SPIS TREŚCI

NUMERU 5(77)

Rysunki techniczne:
Bogusław Kretkiewicz

W następnym numerze:
Obliczenia i przyrządy

Do mojego artykułu ,,Siły bezwładności'' w nr 3/1980 wkradły się dwa błędy:
1. Na str. 11 chochlik redakcyjny opuścił znak minus przed ma we wzorze na siłę bezwładności; powinno być $-ma$.
2. Na rys. 5 strzałki przedstawiają prędkość satelity B względem Ziemi, a powinny przedstawiać prędkość satelity B względem satelity A. Wniosek — tor B względem A jest jest krzywoliniowy — pozostaje prawdziwy. Aby otrzymać prawidłowy rysunek należy od narysowanych prędkości satelity B odjąć wektorowo prędkości satelity A z jakimi porusza się on względem Ziemi w chwilach przedstawionych na rysunku. Pamiętajmy, że prędkość skalarna satelity A jest zawsze większa niż satelity B, jeżeli tylko orbita A leży całkowicie wewnątrz orbity B (dlaczego?). Odpowiedzialność za ten drugi błąd obciąża wyłącznie mnie.

Dr Andrzej KRASIŃSKI

,,Delta''
matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego wydawany przy poparciu Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Adres Redakcji
ul. Hoża 69 pok. 151,
00-681 Warszawa

Zakład Narodowy im. Ossolińskich — Wydawnictwo Wrocław, Oddział w Warszawie
Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark. wyd.; 2,50 ark. druk.;
papier offsetowy III kl. 70 g. rol. 61 cm
Wydrukowano w Drukarni im. Rewolucji Październikowej Warszawa, ul. Mińska 65
Nr zam. 226/12/80 O-132

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60—, cena prenumeraty półrocznej zł 30 —

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW ,,Prasa—Książka—Ruch'' oraz urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach:
— do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i cały rok następny
— do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego.
Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienie w miejscowych Oddziałach RSW ,,Prasa—Książka—Ruch''.
Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW, oraz prenumeratorzy indywidualni zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.
Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW ,,Prasa—Książka—Ruch'', Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich
Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać ,,DELTĘ'':

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.
Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.
Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Konto PKO I OM W-wa 1531-912

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław
w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa
w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with ,,Ars Polona'' Krakowskie Przedmieście 7 00-068 Warszawa, Poland or with
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland.
— Earlscourt Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain,
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia

Cena 1 egzemplarza zł 5— nr indeksu 35723/35550

Świat jest na tyle skomplikowany, że jeśli chcemy go opisywać, musimy koncentrować naszą uwagę na pewnych cechach, abstrahując od innych. A więc geometra abstrahuje od koloru przedmiotów, materiału z jakiego są zrobione i innych cech fizycznych, interesują go tylko własności geometryczne. Topologowie koncentrują się na pewnych wybranych własnościach geometrycznych (zwanych topologicznymi), traktują więc tak samo koło jak kwadrat, ale inaczej niż kulę 3-wymiarową lub zbiór 1-punktowy. Natomiast gałąź topologii zwana teorią homotopii zajmuje się jeszcze wyższą klasą niezmienników i w konsekwencji nie odróżnia kuli n-wymiarowej od zbioru jednopunktowego, czy też — mówiąc bardziej obrazowo i nieściśle — Jasia, od tegoż Jasia, któremu na nosie wyrósł długi włos. Jednakże metody, jakimi posługuje się teoria homotopii, pozwalają realizować te intuicje jedynie w zakresie dość prostych, regularnych obiektów, jak np. wielościany, Jasio.

Teoria kształtu — nowa, stworzona przez Karola Borsuka gałąź topologii — stawia sobie za cel przeniesienie, a raczej rozszerzenie idei teorii homotopii na znacznie szerszą klasę obiektów.

Czym zajmuje się teoria kształtu?

Dr Jerzy DYDAK

Dla lepszego zrozumienia niniejszego artykułu wskazane byłoby zapoznanie się z pracą Profesora Borsuka pt. „*Co to jest teoria rektraktów?*" (Delta 3/1979).

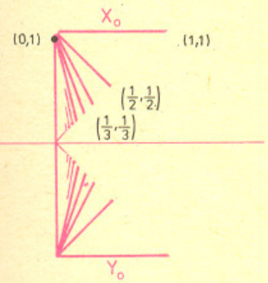
Przez I będziemy oznaczać odcinek domknięty $[0, 1]$, symbol $X \times I$ oznacza iloczyn kartezjański X przez I. Jest to przestrzeń, której punktami są pary (x, t), gdzie oczywiście $x \in X$, $t \in I$. Można ją sobie wyobrażać jako walec o podstawie X (jeżeli X jest kołem, to $X \times I$ jest „rzeczywiście" walcem). Wprowadzimy teraz bardzo ważne dla nas pojęcie ściągalności przestrzeni do punktu.

Definicja 1. Przestrzeń X nazywamy ściągalną do punktu $x_0 \in X$, jeżeli istnieje przekształcenie $F: X \times I \to X$, takie że

$$F(x, 0) = x \qquad F(x, 1) = x_0,$$

przy wszelkich $x \in X$.

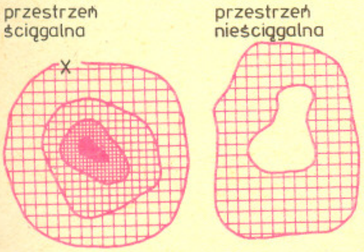
Można to sobie wyobrazić jako przekształcenie walca o podstawie X w tę samą przestrzeń X, przy czym na dolnej podstawie przekształcenie to jest tożsamością, zaś na górnej — każdy punkt przechodzi na x_0. Jeszcze inaczej, „dynamicznie" można to sobie przedstawiać jako ściskanie przestrzeni do jednego punktu x_0 w czasie od $t = 0$ do $t = 1$. Mówimy, że w tym przypadku przestrzeń X ma ten sam typ homotopii co przestrzeń jednopunktowa x_0, a przekształcenie tożsamościowe jest homotopijne z przekształceniem X w jeden punkt $x_0 \in X$. Ogólniej, dwie przestrzenie X, Y mają ten sam typ homotopii, jeżeli istnieją dwa przekształcenia $f: X \to Y$ i $g: Y \to X$ takie, że $g \cdot f$ jest homotopijne z przekształceniem identycznościowym $\mathrm{id}_X (g \cdot f \simeq \simeq \mathrm{id}_X)$ oraz $f \cdot g \simeq \mathrm{id}_Y$.



Przestrzeń Z

Jeżeli przestrzenie X i Y są ściągalne i mają tylko jeden punkt wspólny, to suma $X \cup Y$ „wygląda na" ściągalną. Najpierw możemy bowiem ściągnąć X do wspólnego punktu X i Y, a potem Y. Jednakże to wyobrażenie nie jest właściwe dla pewnych przestrzeni. Określmy na przykład X jako podzbiór płaszczyzny euklidesowej E^2 będący sumą odcinków łączących punkt $(0, 1)$ z punktami $(0, 0)$ i $(1/n, 1/n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Wówczas suma $X \cup Y = Z$ nie jest ściągalna, gdzie Y jest symetrycznym obrazem X względem osi odciętych.

Wyrażając się nie całkiem ściśle, przestrzeń jest ściągalna, jeżeli można ją „w sposób ciągły ściągnąć" do jednego punktu (rys. poniżej).



Rzeczywiście, załóżmy, że $H: Z \times I \to Z$ jest homotopią łączącą id_Z i przekształcenie stałe w punkt $(0, 1)$, tzn. $H(z, 0) = z$ i $H(z, 1) = (0, 1)$ dla każdego $z \in Z$. Istnieje wtedy taka liczba $0 < t_0 < 1$, że średnica zbioru $H(\{(0, 0)\} \times [0, t_0])$ jest mniejsza od 1 i $H((0, 0), t_0) \neq (0, 0)$. Zatem $H((0, 0), t_0) = = (0, a)$ i możemy założyć, że $a > 0$ (jeżeli $a < 0$, to dowód jest analogiczny). Teraz dla dostatecznie dużego n średnica zbioru $H(\{(-1/n, -1/n)\} \times [0, t_0])$ jest mniejsza od 1 i odległość punktów $H((-1/n, -1/n), t_0)$ i $H((0, 0), t_0)$ jest mniejsza od $\min(a, 1-a)$. Zatem $H((-1/n, -1/n), t_0) = (0, b)$, gdzie $b > 0$. Tutaj natrafiamy na sprzeczność, gdyż każda droga łącząca $(-1/n, -1/n)$ z $(0, b)$ w Z w naszym przypadku $H(\{(-1/n, -1/n)\} \times [0, t_0])$ musi mieć średnicę większą od 1, jeżeli $b > 0$.

Opisany w tekście dowód nieściągalności przestrzeni Z można poglądowo streścić tak. Przy ewentualnym ściąganiu Z do jednego punktu, punkty leżące na ukośnych odcinkach musiałyby się poruszać wzdłuż tych właśnie odcinków — a zatem punkty z Y w dół, punkty z X do góry. A co z punktem $(0, 0)$? Ukośne odcinki podchodzą do niego dowolnie blisko. Ciągłość wymaga, by punkt $(0, 0)$ poszedł w tę samą stronę, w którą dostatecznie bliskie mu punkty. Ale jedne z nich idą w górę, drugie w dół; sprzeczność.

Tak więc Z i przestrzeń jednopunktowa nie mają tego samego typu homotopii, chociaż globalnie mają bardzo zbliżone własności, np. $E^2 - Z$ oraz $E^2 - \{(0, 0)\}$ są przestrzeniami homeomorficznymi. Zatem teoria homotopii jest niewystarczająca już przy badaniu wszystkich podzbiorów płaszczyzny, gdyż rozróżnia przestrzenie $\{(0, 0)\}$ i Z, a intuicyjnie chciałoby się uważać obie przestrzenie za równoważne.

Jedyną przeszkodą do ściągalności Z stanowiły jej złe lokalne własności w punkcie $(0, 0)$. Natomiast jeżeli wyjdziemy chociaż trochę poza przestrzeń Z, to obecność „pechowego" punktu $(0, 0)$ w tej przestrzeni przestanie być odczuwana. Mam tutaj na myśli następujący fakt:

Przestrzeń Z jest ściągalna w każdym zbiorze otwartym U płaszczyzny E^2, który ją zawiera.

Jest on oczywiście prawdziwy, bowiem dla każdego otoczenia U przestrzeni Z w E istnieje liczba naturalna $n > 0$ taka, że prostokąt $B = [-1/n, 1/n] \times [-1, 1]$ jest zawarty w U. Teraz przestrzeń będąca sumą $B \cup Z$ jest ściągalna w sobie, a zatem Z jest ściągalna w U.

Odsyłamy tu Czytelnika do artykułu Profesora Borsuka; na płaszczyźnie retrakty absolutne są zbiorami domkniętymi, ograniczonymi i ściągalnymi.

To co zrobiliśmy tutaj, polegało na zastąpieniu odwzorowań przestrzeni Z przez przekształcenie pewnych otoczeń tej przestrzeni. To „zneutralizowało" jak gdyby wpływ niedobrego punktu $(0, 0)$. Okazuje się, że sensowne jest przyjąć, by te otoczenia były retraktami absolutnymi.
Mam nadzieję, że na powyższym przykładzie Czytelnik zrozumie sens wprowadzenia następujących definicji:

Niech X, Y i Z będą kompaktami, a M, N i P retraktami absolutnymi zawierającymi X, Y i Z odpowiednio.

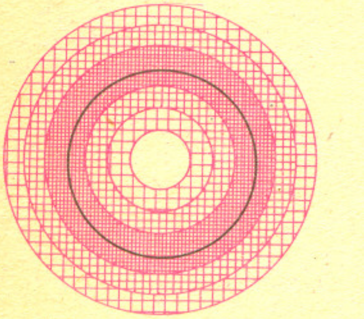
Definicja 2. Ciąg podstawowy z (X, M) do (Y, N) to ciąg przekształceń $\{f_n: M \to N\}_{n=1}^{\infty}$ spełniający następujący warunek: dla każdego otoczenia V przestrzeni Y w N istnieje otoczenie U przestrzeni X w M i liczba naturalna $k \geqslant 1$ takie, że dla dowolnego $n \geqslant k$ przekształcenia $f_n|U$ i $f_{n+1}|U$ są homotopijne w V, tzn. istnieje przekształcenie $H: U \times [0, 1] \to V$, dla którego $H(x, 0) = f_n(x)$ i $H(x, 1) = f_{n+1}(x)$ dla każdego $x \in U$.

Definicja 3. Niech $\mathbf{f} = \{f_n: M \to N\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem podstawowym z (X, M) do (Y, N), a $\mathbf{g} = \{g_n: N \to P\}_{n=1}^{\infty}$ ciągiem podstawowym z (Y, N) do (Z, P). Złożeniem $\mathbf{g} \cdot \mathbf{f}$ ciągów $\mathbf{f}$ i $\mathbf{g}$ nazywamy ciąg $\mathbf{h} = \{g_n f_n: M \to P\}_{n=1}^{\infty}$.

