.”

Powyższy opis zdumiewa swą rzeczowością. Jeżeli brak w nim czegoś, to tylko opisu niepowodzeń J. C. Adamsa, którego apel o obserwacje, skierowany do dyrektorów obserwatoriów w Cambridge i Greenwich, został przez nich zlekceważony. Tym niemniej i wówczas i dziś triumf teorii przypisujemy ex aequo Leverrierowi i Adamsowi.

Jest jednak w opisie Kiddle'a jeszcze jedno zdanie, które wprawia w zdumienie: „Sądzi się, że Neptun ma dwa satelity”. I rzeczywiście, tylko że o ile pierwszy z nich — Tryton — został odkryty już w 1846 roku przez Lassella, to drugiego — Nereidę — odkrył Kuiper dopiero w 1949 roku! Przypomina to słynną historię satelitów Marsa, które na długo przed ich odkryciem opisał w „Podróżach Guliwera” Jonathan Swift. O domniemanych satelitach Marsa Kiddle nie wspomina, natomiast Uranowi przypisuje aż 6 księżyców, choć podówczas znano tylko 4. Zatem — fantazja autora?

Powróćmy w wiek dwudziesty. W 1967 roku na łamach poważnego czasopisma „The Astrophysical Journal” rozgorzała dyskusja wokół domniemanych gwiazd-pigmejów. Oto Fritz Zwicky ogłosił odkrycie kilku obiektów, które miały być stokrotnie słabsze od białych karłów, a które dodatkowo miały wyróżniać się innymi jeszcze osobliwościami. W ramach gwałtownej polemiki dwaj inni astronomowie, Allan Sandage i Olin Eggen wykazali, że rzekome pigmeje są białymi karłami. Wielu astronomów przypuszcza, że była to — ze strony Zwicky'ego — nieudana próba odkrycia gwiazd neutronowych, których istnienie przewidywano teoretycznie już w latach trzydziestych. Nastąpiło to wkrótce po odkryciu w 1932 roku przez Chadwicka nowej cząstki elementarnej — neutronu. Oppenheimer i Volkoff, a niezależnie od nich Landau, opracowali pierwsze modele gwiazd zbudowanych wyłącznie z materii neutronowej. Odkryte w ten sposób „przy biurku” gwiazdy neutronowe miały być bardzo małe, o rozmiarach rzędu kilkunastu kilometrów, a równocześnie miały odznaczać się niespotykanymi dotąd w astrofizyce wysokimi gęstościami. Modele gwiazd neutronowych wykazywały pewne podobieństwa do modeli białych karłów, których teorię w tym samym czasie opracował młodziutki astrofizyk hinduski Subrahmanyan Chandrasekhar. Oto w obydwu wypadkach rozmiary obiektu maleją ze wzrostem masy. W obydwu wypadkach istnieje pewne maksymalne ograniczenie na masę. Dla białych karłów zbudowanych głównie z helu ta nieprzekraczalna granica równa jest ok. 1,4 masy Słońca.



Rozwiązanie zadania M 226.

Mamy $x^2 = a - \Delta x$ i równanie

$$(x')^2 = (x + \Delta/2 - \Delta^2/8x)^2 = x^2 + \Delta x - \Delta^2/4 + \Delta^2/4 - \Delta^3/8x + \Delta^4/64x^2 = a - \Delta^3/8x + \Delta^4/64x^2.$$

Możemy teraz oszacować błędy $h = x - \sqrt{a}$

$$\text{i } h' = x' - \sqrt{a}: \text{ponieważ } x^2 = (\sqrt{a+h})^2 = a + 2h\sqrt{a} + h^2, \text{ więc } |h| \approx \frac{|\Delta x|}{2\sqrt{a}} \approx \frac{|\Delta|}{2},$$

$$\text{analogicznie } |h'| \approx \frac{|\Delta^3|}{8x \cdot 2\sqrt{a}} \approx \frac{|\Delta^3|}{16a}.$$

przybliżenia te są słuszne dla małych wartości h/a .

