

Dnia 21.02.1980 roku zmarł

**prof. dr Jacek Szarski,**

członek korespondent PAN,

prezes POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO,

Autor Delty.

## SPIS TREŚCI

NUMERU 3 (75)

Jak zobaczyć wszystkie liczby 2-adyczne <i>Prof. dr Jerzy Mioduszewski</i>	str. 1
Zadania	str. 4
Ultrazimne neutrony <i>Prof. dr Andrzej Hrynkiewicz</i>	str. 6
Mała Delta	str. 8
Siły bezwładności <i>Dr Andrzej Krasieński</i>	str. 10
Patrz w niebo	str. 13

### Rysunki techniczne:

*Bogusław Kretkiewicz*

W następnym numerze:  
**PRZODKOWIE**

### „Delta”

matematyczno-fizyczno-astronomiczny  
 miesięcznik popularny  
 Polskiego Towarzystwa  
 Matematycznego, Polskiego  
 Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
 Towarzystwa Astronomicznego  
 wydawany przy poparciu  
 Ministerstwa Oświaty i Wychowania

#### Komitet Redakcyjny:

doc. dr Jerzy Bartke  
 doc. dr Andrzej Bączyński  
 doc. dr Bolesław Gleichgewicht  
 prof. dr Kazimierz Goebel  
 doc. dr Bolesław Grabowski  
 dr Jan Hanasz  
 doc. dr Bolesław Iwaszkiewicz  
 doc. dr Tadeusz Iwiński  
 doc. dr Andrzej Januszajtis  
 doc. dr Tadeusz Jarzembowski  
 prof. dr Leon Jeśmanowicz  
 mgr Henryk Kaczorek  
 prof. dr Marek Kuczma  
 mgr Andrzej Mąkowski  
 prof. dr Bohdan Paczyński  
 prof. dr Zdzisław Pawlak  
 prof. dr Arkadiusz Piekara  
 doc. dr Sławomir Ruciński  
 prof. dr Konrad Rudnicki  
 prof. dr Zbigniew Semadeni  
 doc. dr Grzegorz Sitarski

prof. dr Józef Smak  
 prof. dr Jan Stankowski  
 doc. dr Kazimierz Stępień  
 prof. dr Mieczysław Subotowicz  
 doc. dr Stefan Turnau  
 prof. dr Jerzy Wdowczyk  
 doc. dr Andrzej Woszczyk  
 prof. dr Janusz Zakrzewski —  
 wiceprzewodniczący  
 prof. dr Wojciech Żakowski —  
 przewodniczący

#### Redaguje Kolegium w składzie:

mgr Tomasz Chlebowski  
 Bożena Jaworska-Kordos — ilustracje  
 dr Marek Kordos — red. nac.  
 dr Andrzej Krasieński  
 dr Krzysztof Prażmowski — red. techn. graf.  
 dr Michał Szurek  
 mgr Krystyna Szypcio — sekr. red.  
 doc. dr Michał Świącki — z-ca red. nac.

#### Adres Redakcji

ul. Hoża 69 pok. 151,  
 00-681 Warszawa  
 Zakład Narodowy im.  
 Ossolińskich — Wydawnictwo  
 Wrocław, Oddział w Warszawie  
 Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.  
 wyd.; 2,50 ark. druk;  
 papier offsetowy III kl. 70 g. rol. 61 cm  
 Wydrukowano w Drukarni im.  
 Rewolucji Październikowej  
 Warszawa, ul. Mińska 65  
 Nr zam. 1489/79 O-132

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60—, cena prenumeraty półrocznej zł 30 —

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach:

— do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i cały rok następny  
 — do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego.  
 Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienie w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”.  
 Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW, oraz prenumeratorzy indywidualni zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.  
 Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej

#### Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTA”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.

Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.

Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Konto PKO I O M W-wa 1531-912

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7

00-068 Warszawa, Poland or with

— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68,

Bundesrepublik Deutschland.

— Earls Court Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain,

— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia

Cena 1 egzemplarza zł 5— nr indeksu 35723/35550

Instytut Matematyki Uniwersytetu  
 Warszawskiego zaprasza uczniów szkół  
 średnich, zwłaszcza klas trzecich, na zebrania  
 Kółka Matematycznego, które odbywają się  
 we wtorki o godz. 17 w PKiN, X p, sala 1003



# Jak zobaczyć wszystkie liczby 2-adyczne

Prof. dr Jerzy

MIODUSZEWSKI

W artykule Krystyny Wojtków o liczbach  $p$ -adycznych Delta 9 (1978) używany był zapis pozycyjny ...123456789; w niniejszym artykule cyfry stoją w odwrotnym porządku: 987654321...

Liczby 2-adyczne całkowite, tj. wyrażenia  $a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + \dots$ , gdzie  $a_n = 0$  lub  $1$ , których zapisy skracamy do  $a_0 a_1 a_2 \dots$ , można mnożyć (jak się je dodaje, p. poprzedni artykuł na ten temat, Delta 5/1979; były one tam nazywane, aby nie obciążać terminologii, liczbami dwójkowymi). Aby pomnożyć liczbę  $a = a_0 a_1 a_2 \dots$  przez liczbę  $b = b_0 b_1 b_2 \dots$ , mnożymy liczbę  $a$  kolejno przez  $b_0, b_1, \dots$  (jest to niekłopotliwe, bo mnożymy stale przez 0 lub 1), a kolejne wyniki zapisujemy jeden pod drugim przesuwając za każdym razem zapis o jedno miejsce w prawo (przy mnożeniu liczb w układzie dziesiętkowym przyzwyczajeni jesteśmy do przesuwania zapisów w lewo) i dodajemy kolumny mod 2, pamiętając o dodaniu do następnej kolumny całkowitej ilości dwójek jaką dostaliśmy; rzecz daje się formalnie określić przez indukcję (mnożenie w układzie dziesiętkowym jest też określone przez indukcję, ale opanowujemy je na tyle wcześniej i dobrze, że nigdy już potem nie czujemy potrzeby matematycznych uzasadnień).

Jeśli oba zapisy są skończone, to reprezentując liczby naturalne nie dostajemy nic innego niż zwykły iloczyn liczb naturalnych. Np. mnożąc  $7 = 111$  przez  $5 = 101$ , dostajemy

$$\begin{array}{r} 111 \\ 000 \\ \hline 111 \\ 110001 \end{array}$$

tj. liczbę  $1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2^5 = 35$ .

Jeśli zapisy są nieskończone, nie trzeba sobie przeskadzać myślą, że robimy coś złego dodając nieskończenie wiele razy: w każdej kolumnie mamy do dodania skończenie wiele liczb, więc dodać je można, a cyfry wyniku określone są przez indukcję jednoznacznie. Dla przykładu, pamiętając, że  $-1 = 111\dots$ , pomnożymy to  $-1$  przez siebie. Dostajemy:

$$\begin{array}{r} 111111\dots \\ 11111\dots \\ 1111\dots \\ \hline \dots\dots \\ 10000\dots \end{array}$$

Dostaliśmy 1, co nie jest niespodzianką.

Liczba 1 jest neutralna przy mnożeniu; jest także zawsze  $a \cdot 0 = 0$ ; to widać. Dowody innych własności mnożenia liczb 2-adycznych, np. przemienności, łączności, rozdzielności z dodawaniem są kłopotliwe, bo powinny być robione przez indukcję, skoro mnożenie było określane przez indukcję. Nie stanowią jednak problemu.

\*

Problemem jest dzielenie. Już dzielenie  $1:2$  się nie udaje. Wynik dzielenia (myślimy o nim jako o  $1/2$ ) byłby rozwiązaniem równania  $2x = 1$ . Pierwsza cyfra  $x_0$  liczby  $x$  pomnożona przez 0 (pierwszą cyfrę liczby  $2 = 01$ ) powinna by dać 1 (pierwszą cyfrę liczby 1). Nie uda się też dzielenie  $1:6$ .

Jest to cena za wybór podstawy rozwinięcia, bo dzielenia  $1:n$ , jeśli  $n$  jest nieparzyste, udają się. Liczbę  $1/3$ , tj. rozwiązanie równania  $3x = 1$ , znajdujemy wyznaczając indukcyjnie cyfry jej rozwinięcia  $x_0 x_1 x_2 \dots$ , jak następuje (pamiętamy, że  $3 = 11$ ):

$$\begin{array}{l} x_0 x_1 x_2 x_3 \dots \\ \hline x_0 x_1 x_2 \dots \\ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \dots \end{array} \quad \begin{array}{l} x_0 = 1 \Rightarrow x_1 + 1 = 0 \Rightarrow \\ x_1 = 1 \text{ (1 w pamięci)} \Rightarrow x_2 + 2 = 0 \\ \Rightarrow x_2 = 0 \text{ (1 w pamięci)} \Rightarrow \\ x_3 + 1 = 0 \Rightarrow x_3 = 1 \text{ (1 w pamięci)}; \end{array}$$

na miejscu  $x_3$  powtarza się sytuacja z miejsca  $x_1$ ; rozwinięcie jest więc począwszy od miejsca  $x_1$  okresowe; okres ma postać 10; mamy więc

$$1/3 = 1 \overline{10} \overline{10} \dots \quad (\text{okres } 10)$$

A oto rozwinięcia innych liczb postaci  $1/n$ :

$$\begin{array}{l} 1/5 = 1 \overline{0110} \overline{0110} \dots \quad (\text{okres } 0110) \\ 1/7 = 1 \overline{110} \overline{110} \dots \quad (\text{okres } 110) \\ 1/9 = 1001110001110\dots \quad (\text{okres } 001110) \\ 1/11 = 110001011101000101110\dots \quad (\text{okres } 1000101110) \end{array}$$

Wszystkie te rozwinięcia są okresowe.

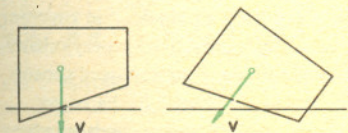
Okazuje się, że ułamki liczb całkowitych o mianownikach nieparzystych tj. rozwiązania równań  $nx = m$  o współczynnikach całkowitych, gdzie  $n$  jest nieparzyste mają zawsze rozwinięcia okresowe, oraz że każda liczba 2-adyczna okresowa przedstawia (w określony wyżej sposób) pewien taki ułamek.

Dla przykładu, liczba 2-adyczna  $110001000\dots$  przedstawia ułamek  $13/15$ . Prowadzi do tego obliczenie:

$$110001000\dots = 1 + 2 + 2^5 + \dots = 1 + 2 \cdot (1 + 2^4 + \dots) = 1 + 2 \cdot \frac{1}{1-2^4} = 1 - 2/15 = 13/15.$$



Rozwiązanie zadania F 76. Ostrze gilotyny w układzie U' będzie pochylone w przeciwną stronę.



a) W układzie U. b) W układzie U'.





Rozwiązanie zadania F 74. Na ekranie kinowym nic się naprawdę nie porusza. Jest to ciąg nieruchomych obrazów, który daje tylko złudzenie ruchu dzięki sposobowi wyświetlania i właściwościom ludzkiego oka. Prędkość "ruchu" można dowolnie zwiększać przez zwiększanie częstotliwości obrazów, lecz żadne skrócenie, wobec braku ruchu obiektu materialnego, nie wystąpi.

A oto przykłady dodawania i mnożenia

$$\begin{array}{r} 11,01 \\ + 01,00 \\ \hline 10,11 \end{array} \text{ tj. } 2\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{4};$$

$$\begin{array}{r} 11,01 \\ \times 01,00 \\ \hline 110,1 \end{array} \text{ tj. } 2\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = 1\frac{3}{8}.$$

Choć obliczenie nie jest poprawnie uzasadnione, prowadzi do poprawnego wyniku: jeśli się przemnoży 110001000... przez 1111 tj. przez 15, to dostaje się 1101 tj. 13. Obliczenie rozwinąć dwójkowych ułamków  $1/5, \dots, 1/11$ , też polegało na zastosowaniu takiego nieuzasadnionego sposobu, obliczenie takie jak dla  $1/3$  byłoby żmudne. Dowody wypowiedzianych przedtem dwu stwierdzeń polegają na uzasadnieniu tych a priori nieuzasadnionych obliczeń.

\*

Defekt zbioru liczb 2-adycznych całkowitych polegający na niemożliwości dzielenia w nim przez 2, jest teraz na tle zauważonych prawidłowości dokuczliwy.

Można usunąć ten defekt, jeśli rzecz potraktuje się nieco ogólniej. Nie ma żadnych przeszkód w dodawaniu i mnożeniu (takim jak dotąd) zapisów dwójkowych, jeśli mają one dodatkowo skończenie wiele cyfr na lewo od cyfry  $x_0$ , tj. w dodawaniu i mnożeniu zapisów postaci

$$x_{-m} \dots x_{-1} x_0 x_1 x_2 \dots, \text{ gdzie } x_j \text{ jest } 0 \text{ lub } 1.$$

Zapisy takie, jeśli są skończone, mają interpretację jako sumy potęg dwójki:

$$x_{-m} \dots x_{-1} x_0 x_1 \dots x_n = x_{-m} \cdot 2^{-m} + \dots + x_{-1} \cdot 2^{-1} + x_0 + x_1 \cdot 2 + \dots + x_n \cdot 2^n.$$

Przykłady:  $1,000\dots = 1/2$  i  $11,01000\dots = 2\frac{3}{4}$ ; w konkretnych zapisach dajemy przecinek przed miejscem cyfry  $x_0$ .

Nie można pójść dalej tak, aby dodawać i mnożyć zapisy dwójkowe mając nieskończenie wiele cyfr przed przecinkiem, bo określenie dodawania i mnożenia, indukcyjne, wymaga zapoczątkowania go w pewnym miejscu.

W zakresie liczb 2-adycznych ogólnych, bo tak je nazwiemy, nie ma już kłopotów z dzieleniem (chyba że przez 0), o czym się nietrudno przekonać wymyślając lepszą lub gorszą (nieważne) indukcyjną procedurę dzielenia.