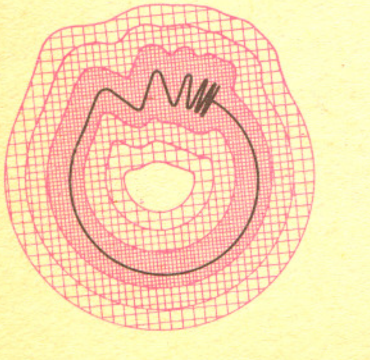
Uwaga. Przy definicji 3 należy sprawdzić, że ciąg $\{g_n f_n: M \to P\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem podstawowym.

Definicja 4. Ciągiem identycznościowym $\mathbf{id}_{(X, M)}$ nazywamy ciąg podstawowy $\{id_M: M \to M\}_{n=1}^{\infty}$, złożony z przekształceń tożsamościowych.

Definicja 5. Dwa ciągi podstawowe $\{f_n: M \to N\}_{n=1}^{\infty}$ i $\{f'_n: M \to N\}_{n=1}^{\infty}$ z (X, M) do (Y, N) są homotopijne, jeżeli dla każdego otoczenia V przestrzeni Y w N istnieje otoczenie U przestrzeni X w M i liczba naturalna $k \geqslant 1$ taka, że dla dowolnego $n \geqslant k$ przekształcenia $f_n|U$ i $f'_n|U$ są homotopijne w V.



Okrąg (wiadomo co) i okrąg warszawski (taki kawałek zamknięty zagęszczającej się sinusoidy) mają ten sam kształt.



Definicja 6. Dwie przestrzenie X i Y mają ten sam kształt jeżeli istnieją: retrakty absolutne M i N zawierające X i Y odpowiednio, ciągi podstawowe $\mathbf{f}$ z (X, M) do (Y, N) i $\mathbf{g}$ z (Y, N) do (X, M) takie, że $\mathbf{g} \cdot \mathbf{f}$ jest homotopijne z $\mathbf{id}_{(X, M)}$ i $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$ jest homotopijne z $\mathbf{id}_{(Y, N)}$.

Jako test na zrozumienie powyższych definicji proponuję przekonać się, że opisana na wstępie przestrzeń Z ma kształt przestrzeni jednopunktowej.

Można wykazać, że przestrzenie M i N występujące w Definicji 6 są nieistotne w tym sensie, że jeśli zachodzą warunki wymienione w Definicji 6 dla pewnych przestrzeni M i N, to są one spełnione dla każdej pary retraktów absolutnych M' i N' zawierających X i Y odpowiednio. Także można pokazać, że przestrzenie o tym samym typie homotopii mają ten sam kształt, a fakt odwrotny jest prawdziwy dla absolutnych retraktów otoczeniowych.

Teraz możemy określić czym zajmuje się teoria kształtu. Jest to badanie niezmienników kształtu, tzn. takich własności przestrzeni, które zachowują się, gdy zastąpimy ją przez dowolną przestrzeń o tym samym kształcie.

Jako kolejne ćwiczenie proponuję Czytelnikowi przekonać się, że spójność jest niezmiennikiem kształtu, a także zastanowić się, które ze znanych niezmienników topologicznych są także niezmiennikami w teorii kształtu.

Jednym z ciekawszych niezmienników kształtu jest punktowa 1-przesuwalność.

Definicja 7. Continuum X nazywamy punktowo 1-przesuwalnym, jeżeli dla punktu $x_0 \in X$ i każdego otoczenia U przestrzeni X w $M \in \mathbf{AR}$ istnieje otoczenie W przestrzeni X w M spełniające następujący warunek:

dla każdego otoczenia V przestrzeni X w M i każdego przekształcenia $f\colon (S^1, a) \to \to (W, x_0)$, gdzie S^1 jest okręgiem i a dowolnym punktem okręgu, istnieje przekształcenie $H\colon S^1 \times [0, 1] \to U$, dla którego $H(x, 0) = f(x)$ dla $x \in S^1$, $H(a, t) = f(a)$ dla $0 \leqslant t \leqslant 1$ i $H(S^1 \times \{1\}) \subset V$.

Okazuje się, że wszystkie continua łukowo spójne, a także podcontinua rozmaitości dwuwymiarowych są punktowo 1-przesuwalne. Jednym z najważniejszych wyników dotyczących tego pojęcia jest

Twierdzenie 8 [*J. Krasinkiewicz*]: Każde continuum punktowo 1-przesuwalne X ma kształt pewnego continuum lokalnie spójnego.

Tak więc klasa continuów mających kształt continuów lokalnie spójnych posiada prostą charakteryzację wyrażoną warunkiem występującym w Definicji 7.

Standardowym przykładem continuum nie będącego punktowo 1-przesuwalnym jest solenoid diadyczny D, który można sobie wyobrazić jako przecięcie takiego nieskończonego ciągu zstępującego pierścieni do gry ringo $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$, że P_{n+1} jest dwukrotnie nawinięty we wnętrzu P_n. Solenoid diadyczny często występuje w różnych działach matematyki.
Ponieważ podcontinua płaszczyzny są punktowo 1-przesuwalne, więc jako wniosek otrzymujemy, że solenoid diadyczny nie jest zanurzalny w płaszczyznę (tzn. płaszczyzna nie zawiera zbioru homeomorficznego z solenoidem diadycznym).

Zachodzi nawet mocniejszy rezultat: Iloczyn kartezjański solenoidu diadycznego i odcinka jednostkowego nie jest zanurzalny w E^3.

Został on uzyskany przez D. R. McMillana przy użyciu następującego twierdzenia.

Twierdzenie 9 [*J. Krasinkiewicz — D. R. McMillan*]. Niech $f\colon X \to Y$ będzie ciągłym odwzorowaniem continuum punktowo 1-przesuwalnego X na Y. Wtedy przestrzeń Y jest punktowo 1-przesuwalna.

Przed pracą McMillana wiedziano jedynie, że stożek nad solenoidem diadycznym nie jest zanurzalny w E^3 i w dowodzie istotnie korzystano z własności wierzchołka tego stożka.

Mam nadzieję, że na przykładzie punktowej 1-przesuwalności można było zobaczyć jak wygląda w praktyce rozwiązywanie głównego problemu teorii kształtu:

> Podać warunki na to, by dana przestrzeń miała kształt przestrzeni o dobrych własnościach lokalnych.

Uwagi końcowe. Teoria kształtu jest dziedziną młodą i wciąż rozwijającą się. Została zapoczątkowana przez Profesora Borsuka pracą „*Concerning homotopy properties of compacta*" opublikowaną w 1968 roku w Fundamenta Mathematicae. Zyskała szczególny rozgłos po odkryciu przez T. A. Chapmana w 1972 roku głębokiego związku między kształtem przestrzeni położonych w pseudownętrzu s kostki Hilberta Q^∞ (s jest zbiorem punktów $(x_1\ x_2, \ldots) \in Q^\infty$ takich, że $0 < x_k < 1/k$, $k = 1, 2, \ldots$) a typem topologicznym ich dopełnień w Q^∞. Udowodnił on mianowicie, że dwa kompakta X i Y w s mają ten sam kształt wtedy i tylko wtedy, gdy $Q^\infty - X$ i $Q^\infty - Y$ są homeomorficzne. Do zainteresowania się teorią kształtu przyczyniło się także sformułowanie i udowodnienie przez M. Moszyńską w 1973 roku odpowiednika twierdzenia Whiteheada.

Istnieje już dość obszerna literatura (przeszło 400 prac) poświęcona teorii kształtu i jej zastosowaniom do innych działów topologii, w której pokaźny udział mają Profesor Borsuk i jego uczniowie. Ponadto istnieją dwa opracowania monograficzne:

Karol Borsuk, *Theory of shape*, Monografie Matematyczne 59, Warszawa 1975,
oraz
Jerzy Dydak i Jack Segal, *Shape theory: An introduction*, Lecture Notes in Math. 688, Springer 1978.

Rozwiązanie zadania F 76.
Niech w czasie t masa kropli wynosi m, a jej promień r. W czasie Δt objętość kropli wzrośnie o $4\pi r^2 \Delta r$ z dokładnością do członów rzędu $(\Delta r)^2$, gdzie Δr jest przyrostem promienia kropli. Zatem przyrost masy kropli wyniesie $\Delta m = 4\pi r^2 \Delta r$ (gęstość wody wynosi 1). Zgodnie ze wskazówką mamy

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = 4\pi r^2 \frac{\Delta r}{\Delta t} \sim 4\pi r^2, \text{ skąd } \frac{\Delta r}{\Delta t} = \text{const.}$$

Stąd wynika, że $r = \mathrm{K}t$, gdzie K jest pewnym współczynnikiem. Przyjęliśmy, że $r = 0$ oraz $v = 0$ dla $t = 0$. Zgodnie z drugą zasadą dynamiki

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = m\mathrm{g},$$

gdzie $p = mv$. Ponieważ $m = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \mathrm{K}^3 t^3$, więc równanie powyższe można zapisać w postaci

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^3 v) = \mathrm{g}t^3,$$

skąd
po scałkowaniu (różniczkować nie należy, gdyż v zależy od t) otrzymujemy
$t^3 v = \frac{1}{4}\mathrm{g}t^4$ i ostatecznie $v = \frac{1}{4}\mathrm{g}t$.
Kropla spada z przyspieszeniem jednostajnym równym czwartej części przyspieszenia ziemskiego. Kropla taka jest „antyrakietą"; zamiast tracić — zyskuje podczas ruchu masę.

Ile lat mają gwiazdy?

Mgr Michał CZERNY

Wyznaczanie wieku różnych obiektów jest z reguły przedsięwzięciem skomplikowanym. Jednym z podstawowych problemów archeologii jest sprawa datowania wykopalisk. Paleontolodzy próbują wyznaczyć wiek skamieniałych roślin i zwierząt, a geologowie starają się ocenić, jak stare są różne skały. Wszystkie te poczynania nie należą do łatwych, gdyż przyroda nie obdarzyła swoich tworów w metryki, w których czarno na białym wypisany byłby moment ich powstania. Wyznaczanie wieku gwiazd napotyka na jeszcze jedną dodatkową trudność. Nie można mianowicie umieścić gwiazdy w laboratorium, aby poddać ją analizie; wszystkie informacje musimy wydostać z promieniowania, jakie do nas dociera. Dlatego nie ma bezpośredniej metody określania, ile lat mają gwiazdy, wymyślono natomiast metody pośrednie, opierające się na — lepiej lub gorzej — sprawdzonych teoriach i hipotezach.

Jednym z charakterystycznych parametrów określających wiek gwiazdy jest skład chemiczny jej zewnętrznych warstw, czyli tzw. atmosfery. Drugim parametrem jest położenie gwiazdy w Galaktyce. Aby to szerzej wyjaśnić, musimy zatrzymać się na chwilę przy teorii powstawania pierwiastków we Wszechświecie, a także przy teorii ewolucji Galaktyki.

Obecnie prawie wszyscy naukowcy uważają, że Wszechświat powstał 15—20 miliardów lat temu. W momencie powstawania Wszechświata (w tzw. wielkim wybuchu, lub mówiąc z angielska „big bangu") utworzyły się dwa najlżejsze pierwiastki —wodór i hel. Powstały także minimalne ilości innych pierwiastków, które dalej będziemy nazywać pierwiastkami ciężkimi. Wytworzyły się one w kilku pierwszych zaledwie minutach istnienia Wszechświata, który wtedy był bardzo gorący i gęsty. Przyczyną powstania pierwiastków były reakcje jądrowe.
Nieustanna ekspansja (rozszerzanie się) Wszechświata spowodowała, że po tych kilku pierwszych minutach gęstość i temperatura materii spadły na tyle, iż reakcje jądrowe musiały ustać. Wszechświat w dalszym ciągu powiększał swoją objętość i po pewnym czasie (ale czas ten liczy się już w milionach lat!) materia rozmieszczona początkowo dość jednorodnie zaczęła skupiać się w poszczególne galaktyki. Wtedy także powstała nasza Galaktyka.

Wydaje się, iż nasza Galaktyka miała początkowo kształt wielkiej kuli zbudowanej z rzadkiego gazu. Drobne niejednorodności spowodowały, że część materii zaczęła skupiać się w obłoki gazowe, gęstsze niż otaczający je ośrodek. Obłok taki był niestabilny (siły grawitacyjne przewyższały ciśnienie gazu) i dlatego podlegał procesowi kondensacji. Jego objętość malała, natomiast gęstość i temperatura rosły. W pewnym momencie temperatura w centrum obłoku stała się na tyle duża, iż mogły zachodzić reakcje jądrowe. Energia wyzwalana w takich reakcjach powstrzymała proces kurczenia się obłoku. Powstała stabilna konfiguracja gazowa — nowo narodzona gwiazda.

Gwiazdy produkują energię w głębokich wnętrzach. Energia ta wypromieniowywana jest w postaci fal elektromagnetycznych — światła. Źródłem energii są reakcje jądrowe. Reakcje te polegają na łączeniu się jąder lżejszych pierwiastków w jądra pierwiastków cięższych.
W początkowych fazach ewolucji w gwieździe zachodzi głównie proces syntezy jąder helu z jąder wodoru; schematycznie można ten proces zapisać tak:

$$4\,{}^{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}\mathrm{He} + \varepsilon.$$

Wzór ten należy rozumieć w następujący sposób: cztery jądra wodoru o jednostkowej masie atomowej przekształcają się w jedno jądro helu o masie atomowej równej cztery; ε oznacza energię wydzieloną w czasie tej reakcji.