Tak więc $|h'| \approx \frac{|\Delta^3|}{2a} \ll |h|$, gdy tylko

$$|h| < 1. \text{ Przyjmując np. za przybliżoną wartość } \sqrt{1000} \text{ liczbę } 32 \text{ otrzymamy:}$$

$$\Delta = \frac{1000}{32} - 32 = -\frac{3}{8}, \quad h \approx \frac{3}{16}$$

$$x' = 32 - \frac{3}{16} - \frac{9}{64} \cdot \frac{1}{32} \approx 31,622803$$

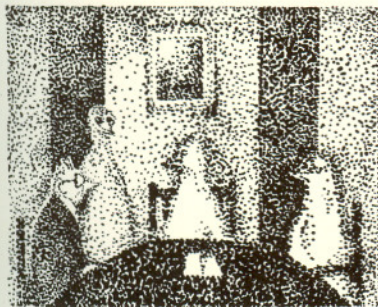
$$\text{i wreszcie } |h'| \approx \frac{|3/8|^3}{16000} = \frac{27}{1024000} \approx$$

$$\approx \frac{3}{100000},$$

tak więc otrzymujemy 4 pewne cyfry po przecinku.

Nasz stały czytelnik, nr 187935418 zapytuje, czy naprawdę do rozwiązania problemu braku świeżego powietrza w jego brojlerni trzeba powoływać komisję ekspertów. Wystarczy przecież otworzyć okno

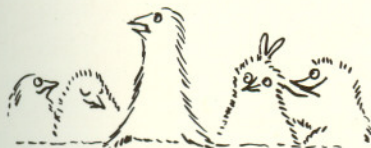
Drogi Czytelniku, jest przecież oczywiste, że mądrość ciała kolegialnego, stanowiąca sumę mądrości jego członków, jest gwarancją lepszego, bardziej przemyślanego rozwiązania. Gdy jeszcze uda się na drodze symulacji komputerowej ustalić optymalny rozkład gradientów termokonwekcji pseudostymulowanej, możemy być pewni, że to będzie TO. A poza tym radzimy unikać gwałtownych działań. W końcu już się chyba przyzwyczailiście. A co będzie, gdy po otwarciu okien doznacie szoku?



Oficjalne przyjęcie przedstawiciela naszego pisma w Brojlerni AZG/16/19 16TZ



a oto medal przyznany naszemu pismu



JEST WPROST PRZECIWNIE! Obserwujemy zwiększone zapotrzebowanie na poezję!



Zagadnienie bada komisja

Dla gwiazd neutronowych dokładna wartość analogicznej granicznej masy jest wciąż nieznaną. Wiąże się to z niepewnościami w znajomości równania stanu gazu neutronowego przy skrajnie wysokich gęstościach. Różne formy równania stanu prowadzą do wartości od ok. 1 do ok. 3 lub nawet 4 mas Słońca. Wreszcie nie ulega dziś wątpliwości, że zarówno białe karły, jak i gwiazdy neutronowe (a także czarne dziury) stanowią produkt końcowy procesu ewolucji gwiazd.

Niemal w tym samym czasie, gdy odkrycie pigmejów okazało się niewypałem, dokonano innego odkrycia. Oto w obserwatorium radiowym w Cambridge, pracująca pod kierunkiem Anthony Hewisha młoda doktorantka Jocelyn Bell Burnell realizowała program, którego celem było zbadanie zjawiska scyntylacji promieniowania radiowego w materii międzyplanetarnej. Zjawisko to jest w gruncie rzeczy tym samym, co migotanie gwiazd, tyle tylko, że w przypadku gwiazd odpowiedzialna za nie jest atmosfera ziemska. W przypadku radiowym migotanie występuje tylko dla radioźródeł punktowych i one właśnie były przedmiotem obserwacji, prowadzonych zresztą za pomocą względnie prostego i taniego systemu antenowego w Cambridge. I oto pod koniec 1967 roku Jocelyn Bell Burnell zauważyła, że niektóre radioźródła wykazują zadziwiające zmiany. Pierwsze z nich pulsowało z okresem 1 1/3 sekundy i to z zadziwiającą regularnością; następne wykazywało nieco krótszy okres 1,2 sekundy; później odkryto jeszcze krótsze okresy. Początkowo, wśród wielu hipotez mających tłumaczyć nowe zjawisko, była i taka że mogą to być sygnały od odległych cywilizacji kosmicznych! Wkrótce jednak stało się jasne, że pulsary — bo tak nazwano nowo odkryte obiekty — mogą być tylko gwiazdami neutronowymi.