Zbiór liczb wymiernych zawarty jest, z zachowaniem działań, w zbiorze liczb 2-adycznych ogólnych: każda liczba wymierna ma dokładnie jedno przedstawienie w postaci  $2^k \cdot \frac{p}{q}$ , gdzie  $k, p$  i  $q$  są całkowite i żadna z liczb  $p$  i  $q$  nie jest parzysta; wtedy liczba  $\frac{p}{q}$  ma, co już wiemy, interpretację jako liczba 2-adyczna całkowita  $1x_1x_2\dots$  (cyfra  $x_0$  jest równa 1, co wynika z nieparzystości liczb  $p$  i  $q$ ), i żeby otrzymać zapis 2-adyczny liczby  $2^k \cdot \frac{p}{q}$ , wystarczy przesunąć poprzedni zapis o  $k$  pozycji w prawo (a więc w lewo, jeśli  $k$  jest ujemne).

\*

Liczy 2-adyczne ogólne można zobaczyć.

Jeśli liczbę  $x_0x_1\dots$  (traktując ją jako ciąg zer i jedynek) widzimy jako punkt zbioru Cantora  $C_0$  (zob. poprzedni artykuł), to liczbę  $x_{-1}x_0x_1\dots$  można zobaczyć na zbiorze Cantora  $C_1$ , dla którego zbiór  $C_0$  jest lewą połówką; liczbę  $x_{-2}x_{-1}x_0x_1\dots$  można zobaczyć na zbiorze Cantora  $C_2$ , dla którego zbiór  $C_1$  jest lewą połówką, etc.

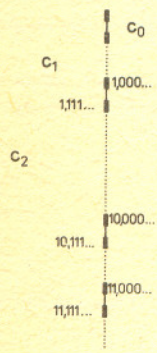
Zbiór liczb 2-adycznych ogólnych można więc utożsamić z sumą ciągu rosnącego  $C_0, C_1, C_2, \dots$  zbiorów Cantora, położonych na prostej tak jak pokazuje rysunek. Metryka zbioru liczb 2-adycznych ogólnych, jaka wynika z ich ułożenia na wydłużonym zbiorze Cantora (znana częściowo z poprzedniego artykułu) może się wydać osobliwa: np. odległości od 0 ułamków  $1/2^k$  (leżą one zawsze w prawych połówkach zbiorów  $C_k$ ) dążą do nieskończoności zamiast do zera, jak jesteśmy przyzwyczajeni.

Liczy wymierne położone są, jako liczby 2-adyczne, na wydłużonym zbiorze Cantora z zachowaniem działań i stanowią jego podzbiór gęsty: jest więc formalna analogia z położeniem ich na prostej. Ale położone są inaczej niż na prostej: już liczby całkowite leżą gęsto w porcji  $C_0$  zagęszczając się same do siebie (wiemy to już z poprzedniego artykułu; na prostej liczby całkowite stanowią zbiór punktów izolowanych); dodajmy, że wielokrotności liczby  $1/2$  leżą gęsto w  $C_1$ , wielokrotności liczby  $1/4$  leżą gęsto w  $C_2$ , etc.

\*

Metryka wydłużonego zbioru Cantora (tak jak metryka prostej) jest zupełna: wszystkie ciągi, które mogłyby być zbieżne (tj. te, które spełniają warunek Cauchy'ego), są zbieżne. Wydłużony zbiór Cantora jest więc (podobnie jak prosta) uzupełnieniem zbioru liczb wymiernych. Uzupełnienie to (podobnie jak prosta) ma prawidłową budowę algebraiczną: wszystkie cztery działania (z wyjątkiem dzielenia przez 0) są w nim wykonalne. Co więcej, są ciągłe. Nie zmienimy istoty rzeczy (bardziej fachowo: topologii), jeśli za odległość liczb 2-adycznych  $x$  i  $y$  przyjmiemy (zamiast ich odległości na wydłużonym zbiorze Cantora) liczbę określoną w następujący sposób za pomocą miejsca, na którym cyfry w zapisach liczb  $x$  i  $y$  zaczynają się różnić: liczba ta jest równa  $n$ , jeśli to jest  $n$ -te miejsce przed przecinkiem, a jest równa  $1/m$ , jeśli to jest miejsce cyfry  $x_m$  po przecinku. Łatwiej jest teraz dowieść, że działania na liczbach 2-adycznych ogólnych są

Rys. 1. Wydłużony zbiór Cantora

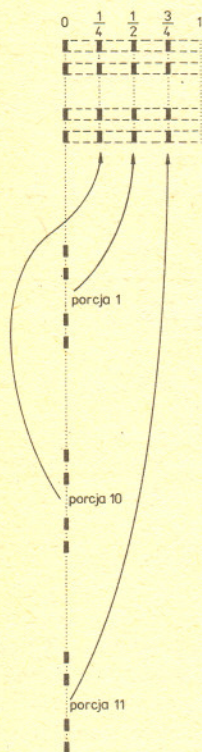


Rozwiązanie zadania M 220. Sumą współczynników wielomianu  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  jest oczywiście  $p(1) = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ . Ale  $p(1) = (1^2 - 3 \cdot 1 + 2)^{73} (1^3 + 1 - 1)^{72} = 0$  i wobec tego suma współczynników  $p(x)$  jest równa zeru.

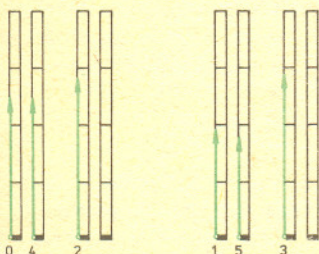


W poprzednim artykule prof. dr J. Mioduszewskiego o liczbach 2-adycznych (Delta 8/1979) znalazło się błędne określenie odległości liczb 2-adycznych dwójkowych. Wiersze 16, 17 i 18 na str. 2 powinny tam mieć brzmienie: „Nie zmienimy istoty rzeczy, jeżeli za odległość liczb dwójkowych przyjmijemy liczbę  $1/n$ , gdzie  $n$  jest numerem miejsca, na którym cyfry w zapisach tych liczb zaczynają się różnić”. Błąd ten powstał wyłącznie z winy Redakcji i Autor nie ponosi zań żadnej odpowiedzialności. Przepraszamy prof. dr Mioduszewskiego i naszych Czytelników.

Warto tu zauważyć, że redakcja Deltę dostała list od takiej  $p$ -adycznej istoty. Zamieściliśmy go w numerze 12/1979



Rys. 2. Liczby 2-adyczne sprzątamy ze stołu do szafy.



Rys. 3. Półprosta zaczynająca się w  $O$  przebiega odcinek nad punktem  $O$  w górę do końca, potem odcinek nad 1 w górę do końca, potem odcinek nad 2 itd.

ciągłe: argumentacja użyta w poprzednim artykule (dokładniej w sprostowaniu obok), dla dowodu ciągłości dodawania i odejmowania liczb 2-adycznych całkowitych, powinna wystarczyć za wskazówkę dowodu.

Ceną za zupełność jest duża moc zbioru: zbiór liczb 2-adycznych ogólnych tak jak i zbiór liczb rzeczywistych ma moc continuum. Ale mimo to, że jest ich tak dużo, nie ma wśród nich np.  $\sqrt{2}$ , tj. takiej liczby  $x$ , dla której  $x^2 = 2$ ; próbując znaleźć taką liczbę, dojdziemy do sprzeczności już przy próbie znalezienia jej pierwszych dwu cyfr. Są za to  $\sqrt{-7}$  i  $\sqrt{17}$ .

Na liczby rzeczywiste pracowała wyobraźnia matematyków przez co najmniej dwa tysiąclecia, wiążąc z nimi z góry najrozmaitsze idee geometryczne i arytmetyczne. Liczby 2-adyczne (jeśli by nie było inaczej) mogłaby wymyślić maszyna, czuła jedynie na formalne zapisy cyfrowe. Stąd, mimo zaskakujących osobliwości, nie spodziewajmy się po nich rzeczy, których ich natura nie przewidywała.

Trudno wszakże odrzucić, jako całkowicie nieuzasadnioną, myśl o tym, że gdzieś w przestrzeni ewolucja życia już w samych zaczątkach polegała na doskonaleniu w odbieraniu dwu sygnałów np. **jest i nie ma** i rozwijaniu aktywności i twórczości naukowej zgodnie z tymi sygnałami o dwu cyfrach. Po miliardach lat ewolucji stopień pojmowania przez wykształcone tak istoty ich arytmetyki, a byłaby to właśnie arytmetyka 2-adyczna, byłby porównywalny ze stopniem pojmowania przez nas arytmetyki liczb rzeczywistych. Ich poznanie zmysłowe nie potrzebowałyby ani  $\sqrt{2}$ , ani zapewne liczby  $\pi$ . Mogliby nas nie zauważyć, zajmując nawet to samo miejsce w przestrzeni. My ich także.

Liczby 2-adyczne ogólne zobaczymy jeszcze raz inaczej, układając je ciasniej koło siebie.

Wydłużony zbiór Cantora składa się z przeliczalnej ilości porcji przystających do porcji  $C_0$ . Nadamy każdej z tych porcji kod będący zapisem sprzed przecinka, wspólnym dla wszystkich liczb tej porcji. Na rys. 1 kolejne porcje, poza  $C_0$ , mają kody 1, 10, 11, ... Zinterpretujmy te kody jako sumy kolejnych (licząc od lewej) odwrotności potęg dwójki (zgodnie zresztą ze znaczeniem cyfr sprzed przecinka), a więc jako liczby  $1/2, 1/4, 3/4, \dots$  Przesuńmy teraz wspomniane porcje nad porcję  $C_0$ , równoległe do  $C_0$ , nadając im rzędne  $1/2, 1/4, 3/4, \dots$  (rys. 2). Zbiór liczb 2-adycznych ogólnych ułożył się teraz w kwadracie jednostkowym nad zbiorem  $C_0$ , a dokładniej w wiązce odcinków jednostkowych (pionowych) nad zbiorem Cantora  $C_0$ , tj. na produkcie  $C_0 \times [0, 1]$ ; wiązka ta pojawiła się już w poprzednim artykule. Liczby 2-adyczne ogólne nie wypełniają całej wiązki, lecz jedynie jej poziomy dwójkowo wymierne i to bez poziomu 1. Liczba 2-adyczna ogólna  $x_{-m} \dots x_{-1} x_0 x_1 \dots$  ma teraz dwie współrzędne: pierwszą jest jej zapis  $x_0 x_1 \dots$  złożony z cyfr po przecinku i reprezentujący liczbę 2-adyczną całkowitą ze zbioru  $C_0$ , a drugą jest liczba rzeczywista  $x_{-m} \cdot 2^{-m} + \dots + x_{-1} \cdot 2^{-1}$ .

Inne punkty wiązki nie są liczbami 2-adycznymi (przypomnijmy sobie, że nie dopuściliśmy zapisów z nieskończoną ilością cyfr przed przecinkiem). Mimo to pewną część budowy algebraicznej spróbujmy na ten zakres przenieść: dwa punkty wiązki zechcemy dodać, dodając odpowiednie współrzędne; pierwsze (odcięte) dodajemy tak jak się dodaje liczby 2-adyczne (całkowite); drugie (rzędne) dodajemy tak jak się dodaje liczby rzeczywiste modulo 1 z tym, że, część całkowitą dodajemy do wcześniej otrzymanej sumy odciętych. Dla przykładu, jeśli chcemy dodać  $(0, 1/2)$  i  $(0, 1/2)$ , to dostajemy najpierw  $(0, 1)$ , a potem (po zredukowaniu drugiej współrzędnej mod 1) dostajemy końcowy wynik  $(1, 0)$  (dodawaliśmy  $1/2$  do siebie dostając 1). Punkt  $(0, 1)$  okazuje się w tym dodawaniu zbyteczny: utożsamiamy go z punktem  $(1, 0)$ . Aby dodawanie było poprawnie określone, trzeba utożsamiać nie tylko te dwa punkty, ale każdy punkt  $(x, 1)$  poziomu 1 z punktem  $(x+1, 0)$  poziomu 0. Takie sklejenie brzegów wiązki nad zbiorem Cantora daje znany już nam z poprzedniego artykułu solenoid.

Określając dodawanie na punktach solenoidu potraktowaliśmy zapis liczby 2-adycznej ogólnej niejednolicie: część sprzed przecinka traktowaliśmy jako liczbę rzeczywistą, a część po przecinku jako liczbę 2-adyczną całkowitą. Stąd mieszana budowa solenoidu.

Zawiera on zachowując dodawanie wszystkie liczby 2-adyczne ogólne, chociaż geometrycznie inaczej niż wtedy kiedy tworzą one wydłużony zbiór Cantora. Ale liczby 2-adyczne całkowite leżą na solenoidzie już z zachowaniem własności geometrycznych: leżą one na śladzie sklejenia górnego i dolnego brzegu wiązki; jeśli to sklejenie wyobrazić sobie tak, że dolny brzeg wiązki się nie rusza, to wspomniany ślad sklejenia jest zbiorem Cantora  $C_0$ .

Solenoid zawiera zachowując dodawanie prostą. Jest nią linia będąca sumą odcinków wiązki nad punktami reprezentującymi liczby całkowite (końce porcji zbioru Cantora  $C_0$ ). Odcinek nad punktem  $n$  doklejonny jest swym końcem  $(n, 1)$  do odcinka nad punktem  $n+1$  w jego początku  $(n+1, 0)$ .



Budowa geometryczna tej linii jest jednak inna niż prostej: żaden przedział nie jest w niej zbiorem otwartym, co znaczy to samo co by powiedzieć, że zagęszcza się ona sama do siebie. Linia ta tworzy zbiór gęsty w solenoidzie. Solenoid składa się z continuum takich linii homeomorficznych ze sobą i rozłącznych; widzieliśmy to w poprzednim artykule.

\*

Liczby 2-adyczne zostały odkryte na przełomie wieku przez Kurta Hensela (1861—1941). *Introduction to p-adic numbers and valuation theory* G. Bachmana jest najdostępniejszą z poważnych książek o liczbach 2-adycznych. W numerze 2(1979) miesięcznika KBAHT ukazał się artykuł B. Bekkera, W. Wostokowa i Ju. Jonina, 2-адические числа, w którym omówiona jest bardziej szczegółowo metryka na zbiorze liczb 2-adycznych (druga spośród tu rozważanych), bardzo odmienna od metryk spotykanych praktycznie, oraz jedno bardzo ciekawe zadanie geometryczne związane z tą metryką. Osobny temat to rozwinięcia 2-adyczne okresowe. W podanych przykładach rozwinięć dla  $1/3$ ,  $1/5$ ,  $1/9$  i  $1/11$  okresy mają parzystą liczbę cyfr. Jeśli przepołowić taki okres, jedną połówkę nasunąć na drugą i nałożone na siebie cyfry dodać, to dostanie się same jedynki. Ułamki dziesiętne okresowe mają też taką własność, z tym że dostaje się dziewiątki; por. H. Rademacher i O. Toeplitz, *O liczbach i figurach*; wydanie polskie, Warszawa 1956, na str. 197.