Skutkiem reakcji jądrowych zmienia się skład chemiczny wnętrza gwiazdy: staje się ono uboższe w wodór, a bogatsze w hel. Natomiast skład warstw powierzchniowych gwiazdy pozostaje nie zmieniony, gdyż zarówno temperatura, jak i gęstość są tam zbyt małe, aby mogły zachodzić reakcje jądrowe.
Gdy cały zapas wodoru w centralnych częściach gwiazdy zostanie wyczerpany, zaczynają zachodzić reakcje syntezy jąder węgla z jąder helu:

$$3\,{}^{4}\mathrm{He} \rightarrow {}^{12}\mathrm{C} + \varepsilon.$$

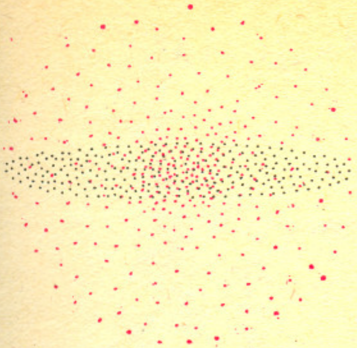
Gdy obfitość węgla stanie się wystarczająco duża, wówczas może powstawać tlen:

$${}^{12}\mathrm{C} + {}^{4}\mathrm{He} \rightarrow {}^{16}\mathrm{O} + \varepsilon.$$

Jądro tlenu może przyłączyć jądro helu dając w wyniku jądro neonu i tak dalej. Efektem tych wszystkich reakcji jądrowych jest cała gama pierwiastków chemicznych powstających we wnętrzu gwiazdy.

Gwiazdy kończą swoją ewolucję, gdy wyczerpią zasób energii jądrowej. Gwiazdy mniej masywne stają się wówczas białymi karłami, tj. stosunkowo małymi, lecz bardzo gęstymi kulami rozgrzanej materii, która powoli stygnie. Gwiazdy masywniejsze kończą swój żywot gigantycznym fajerwerkiem, jakim jest wybuch supernowej. Prawie cała gwiazda zostaje wówczas rozerwana „na strzępy", a jedynie z najbardziej centralnych warstw tworzy się tzw. gwiazda neutronowa. Masa gwiazdy neutronowej jest bliska masy Słońca (równej 2×10^{30} kg), a promień jest rzędu zaledwie 10 km. Czytelnik może łatwo obliczyć, jak wielka jest średnia gęstość takiego obiektu.

Rozwiązanie zadania M 224
Przypuśćmy, że k jest pierwiastkiem całkowitym naszego równania. Wtedy
$(x-a)(x+10)+1 = (x-k)(x-l)$
i podstawiając $x = k$ mamy:
$(k-a)(k+10)+1 = 0$, czyli
$(k-a)(k+10) = -1$ i ponieważ $k-a$ i $k+10$ są całkowite, więc albo
$k-a = 1, k+10 = -1$,
albo $k-a = -1, k+10 = 1$.
Mamy więc dwie możliwe wartości a: $a = -12$ lub $a = -8$. Jeżeli $a = -12$, to
$(x-a)(x+10)+1 = (x+12)(x+10)+1 = (x+11)^2$, a jeżeli $a = -8$, to
$(x-a)(x+10)+1 = (x+8)(x+10)+1 = (x+9)^2$.
Wobec tego $a = -12$ lub $a = -8$ i tylko te dwie wartości a spełniają warunki zadania.

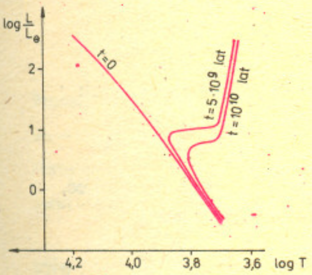


Schematyczny wygląd naszej Galaktyki „z boku". Punkty czerwone wyobrażają gwiazdy o małej obfitości pierwiastków ciężkich, natomiast czarne — o dużej.

Tempo ewolucji gwiazdy zależy drastycznie od jej masy. Gwiazda o masie równej masie Słońca potrzebuje ok. 10 miliardów lat, aby stać się białym karłem; natomiast gwieździe o masie kilkadziesiąt razy większej wystarczy zaledwie parę milionów lat, by wybuchnąć jako supernowa. Wróćmy do naszej Galaktyki. Zostawiliśmy ją w momencie, gdy miała kształt kulisty i zaczynały tworzyć się pierwsze gwiazdy. Oczywiście rozmieszczone one były w sposób sferycznie symetryczny. Z biegiem czasu gaz znajdujący się w Galaktyce opadał do płaszczyzny równika galaktycznego. Jednocześnie najmasywniejsze spośród najwcześniej powstałych gwiazd kończyły już swoją ewolucję wybuchami supernowych. Materia tych gwiazd rozrywana w czasie wybuchu zawierała znaczne ilości pierwiastków ciężkich. Po wybuchu przenikała ona do gazu międzygwiazdowego. W ten sposób następowało wzbogacenie materii międzygwiazdowej w pierwiastki ciężkie. Proces tworzenia się gwiazd z gazu międzygwiazdowego trwał dalej — trwa on zresztą do dzisiaj. Gwiazdy powstawały (i powstają) jednak już tylko w pobliżu płaszczyzny równika galaktycznego, gdyż tylko tam pozostała wystarczająca ilość materii. Wybuchy supernowych ustawicznie wzbogacają tę materię w pierwiastki ciężkie. Dlatego im później powstała gwiazda, z tym większej ilości pierwiastków ciężkich była zbudowana.

Jak widać, gwiazdy w naszej Galaktyce można podzielić z grubsza na dwie grupy. Pierwsza — to gwiazdy stare, należące do tzw. podsystemu sferycznego Galaktyki. Mają one co najmniej 10 miliardów lat. Są to gwiazdy mało masywne, gdyż masywniejsze zakończyły już swoją ewolucję. Zewnętrzne warstwy tych gwiazd, nie przekształcone przez reakcje jądrowe, zawierają bardzo mało pierwiastków ciężkich. Drugą grupę stanowią gwiazdy młodsze, tworzące podsystem płaski, gdyż grupują się w pobliżu płaszczyzny równika galaktycznego. W warstwach powierzchniowych tych gwiazd znajduje się stosunkowo dużo pierwiastków ciężkich.

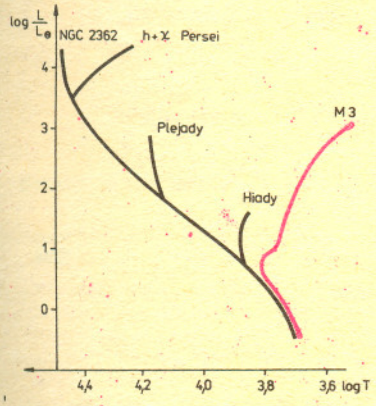
Skład chemiczny zewnętrznych warstw gwiazdy można wyznaczyć z obserwacji. W tym celu należy przeprowadzić tzw. analizę widmową promieniowania. Światło gwiazdy skupione w ognisku teleskopu należy przepuścić przez pryzmat lub siatkę dyfrakcyjną. Otrzymamy wówczas widmo promieniowania gwiazdy. Wystąpią w nim ciemne prążki. Istnienie każdego z tych prążków świadczy o występowaniu w atmosferze gwiazdy jakiegoś pierwiastka. Natężenie prążka świadczy o obfitości tegoż pierwiastka.



Teoretyczny diagram H-R. Na osi poziomej zaznaczony jest logarytm temperatury powierzchniowej (w kelwinach), a na pionowej — logarytm jasności (w jednostkach słonecznych). Zaznaczony jest ciąg główny wieku zerowego i izochrony odpowiadające pięciu i dziesięciu miliardom lat.

Stwierdzono, że w gwiazdach podsystemu sferycznego ułamek masy atmosfery, jaki stanowią pierwiastki ciężkie, wynosi zaledwie parę tysięcznych. Dla gwiazd podsystemu płaskiego jest on odpowiednio większy. I tak dla Słońca (którego wiek ocenia się na 4,6 miliarda lat) wynosi on dwie setne, natomiast dla gwiazd najmłodszych (mających tylko kilka milionów lat) jest on równy czterem setnym.

Problem ewolucji gwiazd jest jednym z lepiej zbadanych zagadnień współczesnej astronomii. Obecnie możemy powiedzieć, jak zmieniają się w czasie charakterystyczne parametry gwiazdy, takie jak promień, jasność (tj. ilość energii emitowana w ciągu sekundy), temperatura powierzchniowa itp. Dlatego mogłoby wydawać się prostym wyznaczenie wieku gwiazdy przez porównanie jej obserwowanych parametrów z teoretycznymi obliczeniami. Metoda ta jednak zawodzi, gdyż — jak już powiedzieliśmy wyżej — ewolucja gwiazdy zależy niesłychanie silnie od jej masy, nie ma zaś dokładnej metody wyznaczania mas gwiazd. Jedynym wyjątkiem jest nasze Słońce, którego masę znamy z wystarczającą precyzją. Wyniki teorii ewolucji można jednak zastosować do wyznaczania wieku gromad gwiazd. Są to wielkie skupiska gwiazd wewnątrz Galaktyki. Wyróżniamy dwa rodzaje gromad. Gromady kuliste zawierają 10^5-10^6 gwiazd, a ich promienie wynoszą 50—100 parseków. Przypominają one wielkie kule. Gromady otwarte są mniejsze. Do każdej z nich należy kilkadziesiąt lub kilkaset gwiazd. Ich kształt jest nieregularny, a typowe rozmiary wynoszą kilka parseków. Gromady kuliste należą do podsystemu sferycznego Galaktyki, natomiast gromady otwarte — do płaskiego. Sądzimy, że gwiazdy należące do jednej gromady uformowały się jednocześnie.



Schematyczny diagram H-R dla kilku gromad otwartych (czarne linie) i jednej gromady kulistej (linia czerwona).

W celu wyznaczenia wieku gromady wygodnie jest posłużyć się diagramem Hertzsprunga-Russella (w skrócie diagramem H—R). Na poziomej osi tego diagramu (skierowanej — ze względów historycznych — na lewo!) odłożony jest logarytm temperatury powierzchniowej gwiazdy, natomiast na osi pionowej — logarytm jej jasności. Każdą gwiazdę reprezentuje na diagramie H—R jeden punkt. Gwiazdy w momencie powstania układają się wzdłuż prawie prostej linii, która nazywa się ciągiem głównym wieku zerowego. Im większa jest masa gwiazdy, tym wyżej znajdzie się ona w ciągu głównym. Po pewnym czasie zmieniają się parametry gwiazd, tych masywniejszych — bardziej, tych mniej masywnych — odpowiednio mniej. Gwiazdy będą układać się wzdłuż innej linii na diagramie H—R. Można obliczyć teoretyczny kształt takich linii (są to tzw. izochrony) w zależności od czasu, jaki upłynął od momentu powstania gwiazd. Porównując teoretyczne izochrony z rozmieszczeniem gwiazd z gromady na diagramie H—R można wyznaczyć wiek tejże gromady.

Procedurę taką zastosowano do zbadania wieku wielu gromad. Okazało się, że wiek gromad kulistych jest praktycznie identyczny i wynosi około 15 miliardów lat. Diagramy H—R dla gromad otwartych różnią się natomiast znacznie swoim wyglądem, a tym samym gromady te mają różny wiek. Istnieją gromady otwarte, które mają zaledwie parę milionów lat, są także takie, których wiek wynosi miliardy lat.

Autor artykułu jest uczniem II klasy liceum w Końskich.

O własnościach wyrażenia $x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p$

Jarosław CEL

§1. O równaniu $x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p = y^p$

Twierdzenie 1. Przy ustalonych $x_i > 0$ oraz y równanie $\sum_{1=i}^{n} x_i^p = y^p$ jest spełnione dla co najwyżej jednego wykładnika p.

Dowód: Niech dla pewnego wykładnika p będzie $\sum_{i=1}^{n} x_i^p = y^p$. Wystarczy udowodnić, że [przy $q \neq p$ mamy $\sum_{i=1}^{n} x_i^q \neq y^q$. Gdy $q < p$, to wobec $y > x_i$ mamy $y^{q-p} < x_i^{q-p}$, czyli

$$y^q = y^{q-p} y^p = y^{q-p} \sum_{i=1}^{n} x_i^p = \sum_{i=1}^{n} x_i^p y^{q-p} < \sum_{i=1}^{n} x_i^p x_i^{q-p} = \sum_{i=1}^{n} x_i^q,$$

natomiast jeżeli $q > p$, to postępując analogicznie dowodzimy, że $\sum_{i=1}^{n} x_i^q < y^q$.

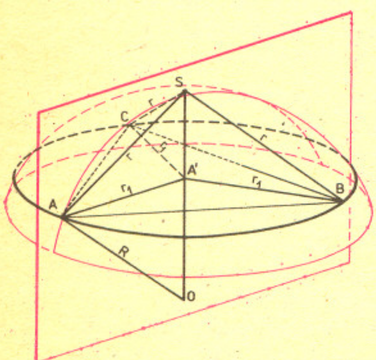
Co do równania $\sum_{i=1}^{n} x_i^p = y^p$ Euler wypowiedział w 1778 roku przypuszczenie, że nie ma ono rozwiązań naturalnych, jeżeli tylko $2 \leq n < p$. Obalono je jednak po 188 latach, zachodzi bowiem równość $27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$.