Szczegóły procesu, w wyniku którego wysyłane są pulsary promieniowania radiowego, są wciąż przedmiotem badań. Identyfikacja z gwiazdami neutronowymi opiera się natomiast na elementarnych niemal rozważaniach. Ścisłe okresowe zjawisko jest z reguły wynikiem działania jednego z dwu mechanizmów: pulsacji lub rotacji (obrotu) obiektu. W obydwu wypadkach im mniejszy jest obiekt, tym krótszy jest (lub może być) okres zjawiska. Zachodzi tu pełna analogia z wahadłem, które im krótsze, tym krótszy ma okres wahań. Trzeba było szukać odpowiedzi wśród najmniejszych obiektów astronomicznych. Okresy rzędu sekundy mogły „pasować” równie dobrze do gwiazd neutronowych, jak i do białych karłów. Kiedy jednak odkryto pulsary o okresach rzędu kilku setnych sekundy na placu boju pozostawały tylko gwiazdy neutronowe.

Dalsze rozważania wykluczyły możliwość pulsacji i wreszcie jedynym pasującym do faktów modelem okazał się model latarni morskiej: szybko obracającej się gwiazdy neutronowej wysyłającej wąską wiązkę promieniowania radiowego. Szczególnie efektywnym potwierdzeniem hipotezy gwiazd neutronowych stało się odkrycie, iż pulsarem jest jądro Mgławicy Krab, pozostałości po wybuchu gwiazdy supernowej w 1054 roku. Z teorii ewolucji gwiazd wiadomo było już wcześniej, że zagęszczone podczas wybuchu jądro gwiazdy supernowej staje się właśnie gwiazdą neutronową. Pulsar w Krabie stał się również pierwszym, którego błyski zaobserwowano również w dziedzinie optycznej, a potem w całym przedziale widma.

Za odkrycie pulsarów Hewish otrzymał w kilka lat później nagrodę Nobla w dziedzinie fizyki. Niektórzy komentatorzy tego faktu byli zdania, iż nagroda ta w równym stopniu należała się jego doktorance. W gruncie rzeczy kandydatów do nagrody za odkrycie gwiazd neutronowych byłoby więcej. Oto bowiem w ciągu lat sześćdziesiątych ustalono, że gwiazdy neutronowe wchodzi w skład układów podwójnych będących źródłami promieniowania rentgenowskiego.

W układach tych, podobnie jak w wielu innych układach podwójnych, obserwujemy przepływ materii od jednego składnika do drugiego. Opadaniu materii na składnik „przyjmujący” towarzyszy wydzielenie określonej ilości energii: następuje zamiana energii mechanicznej na promieniowanie. Ilość energii, jaka musi być wypromieniowana zależy zarówno od tego, jakie jest tempo przepływu materii, jak i od tego jak przebiega proces „spadania”. Ten drugi czynnik określa także typ wysyłanego promieniowania. Łatwo zrozumieć, że proces będzie bardzo gwałtowny przy spadku na względnie mały obiekt (przy założeniu że różnice w masie obiektu nie mogą być duże; powiedzmy, że chodzi o obiekt o masie równej masie Słońca). Mówiąc obrazowo, materia spadająca na gwiazdę taką jak Słońce, o rozmiarach rzędu wieluset tysięcy kilometrów, nie może rozprężyć się do zbyt wielkich prędkości. Ta sama materia opadająca na gwiazdę neutronową, o rozmiarach rzędu zaledwie kilkunastu kilometrów, osiągnąć może znacznie większą prędkość i wyhamowanie jest w tym wypadku znacznie gwałtowniejsze. Okazuje się, że musi w takiej sytuacji powstawać wysokoenergetyczne promieniowanie rentgenowskie.

Podwójne układy rentgenowskie stanowią ważne ogniwo w łańcuchu ewolucyjnym pewnych typów ciasnych układów podwójnych. Są one, obok obiektów typu Mgławicy Krab, świadectwem wybuchów gwiazd supernowych. Ale czy cała ta różnorodność form i bogactwo zjawisk zostały przewidziane przez tych, którzy ponad 40 lat temu odkrywali przy biurku gwiazdy neutronowe?