\*

Wszystkie z zamieszczonych tu rzeczy o solenoidzie są dobrze znane, a ujęcie przypomina, czasami aż nazbyt, odpowiedni rozdział z książki E. Hewitta i K. Rossa, *Abstract harmonic analysis* (tom I) *Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften* 225, Springer 1963.

My polecamy także Borewicza i Szafarewicza „Теория чисел”

Na przykład  $1/7 = 0,142857142857.....$   
i mamy

$$\begin{array}{r} 142857142857142857..... \\ + 857142857142857142..... \\ \hline 9999999999999999..... \end{array}$$



## Zadania

Redaguje mgr Krzysztof S. NOWIŃSKI

M 220. Znaleźć sumę współczynników wielomianu  $p(x) = (x^2 - 3x + 2)^{73}(x^3 + x - 1)^{72}$ .  
Rozwiązanie na str. 2.

M 221. Punkt  $P$  leży wewnątrz  $n$ -kąta foremnego  $A_1 A_2 \dots A_n$ . Wykazać, że istnieją wierzchołki  $A_k$  i  $A_l$  takie, że  $\sphericalangle A_k P A_l$  różni się od półpełnego mniej niż o  $\pi/n$ .  
Rozwiązanie na str. 12.

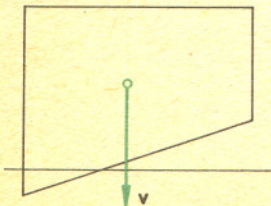
M 222. Na płaszczyźnie mamy dane 100 punktów:  $A_1, A_2, \dots, A_{100}$ . Wykazać, że na dowolnym okręgu o promieniu 1 leżącym na tej płaszczyźnie znajdzie się taki punkt  $B$ , że  $A_1 B + A_2 B + \dots + A_{100} B \geq 100$ .  
Rozwiązanie na str. 7.

Redaguje dr Andrzej KRASIŃSKI

F 74. Zaproponowano kiedyś następujący sposób zmierzenia skrócenia Lorentza: 1. Sfilmować szybko jadący pociąg, 2. Puścić film w przyspieszonym tempie i sfilmować obraz z ekranu, 3. Puścić drugi film w przyspieszonym tempie i sfilmować obraz z ekranu, ... itd, aż prędkość pociągu na którymś kolejnym filmie stanie się dość duża, aby skrócenie Lorentza dało się zmierzyć. Czy rzeczywiście skrócenie Lorentza da się zaobserwować w ten sposób?  
Rozwiązanie na str. 2.

F 75. Pręt o długości spoczynkowej  $L_0$  leci wzdłuż swojej osi i przelatuje nad otworem w stole o długości  $l_0 < L_0$ . Prędkość pręta  $v$  jest tak duża, że wskutek skrócenia Lorentza jego długość obserwowana w układzie spoczynkowym stołu,  $L_v = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$ , jest mniejsza od  $l_0$ . Można go więc podczas lotu przeciągnąć przez otwór w stole, nie zmieniając jego kierunku. W układzie spoczynkowym pręta skrócenia Lorentza doznaje jednak otwór w stole;  $l_v = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} < l_0 < L_0$ , zatem pręt nie zmieści się w otworze. Jak jest rozwiązanie tego „paradoksu”?  
Rozwiązanie na str. 6.

F 76. W pewnym układzie odniesienia  $U$  ostrze gilotyny do papieru opada w dół z taką prędkością, że punkt przecięcia linii ostrza z krawędzią pulpitu porusza się z lewej ku prawej z prędkością  $V > c$  (patrz rysunek). (Punkt ten nie jest cząstką materialną, może więc poruszać się dowolnie szybko). Jak widać ze wzorów na transformację Lorentza, istnieje wtedy taki obserwator  $U'$ , dla którego punkt ten porusza się w kierunku przeciwnym. Jaka jest różnica między obrazem gilotyny w ruchu widzianym przez  $U$  i widzianym przez  $U'$ ?  
Rozwiązanie na str. 1.





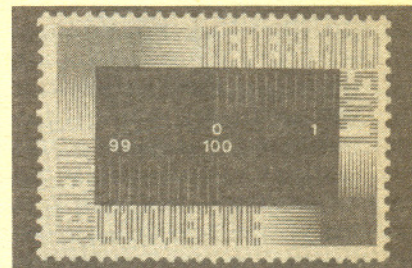
## Kącik filatelistyczny (12)

Dzisiejszy odcinek Kącika poświęcimy układowi metrycznemu jednostek fizycznych. Początek metrycznemu układowi dało ustanowienie we Francji w roku 1795 wzorców metra i kilograma i przyjęcie ich dziesiętnego podziału. Metryczny system dziesiętny został przyjęty za skalę międzynarodową w roku 1875, kiedy to 18 państw zawarło porozumienie zwane Konwencją Metryczną (Convention du Mètre). Konwencja ta dotyczyła definicji, wykonania i sprawdzania wzorców jednostek miar systemu metrycznego. Do wykonywania tych zadań powołano wyspecjalizowane międzynarodowe organizacje. W Polsce jednostki miar układu metrycznego zostały wprowadzone jako legalne w roku 1919, a w 1925 Polska przystąpiła do konwencji metrycznej. Do roku 1971 do konwencji metrycznej należało 41 państw. W ostatnich latach przyjęto system metryczny w Chinach, Indii i W. Brytanii i obecnie już przeszło 3/4 ludności świata posługuje się tym systemem.

Nowoczesnym układem jednostek metrycznego systemu dziesiętnego jest Międzynarodowy Układ Jednostek Miar, tzw. układ SI (Système International d'Unités), określony uchwałami kilku kolejnych Generalnych Konferencji Miar w latach 1960—71. Układ ten, przyjęty również i w Polsce, zawiera określenie jednostek miar podstawowych wielkości fizycznych (7 jednostek podstawowych: długości, masy, czasu, natężenia prądu, temperatury, światłości i ilości materii oraz 2 jednostki uzupełniające: kąta płaskiego i kąta bryłowego), określenie jednostek pochodnych oraz ich wielokrotności i podwielokrotności. Przyjęto także nowe, znacznie dokładniejsze wzorce niektórych jednostek — np. jednostkę długości oparto na długości fali określonej linii promieniowania atomu  $^{86}\text{Kr}$  zamiast na historycznym wzorcu metalowym.

Reprodukujemy osiem znaczków pocztowych poświęconych układowi metrycznemu i jego nowoczesnej wersji — układowi SI. Większość z nich została wydana w roku 1975, dla uczczenia stulecia zawarcia międzynarodowej konwencji metrycznej. Warto zwrócić uwagę na bardzo ciekawe rozwiązania graficzne niektórych z nich.

Jerzy BARTKE





# Ultrazimne neutrony

Prof. dr Andrzej HRYNKIEWICZ, członek korespondent PAN



Swobodny neutron ulega rozpadowi  $\beta^-$  ze średnim czasem życia  $\tau = 940$  s. W latach trzydziestych, wkrótce po odkryciu neutronu przez Chadwicka (1932 r.), E. Fermi zwrócił uwagę na to, że w zasadzie można by bardzo powolne neutrony przechowywać „w butelce”. W 1959 r. Ja. B. Zeldowicz podał teorię, z której wynikało, że neutrony o energii kilkudziesięciu nanoelektronowoltów ( $1 \text{ neV} = 10^{-9} \text{ eV}$ ), a więc poruszające się z prędkościami kilku m/s, będą na granicy próżni — materia ulegać odbiciu od większości materiałów niezależnie od kąta padania. Dla cząstki o pędzie  $p$  długość fali de Broglie'a  $\lambda = \frac{h}{p}$ , gdzie  $h$  jest stałą Plancka. Jeśli jest ona większa od odległości międzyatomowych w danej substancji, to neutron napotyka na powierzchni próg potencjału  $U$  dany przez wzór

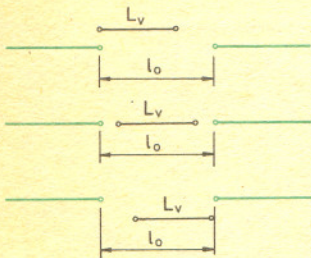
$$(1) \quad U = \frac{h^2}{2\pi m} N a_{\text{coh}},$$

gdzie  $m$  jest masą neutronu,  $N$  — gęstością jądrową danej substancji, tj. liczbą jąder w jednostce objętości, a  $a_{\text{coh}}$  — tzw. koherentną długością rozpraszania neutronów w danym materiale.  $a_{\text{coh}}$  jest wielkością związaną z przekrojem czynnym na elastyczne rozpraszanie neutronów, a więc z prawdopodobieństwem tego procesu. Ponieważ dla większości jąder atomowych  $a_{\text{coh}} > 0$  potencjał  $U$  ma na ogół charakter odpychający i neutron, którego energia kinetyczna  $E_k$  spełnia warunek  $E_k < U$ , ulega na granicy odbiciu bez zmiany energii. Powierzchnia materiału jest więc idealnym zwierciadłem dla neutronów o dostatecznie niskiej energii. W tablicy podane są dla kilku substancji graniczne wartości energii i prędkości neutronów, dla których zjawisko odbicia występuje

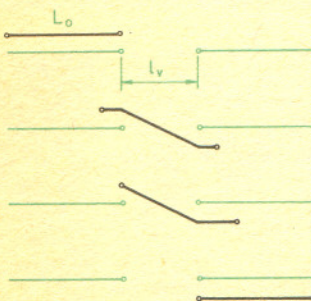
Substancja	$E_k$ gr neV	$V_{gr}$ m/s
Al	55	3,2
Mg	60,5	3,36
Cu	172	5,7
C	194	6,1
Be	240	6,8



Rozwiązanie zadania F 75. Przecignięcie pręta przez otwór w stole bez zmiany jego kierunku oznacza, że w układzie spoczynkowym stołu wszystkie punkty pręta przetną płaszczyznę stołu równocześnie. Zdarzenia równoczesne w układzie spoczynkowym stołu nie mogą jednak być równoczesne w układzie spoczynkowym pręta. W układzie związanym z prętem obserwator spostrzeże więc, że pręt przechodzi przez płaszczyznę stołu ukośnie, co rozwiązuje „paradoks” (patrz rysunki). Przy dokładniejszej analizie tego zdarzenia stwierdzilibyśmy, że pręt po prostu nie może być sztywny, co dowodzi, że pojęcie ciała sztywnego jest sprzeczne ze szczególną teorią względności.



a) Obraz w układzie spoczynkowym stołu.



b) Obraz w układzie spoczynkowym pręta.

Otrzymamy wyobrażenie o tym, z jak małymi energiami kinetycznymi neutronów mamy tu do czynienia, obliczając, na jaką wysokość  $H$  może się wznieść neutron o początkowej energii kinetycznej 100 neV poruszający się pionowo w górę w polu grawitacyjnym Ziemi. Korzystając ze wzoru

$$(2) \quad H = \frac{E_k}{mg},$$

gdzie  $g$  jest przyspieszeniem ziemskim i podstawiając wartości liczbowe  $E_k = 100 \text{ neV} = 1,602 \cdot 10^{-26} \text{ J}$ ,  $m = 1,672 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  i  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  otrzymamy

$$H = 0,98 \text{ m}.$$

Dlaczego neutrony o tak niskich energiach kinetycznych nazywamy ultrazimnymi? Jak wiadomo, szybkie neutrony wytwarzane np. w reaktorze jądrowym, możemy spowolnić wykorzystując materiały, w których neutron, nie wywołując reakcji jądrowych, będzie tracił energię przez elastyczne zderzenia z lekkimi jądrami. Na pytanie dlaczego materiał jest tym lepszym spowalniczem neutronów, im z lżejszych atomów się składa, Czytelnik powinien sam łatwo znaleźć odpowiedź. Powszechnie stosowanymi spowalniczami neutronów są woda lub parafina, zawierające dużo wodoru, a także grafit, w którym atomy węgla o liczbie masowej  $A = 12$  są także stosunkowo lekkie. W spowalniczu energia kinetyczna nie maleje jednak do zera, lecz tylko do wartości odpowiadającej średniej energii kinetycznej termicznego ruchu atomów w danej temperaturze. Energia ta jest proporcjonalna do temperatury bezwzględnej  $T$  i wyraża się wzorem

$$(3) \quad \langle E_k \rangle = \frac{3}{2} kT,$$

gdzie  $k = 8,617 \cdot 10^{-5} \text{ eV/K}$  jest stałą Boltzmann.





Rozwiązanie zadania M 222.  
Wybermy dowolną średnicę  $B_1, B_2$  naszego okręgu. Wiemy, że

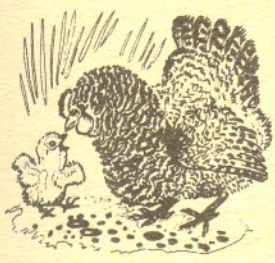
$$2 = B_1 B_2 \leq B_1 A_1 + B_2 A_1,$$

$$2 = B_1 B_2 \leq B_1 A_2 + B_2 A_2,$$

$$\dots$$

$$2 = B_1 B_2 \leq B_1 A_{100} + B_2 A_{100}.$$

Dodając te nierówności stronami otrzymamy  $200 \leq (B_1 A_1 + B_1 A_2 + \dots + B_1 A_{100}) + (B_2 A_1 + B_2 A_2 + \dots + B_2 A_{100})$  i wobec tego co najmniej jedna z sum w nawiasach jest większa lub równa 100. Tak więc co najmniej jeden z dowolnych dwóch średnicowo przeciwległych punktów spełnia warunki zadania.