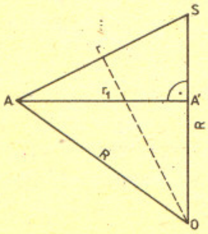
Twierdzenie 2. Dla każdego wykładnika p równanie $\sum_{i=1}^{n} x_i^p = y^p$ ma rozwiązanie w liczbach całkowitych dodatnich, jeżeli tylko n jest dostatecznie duże.

Dowód. Jeżeli $n = k^p$, to możemy przyjąć $x_i = k (i = 1, 2, \dots, n)$, $y = k^2$ i, jak łatwo widzieć, wówczas równanie jest spełnione. Niech ε będzie pewną liczbą naturalną i niech liczby $S_i (i = 1, 2, \dots, n)$, t spełniają równanie dla danej liczby naturalnej n. Jest więc $\sum_{i=1}^{n} S_i^p = t^p$, więc dla $x_i = S_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, $x_j = t (j = n+1, n+2, \dots, n+\varepsilon^p - 1)$ będzie $\sum_{i=1}^{n+\varepsilon^p-1} x_i^p = (\varepsilon t)^p$.
Wynika stąd, że skoro równanie nasze ma rozwiązanie w liczbach naturalnych dla liczby n, to ma je także dla liczby $n + \varepsilon^p - 1$, więc i dla $n + \varepsilon^p - 1 + \varepsilon^p - 1$ itd. dla liczby $n + (\varepsilon^p - 1)l$, gdzie l jest dowolną liczbą naturalną. Rozważane równanie ma, jak wiadomo, rozwiązanie przy $n = k^p$, toteż biorąc najpierw $\varepsilon = k^p$, a potem $\varepsilon = k^p - 1$ (dlaczego, zaraz się okaże) wnosimy, że rozwiązanie takie istnieje dla każdej liczby n postaci $n = k^p + (k^p - 1)u + [(k^p - 1)p - 1]v$, gdzie u i v są naturalne. Jak nietrudno stwierdzić, liczby $k^p - 1$ oraz $(k^p - 1)^p - 1$ są względnie pierwsze, toteż na podstawie wniosku 1 ze str. 12 „Teorii liczb", cz. II, W. Sierpińskiego możemy napisać, że każda dostatecznie wielka liczba naturalna jest postaci $(k^p - 1)u + [(k^p - 1)^p - 1]v$, a zatem i postaci $n = k^p + (k^p - 1)u + [(k^p - 1)^p - 1]v$, a dla takiej liczby rozważane równanie ma rozwiązanie.

Odbiegnijmy na chwilę od tematu i rozważmy równanie $\sum_{i=1}^{n} p^{x_i} = p^y$, które powstaje z równania $\sum_{i=1}^{n} x_i^p = y^p$ przez odwrócenie roli wykładników i podstaw. Rozwiążemy je w liczbach naturalnych. Załóżmy, że $x_i \leq x_{i+1} < y$, oczywiście $p \geq 2$.
Mamy $1 + \sum_{i=2}^{n} p^{x_i - x_1} = p^{y - x_1}$, musi być zatem $x_2 = x_1$, co daje $2 + \sum_{i=3}^{n} p^{x_i - x_1} = p^{y - x_1}$.
Gdy $p = 2$, to $1 + \sum_{i=3}^{n} 2^{x_i - x_1 - 1} = 2^{y - x_1 - 1}$, skąd $n = 2^t + 1$, $t \in N$, $x_i - x_1 - 1 = 0$ $(i = 3, 4, \dots, n)$, $y = t + x_1 + 1$, przy $n = 2^t + 1$, $t \in N$. Niech dalej będzie $p = 3$. Rozumując jak wyżej dostajemy $1 + \sum_{i=4}^{n} 3^{x_i - x_1 - 1} = 3^{y - x_1 - 1}$, łatwo zauważyć, że $x_i - x_1 - 1 = 0$ $(i = 4, 5, \dots, n)$ i $n = 3^t + 2$, $t \in N$, toteż rozwiązaniami w tym wypadku są $p = 3$, $x_3 = x_2 = x_1$ $x_i = x_1 + 1 (i = 4, 5, \dots, n)$, $y = t + x_1 + 1$, przy $n = 3^t + 2$, $t \in N$.

Rozwiązanie zadania M 223
Na okręgu zatoczonym na sferze ze środka S dowolnym rozwarciem cyrkla r wybierzmy trzy dowolne punkty A, B, C. Zbudujmy trójkąt o bokach długości AB, BC, CA i opiszmy na nim okrąg o promieniu r_1. Rozpatrując przekrój sfery płaszczyzną koła wielkiego zauważymy łatwo, że wysokość AA' trójkąta równoramiennego SOA, w którym bok OS jest równy poszukiwanemu promieniowi sfery R, jest równa r_1, a jego podstawa AS jest równa r. Wystarczy teraz zbudować trójkąt $AA'S$, w którym $\sphericalangle SA'A$ jest prosty, $SA = r$, $SA' = r_1$, aby na przecięciu symetralnej odcinka SA i przedłużenia boku $A'S$ znaleźć punkt O, dla którego odcinek OS jest równy szukanemu promieniowi.





Początkowe liczby Bernouliego to: $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$ i następne liczby o nieparzystych indeksach są równe zeru; natomiast $B_4 = \frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$, $B_8 = -\frac{1}{30}$, $B_{10} = \frac{5}{66}$, $B_{12} = -\frac{691}{2730}$, $B_{14} = \frac{7}{6}$, $B_{16} = -\frac{3617}{510}$, ... $B_{28} = -\frac{23749461029}{870}$, ... Liczby Bernouliego mają duże znaczenie w teorii liczb, występują np. przy obliczaniu wartości słynnej funkcji „dzeta" Riemanna, a także w rozwinięciach kilku ważnych całek.

Rozwiązanie zadania M 225
Jeżeli p jest liczbą pierwszą większą od 3, to reszta z dzielenia p przez 6 jest równa 1 lub 5. (Liczby postaci $6k$, $6k+2$, $6k+4$, są parzyste, a liczby postaci $6k+3$ są podzielne przez 3). Tak więc $p = 6k+1$ lub $p = 6k-1$ $(= 6l+5)$. Wobec tego $p^2 = (6k\pm 1)^2 = 36k^2 \pm 12k+1 = 24\frac{k(3k\pm 1)}{2}+1$. Wystarczy teraz zauważyć, że liczba $k(3k\pm 1)$ jest, dla każdego k, parzysta.

Przechodzimy teraz do ogólnego rozwiązania, sprowadzając rozważane równanie do postaci $1+\sum_{i=p+1}^{n} p^{x_i-x_1-1} = p^{y-x_1-1}$, gdzie $p \leqslant n$, skąd $x_i = x_1$ dla $i = 2, 3, \dots, p$; $x_i = x_1+1$ dla $i = p+1, p+2, \dots, n$; $y = t+x_1+1$ przy $n = p^t+p-1$, $t \in N$. Warunkiem rozwiązania jest spełnienie równości $p^t+p = n+1$, $p, n = 1, 2, \dots$, $t \in N$, wobec której, rzecz jasna, $p|n+1$.

Na zakończenie przeglądu różnych własności równania $\sum_{i=1}^{n} x_i^p = y_i^p$ zacytujemy **twierdzenie** A. Rotkiewicza:

Jeżeli $n > 2$ oraz $\sum_{i=1}^{n} x_i^p = y_i^p$, gdzie $x_1, \dots, x_n, y$ są liczbami naturalnymi takimi, że $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, to $x_n > p$.

§ 2. Inne własności

Wyprowadzimy wzór Cavalieriego, tj. wzór

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^p+2^p+\dots+n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

Uczynić to można posługując się całką $\int_0^1 x^p\,dx = \frac{1}{p+1}$.

Zastosujemy jednak inną metodę wykorzystując rozwiązane przez Jakuba Bernoulliego zagadnienie wyznaczenia sumy $S_p(n) = 1^p+2^p+\dots+n^p$ zamieszczone w pracy „*Ars conjectandi*" wydanej w roku 1713, już po jego śmierci. Bernoulli dowiódł, że

$$S_p(n) = 1^p+2^p+\dots+n^p = \frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p}\binom{p+1}{k}B_k\cdot(n+1)^{p+1-k},$$

gdzie liczby B_k zwane dziś liczbami Bernoulliego są niezależne od p. Dalej można już stwierdzić, że

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_p(n)}{n^{p+1}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{p}\frac{n^{-k}}{p+1}\binom{p+1}{k}\cdot B_k = \frac{1}{p+1} \qquad \text{c.b.d.o.}$$

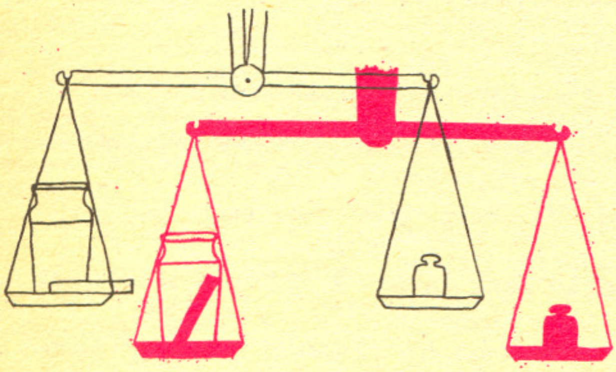
Twierdzenie 3. Gdy liczby naturalne x_i są większe niż 1, ciąg $\sum_{i=1}^{n} x_i^p (p = 1, 2, \dots)$ zawiera nieskończenie wiele liczb złożonych.

Dowód. Obierzmy dowolną liczbę naturalną N. Wobec $x_i > 1$ istnieje takie naturalne p, że $q = \sum_{i=1}^{n} x_i^p > N$, czyli $q > x_i$. Załóżmy, że q jest liczbą pierwszą, oczywiście $q \nmid x_i$, więc z małego twierdzenia Fermata wynika, że $x_i^{q-1} \equiv 1 \pmod q$, skąd $x_i^{p+q-1} \equiv x_i^p \pmod q$, lecz $\sum_{i=1}^{n} x_i^p \equiv 0 \pmod q$, przeto po zsumowaniu kongruencji dostajemy $\sum_{i=1}^{n} x_i^{p+q-1} \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i^p \equiv 0 \pmod q$.

Ale z kolei $\sum_{i=1}^{n} x_i^{p+q-1} > \sum_{i=1}^{n} x_i^p$, bowiem dla $x_i > 1$, $q \geqslant 2$ mamy $x_i^{p+q-1} > x_i^p$. Wynika stąd, że liczba $\sum_{i=1}^{n} x_i^{p+q-1}$ jest złożona, gdy liczba $\sum_{i=1}^{n} x_i^p = q$ jest pierwsza, a zatem co najmniej jedna z liczb $\sum_{i=1}^{n} x_i^p$ oraz $\sum_{i=1}^{n} x_i^{p+q-1}$ większych od N jest złożona. Dowodzi to jednocześnie żądanej tezy, bowiem liczba N obrana była dowolnie.

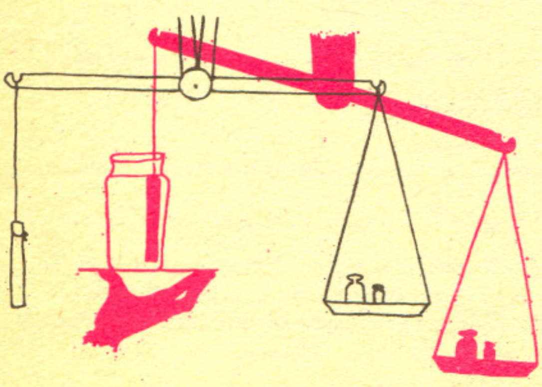
Zapewne znacznie trudniejsze byłoby znalezienie warunków na liczby n, p takich, by istniało nieskończenie wiele liczb pierwszych $\sum_{i=1}^{n} x_i^p$, gdzie x_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ są całkowite. Z pewnych twierdzeń Fermata, Gaussa oraz Lagrange'a wynika, iż istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci $x_1^2+x_2^2$, $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$, gdzie x_1, x_2, x_3, x_4 są całkowite.
W roku 1923 G. H. Hardy i J. E. Littlewood wyrazili przypuszczenie, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci $x_1^3+x_2^3+x_3^3$, gdzie x_1, x_2, x_3 są całkowite.

„Ciało zanurzone w cieczy traci na ciężarze tyle, ile waży wyparta przez nie ciecz". Tak podobno powiedział Archimedes, i tak uczą ludzi od niepamiętnych czasów podręczniki filozofii, historii naturalnej, ostatnio zaś fizyki. Skoro tylu ludzi tak twierdzi, to chyba tak jest. Spróbujmy jednak sprawdzić.
Do doświadczeń potrzebna będzie waga z zawieszanymi szalkami, komplet odważników, dwa słoje mieszczące się na szalce wagi, sztabka metalowa lub dodatkowy odważnik, drewniany klocek, cienki sznurek lub mocna nitka i dostęp do wody. Doświadczenia będą wykonalne w każdej szkolnej pracowni fizycznej.



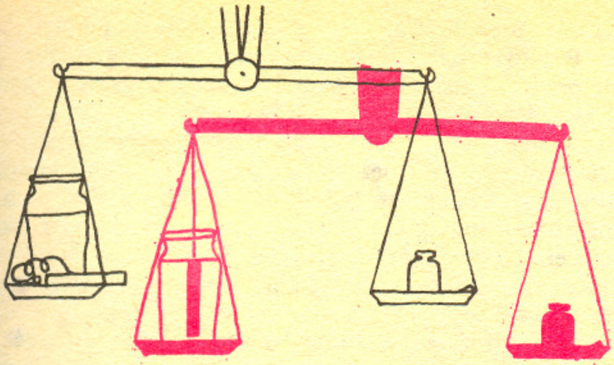
Doświadczenie 1

Nalejmy do słoja wody, postawmy go na szalce wagi, obok niego połóżmy na szalce metalową sztabkę. Zrównoważmy ich ciężar odważnikami. Następnie przełóżmy sztabkę do słoja z wodą.... Szalki pozostają nadal w równowadze. Sztabka metalowa nic nie straciła na ciężarze.
Hm. Powtórzmy eksperyment.



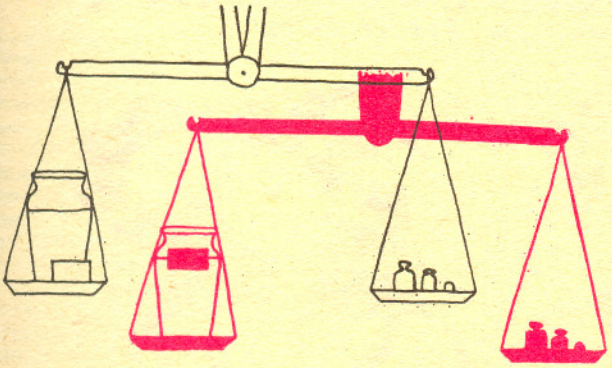
Doświadczenie 2

Zdejmijmy szalkę wagi, zamiast niej zawieśmy na sznurku sztabkę. Zrównoważmy ją odważnikami. Teraz podstawmy słój pod sztabkę i napełnijmy go wodą tak, aby sztabka zanurzyła się. Szalka z odważnikami leci w dół. Sztabka utraciła część swojego ciężaru. Cierpliwy eksperymentator może nawet zmierzyć, ujmując odważniki, ile wyniosła strata ciężaru, zmierzyć objętość sztabki i sprawdzić, że strata ciężaru sztabki jest równa ciężarowi wypartej wody. Jest więc w tym prawie Archimedesa coś z prawdy. Sztabka traci na ciężarze, ale nie zawsze. Może rzecz w tym, iż za pierwszym razem sztabka naciskała na dno słoja? Powtórzmy doświadczenie jeszcze raz.



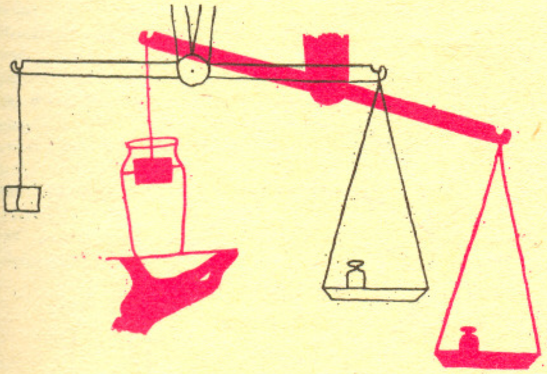
Doświadczenie 3

Na jednej szalce wagi postawmy słój z wodą, obok niego połóżmy sztabkę i kawałek sznurka, na drugiej — tyle odważników, aby szalki były w równowadze. Zawieśmy teraz sztabkę na sznurku, przyczepionym do haczyka od szalki tak, aby była zanurzona w wodzie. Szalki ani drgną. Sztabka nic nie straciła na ciężarze.
Aha, nie naciskała na dno, ale ciągnęła za sznurek. Zróbmy więc tak, aby ani nie naciskała, ani nie ciągnęła. Musiałaby sama pływać...
Zamieńmy więc sztabkę na klocek. Powtórzmy eksperyment.



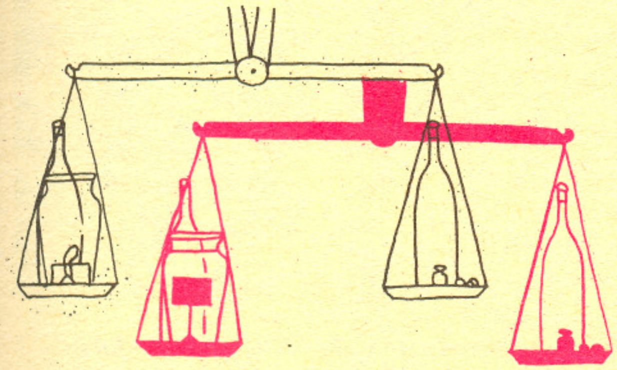
Doświadczenie 4

Kładziemy klocek na szalce, obok słoja z wodą i równoważymy wszystko odważnikami. Następnie wkładamy klocek do słoja. Pływa. Ale szalki ani drgną. Nie stracił na ciężarze. Zupełnie tak, jakby coś przekazało ciężar klocka w dół na szalkę.
To „coś" to chyba woda. No tak, woda potrafi, zgodnie z prawem Pascala, przekazywać ciśnienie „na odległość". Ale dlaczego w takim razie sztabka traciła część ciężaru, gdy słój nie stał na szalce? Aha, było chyba tak: sztabka działała na wodę pewną siłą w dół, więc woda, zgodnie z III prawem Newtona, zadziałała na sztabkę przeciwnie skierowaną i równą co do wartości siłą reakcji. Zaraz, zaraz, ale sztabka straciła tylko część swojego ciężaru. Dlaczego nie cały? Czy klocek traci też tylko część swojego ciężaru? Sprawdźmy...



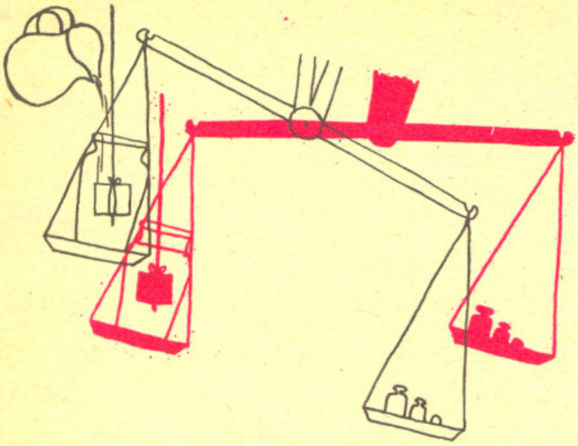
Doświadczenie 5

Powtarzamy doświadczenie 2 z klockiem zamiast sztabki. Klocek pływa po powierzchni, sznurek luźno zwisa. Klocek stracił cały ciężar.
Ooo, to już się nam nie podoba. Spróbujmy wepchnąć klocek pod powierzchnię wody. Niech nie będzie taki ważny. Stawia opór... Gdyby więc przywiązać go do dna słoja, ciągnąłby dno do góry. Może wtedy słój straci na ciężarze?
Sprawdźmy to.



Doświadczenie 6

Tu będzie nam potrzebna silna przyssawka gumowa (np. od strzałki dziecinnego pistoletu) i igła z nitką. Należy przyszyć koniec sznurka do przyssawki, a następnie przyssać ją lub przykleić (dobrym klejem wodoodpornym, np. „Hermolem") do dna słoja. Na drugim końcu sznurka uwiążemy klocek. Sznurek powinien być na tyle krótki, aby klocek nie mógł wypłynąć na powierzchnię wody. Odważamy w drugim słoju odpowiednią porcję wody, ważymy pusty słój z przyssawką i klockiem, następnie przelewamy wodę do niego i ważymy ponownie. Klocek ciągnie przyssawkę, a za jej pośrednictwem dno słoja, do góry z całej siły, lecz ciężar słoja z zawartością jest dokładnie równy sumie ciężaru wody i ciężaru pustego słoja z klockiem i przyssawką.
Tak. Waga nic sobie nie robi z zapasów między klockiem i wodą, jeśli tylko i klocek, i woda są na szalce. Zachowanie klocka względem wody jest osobistą sprawą tych dwojga. Jeśli jednak woda wypycha klocek do góry, to klocek powinien, zgodnie z III prawem Newtona, pchać wodę w dół. Sprawdźmy to.



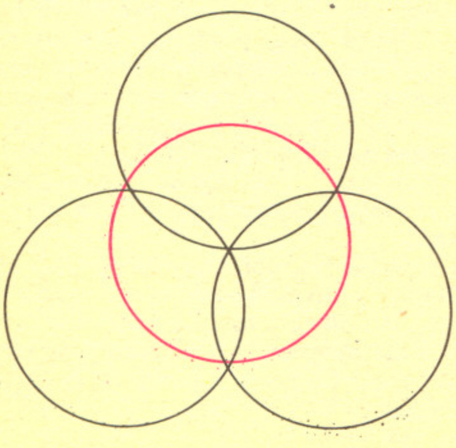
Doświadczenie 7

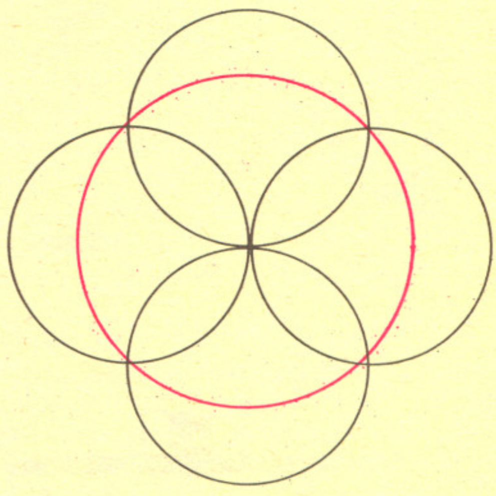
Potrzebny będzie pręt metalowy, długości przynajmniej 30 cm. Przytwierdźmy klocek do końca pręta (np. przez mocne przywiązanie sznurkiem). Odważmy wodę w jednym słoju, zważmy drugi, pusty słój. Obciążmy jedną szalkę wagi taką ilością odważników, która odpowiada sumie ciężaru pustego słoja i ciężaru przygotowanej porcji wody. Na drugiej szalce postawmy pusty słój. Jedna osoba niech wsunie koniec pręta z klockiem do słoja na wadze, ale tak, aby klocek ani pręt nie dotykały go. Teraz niech chwyci pręt mocno, aby nie poruszył się przy nalewaniu wody. Druga osoba, niech napełni słój na szalce wodą. Słój opada w dół. Jesteśmy w domu. Woda chciała wypchnąć klocek do góry, lecz ten, trzymany krzepko na pręcie przez kolegę, nie dał się. Wobec tego woda powędrowała w dół. Prawo Archimedesa opisuje siłę, jakiej doznaje ciało zanurzone w cieczy, względem tej cieczy. Ciężar, czyli siła, z jaką Ziemia działa na ciało, nie ulega przy tym zmianie.
I na koniec zagadka:
A co stałoby się z prawem Archimedesa w stanie nieważkości, np. w stacji orbitalnej?

Układamy kółka

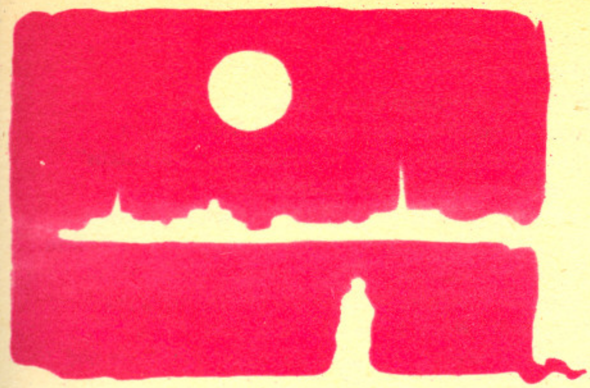
Jeżeli mamy wycięte jednakowe kółka możemy za ich pomocą pobiedzić się nad rozwiązaniem następującego zadania: jak ułożyć te kółka, aby na przykrytej przez nie powierzchni dało się narysować możliwie największe koło. Rozwiązanie dla trzech kółek, czy dla czterech jest oczywiste. A dalej?
Spróbujcie sami. My dodamy tylko, że dla pięciu kółek rozwiązanie jest mocno nietypowe, a gdzieś w okolicy dwudziestu kółek w ogóle kończy się dotychczasowa wiedza.

Takie proste zadanie, że aż wstyd. Może potraficie je rozwiązać powiedzmy do dwudziestu. A może ogólnie?





Małą Deltę opracowali: Marek KORDOS i Andrzej KRASIŃSKI.



Kącik filatelistyczny (13)

Leonhard Euler (1707—1783) był najbardzie znanym matematykiem XVIII wieku i jednym z twórców nowoczesnej matematyki. Pochodził z Bazylei, gdzie studiował matematykę pod kierunkiem J. Bernoulliego. W wieku lat dwudziestu był już na tyle znany, że zaproszony został do Petersburga przez tamtejszą Akademię Nauk i wkrótce otrzymał tam stanowisko profesora. Pracował w Petersburgu przez kilkanaście lat, potem przez 25 lat w Berlinie (na zaproszenie króla Prus, Fryderyka II), a pod koniec życia wrócił znów do Petersburga. Euler był niesłychanie płodnym uczonym — opublikował ponad 500 prac z matematyki, dotyczących prawie wszystkich znanych wówczas jej działów. Zapoczątkował teorię równań różniczkowych i funkcji specjalnych, wprowadził do analizy matematycznej liczby zespolone. Od niego pochodzi wiele twierdzeń, definicji i oznaczeń współczesnej matematyki (np. oznaczenia liczb π i e). Dużo uwagi poświęcił Euler zastosowaniom matematyki w różnych dziedzinach nauki i techniki — publikował prace z astronomii, optyki, hydrauliki (sformułował prawo mechaniki płynów znane jako prawo Eulera), a także prace dotyczące muzyki, budowy okrętów i artylerii. Pełne wydanie jego dzieł obejmuje ok. 30000 stron druku.