W przypadku spowalnicza o temperaturze pokojowej (293 K) średnia energia kinetyczna spowolnionych neutronów wynosi 0,040 eV. Neutrony o takiej średniej energii nazywamy termicznymi. Obniżając temperaturę materiału spowalniającego będziemy otrzymywać neutrony o coraz mniejszej końcowej średniej energii kinetycznej czyli coraz „zimniejsze”. Warto przypomnieć, że pierwsze eksperymenty z „zimnymi” neutronami spowolnionymi w ciekłym azocie o temperaturze 80 K przeprowadzał w 1935 r. w Cambridge znany polski fizyk Henryk Niewodniczański (1900—1968) wspólnie z C. H. Westcottem. Jeżeli średnia kinetyczna energia neutronu 0,04 eV odpowiada temperaturze pokojowej, to łatwo obliczyć, że energia neutronów 100 neV odpowiadałaby temperaturze  $7 \cdot 10^{-4}$  K. Jak widać ich nazwa „ultrazimne” jest jak najbardziej uzasadniona.

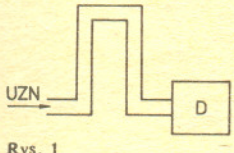
### Otrzymywanie ultrazimnych neutronów

Oczywiście nie ma mowy o otrzymywaniu ultrazimnych neutronów (UZN) przez ich spowolnienie w materiale o temperaturze  $10^{-3}$  K, gdyż nie potrafimy tak oziębic wystarczająco dużej ilości materiału spowalniającego. Muszą być zastosowane inne metody. UZN zostały otrzymane po raz pierwszy w 1968 r. przez F. L. Szapiro i jego współpracowników w Zjednoczonym Instytucie Badań Jądrowych w Dubnej oraz niezależnie przez A. Steyerla w Monachium. Nie będziemy opisywać szczegółowo metod zastosowanych w tych pracach. Zainteresowanych Czytelników odsyłam do oryginalnych publikacji. Wystarczy powiedzieć, że grupie badaczy w Dubnej udało się przy użyciu tzw. konwertera wybrać z widma energetycznego neutronów termicznych te neutrony, które mają energie kinetyczne bliskie zera i wprowadzić je do neutronowodu (rury próżniowej o ściankach pokrytych miedzią), w którym UZN, odbijając się od ścianek bez zmiany energii poruszały się w kierunku detektora. W pracach Steyerla zastosowana została między innymi tzw. „turbina neutronowa”, w której już dostatecznie zimne neutrony traciły w dalszym ciągu energię, odbijając się od układu szybko wirujących zwierciadeł metalicznych. Otrzymane dotychczas w obu laboratoriach wiązki UZN, poruszających się w neutronowodach o średnicy ok. 10 cm, mają bardzo małe natężenia rzędu  $10^3$  neutronów/s. Jest to strumień  $10^{12}$  razy mniejszy od całkowitego strumienia neutronów termicznych z reaktora. Ale nawet z tak małymi ilościami UZN mogą być przeprowadzane eksperymenty. Przechowywania UZN w „butelce” nie udało się zrealizować w pełni. Okazało się, że nierówności powierzchni oraz jej zanieczyszczenia powodują straty nagromadzonych w naczyniu neutronów. Może również występować tzw. rozproszenie quasi-elastyczne powodujące wzrost energii UZN i ich ucieczkę z naczynia w momencie, gdy energia kinetyczna przekroczy wartość graniczną. W rezultacie średni czas przechowywania UZN w naczyniu nie jest równy ich średniemu czasowi życia ze względu na rozpad  $\beta$  (940 s), lecz krótszy od niego. Najdłuższy średni czas przechowywania UZN udało się uzyskać w naczyniu, którego wewnętrzna powierzchnia pokryta jest warstwą napyłonego w próżni czystego berylu. Wynosi on ok. 650 s.

### Eksperymenty z ultrazimnymi neutronami

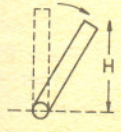
Widmo energetyczne UZN można zmieniać w prosty sposób przez skierowanie neutronowodu, w którym poruszają się, w górę lub w dół. Jak już wiemy zmiana poziomu o 1 m spowoduje zmianę energii kinetycznej neutronów w polu grawitacyjnym Ziemi o ok. 100 neV. Na tej zasadzie został zbudowany niezwykle prosty spektrometr grawitacyjny, który pozwala wyznaczać kształt widma energetycznego UZN, tzn. mierzyć ich liczbę w zależności od energii. Ideę takiego spektrometru ilustrują rysunki obok. Neutronowód N jest wygięty w sposób pokazany na rys. 1. UZN, aby móc dotrzeć do detektora D, muszą pokonać wysokość kolanka neutronowodu. Kolanko możemy obracać wokół osi neutronowodu, zmieniając w ten sposób wysokość, na jaką muszą się wnieść UZN. Przy określonym przechyleniu kolanka, pokazanym na rys. 2, do detektora dotrą tylko takie UZN, których energia kinetyczna  $E_k$  pozwoli na pokonanie wysokości  $H$ , czyli spełniające warunek

$$E_k \geq mgH = 0,98 H \frac{\text{neV}}{\text{cm}}.$$



Rys. 1

Obracając kolanko i licząc UZN dochodzące do detektora wyznaczamy ich rozkład energetyczny.

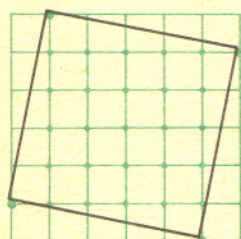


Rys. 2

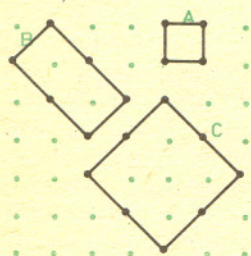
Zaproponowano szereg interesujących eksperymentów, które można wykonać dysponując UZN. Do najważniejszych z nich należą:

1. Precyzyjny pomiar średniego czasu życia swobodnych neutronów, który jest obecnie znany z dokładnością kilku procent.
2. Próba wykrycia elektrycznego momentu dipolowego neutronu. Gdyby się okazało, że neutron ma elektryczny moment dipolowy, oznaczałoby to naruszenie niezmienniczości praw fizyki ze względu na zmianę kierunku upływu czasu (tzw. niezmienniczości T). Można również marzyć o tym, że nagromadzony w naczyniu gaz UZN o dostatecznie dużej gęstości będzie kiedyś wykorzystany jako tarcza do badań oddziaływań cząstek wysokich energii ze swobodnymi neutronami.



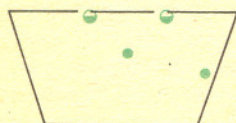


Rys. 1



Rys. 2. Wielokąt *A* ma pole 1; 4 punkty kratowe leżą na jego brzegu; 0 wewnątrz. Wielokąt *B* ma pole 4, 6 brzegowych punktów kratowych i 2 wewnętrzne. Dla wielokąta *C* mamy zaś...

Rys. 3. To jest punkt



Rys. 4

## Liczmy kropki

Czy pamiętacie zadanie z poprzedniej Małej Delty? Polegało ono na obliczaniu pól kwadratów, ukośnie położonych na kwadratowej siatce (np. kratkach zeszytu). A może spróbujemy obliczyć takie pole trochę inaczej? Policzymy, ile węzłów naszej kratki mieści się w takim kwadracie a potem postaramy się wymyślić, jak z tego obliczyć interesujące nas pole.



Zgromadźmy dane doświadczalne (rys. 2). Spójrzmy na nasze punkty tak, jak one na to zasługują. Każdy punkt to kropka... Tylko nie poprawiajcie mnie, że punkt nie ma wymiarów. Ja wiem, że on nie ma, ale jak narysuję go, to już ma (rys. 3). Zatem punkt na brzegu naszego wielokąta jest wart dwa razy mniej, bo połowicznie wystaje poza nasz wielokąt (rys. 4).



Możemy więc tu zaproponować wzór na pole wielokąta, którego wierzchołki leżą w punktach kratowych:

$$S = w + \frac{b}{2} - 1,$$

(*S* oznacza pole, *w* — liczbę wierzchołków kraty leżących wewnątrz, zaś *b* — na brzegu wielokąta). A skąd wzięta się liczba — 1 w naszym wzorze? Mniej więcej stąd, skąd bierze się zysk (albo strata) dnia przy podróży naokoło Ziemi.

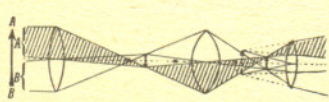
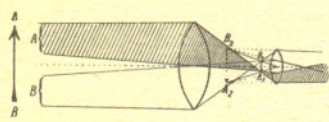
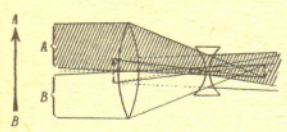
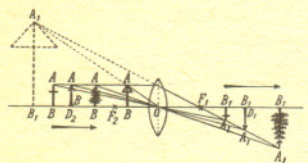
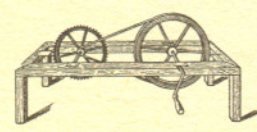
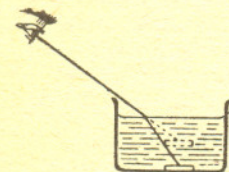
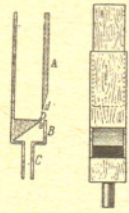
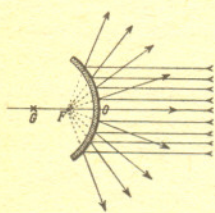
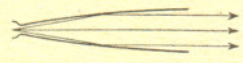
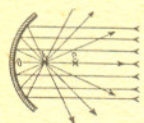
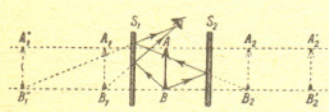
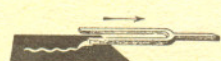
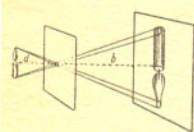
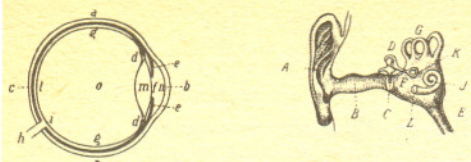
To jak teraz obliczyć pole kwadratu z rysunku 1?



Matematyk — purysta skrzywi się tu z pogardą i powie: w przedstawionym dowodzie nie ma ani krzty sensu. Bardziej praktycznie nastawiony wykrzyknie z zachwytem: chyba odkryliśmy bardzo ciekawy i dobry sposób obliczania pól wielokątów: a jeśli ma jeszcze trochę żyłki sportowej, to postara się znaleźć poprawny dowód.

Twierdzenie nasze odkrył w 1899 roku George Pick. Ciekawe, że dla wielościanów o wierzchołkach w punktach kratowych nie ma wzoru wyrażającego jego objętość w zależności od liczby punktów położonych wewnątrz niego oraz na jego ścianach i krawędziach.





Światło i dźwięk są zjawiskami fizycznymi pospolicie występującymi w naturze. Z ich pomocą poznajemy cały otaczający nas świat. Jesteśmy stale narażeni na działanie bodźców dźwiękowych i świetlnych. Spowszedniały nam i przez to zdają się mniej interesujące niż niedostępne naszym zmysłom zjawiska np. w świecie atomów czy też gwiazd. A jednak to właśnie ich zrozumienie pomoże otworzyć nam drogę do fizyki współczesnej.

Być może dziwicie się dlaczego chcemy zajmować się światłem i dźwiękiem równocześnie, choć zjawiska te wydają się być zupełnie różne. Spróbujmy zastanowić się jakie wspólne cechy posiadają światło i dźwięk i czym się różnią. Jakie prawa rządzą nimi w widzialnym dla nas i słyszalnym przez nas świecie. Może się przy tym okazać, jak to niejednokrotnie bywa w fizyce, że trudniej dostrzegalne podobieństwa są ważniejsze niż oczywiste różnice między zjawiskami. Zobaczymy! Proponujemy wam doświadczenia i obserwacje, których dokonąć można bez skomplikowanej aparatury. Natura wyposażyła nas bowiem w znakomite urządzenia do wykrywania światła i dźwięku; są nimi nasze oczy i uszy.

Oko i ucho są odbiornikami dla światła i dźwięku. Zanim światło czy dźwięk dotrą do odbiorników muszą powstać w źródłach i przebyć drogę dzielącą źródło od odbiornika. Dla obydwu zjawisk źródła są na ogół różne, tak jak różne są ich odbiorniki. Wszyscy znamy jednak przykłady zjawisk, w których jednocześnie pojawiają się błysk i huk. Zarówno światło jak i dźwięk rozchodzą się od miejsca swego powstania po liniach prostych, o ile nie napotkają na swej drodze przeszkody, lub o ile własności ośrodka, w którym się poruszają (np. woda, powietrze, szkło) nie ulegają zmianie. Wszyscy wiemy, że napotykając przeszkodę światło i dźwięk zachowują się podobnie: ulegają odbiciu i zostają częściowo pochłonięte. Wymieniliśmy tu ośrodki, w których mogą rozchodzić się zarówno światło jak i dźwięk, wiemy jednak, że dźwięk rozchodzi się w większości materiałów nieprzezroczystych np. w metalach, a światło porusza się w próżni. Pozwala nam to widzieć gwiazdy i planety.

Tu dochodzimy do jednej z podstawowych różnic między dwoma zjawiskami. Dźwięk nie może rozchodzić się w próżni, do jego przenoszenia potrzebny jest ośrodek materialny.

Zajmijmy się teraz rozchodzeniem się światła i dźwięku wokół nas, w powietrzu. Wiemy zapewne, że prędkość światła w powietrzu jest prawie milion razy większa od prędkości dźwięku (300 000 km/s światło, 340 m/s dźwięk). Dźwięk potrzebuje około 3 s żeby przebyć 1 km, stąd popularny sposób mierzenia odległości od miejsca uderzenia piorunu. Od chwili zobaczenia błysku liczymy ilość sekund do usłyszenia huku. Odległość w kilometrach otrzymujemy dzieląc liczbę sekund przez 3. Prędkość światła jest tak ogromna, że we wszystkich obserwacjach wydaje się nam ono pojawiać bez żadnych opóźnień. Można jednak odbijając je od szybko wirujących luster zmierzyć jego prędkość. Doświadczenie takie wykonano przeszło sto lat temu i otrzymano prędkość światła równą 299 800 km/s.