Znaczki z podobizną Eulera wydano w NRD w latach 1950 i 1957, oraz w ZSRR w roku 1957. Reprodukujemy znaczek z NRD z roku 1957.

Jerzy BARTKE

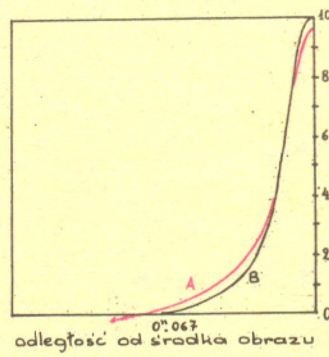
Patrz w niebo

Rękojeść maczugi tworzącej gwiazdozbiór Wolarza i rzucającej się w oczy na majowym niebie, stanowi jasna gwiazda Arktur (α*Bootis*). Na pierwszy rzut oka wydaje się, że nie wyróżnia się ona niczym wśród innych gwiazd, poza swoją jasnością widomą. Aby pokazać, że o każdej gwieździe można powiedzieć wiele ciekawego, zajmijmy się na chwilę Arkturem. Jest on czwartą co do jasności gwiazdą na naszym niebie, jest ok. 115 razy jaśniejszy od Słońca, liniowe rozmiary 25-krotnie przewyższają rozmiary Słońca, a masa jest 4 razy większa — z czego wynika, że średnia gęstość gwiazdy jest 3 razy mniejsza od gęstości powietrza, którym oddychamy (spotykamy gwiazdy o masie właściwej jeszcze tysiące razy mniejszej). Kolor Arktura jest żółto-czerwony.

Po przedstawieniu tej metryczki przejdźmy do najbardziej ciekawego faktu dotyczącego Arktura. Otóż przed pół milionem lat gwiazda ta nie była w ogóle widoczna gołym okiem (o ile „gołe oko" miało tę samą czułość co dzisiaj). Jednak przybliżając się do nas w ogromnym tempie, gwiazda szybko zwiększała swoją jasność a odległość od Słońca zmniejszała się. Obecny etap można nazwać „bliskim spotkaniem" obu gwiazd — właśnie Arktur nas mija — porusza się prawie po prostopadłej do linii naszego wzroku skierowanego na tę gwiazdę. Arktur jest obecnie odległy od nas tylko o 11 parseków i już prawie się do nas nie zbliża, za kilka tysięcy lat osiągnie punkt, w którym prędkość radialna wyniesie 0, a potem poszybuje w przestrzeń by zniknąć za 500 tysięcy lat z naszego pola widzenia gdzieś w gwiazdozbiorze Panny. Arktur jest gwiazdą populacji II i należy do podsystemu sferycznego naszej Galaktyki (patrz artykuł M. Czernego w tym numerze), co tłumaczy jego znaczną prędkość względem nas. Dzięki małej odległości Arktura oraz zastosowaniu nowoczesnych cyfrowych technik przetwarzania obrazów gwiazd można było wyznaczyć w sposób bezpośredni jego średnicę kątową, która wynosi 0,020 sekundy łuku (pod takim kątem widzielibyśmy dwa brzegi złotówki z odległości 40 km), a niedługo będziemy, być może, dostrzegać szczegóły na tarczy tej i innych bliskich gwiazd (jasne lub ciemne plamy, „pociemnienie brzegowe" itp).

Zastosowana technika polega na tym, że obraz dyfrakcyjny, jaki tworzy gwiazda na kliszy, po odpowiednim przetworzeniu uwzględniającym wpływ atmosfery (speckle interferometry), porównuje się z obrazem źródła punktowego. Za różnice między tymi obrazami odpowiedzialne są szczegóły na tarczy gwiazdy.

mgr Tomasz CHLEBOWSKI



Rozkład jasności obrazów dyfrakcyjnych Arktura (A) i dalekiej, praktycznie punktowej gwiazdy (B).

Examin maturitatis po raz pierwszy

Egzamin dojrzałości, matura, w szkołach departamentowych Księstwa Warszawskiego został wprowadzony po raz pierwszy w roku 1812. Pozostał do dziś, sprawdzając dojrzałość abiturienta szkoły średniej do podjęcia studiów wyższych.
Przez wiele lat był równocześnie egzaminem wstępnym na wyższe uczelnie.
Niektórzy nasi Czytelnicy zdawali egzamin dojrzałości w tym miesiącu. Przypomnijmy, jak odbywała się pierwsza matura.
Przedstawiamy fragmenty,,Wewnętrznego urządzenia szkół departamentowych", przepisów wydanych w 1812 roku przez Dyrekcję Edukacji Narodowej w Warszawie:

§ 41. Nikt do Uniwersitetu przyjętym nie będzie, kto całego kursu nauk w szkole Departamentowey nie ukończy, niżey opisanego examinu przed naywyższą Magistraturą edukacyyną mieyscową nie odprawi, i nie otrzyma patentu, czyli zaświadczenia ,,maturitatis" od teyże Magistratury, od Rektora i Professorów examinuiących podpisanego.
§ 43. Uczniowie chcący się udać do Uniwersitetu, oświadczyć na piśmie tę chęć swoią powinni Rektorowi szkoły, na cztery, a naymniey trzy tygodnie przed popisem publicznym z wyrażeniem umieiętności, którą sobie każdy z nich za główny przedmiot uczonego swego zawodu obiera.
§ 44. Odebrawszy Rektor to oświadczenie, wzywa do siebie Professorów którzy maiącym odchodzić uczniom lekcye dawali, i układa z nimi temata, które odchodzący na piśmie wypracować maią. Wypracowanie to odbędzie się w przeznaczonym do tego dniu iednym pod okiem Rektora, który potrzebnych pomocy piszącym z biblioteki dostarczy.
§ 45. Temata ściągać się naprzód powinny do okazania postępku w naukach, stosuiąc onych materyą do głównego przedmiotu każdego odchodzącego: tak np. aby dla zabieraiącego się na prawnika tema wzięte było z pierwszych zasad moralności, z konstytucyi krayowéy; chcącemu się sposobić do Urzędów administracyjnych, z kameralney chimii, fizyki, historyi naturalney; na Filologa i Literata, z wiadomości rzeczy starożytnych; na budowniczego Hidraulika i.t.p. z matematyki i fizyki.
Roboty te powinny bydź w sposobie rozpraw, krótko, zwięźle a ile rzecz pozwoli i ozdobnie ułożone. Nie żąda się po nich wyższych wiadomości nad te, które są planem nauk obięte, wszakże zaletą będzie dla piszących, ieźli okażą wiadomości z prywatnego czytania xiążek nabyte.
§ 46. Po tych nastąpią temata na okazanie postępku w ięzyku Łacińskim, Francuzkim i Niemieckim. Tych materye wymagać będą, napisanie listów, powieści lub opisów historycznych, w tych ięzykach ułożonych.
§ 47. Nadto chcący otrzymać ,,testimonium maturitatis" przekładać będą mieysca wskazane sobie, tak Prozaików iak Poetów tychże ięzyków na polski. Wzory wyięte z autorów łacińskich, oprócz tłumaczenia obiaśniać będą gdzie tego wymaga potrzeba, wiadomościami z historyi, Jeografii i z starożytności czerpanymi. Do wyiaśnienia iednak mieysc zawilszych z Horacego, Wirgiliusza, Tacyta etc. można im pozwolić dykcyonarza lub komentarza dla doświadczenia czy ich użyć umieią.
§ 48. Przygotowane temata przezieraią Rektor z wyżey wzmiankowanymi Professorami, i znacznieysze w nich błędy podkreślaią.
§ 49. W dzień examinu ustnego, na który uczniom a szczególniey klass wyższych przystęp będzie wolny, Professorowie każdy w swym przedmiocie daią krótką recenzyą robot uczniów, i podkreślone w nich mieysca błędne, okazuią dozorowi mieyscowemu.
Potem examinują uczniów z matematyki, loiki, historyi powszechnéy i polskiey, zasad moralności, konstytucyi krayowéy, z fizyki, chimii, historyi naturalnéy, z ięzyków i onych literatury. ...
§ 50. Po skończonym takowym examinie i oddaleniu się tak examinowanych iak publiczności, Magistratura edukacyyna wraz z Rektorem i przybranemi Professorami sądzą o dojrzałości każdego odchodzącego i wydaią względem niego wyrok ,,sine vel cum admonitione". Nakoniec uznanym za doyrzałych daią dyplomata podpisami wszystkich examinuiących osób, i pieczęciami tak Magistratury edukacyyney, iak szkolną stwierdzone".

Tak przebiegała pierwsza matura. W ciągu lat przepisy i organizacja ulegały zmianom. Różnie też odbywała się w różnych zaborach. Przypomnijmy jeszcze zestaw zadań maturalnych sprzed stu lat.

Zadania dane uczniom kl. VIII gimnazjów Okręgu Naukowego Warszawskiego na egzaminach dojrzałości w końcu roku szkolnego 1880/81. Zadania z matematyki:

a) z arytmetyki. 0,4666... sumy otrzymanej ze sprzedaży weksla 36000 rs. z potrąceniem 8% za 9 miesięcy przed terminem, użyto na kupno lasu prostokątnego długości 768 sążni, szerokości 175 sążni. Za resztę otrzymanych pieniędzy kupiono dom; dochód z domu za trzy miesiące stanowi tyle rubli, ile zapłacono za dziesiatynę lasu. Obliczyć jaki procent przynosi kapitał użyty na kupno domu?
b) z geometryi. W kulę wpisanym jest graniastosłup trójkątny foremny, którego powierzchnia boczna ma być równą sumie powierzchni obu podstaw. Danym jest bok $a = 12$ podstawy trójkątnej, obliczyć promień kuli.
c) z algebry. Suma trzech liczb stanowiących postęp arytmetyczny równa się 15; jeżeli do pierwszej z nich dodamy 1, do drugiej 4, do trzeciej 19, to otrzymamy trzy liczby stanowiące postęp geometryczny. Znaleźć te liczby.
d) z trygonometrii. W rombie daną jest suma 2284,2 dwóch przekątnych i kąt 75°47'48" między dwoma bokami. Obliczyć powierzchnię figury.

opracował *mgr Walerian* ***PIOTROWSKI***

Egzamin

Dramat w jednym akcie na cztery osoby: *dr Alfa, dr Beta, doc. dr hab. Omikron* oraz *Kandydat.* Po podniesieniu się kurtyny widzimy salę egzaminacyjną Uniwersytetu. Stół nakryty zielonym suknem, akcent kolorystyczny w postaci bukiecików stokrotek. W głębi duża szklana tablica. *Alfa, Beta* i *Omikron* siedzą w fotelach między tablicą a stołem.

Wchodzi *Kandydat.*

Alfa: Jak pana nazwisko?

Kandydat: Kandydat.

Alfa: Z czego pan się przygotowywał?

Kandydat: Powtórzyłem Algebrę, Analizę i Algorytmy. Mogę odpowiadać.

Alfa: Proszę nam powiedzieć, co nazywamy półciągłym mianownikiem.

Kandydat: Rozpatrzmy rodzinę podwójnie ewolutywnych funkcji holonomicznych na sferze jednostkowej. W naturalny sposób nakładamy na to strukturę grupy topologicznej i wobec tego jednostajność Skolema na cyklach automorficznych jest — jako θ-relacja na zbiorach miary zero — dobrze zdefiniowana. Oczywiście wyjdzie na to samo, jeżeli określimy ją jako funkcję na tych lewych ideałach, które wyznaczają waluacje archimedesowe (jednostajnie na zbiorach zwartych, ma się rozumieć). Wobec tego dla dowolnego predykatu kardynalnego, mianownik półciągły jest tym normalnym kwaternionem, dla którego nasz problem znika prawie wszędzie.

Beta: Czy może pan podać nam przykład jednostajności nieskolemowskiej?

Kandydat: Wydaje mi się, że odwrotności liczb rzeczywistych nie są jednostajne w sensie Skolema ze względu na przeliczalne przecięcia... przynajmniej prawie wszędzie...

Beta: W porządku. Czy mógłby pan teraz...

Omikron (przerywa): Przepraszam, że przerywam, ale chyba to nie jest nieskolemowska jednostajność. Nie widzę, czemu spełniony jest aksjomat o gęstości siódmych pierwiastków z jedności.

Beta: Tak, tak, to jest niejasne, ale w mojej pracy o algebrach toksycznych (*Journal of Refined Algebra*, 1959) wykazałem, że jeżeli baza jest przeliczalna, a metryka noetherowska, to teoria snopów o źdźbłach na drzewach trywializuje się, gdy drzewo jest styczne do pewnego gęstego pola...

Omikron (znów przerywa): Aha, rozumiem.

Alfa: Proszę powiedzieć nam, jak się dowodzi twierdzenia Hockqe'a-Klockqe'a o jednostajnych trywialnościach.

Kandydat: Twierdzenie Heinego-Borela pozwala zredukować równania Cayley'a-Hamiltona do kanonicznej postaci Cauchy-Riemanna. Na mocy lematu Bolzano-Weierstrassa różniczka Radona-Nikodyma spełnia zatem założenie twierdzenia Nagaty-Smirnowa, a to znaczy, że odwzorowanie Schrödera-Bernsteina jest pojedyncze i rozdzielcze (wystarczy skorzystać z twierdzenia aproksymacyjnego Stone'a — Weierstrassa). Skoro tak, to całkę Lebesgue'a-Stjeltjesa możemy z dobrym skutkiem wstawić do tezy twierdzenia Riemanna-Rocha w wersji Grothendiecka-Hirzebrucha, lub — rzecz jasna — do twierdzenia Gołoda-Szafarewicza. W tym ostatnim przypadku musimy tylko pamiętać, aby nie przedłużyć jej omal prawie nigdzie metodą Banacha-Hahna. Tak czy inaczej otrzymujemy wreszcie klasyczny ciąg Jordana-Höldera. Zwracam uwagę, że nie korzystałem z lematu Kuratowskiego-Zorna!

Beta: Czy zna pan definicję zbioru zwartego?

Kandydat: Mówimy, że zbiór jest zwarty, jeżeli z każdego pokrycia otwartego można wybrać podpokrycie skończone, przepraszam, z każdego nakrycia otwartego można zabrać pokrycie nieskończone... och, myli mi się... z każdego pokrycia podtwardego można wykryć otwarcie proskończone. Dokładnie: z rzadkiego odkrycia potwornego można wyjąć ubranie wykończone... tak jest przynajmniej prawie zawsze...

Alfa: Zostawmy to na chwilę, a zamiast tego może poda nam pan przykład zbioru zwartego.

Kandydat: No więc tak... Bierzemy prostą rzeczywistą i na niej jakiś zbiór ograniczony, czy raczej granicę zbiorową... wybieramy podciąg zbieżny... zupełny w sensie Cauchy'ego... ma granicę — nieskończony...

Omikron: Na przykład: czy przedział liczbowy jest zwarty?

Kandydat: Tak, tak, oczywiście jest... to znaczy nie jest. Zwarty pan mówi? Bywa zwarty, przynajmniej prawie wszędzie... biorę liczby wymierne, może lepiej będzie niewymierne i określam je za pomocą przekroju Dedekinda. Wszystkie liczby mniejsze niż $\sqrt{2}$ mają limes superior... to znaczy... wszystko ma swój kres...

Omikron: No tak, racja. A propos, $\sqrt{2}$ jest wymierny, czy niewymierny?

Kandydat: $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$? Wymierny, czy niewymierny? Liczba jest niewymierna, jeśli nieprawdą jest, by była wymierna... $n^2 = 2m^2$ i rozpatrzymy dwa przypadki: n mniejsze od m lub n względnie pierwsze z 2... po obu stronach stoją liczby całkowite...

Alfa: Co pan rozumie przez liczby całkowite?

Kandydat: Do tego służą postulaty (zwane inaczej aksjomatami) Peano. Istnieje element 1 i $s(1)$ jest równe 2, potem $s(s(1))$ jest równe... i tak dalej. W każdym razie prawie wszędzie...

Przepisy dla nauczycieli jednego z amerykańskich college'ów (1872)

1. Nauczyciele każdego dnia napełniają lampy i czyszczą kominki.
2. Każdy nauczyciel winien przynieść wiadro wody i kosz węgla na zajęcia na dany dzień.
3. Pióra należy przygotowywać starannie. Dozwolone jest ostrzenie stalówek według indywidualnych gustów uczniów.
4. Mężczyźni mogą każdego tygodnia otrzymać jeden wieczór wolny, albo dwa — jeżeli uczęszczają regularnie do kościoła.
5. Po dziesięciu godzinach w szkole, nauczyciele mogą spędzać pozostały czas na czytaniu Biblii albo innych stosownych książek.
6. Nauczycielki, które wyjdą nieodpowiednio za mąż albo zawierają niestosowne znajomości, będą zwolnione z pracy.
7. Każdy nauczyciel winien odkładać ze swych zarobków odpowiednią sumę na swoje lata emerytalne, aby nie stać się ciężarem dla społeczeństwa.
8. Każdy nauczyciel, który pali papierosy, używa alkoholu pod dowolną postacią, uczęszcza na bilard lub do lokali albo goli się u fryzjera, daje tym samym podstawę do wątpienia w swoją wartość, dobre intencje, rzetelność i uczciwość.
9. Nauczyciel wypełniający swe powinności bez zarzutu przez 5 lat, otrzyma podwyżkę w wysokości 25 centów na tydzień, pod warunkiem, że zaaprobuje to Komisja Edukacji.

Rozmyślania nad programem szkolnym

— Cóż to za matematyka, której uczą teraz w szkołach! Byłem celującym uczniem, ukończyłem Politechnikę [(...)], ale mej córce, która chodzi do szóstej klasy, przy zadaniach domowych pomagać nie mogę.
— A jaki materiał teraz córeczka przerabia?
— Jakieś przekroje w zakresie liczb wymiernych lub też coraz to nowe parametry zmienne!
— A tak, ma to na celu kształcenie... — zacząłem mówić, ale ojciec dokończył:
— Ma kształcić? Oszaleć można przy takich zadaniach. Lepiej już znieść matematykę w szkole, aby dzieci niepotrzebnie nie dręczyć rzeczami dla nich niezrozumiałemi!

(„*Parametr*", 1930)

Beta: W tej części materiału nie czuje się pan zbyt pewnie. Ale może jeszcze jedno łatwe pytanie. Ile jest 2 dodać 2?
Kandydat: No tak, to proste. Mamy binarną operację + (definiowaną indukcyjnie) i symbolem 2 oznaczamy ...
Beta: Nie, nie, proszę nie dowodzić, tylko podać nam nazwę liczby, która powstaje, gdy liczbę całkowitą 2 dodamy do niej samej.
Kandydat: Uczyłem się tego. Zaraz sobie przypomnę. No tak, pamiętam. W pierścieniu Dedekinda 2 generuje ideał pierwszy, który jest nierozgałęziony wtedy i tylko wtedy, gdy...
Alfa, *Beta* i *Omikron* (razem): Ile to jest 2 dodać 2? Uczył się pan tego w pierwszej klasie.
Kandydat: Tak, tak, oczywiście... Nie mogę się skupić... Naprawdę wiem... chwileczkę... w pierwszej klasie, mówi pan... Zgadza się, 2 plus 2 jest... zaraz, zaraz, 1 plus 1 to dwa, dwa plus jeden to trzy... rozdzielność mnożenia względem dodawania... to chyba ma jakiś związek z grupą czwórkową Kleina... 8 razy 8 jest 65. Do licha! 2 plus 2 jest 2 plus 2 jest 2 plus 2 jest...
Alfa... Może na tym skończymy. Dziękujemy panu. Poprosimy pana za kilka minut i powiemy...

*

Kandydat wychodzi. *Alfa*, *Beta* i *Omikron* jeszcze raz przeglądają pracę *Kandydata* „*σ — quasi ćwierćciągłe mianowniki w algebraicznie przymkniętych ciałach liczb przestępczych*". Nagle ze ściany spada tablica i przygniata ich.
Kandydat nerwowo przechadza się po korytarzu. Otwierają się powoli drzwi od sali egzaminacyjnej i na czworakach wychodzi z nich *Omikron*; prawa ręka nienaturalnie wykręcona, twarz podrapana, ubranie w strzępach.

Omikron (do *Kandydata*, uśmiechając się): Prosimy pana do środka. Pański egzamin został oceniony jako...

KURTYNA

(na podstawie: R. Both, *The qualifying examination*, *The Mathematics Magazine*, 1960)

Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 223. Mając do dyspozycji sferę, kartkę papieru, cyrkiel i linijkę znaleźć promień tej sfery.
Rozwiązanie na str. 6.

M 224. Znaleźć wartości całkowite parametru a, dla których równanie

$$(x-a)(x+10)+1=0$$

ma pierwiastki całkowite.
Rozwiązanie na str. 4.

M 225. Wykazać, że kwadrat każdej liczby pierwszej większej od 3 daje przy dzieleniu przez 24 resztę 1.
Rozwiązanie na str. 7.

Redaguje dr Marek KALINOWSKI

F 76. W atmosferze przesyconej parą wodną spada kulista kropla wody. W czasie ruchu para wodna kondensuje się na kropli powiększając jej masę. Opisać ruch kropli. Opór powietrza pomijamy.
Wskazówka. Szybkość konsendacji pary na kropli jest wprost proporcjonalna do powierzchni kropli.
Rozwiązanie na str. 3.

O największej znanej liczbie

Nie, to nie pomyłka. Czy wiecie, jaka jest największa liczba naturalna spotkana do tej pory w matematyce? Że takiej nie ma, bo do każdej można dodać jeden i będzie większa? No tak, ale trochę nie o to chodzi. Chodzi mianowicie o liczbę, która pojawiła się w teoriach matematycznych w mniej więcej naturalny sposób, niejako przypadkiem, a nie np. w artykule „Jak pisać coraz to większe liczby ...” itp.

Niech $\pi(n)$ oznacza liczbę liczb pierwszych nie większych niż n, natomiast

$$\mathrm{li}\, n = \int_0^n \frac{dx}{\ln x}$$

(jest to tzw. logarytm całkowy, z dokładnością do pewnych subtelności związanych z całkowaniem). Dla wszystkich n, dla których umiemy obliczyć $\pi(n)$, mamy

$$\pi(n) < \int_0^n \frac{dx}{\ln x}.$$

W 1914 roku Littlewood wykazał, że istnieje liczba X taka, że w przedziale $[0, X]$ znajdzie się na pewno takie n, dla którego będzie spełniona nierówność przeciwna. W 1937 Skewes pokazał, że takim X może być np.

$$X = 10^{10^{10^{34}}},$$

a czy może być mniejsze — nie umiał rozstrzygnąć.

To rzeczywiście dość duża liczba. Wątpliwe, czy naprawdę umiemy sobie zdać sprawę z tego, jak jest wielka. Zacznijmy od takiej historyjki. Wyobraźmy sobie skałę o objętości jednej mili sześciennej (mila = 1609 m) i milion razy twardszą niż diament. Raz na milion lat podchodzi do tej skały człowiek i delikatnie przesuwa po niej rękę. Po pewnym czasie skała się zetrze. Jakim? Zaledwie 10^{35} lat (jak twierdzi Littlewood w „A mathematician’s miscellany”).

Trochę więcej jest elektronów we Wszechświecie: podobno $157 \cdot 10^{77}$.

W następnej historyjce umieścimy mysz w ośrodku o temperaturze biliona (10^{12}) stopni. Nie musi ona tam od razu zginąć z gorąca, bo a nuż wskutek niesłychanie mało prawdopodobnego rozkładu prędkości cząsteczek uda jej się trochę przeżyć. Jeśli będzie miała pecha, może nawet zamarznąć. Prawdopodobieństwo, że uda jej się przeżyć cały tydzień jest nie mniejsze niż

$$\frac{1}{10^{10^{46}}}$$

(chyba, że zdechnie z głodu).

To już coś, choć liczba $10^{10^{46}}$ jest drobnym ułameczkiem w porównaniu z naszym $X = 10^{10^{10^{34}}}$ (tak jak 46 z 10^{34}). Natomiast zupełnie dobrze może z nią konkurować skromnie wyglądające

$$9!^{9!^{9!}}.$$

Choć mniejsza od X (dlaczego?), ta liczba jest już znacznie większa od $10^{10^{10^8}}$ (dlaczego)?

A jaka jest największa liczba napotkana w tzw. życiu codziennym? Matematyk niemiecki Edward Kasner wspominał, że w okresie wielkiej inflacji w Niemczech (lata dwudzieste bieżącego wieku) widział w sprawozdaniu bankowym liczbę

496585346000000000000

(czterysta dziewięćdziesiąt sześć trylionów pięćset osiemdziesiąt pięć tysięcy trzysta czterdzieści sześć bilionów) marek.

Czytelnik, który zetknął się z niedziesiętnymi układami pozycyjnymi zapisania liczb wie, że napis 100 przedstawia w układzie dwójkowym 4. Dla uniknięcia nieporozumień piszemy wówczas $(100)_2 = 4$. Analogicznie w układzie o podstawie 11 ten sam napis oznacza kwadrat podstawy, czyli liczbę 121, co zapisujemy $(100)_{11} = 121$. Przedstawmy w systemie jedenastkowym kwadraty następnych liczb naturalnych. Łatwo wyliczymy, że $144 = (121)_{11}$, $169 = (144)_{11}$. Nietrudno zauważyć prawidłowość. Przewidujemy, że $196 = (169)_{11}$ i również bez trudu potwierdzamy to rachunkiem. Teraz kolej na 225. I tu niespodzianka: $225 \neq (196)_{11}$. Liczymy uważnie: $(196)_{11} = 1 \cdot 11^2 + 9 \cdot 11 + 6 = 226$. Skąd nagle ta nierówność? Czy jest to wyjątek od narzucającej się reguły, czy odwrotnie, wyjątkami są wymienione równości? Podstawa 11 nie jest jedyną o podobnej własności. Bez trudu wyliczamy, że

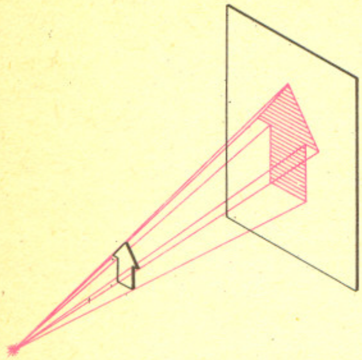
$(100)_{12} = 144$
$(121)_{12} = 169$
$(144)_{12} = 196$
$(169)_{12} = 225$

ale $(196)_{12} = 258$, a nie $256 (= 16^2)$. Czy liczby 11 i 12 są jedynymi mającymi tę zabawną własność?