Powiedzieliśmy, że światło i dźwięk rozchodzą się po liniach prostych. Ale, powiecie, dźwięki dobrze słychać z innego pokoju przez małą szparę w drzwiach nawet kiedy siedzimy zupełnie z boku. To prawda. Sprawdźcie jaka jest różnica w słyszalności muzyki z sąsiedniego pokoju przy drzwiach zamkniętych i ledwo uchylonych, a jak niewielki jest wzrost natężenia dźwięku po całkowitym otwarciu drzwi. Dźwięk jak gdyby „zaginał się” od szpary we wszystkie strony. Wyobraźcie sobie, że taki sam efekt można zaobserwować i dla światła, choć nie tak łatwo. Wyszukajcie wieczorem lampę, najlepiej pojedynczą żarówkę, w odległości około 1 km od was. Popatrzcie na nią przez szparę między opuszkami palców, trzymając je kilka cm od oka. A teraz powoli zmniejszajcie odległość między palcami. Zobaczycie w pewnym momencie, że obraz lampy ulega rozmyciu. To rozmycie to właśnie ugięcie się promieni światła na krawędziach waszych palców. A może dostrzegacie coś jeszcze patrząc przez szczelinę między palcami, jakieś ciemne przerwy na tle rozmazanego obrazu. Można to doświadczenie ulepszyć używając dwóch gładkich ostrych krawędzi.



Dr Andrzej KRASIŃSKI

Istnieje w przyrodzie wiele zjawisk, których obserwowany przebieg, czasem nawet samo ich istnienie, zależy od sposobu dokonywania obserwacji. Mówimy wtedy o względności danego zjawiska. Termin „względność” kojarzy się nam zwykle z teorią względności Einsteina, która wyrosła ze stwierdzenia i systematycznego prześledzenia względności wszelkich form ruchu oraz towarzyszących mu efektów. Względność rozmaitych pojęć i zjawisk można jednak obserwować na znacznie mniej abstrakcyjnym poziomie w życiu codziennym. Zajmiemy się tu jednym zjawiskiem względnym, spotykanym bardzo często, lecz mimo to sprawiającym czasem pewne trudności interpretacyjne, a mianowicie siłami bezwładności.

Ludziom próbującym przeniknąć ich istotę pewien kłopot sprawia czasem fakt, że w niektórych układach odniesienia siły te po prostu nie istnieją. Zaczniemy więc od wskazania innych zjawisk życia codziennego, które ujawniają się tylko w wybranych układach odniesienia. Jednym z bardziej swojskich jest wiatr. Podczas bezwietrznej pogody (a więc gdy powietrze nie porusza się względem Ziemi), nie odczuwamy żadnego podmuchu stojąc nieruchomo (względem Ziemi). Wystarczy jednak wsiąść na rower, aby poczuć wiatr wiejący w układzie związanym z jadącym rowerem — przy szybkiej jeździe z góry potrafi on nawet zerwać czapkę z głowy. Turyści piesi znają inny efekt świadczący o realnym istnieniu owego „pozornego” wiatru. Człowiek idący dłuższy czas równym tempem i z jednostajnym wysiłkiem przez nieruchome (względem Ziemi) powietrze jest owiewany stałym delikatnym (względnym) podmuchem, który odprowadza ciepło wydzielające się z ciała podczas pracy mięśni. Organizm przyzwyczaja się dość szybko do tych warunków termicznych i odpowiednio do nich reguluje tempo pocenia się. Jeśli jednak po dłuższym marszu turysta zatrzyma się, w ciągu pierwszych kilku minut, zanim organizm przestawi się na nowy reżim cieplny, biją na niego „siódme poty”.

Względność wiatru jest też dobrze znana żeglarzom. W rozpędzającym się jachcie, płynącym po linii prostej, wiatr odczuwany przez załogę i rzeczywiste, „łapano w żagle” stopniowo zmienia kierunek względem jachtu: wieje pod coraz ostrzejszym kątem od dziobu (chyba, że wiał cały czas dokładnie od rufy).

Wiatr „pozorny” (względny) jest tu dodatkową składową obserwowanego (z jachtu) wiatru „rzeczywistego”.

Przyjmijmy, że Czytelnicy oswoili się już z faktem, iż zjawiska nie istniejące dla jednego obserwatora mogą być wyraźnie obserwowane przez innego. Podkreśliśmy teraz inną ważną cechę wielkości względnych: przy ich opisywaniu należy cały czas pamiętać, w jakim układzie odniesienia dokonujemy opisu. Pomylenie układów odniesienia i kombinowanie ze sobą w nieprawidłowy sposób wielkości mierzonych w różnych układach może prowadzić do jawnie bezsensownych rezultatów. Zanim przejdziemy do sił bezwładności, pozostawmy jeszcze na chwilę przy żeglarskim problemie wiatru pozornego. Prawidłowy sposób wyznaczania jego kierunku (rys. 1) jest następujący: wiatr wieje z prędkością  $v_{wz}$  względem powierzchni Ziemi, Ziemia wraz z wiatrem porusza się względem jachtu z prędkością  $v_{Jz}$ , zatem prędkość wiatru względem jachtu  $v_R$  wynosi

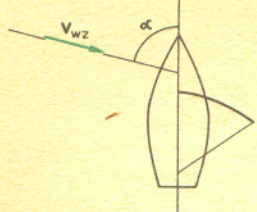
$$v_R = v_{wz} + v_{Jz},$$

czyli wiatr „rzeczywisty” wieje pod ostrzejszym kątem względem osi jachtu niż w układzie odniesienia związanym z Ziemią. Sposób nieprawidłowy, spotykany u młodych adeptów żeglarstwa, prowadzący do wyniku wyraźnie sprzecznego z obserwacją (rys. 2), wygląda następująco: wiatr wieje z prędkością  $v_{wz}$ , jacht płynie z prędkością  $v_{Jz}$ , więc wiatr rzeczywisty wieje z prędkością  $v_{wJ} = v_{wz} + v_{Jz}$ . Dodano tu charakterystyki liczbowe dotyczące ruchu dwu niezależnych obiektów względem tego samego układu odniesienia (Ziemi) i otrzymano wynik opisujący efekt różny od poszukiwanego: z prędkością  $v_{wJ}$  poruszałyby się jacht pchany siłą wiatru w kierunku wektora  $v_{wz}$  z prędkością  $v_{wz}$  i równocześnie pchany przez inną siłę np. prądem rzeki w kierunku wektora  $v_{Jz}$  z prędkością  $v_{Jz}$ .

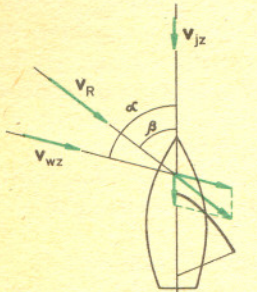
Podamy teraz kilka przykładów sytuacji życia codziennego, w których spotykamy się z siłami bezwładności. Każdy, kto dojeżdża do swojego miejsca pracy środkami komunikacji publicznej, jest codziennie wielokrotnie wystawiony na ich działanie. W autobusie ostro hamującym czujemy wyraźnie siłę pchającą nas do przodu, zaś w biorącym zakręt z dużą prędkością jakaś siła wypycha nas na zewnątrz zakrętu. Narciarz rozpoczynający zjazd (rys. 3) musi pochylić się do przodu, ustawić w przybliżeniu prostopadle do nart, w przeciwnym wypadku tajemnicza siła powali go na plecy, chociaż zupełnie jej nie odczuwał, dopóki stał w miejscu. Rowerzysta na zakręcie musi pochylić rower w kierunku środka zakrętu, aby nie upaść pod wpływem tej samej siły (rys. 4). Wiele prostych i ciekawych doświadczeń z siłami bezwładności, wymagających jednak wolnej przestrzeni nieosiągalnej na ogół w pasażerskim wagonie, można wykonać w jadącym pociągu — są one opisane w niemal każdym podręczniku fizyki.

Skąd biorą się te siły? Pierwsze prawo dynamiki Newtona mówi: ciało izolowane od wszelkich oddziaływań będzie spoczywało lub poruszało się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

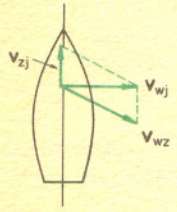
a)



b)

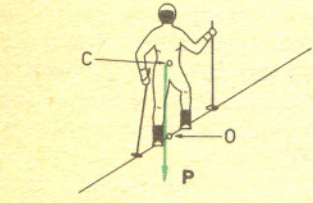


Rys. 1. Wiatr rzeczywisty na jachcie: a) Jacht stoi w miejscu, kierunek wiatru łapanego w żagle tworzy z osią jachtu kąt  $\alpha$ ; b) Jacht płynie, Ziemia porusza się względem jachtu z prędkością  $v_{Jz}$ , wiatr łapano w żagle ma prędkość  $v_R$ , jego kierunek tworzy z osią jachtu kąt  $\beta < \alpha$ . Żagiel trzeba wybrać, aby pracował prawidłowo.

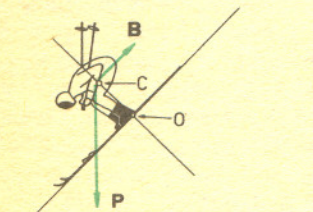


Rys. 2. Nieprawidłowy sposób wyznaczania kierunku i prędkości wiatru rzeczywistego. Wektory  $v_{zj}$  i  $v_{wz}$  są mierzone w układzie związanym z Ziemią, ich suma nie opisuje więc żadnego efektu w układzie związanym z jachtem.

a)

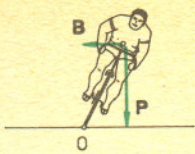


b)

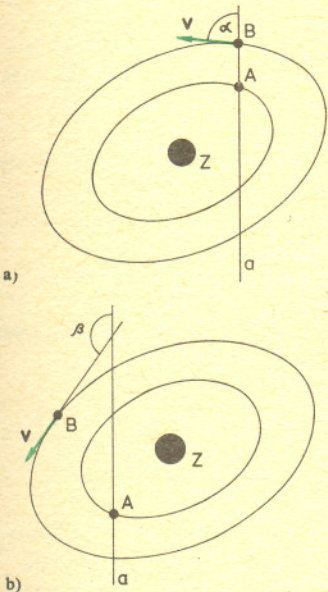


Rys. 3. Równowaga narciarza. a) Narciarz stoi — siła ciężkości  $P$  ma zerowy moment względem punktu  $O$  przy pionowej pozycji ciała. Pozycja pionowa jest pozycją równowagi. b) Narciarz rozpędza się, siła bezwładności  $B$  skierowana równoległe do powierzchni stoku i przyłożona w środku masy ma różny od zera moment względem punktu  $O$ , zatem dla zachowania równowagi narciarz musi pochylić się do przodu, aby wytworzyć moment siły  $P$  względem  $O$ .





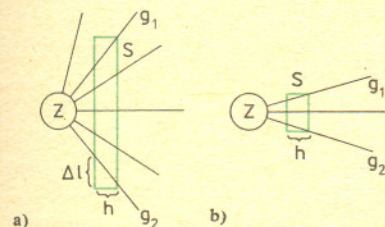
Rys. 4. Rowerzysta musi pochylić się ku środkowi zakrętu, aby wytworzyć moment siły ciężkości  $P$  względem punktu styczności kół z jezdnią  $O$ , przeciwny do momentu siły bezwładności  $B$ .



Rys. 5. Satelita  $A$  nie jest układem inercyjnym dla odległego satelity  $B$ , chociaż obydwa są układami lokalnie inercyjnymi. Ruch  $B$  względem  $A$  jest krzywoliniowy. a) Sytuacja w dowolnym punkcie orbity satelity  $A$ : prędkość satelity  $B$  tworzy z kierunkiem  $a$  kąt  $\alpha$ . b) Sytuacja późniejsza o pół orbity  $A$  wokół Ziemi: prędkość satelity  $B$  tworzy z kierunkiem  $a$  kąt  $\beta > \alpha$ . Kierunek  $a$  wyznacza się celując teleskopem stale w tę samą gwiazdę.



Rys. 6. W jednorodnym polu grawitacyjnym wektor natężenia pola  $g$  jest wszędzie taki sam; jeden układ spadający swobodnie z przyspieszeniem  $a = g$  jest więc dobrym układem inercyjnym dla całego pola.



Rys. 7. a) Jeśli układ odniesienia jest duży w porównaniu z obwodem jego orbity wokół źródła pola grawitacyjnego, zbieżność linii sił pola grawitacyjnego jest wyraźnie widoczna. Na odcinku  $h$  linie  $g_1$  i  $g_2$  zbliżyły się do siebie o odcinek  $2\Delta l$ . b) W małym układzie zbieżność linii sił jest trudno wykrywalna, pole grawitacyjne wewnątrz  $S$  jest z dobrym przybliżeniem jednorodne.

Gdy jednak zapytamy: jak można stwierdzić, że dane ciało jest izolowane od wszelkich oddziaływań, nie znajdziemy innej prostej odpowiedzi, jak tę: sprawdzić, czy spoczywa lub porusza się jednostajnie po linii prostej. Zatem pierwsze prawo Newtona jest w istocie definicją ciała izolowanego od wszelkich oddziaływań, przy czym aktem wiary (aksjomatem) teorii Newtona jest założenie, że ciało takie w ogóle może istnieć. Definiuje ono pewien układ odniesienia zwany inercyjnym: układ, w którym ciało to spoczywa. Inny układ, poruszający się ruchem jednostajnym prostoliniowym względem inercyjnego, jest również układem inercyjnym, w którym obowiązuje I prawo Newtona. Natomiast układ poruszający się względem układu inercyjnego ruchem przyspieszonym, sam nie jest już układem inercyjnym: mogą w nim występować ruchy przyspieszone nie mające widocznych (w danym układzie) przyczyn. Ponieważ zaś ruchy przyspieszone, zgodnie z drugim prawem dynamiki Newtona, uważamy za skutki działania pewnych sił, mówimy często o „siłach bezwładności” lub „siłach inercyjnych” mając na myśli fizyczne przyczyny owych niespodziewanych przyspieszeń. Jest faktem o głębokim, podstawowym dla fizyki znaczeniu, że siły bezwładności ujawniają się w każdym eksperymencie fizycznym jako siły nieodróżnialne pod względem swoich właściwości fizycznych od sił grawitacyjnych. Można to łatwo sprawdzić: gdy autobus hamuje na dłuższym odcinku z jednostajną siłą, zamknijmy oczy i, utrzymując pozycję stojącą, spróbujmy wmówić sobie, że stoimy na pochyłym stoku górskim. Złudzenie będzie zupełne: nie poznamy, że w kierunku podłogi ciągnie nas inna siła (grawitacyjna) niż do przodu (siła bezwładności). Odczujemy tylko siłę wypadkową o kierunku ukośnym względem podłogi, pełniącą rolę grawitacji. Siły bezwładności są więc związane z układami nieinercyjnymi. Siła bezwładności działająca na ciało o masie  $m$  jest równa  $ma$ , gdzie  $a$  jest przyspieszeniem ruchu układu nieinercyjnego, w którym mierzymy siłę, względem dowolnego inercyjnego.

W pewnych szczególnych sytuacjach siły bezwładności mogą całkowicie znieść inne siły działające w danym układzie i uczynić z niego układ prawie inercyjny. Tak jest np. w przypadku satelity, poruszającego się po orbicie wokół Ziemi pod wpływem sił czysto grawitacyjnych, a więc neutralnego elektrycznie i magnetycznie (to samo dotyczy dowolnego ciała spadającego swobodnie w polu grawitacyjnym). Siła bezwładności związana z ruchem po okręgu jest tu dokładnie równa sile grawitacyjnej i przeciwnie do niej skierowana, a więc siła wypadkowa działająca na dowolne obojętne elektrycznie i magnetycznie ciało spoczywające względem satelity jest równa zero. Satelita jest więc układem inercyjnym realizowanym za pomocą układu nieinercyjnego, co każdy miał okazję zaobserwować w, częstych w pewnym okresie, transmisjach telewizyjnych ze stacji kosmicznych: kosmonauci oraz używane przez nich przedmioty „pływają” swobodnie po całym wnętrzu stacji, w zgodzie z I prawem Newtona. (Tu dygresja: niektórzy ludzie wyobrażają sobie naiwnie, iż stan nieważkości na stacji orbitalnej wynika z dużej odległości tej stacji od Ziemi i związanego z tym osłabienia siły grawitacyjnej. Orbity sztucznych satelitów przebiegają zwykle na wysokościach 100—500 km od powierzchni Ziemi, promień Ziemi wynosi ok. 6370 km, każdy może więc łatwo sprawdzić, za pomocą wzoru Newtona na siłę grawitacyjną, że grawitacja na orbicie jest niewiele słabsza niż na powierzchni Ziemi. Nieważkość jest efektem inercyjnym.)

Istnieje jednak zasadnicza różnica między takim „sztucznym” (mówimy fachowo: lokalnym) układem inercyjnym, a tym „prawdziwym”, postulowanym przez mechanikę Newtona. Układ lokalny jest dobrym układem inercyjnym tylko wzdłuż pojedynczego toru ruchu swobodnego w polu grawitacyjnym. Dla punktów położonych wystarczająco daleko od badanego toru będzie to układ nieinercyjny (rys. 5), zaś inne lokalne układy inercyjne będą się poruszały względem niego ruchem przyspieszonym. Teoria Newtona postuluje tymczasem istnienie uniwersalnego (fachowo: globalnego) układu inercyjnego, który jest dobry w każdym punkcie całej przestrzeni. Układ lokalny może być układem globalnym tylko w jednorodnym polu grawitacyjnym (rys. 6), lecz pola jednorodne nie występują w przyrodzie. Natomiast w odpowiednio małym obszarze rzeczywiste pole grawitacyjne jest w przybliżeniu jednorodne, przy czym im mniejsze rozmiary obszaru, tym lepsze przybliżenie (tym mniej wyraźnie widoczna jest zbieżność linii sił pola grawitacyjnego, rys. 7). Dlatego właśnie wewnątrz stacji orbitalnej, bardzo małe w porównaniu z obwodem jej orbity, jest w dobrym przybliżeniu układem inercyjnym.

Zejdźmy teraz z orbity na Ziemię. Układy inercyjne można w przybliżeniu realizować również na powierzchni Ziemi. Przyspieszenie związane z ruchem Ziemi po orbicie wokół Słońca jest równoważone przez przyspieszenie odśrodkowe, przy czym rozmiary Ziemi są na tyle małe w porównaniu z długością jej orbity, że pole grawitacyjne Słońca jest z dobrym przybliżeniem jednorodne na całej Ziemi. Niejednorodność tego pola wywołuje tzw. składową słoneczną przyływów oceanicznych, o wysokości fali zaledwie ok. 0,17 m. Ziemia jest więc lokalnym układem inercyjnym znoszącym pole grawitacyjne Słońca — nie musimy martwić się o grawitację słoneczną. To samo dotyczy siły grawitacyjnej Galaktyki, równoważonej przez siłę odśrodkową w ruchu Układu Słonecznego wokół centrum Galaktyki, jak również ruchu całej Galaktyki w Lokalnej Grupie oraz wszelkich ruchów w większej jeszcze skali. Nie musimy także przejmować się polami grawitacyjnymi innych planet — w ścisłym sensie Ziemia porusza się pod wpływem zsumowanego pola grawitacyjnego Słońca i wszystkich planet, i właśnie to całkowite pole jest neutralizowane przez przyspieszenie odśrodkowe. Istotne dla nas są jedynie: własna grawitacja ziemska oraz siła odśrodkowa i siła Coriolisa, związane z obrotem Ziemi wokół jej własnej osi.



**Rozwiązanie zadania M 221.**

Spośród odcinków  $A_1A_2$  (boków i ew. przekątnych naszego  $n$ -kąta) wybierzmy odcinek  $A_kA_l$  leżący najbliżej punktu  $P$ . Jeżeli teraz  $P \in A_kA_l$ , to  $\sphericalangle A_kPA_l = \pi$ . W przeciwnym przypadku wybierzmy wierzchołki  $A_k$  i  $A_l$  leżące po tej samej stronie prostej  $A_kA_l$  co punkt  $P$  i sąsiadujące z wierzchołkami  $A_k$  i  $A_l$  (być może  $A_k = A_l$ ). Łatwo zauważyć, że  $\sphericalangle A_kA_lA_k =$

$= \sphericalangle A_lA_kA_l = \frac{\pi}{n}$ , a ponieważ odległość  $P$  od odcinka  $A_kA_l$  jest nie większa niż odległość  $P$  od  $A_kA_l$ , więc

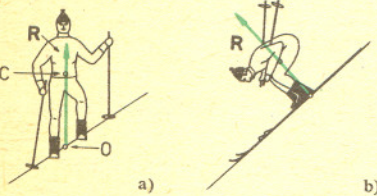
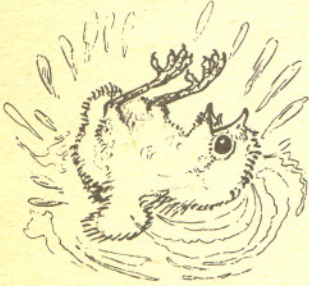
$$\sphericalangle PA_kA_l \leq \frac{1}{2} \sphericalangle A_lA_kA_l = \frac{\pi}{2n}$$

i analogicznie  $\sphericalangle PA_lA_k \leq \frac{1}{2} \sphericalangle A_kA_lA_k = \frac{\pi}{2n}$ .

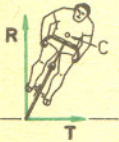
Wobec tego trzeci kąt  $\sphericalangle A_kPA_l$  trójkąta  $A_kA_lP$  jest równy  $\pi - \sphericalangle PA_kA_l - \sphericalangle PA_lA_k$ ,

jest więc większy lub równy  $\pi - 2 \cdot \frac{\pi}{2n} =$

$$= \pi - \frac{\pi}{n}.$$



Rys. 8. Równowaga narciarza stojącego (a) i jadącego (b) w układzie inercyjnym, bez użycia sił bezwładności.



Rys. 9. Równowaga rowerzysty w układzie inercyjnym.

Sumę siły grawitacyjnej i siły odśrodkowej równoważymy po prostu przez podparcie całego układu na powierzchni  $S$  prostopadłej do siły wypadkowej, np. na powierzchni szosy. Pojawiającej się przy ruchach po powierzchni  $S$  siłę tarcia możemy znacznie zmniejszyć przez zastosowanie kół i łożysk, rolek lub kul, albo nawet zrównoważyć przez przyłożenie siły wytworzonej za pomocą układu napędowego (silnika lub pedałów). Nie wyeliminujemy jedynie siły Coriolisa, lecz jest ona na tyle mała, że przy ruchach ograniczonych do niewielkiego obszaru nie powoduje obserwowalnych efektów. Uzyskujemy w ten sposób układ, który podczas dwuwymiarowych ruchów po powierzchni  $S$  będzie spełniał I prawo Newtona ze znaczną dokładnością (nawiasem mówiąc, taką właśnie realizacją układu inercyjnego posługiwał się, oczywiście nieświadomie, Galileusz gdy odkrywał doświadczalne podstawy mechaniki Newtona).

Wróćmy do przykładów podanych na wstępie i prześledźmy je oczami fizyków. Obserwator w hamującym autobusie powie: mój układ odniesienia porusza się ruchem opóźnionym względem układu inercyjnego (powierzchni drogi), zatem pojawia się w nim siła inercjalna, która pcha mnie do przodu. Narciarz powie: jadąc w dół poruszam się ruchem przyspieszonym względem układu inercyjnego (płaszczyzny poziomiczy na stoku), a więc staję się układem nieinercyjnym; związana z moim ruchem siła bezwładności usiłuje mnie powalić na plecy. Muszę więc pochylić się do przodu, aby pojawił się moment mojej siły ciężkości względem moich stóp, który zrównoważy moment siły bezwładności. Rowerzysta powie: mój układ odniesienia porusza się po linii krzywej względem układu inercyjnego, występują więc w nim przyspieszenia odśrodkowe. Związana z nimi siła bezwładności usiłuje wywrócić mnie na zewnątrz zakrętu. Muszę zatem pochylić się ku jego środkowi, wtedy siła grawitacyjna działająca na mnie i mój rower wytworzy moment obrotowy względem punktu styczności kół z jezdnią. Przy odpowiednio dobranym kącie pochylenia moment siły ciężkości zrównoważy moment siły odśrodkowej i przejadę zakręt bez wywrotki. Podobne rozumowanie przeprowadziłby obserwator w zakręcającym autobusie.

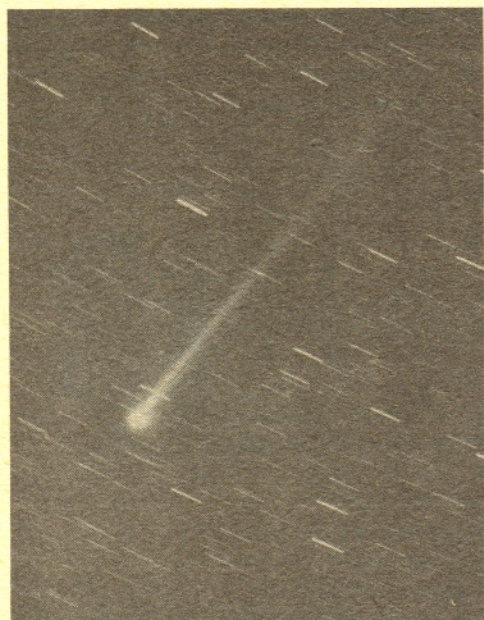
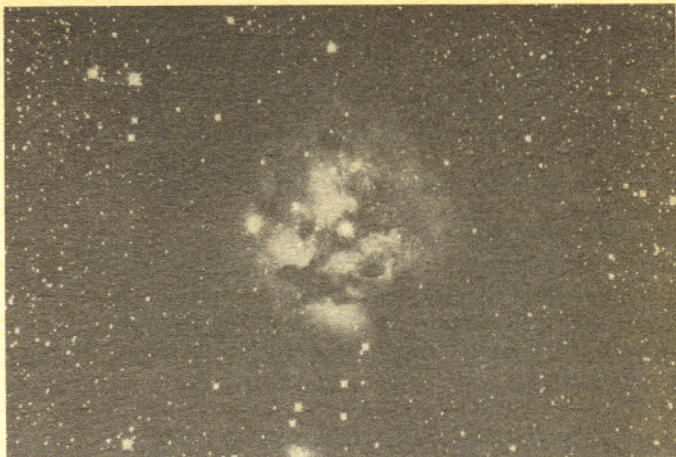
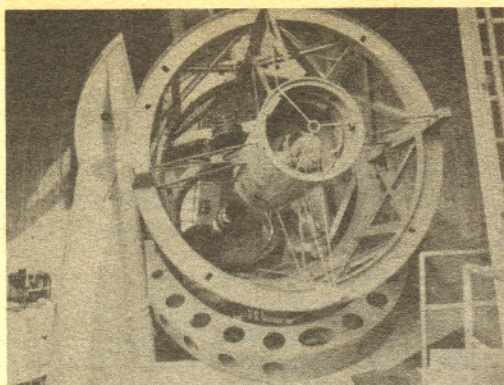
Te same zjawiska, obserwowane przez obserwatora stojącego nieruchomo na powierzchni Ziemi, dają się opisać bez używania pojęcia sił bezwładności. Patrząc z ulicy na rozpaczliwe wysiłki pasażera autobusu, usiłującego, ku wielkiemu rozbawieniu kierowcy, utrzymać równowagę podczas hamowania, powiemy: pasażer poruszał się początkowo z taką samą prędkością, jak autobus. Autobus zmniejszył swoją prędkość, więc pasażer, który nie chce zachować początkowej prędkości i wylecieć przez przednią szybę, musi również zmniejszyć swoją prędkość. W tym celu musi nadać sobie odpowiednie ujemne przyspieszenie, a więc, zgodnie z drugim prawem dynamiki Newtona, musi użyć pewnej siły.

Patrząc na narciarza powiemy (rys. 8): dopóki stał, siła oporu śniegu była skierowana dokładnie przeciwnie do jego siły ciężkości, miała więc zerowy moment względem środka masy narciarza, i jego ciało było w równowadze. Gdy ruszył, moment siły oporu podłoża  $R$ , działającej teraz prostopadłe do śniegu, stał się różny od zera. Narciarz musi więc zlikwidować ów nowy moment, który usiłuje podciąć mu nogi, przez pochylenie się do przodu, tak aby kierunek siły oporu podłoża przeszedł przez jego środek masy.