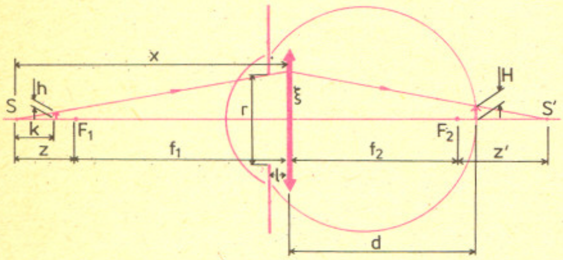
Zenon PIESYK

Kącik filumenistyczny

Czy możliwe jest widzenie wielkości mikroskopowych nieuzbrojonym okiem?



Rys. 1



Rys. 2

Jak dobrze wiadomo oko ludzkie jest w stanie rozróżnić dwa punkty, jeśli ich odległość kątowa jest większa od jednej minuty. Normalnie więc można rozróżnić punkty odległe co najwyżej o 0,1 mm.

W pewnych szczególnych okolicznościach oko ludzkie może działać jak powiększalnik fotograficzny. Tą metodą można rozdzielać punkty znajdujące się znacznie bliżej siebie (rys. 1). Zauważyłem, że jeśli tuż przed powierzchnią oka umieści się prawie punktowe źródło światła, to na siatkówce nie utworzy się punktowy obraz, lecz powstanie świetlna plamka. Umieszczenie pomiędzy okiem, a źródłem światła małego przedmiotu spowoduje, że na siatkówce będzie widoczny jego cień. Będzie on obrazem prostym, jednak w naszej świadomości zostanie odwrócony i jako taki będziemy go widzieć. Okazało się, że zjawisko to jest znane i że jego jakościowy opis podany jest przez Williama Bragga [1]. Poniżej przedstawiam rozważania teoretyczne, które pozwalają to zjawisko ująć ilościowo. Geometria doświadczenia jest pokazana schematycznie na rys. 2, gdzie przyjęto następujące oznaczenia:

F_1 — ognisko przednie soczewki oka
F_2 — ognisko tylne soczewki oka
S — punktowe źródło światła
S' — obraz punktowego źródła światła (punkt przecięcia promieni świetlnych).
f_1 — ogniskowa przednia
f_2 — ogniskowa tylna
k — odległość przedmiotu od źródła światła
d — odległość soczewki oka od siatkówki
z — odległość źródła światła S od ogniska F_1
z' — odległość obrazu S' źródła światła od ogniska F_2
x — odległość źródła światła od soczewki oka
h — wysokość przedmiotu
H — wysokość cienia przedmiotu na siatkówce
ξ — wysokość cienia przedmiotu na soczewce.

Z konstrukcji geometrycznej wynika, że: $\dfrac{h}{k} = \dfrac{\xi}{f_1+z}$; $\quad \dfrac{H}{f_2+z'-d} = \dfrac{\xi}{f_2+z'}$.

Wobec tego
$$\frac{H}{h} = \frac{(f_1+z)(f_2+z'-d)}{k(f_2+z')} = \frac{f_1+z}{k}\cdot\left(1-\frac{d}{f_2+z'}\right). \tag{1}$$

Zgodnie z równaniem Newtona dla soczewki znajdującej się na pograniczu dwóch środowisk
$$z' = f_1 f_2/z, \tag{2}$$
a stąd
$$\frac{H}{h} = \frac{1}{k}\left(f_1+z-\frac{dz(f_1+z)}{f_2(f_1+z)}\right) = \frac{1}{kf_2}\left(f_1f_2+z(f_2-d)\right).$$

W przypadku akomodacji oka na nieskończoność $f_2 = d$ i
$$\frac{H}{h} = \frac{f_1}{k}. \tag{3}$$

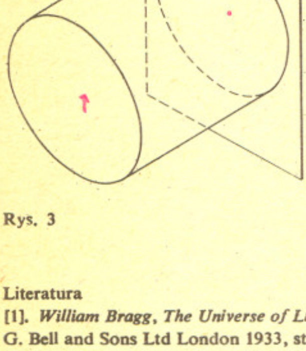
Jak stąd widać powiększenie H/h zależy w tym przypadku od odległości k przedmiotu od punktowego źródła światła, a nie zależy od odległości źródła światła i przedmiotu od oka. Wielkość pola widzenia czyli maksymalna wielkość przedmiotu, którą można w ten sposób obserwować, jest wyznaczona przez kąt, pod którym widać źrenicę oka z punktowego źródła światła. Mamy (rys. 2)
$$h_{\max} = \frac{kr}{x-l}, \tag{4}$$
gdzie r jest średnicą źrenicy, a l odległością źrenicy od soczewki oka. Jeżeli $l \ll x$, to $h_{\max} = \dfrac{kr}{x}$.

Wynika stąd, że zbliżenie punktowego źródła światła do oka zwiększa pole widzenia. Zwiększenie odległości k przedmiotu od źródła światła co prawda również zwiększa pole widzenia, ale zachodzi to kosztem uzyskiwanego powiększenia (3).

Pole widzenia jest proporcjonalne do promienia źrenicy, a ponieważ źrenica rozszerza się przy słabym oświetleniu, korzystne jest prowadzenie obserwacji w zaciemnionym pomieszczeniu i ze słabym punktowym źródłem światła.

Dobrym przybliżeniem punktowego źródła światła jest mała dziurka w kartce papieru oświetlona światłem rozproszonym. Gdy jeden koniec krótkiej tulejki zaklei się taką kartką, a drugi celuloidem z namalowaną małą strzałką, to łatwo będzie uzyskać cień strzałki na siatkówce (rys. 3).

Dla uzyskania większych powiększeń taka konstrukcja jest jednak niewygodna, wymaga bowiem bardzo krótkiej tulejki i mikroskopijnej dziurki. Jako źródło światła bardziej zbliżone do punktowego, można wykorzystać małą kulkę oświetloną odległą żarówką.

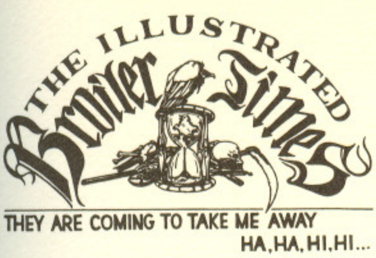


Rys. 3

Literatura

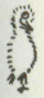
[1]. *William Bragg, The Universe of Light*, G. Bell and Sons Ltd London 1933, str. 49—51.

[2]. *Szczepan Szczeniowski, Fizyka doświadczalna*, część IV, PWN, Warszawa 1967, str. 139.



To ja, wasz brojler spolegliwy!

Odpowiadam, owszem, czemu nie?



Bo właściwie - czemu nie? Niech mi kto wyjaśni!

Niektórym to tak zależy, że aż dziw.

na tym, albo na owym.

Mnie nie zależy

i każdy mnie lubi JEDNAKOWO

i ja każdego JEDNAKOWO lubię.

To taka sama samorealizacja jak każda inna,

a za to nie jestem niewolnikiem np. uczuć

i w ten sposób wszystko się wyrównuje

i jest prościej!

umiarkowanie Przekonań
ZAPEWNI
trwałość opinii. ....

Pije pomyje i udaje pijanego
o oszczędnym - chińskie

... ale chcę by mnie życie podarło potargało piorunem wichury niechaj wbija we mnie kły pazury i drapieżnie mnie chwyta za gardło...

/kretyn, tj., przepraszam, Tuwim/

W taki sposób oglądałem przeźrocze z naniesioną regularną siatką ciemnych punktów. Stała siatki wynosiła 0,05 mm, było wyraźnie widać nie tylko poszczególne punkty, ale i ich kształt. Również w ten sposób mogłem zobaczyć błony komórkowe nabłonka cebuli.
Jeśli przyjąć $k = 3$ mm, to według Sz. Szczeniowskiego [2] można obliczyć powiększenie:

$$\frac{H}{h} = \frac{f_1}{k} = 5{,}6.$$

Normalnie, dla przedmiotu znajdującego się w odległości dobrego widzenia (20 cm) stosunek $\frac{H}{h}$ wynosi 0,1 a więc ponad 50 razy mniej.
Być może podobną metodą posługiwali się badacze starożytni i tym należy tłumaczyć ich czasami zaskakującą znajomość mikroświata.

Zbigniew WĄS

W czasie pisania artykułu autor był studentem II roku fizyki na UJ.

Intuicja bywa zawodna

Historia, na której się opieram, zdarzyła się (ponoć) w jednym z zakładów chemicznych w czasie wojny. W laboratorium opracowano technologię opierającą się na reakcji, dla której niezbędne było dostarczenie pewnej ilości ciepła. Uzyskawszy sukces, reaktor chemiczny po prostu powiększono do żądanych produkcyjnie wymiarów. I cóż się okazało? Wydajność reakcji wyraźnie zmalała w nowych warunkach. Na czym polegał błąd konstruktorów? Ilość ciepła, jaką odbiera reaktor proporcjonalna jest do pola powierzchni ogrzewanej reaktora. Po prostym powiększeniu reaktora (przekształceniu przez jednokładność) pole powierzchni ogrzewanej wzrosło proporcjonalnie do kwadratu stosunku jednokładności, natomiast objętość reaktora — proporcjonalnie do sześcianu tego stosunku. Inaczej mówiąc: ponieważ pole powierzchni rosło znacznie wolniej od objętości, ,,nasycenie ciepłem" substancji w reaktorze zmalało, co pociągnęło za sobą wiadome skutki.
Innym przykładem na taką pozorną anomalię jest rozwiązanie następującego zadania:
Pompa wtłacza do rury w ciągu pewnego czasu pewną masę wody. Ile razy powinna wzrosnąć moc pompy, by mogła ona wtłoczyć 2 razy większą masę wody w tym samym czasie do rury o tym samym przekroju. Niestety, narzucająca się odpowiedź: dwa razy, jest nieprawidłowa.
Oto rozwiązanie: Zadaniem naszej stacji pomp jest nadanie masie m wody prędkości V. Zakładając, że w ciągu całego czasu t stacja pomp działa tą samą siłą F na wodę zapisujemy:

$$F \cdot t = m \cdot V, \qquad F = \frac{m \cdot V}{t}.$$

Praca pompy przy wtłoczeniu w rurę mniejszego słupa wody, o masie m_1 i długości l_1, w czasie t wynosi $W_1 = F_1 \frac{1}{2} l_1 = \frac{m_1 V_1}{2t} l_1$,

moc pompy wtłaczającej taki słup wody będzie wynosić $P_1 = \frac{W_1}{t} = \frac{m_1 V_1}{2t^2} l_1$.

Analogicznie dla większego słupa wody, o masie m_2 i długości l_2, otrzymamy: $P_2 = \frac{m_2 V_2 l_2}{2t^2}$.

Z warunków zadania wynika, że $m_2 = 2m_1$, czyli $P_2 = \frac{2m_1 V_2 l_2}{2t^2}$.

Dwukrotnie większa masa wody w rurociągu tworzy słup o długości dwa razy większej niż poprzednio, tzn. $l_2 = 2l_1$. Rozważmy, jaki warunek musi być spełniony, aby przez dowolny przekrój rurociągu przepływała odpowiednia masa wody w tym samym czasie. Mamy:
$m_1 = l_1 S_p d$, gdzie S_p — pole powierzchni przekroju rurociągu, d — gęstość wody.
Analogicznie: $m_2 = l_2 S_p d = 2l_1 S_p d$.
Masa m_1 oraz masa $m_2 = 2m_1$ muszą w tym samym czasie przejść przez przekrój S_p:

$$t = \frac{l_1}{V_1}, \qquad t = \frac{l_2}{V_2} = \frac{2l_1}{V_2}, \qquad \text{czyli } \frac{l_1}{V_1} = \frac{2l_1}{V_2}, \qquad \text{stąd } V_2 = 2V_1.$$

Moc P_2 wynosi więc $P_2 = \frac{2m_1 2V_1 l_2}{2t_1^2}$. Ale $l_2 = 2l_1$, ostatecznie otrzymujemy więc

$$P_2 = \frac{2m_1 2V_1 2l_1}{2t_1^2} = 2^3 \frac{m_1 V_1 l_1}{2t_1^2}, \qquad \text{czyli} \qquad \frac{P_2}{P_1} = 2^3.$$

Głębiej nieco rozważając z pozoru dziecinnie łatwy problem otrzymaliśmy raczej niespodziewany wynik.

Autor był, w czasie pisania artykułu, uczniem III klasy Liceum Ogólnokształcącego im. K. Gottwalda w Warszawie.

L. MANKIEWICZ