Patrząc na rowerzystę powiemy (rys. 9): aby zmienić kierunek jazdy, musi on zadziałać na siebie pewną siłą dośrodkową, przyłożoną w środku masy układu rower — człowiek. Skręcenie przedniego koła wywołuje siłę dośrodkową  $T$  (składową siły tarcia), przyłożoną jednak w płaszczyźnie jezdni, siła ta ma więc różny od zera moment względem środka masy  $C$  układu i dąży do wywrócenia roweru na zewnątrz zakrętu. Rowerzysta musi pochylić się ku środkowi zakrętu, wówczas siła sprężystości podłoża  $R$ , działająca pionowo do góry, również uzyska różny od zera moment względem środka masy, który będzie mógł zrównoważyć moment siły tarcia. Bez siły bezwładności możemy sobie również poradzić z opisem zjawisk w stacji orbitalnej: ponieważ wszystkie znajdujące się tam przedmioty oraz sama stacja poruszają się ruchem swobodnym w polu grawitacyjnym, pozostając wciąż blisko siebie, ich przyspieszenia są praktycznie jednakowe. Dwa ciała poruszające się z takim samym przyspieszeniem mogą, jedno względem drugiego, poruszać się tylko ruchem jednostajnym prostoliniowym lub spoczywać, ponieważ ich względne przyspieszenie jest równe zeru.

Opisy dokonywane w każdym z dwu układów odniesienia (inercyjnym i nieinercyjnym) są fizycznie równoważne: siła, jakiej musi użyć pasażer hamującego autobusu, obliczona jednym i drugim sposobem okazuje się taka sama; w obu przypadkach dochodzimy do wniosku, że narciarz musi ustawić się tak, aby jego środek ciężkości znalazł się na prostopadłej do stoku przechodzącej przez jego stopy; w obu też przypadkach otrzymamy tę samą wartość kąta pochylenia roweru przy danej prędkości i danym promieniu skrętu. Czytelnicy zauważyli pewnie, że mimo to jednak opis w układzie nieinercyjnym, z użyciem sił bezwładności, bywa prostszy i bardziej przemawiający do wyobraźni. Upierając się przy układzie inercyjnym i nie przyjmując do wiadomości faktu istnienia sił bezwładności utrudniamy sobie nieraz życie, zaś w przypadku stacji orbitalnej w ogóle nie zauważamy ważnego faktu znoszenia sił grawitacyjnych przez siły bezwładności. Można z tego wysnuć morał o charakterze ogólniejszym: odrzucając możliwość istnienia innych punktów widzenia niż nasz własny, który z wielką energią, z niezłomną wolą głosimy jako jedynie słuszny, często nie dostrzegamy ważnych zjawisk, których prawidłowe wykorzystanie byłoby pożyteczne.

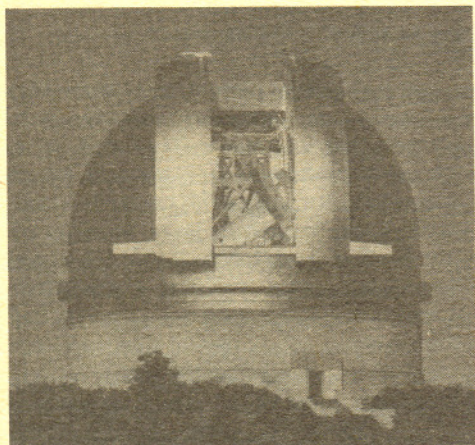




## Patrz w niebo

W marcu, podobnie jak przed rokiem kiedy zaczynaliśmy wspólnie patrzeć w niebo, górują wieczorami dwa Lwy (mały i duży), Wielka Niedźwiedzica i Rak (*Cancer, Cnc*). W pierwszym naszym odcinku omówiliśmy dwa rodzaje układów wielokrotnych, dzisiaj powrócimy do układów gwiazd, jednak z nieco innej perspektywy. Spróbujemy wyobrazić sobie, jak wygląda niebo widziane z hipotetycznej planety krążącej wokół jednego ze składników układu. Za przykład weźmy gwiazdę  $\zeta$  *Canceri* noszącą nazwę własną *Tegmeni*. Przyjmijmy, że orbita planety obiegającej najjaśniejszy składnik układu (A) podobna jest z grubsza do orbity Ziemi wokół Słońca. Nie mogą one pozostawać przez dłuższy czas takie same ponieważ zakłócenia od pozostałych składników  $\zeta$  *Cnc* ciągle zmieniają orbitę planety. Z tej przyczyny wątpimy, by na planetach blakających się w układach wielokrotnych mogło powstać życie.

A więc naszą gwiazdą dzienną jest obiekt nieco bielszy, większy i gorętszy od Słońca oraz dwukrotnie od niego jaśniejszy. Co około 60 lat przychodzi kilkunastoletni okres białych nocy. Po zachodzie słońca najjaśniejszym obiektem na niebie jest składnik B — olśniewająco jasny punkt, tysiąc razy jaśniejszy niż Księżyc w pełni. Gwiazda ta jest bardzo podobna do Słońca.  $\zeta$  *CncB* widoczny jest często również w dzień i czasami moglibyśmy obserwować zaćmienia jednego słońca przez drugie. Jednak nie tylko „nocne słońce” przyciągałoby uwagę hipotetycznych obserwatorów na planecie. Równie ciekawymi obiektami są dwa obiegające się wzajemnie z okresem ok. 17,5 lat jasne punkty. Jeden z nich jest nieco jaśniejszy od Księżyca, natomiast drugi podobny jest do naszych jasnych planet widzianych z Ziemi. Wzajemna odległość kątowna składników C i D waha się koło  $2^\circ$  — jest to cztery razy więcej niż średnica kątowna Księżyca; prawdziwa odległość między składnikiem C i jego towarzyszem — białym karłem wynosi 5 jednostek astronomicznych — mniej więcej tyle co od Słońca do Jowisza. Układ C—D obiega układ A—B w okresie 1150 lat. Nie wiemy nic więcej o dalszych osobliwościach nieboskłonu wymyślonej przez nas planety, jednak pewne obserwacje wskazują na istnienie piątej, bardzo słabej gwiazdy w układzie. Słońce widziane z planety byłoby ledwo widoczną, niczym nie wyróżniającą się gwiazdką w niewiele zmienionym gwiazdozbiornie Koziorożca.



mgr Tomasz CHLEBOWSKI



Stanisław PAŁKA ze Starej Wsi koło Limanowej nie zdążył wziąć udziału w naszym zeszłorocznym konkursie „Znaleźć nowe twierdzenie o trójkącie”, ale teraz przysłał list z następującymi dwoma interesującymi twierdzeniami.

**Twierdzenie I.** Suma sinusów trzech kątów dowolnego trójkąta nie przekracza  $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ , przy czym równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy gdy trójkąt jest równoboczny.

Dowodu nie przytaczamy; polega on na znalezieniu maksimum funkcji  $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$ .

**Twierdzenie II.** Jeżeli  $S$ ,  $S_0$  i  $S_w$  oznaczają odpowiednio pole trójkąta, pole koła opisanego na nim i pole koła wpisanego w niego, to

$$\sqrt{S_0 S_w} \geq \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} S,$$

przy czym równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt jest równoboczny.

Dowód. Oznaczając przez  $a$ ,  $b$  i  $c$  długości boków trójkąta mamy na podstawie znanych wzorów

$$\begin{aligned} \sqrt{S_0 S_w} &= \sqrt{\pi \left(\frac{abc}{4S}\right)^2 \cdot \pi \frac{4S^2}{(a+b+c)^2}} = \frac{\pi}{2} \frac{abc}{a+b+c} = \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\frac{\sin \alpha}{bc \sin \alpha} + \frac{\sin \beta}{ac \sin \beta} + \frac{\sin \gamma}{ab \sin \gamma}} = \\ &= \frac{\pi \cdot S}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}, \end{aligned}$$

i wystarczy zastosować twierdzenie I.

## Stara DELTA

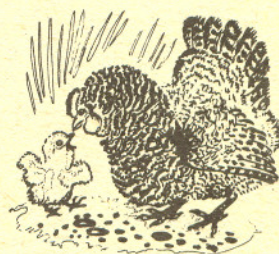
**Zadanie.** Udowodnić, że

Cyrkuł, którego połdyameter jest średnią proporcjonalną między ścianą Konusa, y połdyametrem bazy tegoż Konusa; jest równy połowi albo obietności powierzchni Konusa, krom bazy.

(Stanisław Solski „Geometra Polski” 1683)

*Nie rozumiecie, Czytelnicy, treści zadania? Nie przejmujcie się; Przetoż ieśli zaraz nie wyrozumiesz czego, wyrozumiesz drugim razem, albo trzecim, według dowcipu. Rozum człowieczy jest takowy, im więcej co bierze przed sye, im częściej co rozmyśla, tym przestrzeniej sobie w owej rzeczy czyni, tym więcej obacza i nayduie, czego przedtym nie obaczył nie nalazł.*

(Stanisław Grzępski, „Geometria To jest Miernicka Nauka po Polsku krótko napisana z Graeckich i Łacińskich Książ, 1566)



### Jak wygląda algebra?

— Nie! — zawołał — dziś pani algebry uprawiać nie wolno, panno Immo, czy w przestworzach igrać, jak pani to nazywa! Niechże pani spojrzy na słońce!... Czy można...?

I podszedł do stolika, biorąc do ręki zeszyt.

To, co ujrzał, było oszołamiające. Strzępiasto, dziecięco grubym pismem, które zdradzało jej osobliwy sposób trzymania pióra, fantastyczny hokus-pokus, wiedźmowy sabat spleąanych run pokrywał stronicę. Greckie litery sprzęgały się z łacińskimi, z cyframi o różnej wielkości, z rojem kresek i krzyżyków, pod i ponad poziomymi liniami w ułamkowym uszeregowaniu, z daszkami innych linii na kształt namiotów, w parzystych kresczech znajdując zrównanie wartości, w okrągłych klamrach łącząc się w wielkie masy formułek. Pojedyncze litery, wysunięte jak sztyldwaczy, ustawione na prawo, oklamrzonymi grupami. Znaki kabalistyczne, najzupelniej niezrozumiałe dla umysłu laika, obejmowały niby ramionami liczby i głoski, a ułamki cyfr stały przed nimi, cyfry zaś i litery krążyły u ich stóp i nad ich głowami. Osobliwe sylaby. Skróty tajemniczych wyrazów rozsypane były wszędy, a między nekromatycznymi kolumnami stały zdania i uwagi wypisane potocznym językiem, których sens jednak tak był odległy od wszelkich spraw ludzkich, że można je było czytać, nie rozumiejąc z nich więcej, niż z pomruku guślarza.

Tomasz Mann, „Królewska wysokość”, przekład Witolda Hulewicz



$$\begin{aligned} & [\chi(\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}) - \chi(\mathcal{O}_F) - \chi(\Omega \otimes \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{M}^{-1}) + \chi(\Omega)] - \\ & - [\chi(\mathcal{L}) - \chi(\mathcal{O}_F) - \chi(\Omega \otimes \mathcal{L}^{-1}) + \chi(\Omega)] - \\ & - [\chi(\mathcal{M}) - \chi(\mathcal{O}_F) - \chi(\Omega \otimes \mathcal{M}^{-1}) + \chi(\Omega)] = \\ & = [\chi(\mathcal{O}_F) - \chi(\mathcal{L}) - \chi(\Omega \otimes \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{M}^{-1}) + \chi(\Omega \otimes \mathcal{M}^{-1}) + \\ & + [\chi(\mathcal{O}_F) - \chi(\mathcal{M}) - \chi(\Omega \otimes \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{M}^{-1}) + \chi(\Omega \otimes \mathcal{L}^{-1}) - \\ & - [\chi(\mathcal{O}_F) - \chi(\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}) - \chi(\Omega \otimes \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{M}^{-1}) + \chi(\Omega)] = \\ & = (\mathcal{L}^{-1} \cdot \Omega^{-1} \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{M}) + (\mathcal{M}^{-1} \cdot \Omega^{-1} \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{M}) - \\ & - (\mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{M}^{-1} \cdot \Omega^{-1} \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{M}) = 0. \end{aligned}$$



## Anecdotes wanted

*W Journal of Recreational Mathematics*  
(vol. 11, 1978/9) znaleźliśmy następujące  
ogłoszenie

Chcemy wydać zbiór anegdot o znanych  
matematykach. Zainteresowanych współpracę  
prosimy o listy:

Peter Borwein  
Department of Mathematics  
University of British Columbia  
Vancouver, B. C., Canada  
V6T 1W5

lub  
Maria Klawe  
Department of Computer Science  
University of Toronto  
Toronto, Ontario, Canada  
M5S 1A7

Prosimy podawać źródło każdej anegdotki  
i własne oszacowanie prawdopodobieństwa  
jej prawdziwości.

Od redakcji „Deltę” do zaprzyjaźnionych z nią  
matematyków. Nie bójcie się. Nic im nie  
poślemy.



Szanowny Panie Redaktorze!

Mnóstwo czasu traci się przez to, że młodzi naukowcy przysyłają prace do publikacji w formie, której nie można zaakceptować. Jest na rynku wiele dobrych książek na temat przygotowania prac naukowych, ale niewiele istnieje konkretnych przykładów na to, jak maszynopis nie nadający się do druku może być przekształcony w taki, który byłby przyjęty przez przodujące czasopisma naukowe. Dzięki szczęśliwemu przypadkowi i całkowicie legalnie udało mi się otrzymać kopię takiego maszynopisu z uwagami recenzenta, z tek redakcyjnych przodującego czasopisma geologicznego; przekazuję ją w nadziei, że będzie cenna dla autorów podczas przygotowywania prac do publikacji.

### Kolumnowe Struktury Skalne ze Starożytnego Kraju Opinia recenzenta

maszynopis 19705B/76: P. B. Shelley

Maszynopis nadesłany:  
*Ozymandias*<sup>(1)</sup>

autor: P. B. Shelley<sup>(2)</sup>

Podróżnik<sup>(2)</sup>, wracający z starożytnej ziemi<sup>(3)</sup>  
Rzekł do mnie: — Nóg<sup>(4)</sup> olbrzymich<sup>(5)</sup> z głazu<sup>(6)</sup> dwoje<sup>(7)</sup> sterczy  
Wśród pustki<sup>(8)</sup> bez tułowia. W pobliżu<sup>(9)</sup> za nimi  
Tonie w piasku<sup>(10)</sup> strzaskana twarz. Jej wzrok szyderyczy,  
Zacięte usta, wyraz zimnego rozkazu  
Świadczą, iż rzeźbiarz dobrze na tej bryle głazu  
Odtworzył skryte żądze, co, choć w poniewierce,  
Przetwały rękę mistrza i mocarza serce.<sup>(11)</sup>

A na podstawie napis dochował się cało:  
„Ja jestem Ozymandias, król królów. Mocarze!  
Patrzcie na moje dzieła i przed moją chwałą  
Gińcie z rozpacz!”<sup>(12)</sup> Więcej nic już nie zostało...<sup>(13)</sup>  
Gdzie stąpić<sup>(14)</sup>, gruz bezkształtny oczom się ukaże  
I piaski<sup>(15)</sup>, bielejące w pustyni obszarze.

#### Uwagi recenzenta

(1) Ten tytuł jest całkiem nieodpowiedni. Nie zawiera słów kluczowych.

(2) Ponieważ praca ta jest oparta na obserwacjach polowych innego geologa, sugerujemy wspólne autorstwo jako bardziej właściwe.

(3) Proszę sprecyzować.

(4) Czy rozpatrzono alternatywne hipotezy? Filary ziemne? Kolumny bazaltowe? Kopce termitów?

(5) Nie dość wyraźne określenie. Autor powinien podać rozmiary w jednostkach SI (chyba, że „olbrzymi” jest klasą w pewnej skali, w tym przypadku powinien być podany odsyłacz do odpowiedniej literatury).

(6) Niewątpliwie należy podać tu identyfikację typu skały z odpowiednią analizą.

(7) To jest jedyne stwierdzenie ilościowe!

(8) Podać współrzędne.

(9) Określić odległość. Fotografia (ze skałą) pomogłaby w tym.

(10) Podać analizę granulometryczną i w miarę możliwości kilka fotografii z mikroskopu elektronowego ukazujących tekstury ziarnistej powierzchni. Wprawdzie niczego one nie dowodzą, ale są dekoracyjne i dostarczają zatrudnienia personelowi pomocniczemu.

(11) Ten paragraf, pełen spekulacji i domysłów, mógłby z powodzeniem być pominięty.

(12) Warto być może odnotować zszpecenie interesującej odkrywkę, lecz nie jest konieczne cytowanie słów. (Ponieważ napisano je po polsku, nie mają oczywiście wartości archeologicznej. Przypuszczalnie była to farba nałożona sprayem przez turystę).

(13) Stwierdzenie raczej dogmatyczne. Lepiej: „Żadnych innych odsłonięć skał nie zaobserwowano”.

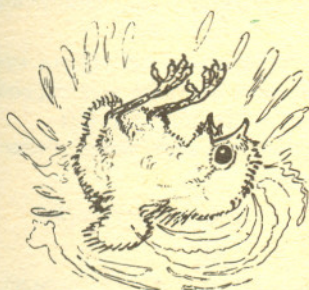
(14) Nieodpowiednia hiperbola. Przybliżone rozmiary pustyni powinny być podane, jeśli mają znaczenie dla treści.

(15) Jeśli nie jest to pustynia bezwietrzna, to jako piaszczysta powinna ukazywać formacje wydymowe. Jeśli jest płaska, to być może jest to w rzeczywistości pustynia kamienista?

#### Uwagi ogólne

Mimo, że zanotowano kilka ciekawych spostrzeżeń, nie możemy zalecić publikacji w obecnej formie. Po pierwsze praca jest o wiele za krótka. Po drugie, autorzy z nieznanego powodu nie umieścili żadnej wzmianki o tektonice płytowej!

(wg N. S. Haile, *Nature* 268, 100 (1977), przekład wiersza — Adam Asnyk).





Mam wrażenie, że większość zadań matematycznych, jakie publikuje się w „Delcie”, jest wymyślana przez profesjonalistów tej nauki i przez to obraca się w sferze abstrakcji. Chciałbym dziś przedstawić zadanie, które stworzyło tzw. samo życie.

Zamieszkałem niedawno w warszawskim osiedlu Ursynów — w budynku wyposażonym w dwie zblokowane windy, które obsługują 7 kondygnacji (wraz z parterem). Ku mojemu zaskoczeniu, system sterowania windami nie opiera się na najprostszej, „odkrytej” zresztą bodajże pół wieku temu zasadzie wzywania windy najbliższej, lecz na zupełnie innych regułach.

Cywilizacja ludzka stworzyła rozwiązania, których idei nie da się ulepszyć. Rozwiązaniem takim jest np. widelec — można zmieniać w nim liczbę zębów, kształt i zdobienie trzonka etc., jednakże idea widelca („trzonek zakończony przynajmniej dwoma zębami ukierunkowanymi mniej więcej równolegle do trzonka”) pozostaje ta sama. Innym rozwiązaniem nie dającym się ulepszyć są np. spodnie: można zmieniać kształt nogawek, dodawać lub usuwać kieszenie itp., ale idea spodni („dwie nogawki zakończone wspólną obejmą biodrową”) nie ulega zmianie.

Widelec z jednym zębem lub zębami zagiętymi pod kątem większym niż ok. 1 radian (przypr. Red.: widać, że Autor przestrzega zaleceń co do używania układu SI) w stosunku do trzonka przestaje być widelcem, tak samo jak nie są spodniami np. „spodnie jednonogawkowe”. Innymi słowy, idea szeregu stworzonych przez cywilizację przedmiotów osiągnęła taki stopień doskonałości, że każda „poprawka” jest owej doskonałości pogorszeniem. Jak nauczał Ben Akiba — „ze szczytu góry można tylko zejść...”.

Czynię tę dygresję po to, by podkreślić analogię do problemu wind: wedle kryteriów energetycznych nie da się ulepszyć idei sterowania zblokowanymi windami, idei polegającej na tym, że na wezwanie przyjeżdża winda najbliższa. Formalnie łatwo zresztą rzecz dowieść. Osobiście podejrzewam, że rozwiązanie to (nazwijmy je „systemem I”), jest optymalne również wedle kryteriów wygody pasażerów, a więc średniego czasu oczekiwania na windę na dowolnym piętrze.

Tymczasem „moje” dwie windy kursują według następujących reguł („system II”):

1° Na wezwanie z dowolnej kondygnacji przyjeżdża prawie zawsze winda lewa (WL), gdyż:

2° Winda prawa (WP) rusza na wezwanie tylko wtedy, gdy aktualnie zajęta jest przez pasażerów lub realizuje ich wezwanie WL.

3° WL po dojechaniu z pasażerem na miejsce docelowe pozostaje na nim (jeśli, rzecz jasna, aparatura sterująca nie zanotowała kolejnego wezwania).

4° WP po dojechaniu z pasażerem na miejsce zjeżdża sama na parter, chyba że na parterze stoi akurat wolna WL; jednak:

5° Pozostawiona na dowolnym piętrze WP rusza samoczynnie i zjeżdża pusta na parter również w przypadku, gdy z parteru rusza z pasażerem lub na wezwanie (patrz pkt. 1°) WL.

Zgodnie z powyższym algorytmem, nader często mam możliwość obserwować następującą sytuację. Z VI piętra przez „okienko” widzę, jak piętro niżej stoi WP. Naciskam guzik i... WP poczyną zjeżdżać na parter natomiast z parteru rusza i wyjeżdża na VI piętro WL...

Nagabywani w tej sprawie fachowcy-windziarze oświadczyli, iż rozwiązanie to stanowi „najnowsze osiągnięcie szwedzkiej (!) myśli technicznej” i „ma na celu wygodę pasażerów”.

Pozwalam sobie w słuszność tych stwierdzeń wątpić.

Moje zadanie brzmi więc następująco:

- A) Obliczyć o ile więcej procent energii zużywa II system sterowania w stosunku do systemu I,
- B) Porównać średni czas oczekiwania na windę w systemie I i systemie II.

Zadanie nietrudno sformalizować po przyjęciu niezłe odpowiadającego rzeczywistości założenia, że zużyta energia i czas przejazdu między kondygnacją  $k$ -tą a  $k+1$ -szą są dwa razy mniejsze niż między kondygnacją  $k$ -tą a  $k+2$ -gą.

Cały problem ma ponadto jeszcze dwa niebagatelne aspekty. Po pierwsze — nie najlepiej wygląda nauczanie matematyki na politechnikach, jeśli późniejsi inżynierowie beztrząsco wdrażają podobne „innowacje”. Po drugie — jeśli takich zblokowanych wind jest na Ursynowie już teraz kilkadziesiąt, to powrót do normalnego systemu sterowania mógłby oznaczać wcale pokaźne oszczędności energii, o co wciąż apeluje Państwowa Dyspozycja Mocy.

Stanisław REMUSZKO

Od Redakcji. Nie próbowaliśmy wprowadzić dotrzeć do źródła (czyli szwedzkiego windziarzy), podejrzewamy jednak, że nie jest tak źle, jak pisze autor powyższego listu i że powyższy system II ma rzeczywiście na celu wygodę pasażerów. Sądzymy, że przyjęto tu (życiowe) założenie, że pasażer oczekujący na windę na dole jest „ważniejszy” od pasażera na piętrze (taki może zejść po schodach). Ewentualnie, że tylko część mieszkańców używa windy w dół, a wszyscy do góry. Przypuśćmy na chwilę, że „na dół” wszyscy wolą schody — wtedy system II jest oczywiście lepszy (patrz 4°). Gdy wszyscy jeżdżą windą w górę i w dół — lepszy jest system I. Gdzieś między tymi skrajnościami leży punkt równowagi (oba systemy jednakowo dobre). Uprośćmy znacznie sytuację i załóżmy, że w dwupiętrowym domu  $A$  na każdym z pięter 1 i 2 mieszkają po 2 osoby



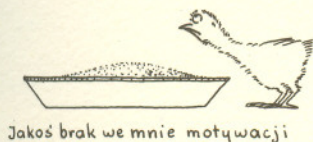
(parterowcy w naszych rozważaniach nie liczą się). W domu jest tylko jedna winda, pozostająca po jeździe na piętrze, do którego dojechała. Wszyscy (obaj) mieszkańcy II piętra używają windy w górę i w dół, jedna z osób z pierwszego piętra zawsze schodzi po schodach, choć wjeżdża windą. Winda jeździ z prędkością 1 piętro na jednostkę czasu (przeliczenie na układ SI pozostawiamy Czytelnikowi) a mieszkańcy domu wychodzą i przychodzą tak samo często i pojedynczo oraz nie jeżdżą z I piętra na II, ani z II na I. Nazywają się zaś  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $A_2$ ,  $B_2$  (liczba wskazuje piętro). Niech „zdarzeniem elementarnym” będzie „przywołanie windy przez daną osobę na danym piętrze”. Zdarzeń elementarnych jest więc 7 :  $A_1$  na 1 piętrze,  $A_1$  na parterze,  $B_1$  na parterze,  $A_2$  na 2 piętrze...

Prawdopodobieństwo, że winda po jeździe zostanie na parterze wynosi  $\frac{3}{7}$ , że na I piętrze —  $\frac{2}{7}$ , że na II —  $\frac{2}{7}$ . Możemy teraz obliczyć średni łączny czas oczekiwania pasażerów na windę.

Wynosi on  $2$  (pasażerów z II piętra)  $\times \frac{2}{7}$  (prawdopodobieństwo, że winda na I piętrze)  $\times 1$  (piętro do przejechania)  $+ 2 \times \frac{3}{7} \times 2 + 1$  (pasażer z I piętra)  $\times \frac{2}{7}$  (winda na II piętrze)  $\times 1$  (piętro)  $+ 1 \times \frac{3}{7} \times 1 + 4$  (pasażerów czekających na parterze)  $\times \frac{2}{7} \times 2 + 4 \times \frac{2}{7} \times 1 = \frac{45}{7}$  (jednostek czasu).

W domu  $B$  wszystko jest tak samo, tylko winda po opuszczeniu jej przez pasażera zjeżdża sama na parter. Wtedy na parterze nie czeka się na windę wcale, dwie osoby na II piętrze czekają łącznie  $2 \times 2 = 4$  jednostki czasu, a jedna na I piętrze 1 jednostkę. Widzimy, że łączny czas oczekiwania (5 jednostek) jest krótszy. Nasz „model matematyczny” jest ubożuchny i pełno w nim wygodnych założeń. Pokazuje jednak, że system II ma wbrew pozorom, ręce i nogi. Natomiast został z pewnością wymyślony przed Kryzysem Energetycznym i w tym punkcie zgadzamy się z autorem listu.

(M. Sz.)



Jakos brak we mnie motywacji

Nie jest wykluczone że również w kwestiach pozycyjnych umiesliłemu się na psuśmiesznie abstrakcji niedostępny dla naszych przodków



Jestem dozwolście udręczony, ale mam tyle wątpliwości...



IMPONDERABILIA, IMPONDERABILIA - w końcu liczy się przyrost wagi...

Zadajmy sobie najprostsze pytanie: Czy przeciętny brojler to zrozumie?



A w ogóle to trzeba będzie kiedyś zajrzeć do redakcyjnej kuchni!



Szanowny Panie Redaktorze

Sądźmy, że czas już poprawić dwa niecisłe pojęcia używane na co dzień w matematyce. Mamy na myśli pojęcia **liniowość** i **nieliniowość** oraz pochodne od nich przymiotniki, przysłówki i wyrażenia.

W czym rzecz? Otóż należałoby użyć słów: **prostoliniowość** i **nieprostoliniowość** (lub **krzywoliniowość**).

Skąd wzięły się w języku polskim owe poprzednio wymienione, powszechnie stosowane lecz nieprecyzyjne pojęcia? Odpowiedź jest prosta: z obcych języków. Np. w języku angielskim istnieją pojęcia: **line** czyli linia prosta lub używając rzeczownika odprzymiotnikowego — **prosta** oraz **curve** tj. linia krzywa lub po prostu **krzywa**.

W języku angielskim nie można powiedzieć linia krzywa. Byłoby to zestawienie dwóch pojęć sprzecznych takich jak prosta krzywa. Inaczej rzecz się ma w polszczyźnie, gdzie **linia** może być prosta lub nie.

Wobec tego nie wystarczy powiedzieć np. **funkcja liniowa** (odpowiednik angielski: **linear function**), bo na dobrą sprawę może być funkcja, którą graficznie reprezentuje krzywa, lecz **funkcja prostoliniowa**. Podobnie też należałoby używać pojęcia **nieprostoliniowy** (odpowiednik angielski: **non-linear**) a nie **nieliniowy**.

Łączmy pozdrowienia

Andrzej i Janusz KAMIENSCY, Warszawa

Od Redakcji: Racja.

