

Centrum Astronomiczne im. M. Kopernika, Obserwatorium Astronomiczne U.W. i Polskie Towarzystwo Miłośników Astronomii zapraszają na cykl wykładów popularnonaukowych:

18.II — Zliczanie kwazarów, *dr A. Soltan*
 21.II — Antymateria, *dr M. Kubiak*
 25.II — Największa zagadka roku 1979 — ss433, *prof. B. Paczyński*
 28.II — Inteligencje pozaziemske — mity a nauka, *doc. K. Stępień*
 3.III — Reakcje jądrowe w gwiazdach, *mgr M. Czerny*
 6.III — Supernowe a ewolucja galaktyk, *dr M. Kozłowski*
 10.III — O powstawaniu linii emisyjnych, *mgr B. Rudak*
 13.III — Magnetosfery planet, *prof. S. Grzędziński*
 17.III — Obserwacje gwiazd podwójnych, *mgr M. Staniucha*
 20.III — Pulsary, *doc. M. Demiańska*
 27.III — Zanim powstały galaktyki, *mgr B. Muchotrzeb*

Wykłady odbywają się o godz. 17 ; poniedziałkowe w Centrum Astronomicznym, ul. Bartycka 18, czwartkowe w Obserwatorium Astronomicznym, Al. Ujazdowskie 4. Wstęp wolny.

SPIS TREŚCI

NUMERU 2(74)

Gwiazdy kuliste, gwiazdy płaskie, gwiazdy z dziurą <i>Prof. dr Bohdan Paczyński</i>	str. 1
Patrz w niebo	str. 5
Każde doświadczenie ... <i>M-me Pipsztycka</i>	str. 6
Kto lepszy <i>Dr Jan Królikowski</i>	str. 8
Wyniki konkursu „Budujemy kopułę”	str. 11
Mała Delta	str. 12
Zadania	str. 13
Zasada lokalno-globalna <i>Doc. dr Kazimierz Szymiczek</i>	str. 14
Konkurs Matur	str. 17

Rysunki techniczne:

Bogusław Kretkiewicz

W następnym numerze:
Powolne neutrony

„Delta”
 matematyczno-fizyczno-astronomiczny
 miesięcznik popularny
 Polskiego Towarzystwa
 Matematycznego, Polskiego
 Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
 Towarzystwa Astronomicznego
 wydawany przy poparciu
 Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny:

doc. dr Jerzy Bartke
 doc. dr Andrzej Bączyński
 doc. dr Bolesław Gleichgewicht
 prof. dr Kazimierz Goebel
 doc. dr Bolesław Grabowski
 dr Jan Hanasz
 doc. dr Bolesław Iwaszkiewicz
 doc. dr Tadeusz Iwiński
 doc. dr Andrzej Januszajtis
 doc. dr Tadeusz Jarzembowski
 prof. dr Leon Jeśmanowicz
 dr Henryk Kaczorek
 prof. dr Marek Kuczma
 mgr Andrzej Mąkowski
 prof. dr Bohdan Paczyński
 prof. dr Zdzisław Pawlak
 prof. dr Arkadiusz Piekara
 doc. dr Sławomir Ruciński
 prof. dr Konrad Rudnicki
 prof. dr Zbigniew Semadeni
 doc. dr Grzegorz Sitarski

prof. dr Józef Smak
 prof. dr Jan Stankowski
 doc. dr Kazimierz Stępień
 prof. dr Mieczysław Subotowicz
 doc. dr Stefan Turnau
 prof. dr Jerzy Wdowczyk
 doc. dr Andrzej Woszczyk
 prof. dr Janusz Zakrzewski —
 wiceprzewodniczący
 prof. dr Wojciech Żakowski —
 przewodniczący

Redaguje Kolegium w składzie:
 Bożena Jaworska-Kordos — ilustracje
 dr Marek Kordos — red. nac.
 dr Andrzej Krasiński
 dr Michał Szurek
 dr Krzysztof Prażmowski — red. techn. graf.
 mgr Krystyna Szypcio — sekr. red.
 doc. dr Michał Świącki — z-ca red. nac.

Adres Redakcji
 ul. Hoża 69 pok. 151,
 00-681 Warszawa

Zakład Narodowy im.
 Ossolińskich — Wydawnictwo
 Wrocław, Oddział w Warszawie
 Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.
 wyd.; 2,50 ark. druk.;
 papier offsetowy III kl. 80 g. 61×86
 Wydrukowano w Drukarni im.
 Rewolucji Październikowej
 Warszawa, ul. Mińska 65.
 Nr zam. 1379/80 O-132

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60, — cena prenumeraty półrocznej zł 30, —

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach:
 — do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i cały rok następny
 — do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego.
 Jednostki gospodarki uspołecznionej instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienia w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”.
 Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW, oraz prenumeratorzy indywidualni zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.
 Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej

Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.
 Sprzedż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.

Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Konto PKO I OM W-wa 1531-912

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście

00-068 Warszawa, Poland or with

— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68,

Bundesrepublik Deutschland.

— Earls Court Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain,

— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia

Cena 1 egzemplarza zł 5,— nr indeksu 35723/35550

Gwiazdy kuliste, gwiazdy płaskie, gwiazdy z dziurą



Prof. dr Bohdan PACZYŃSKI, członek-korespondent PAN

Słońce, najlepiej znana nam gwiazda, przypomina swym wyglądem ogromną kulę. Podobnie większość gwiazd i planet jest kulista. Niektóre z nich są jednak bardziej kuliste od innych. Spójrzmy na przykład na największe planety Układu Słonecznego, na Jowisza i Saturna. Planety te są wyraźnie spłaszczone: ich promienie biegunowe są o blisko dziesięć procent mniejsze od promieni równikowych. Dlaczego? Po prostu planety te szybko wirują. Wyrowadzimy prosty wzór na zależność pomiędzy prędkością wirowania i spłaszczeniem.

Dla uproszczenia przyjmijmy, że masa planety czy gwiazdy jest silnie skupiona ku centrum. Jest to bardzo dobre przybliżenie dla obiektów gazowych. Przyspieszenie grawitacyjne jest określone wzorem

$$g_R = \frac{GM}{R^2},$$

gdzie R jest odległością od środka obiektu, M jego masą, zaś G jest stałą grawitacji, wynoszącą 6.67×10^{-8} w jednostkach CGS. Przyspieszenie grawitacyjne skierowane jest ku środkowi, a więc w kierunku $-R$.

Przyjmijmy teraz, że nasz obiekt wiruje wokół osi „z” ze stałą prędkością kątową Ω . Mówimy, że rotacja jest w takim wypadku sztywna. Prędkość rotacji określona będzie wzorem $v = \Omega r$, gdzie r jest odległością od osi rotacji. Czas potrzebny dla wykonania pełnego obrotu jest taki sam dla wszystkich punktów obiektu i wynosi

$$P_{rotacji} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\Omega}.$$

Przyspieszenie odśrodkowe wynikające z wirowania skierowane jest w kierunku $+r$ i wynosi

$$g_r = \frac{v^2}{r} = \Omega^2 r.$$

Natomiast całkowite przyspieszenie, g , jest sumą wektorową przyspieszenia grawitacyjnego i odśrodkowego, czyli $g = g_R + g_r$.

Jeżeli gwiazda lub planeta znajduje się w równowadze hydrostatycznej, to jej powierzchnia musi być prostopadła do wektora całkowitego przyspieszenia. Można udowodnić, że będzie to powierzchnia ekwipotencjalna, to znaczy taka, na której wartość potencjału określonego wzorem

$$V = \frac{GM}{R} + \frac{1}{2} \Omega^2 r^2,$$

jest stała. Przykład takiej powierzchni przedstawiony jest na rysunku 1.

Oznaczmy promień równikowy gwiazdy lub planety przez R_r , zaś promień biegunowy przez R_b .

Na równiku mamy

$$R = R_r, \quad r = R_r, \quad z = 0,$$

na biegunie zaś spełnione są równości: $R = R_b, \quad r = 0, \quad z = R_b$.

Ponieważ wartość potencjału na równiku i na biegunie musi być taka sama, przeto mamy związek

$$\frac{GM}{R_r} + \frac{1}{2} \Omega^2 R_r^2 = \frac{GM}{R_b}.$$

Wzór ten możemy przekształcić do postaci, z której łatwo obliczymy spłaszczenie:

$$(1) \quad \frac{R_r - R_b}{R_b} = \frac{\Omega^2 R_r^3}{2GM} = \frac{1}{2} \left| \frac{g_r}{g_R} \right| \quad \text{na równiku.}$$

Jak widać, im szybsze wirowanie, czyli im większa prędkość kątowa, tym silniejsze spłaszczenie. Jak silnie można spłaszczyć sztywno wirujący obiekt? Oczywiście zakładamy, że obiekt znajduje się w równowadze hydrostatycznej. W szczególności dotyczy to równika, na którym przyspieszenie odśrodkowe nie może być większe od przyspieszenia grawitacyjnego. A zatem musi być spełniona na równiku nierówność $|g_r| \leq |g_R|$,

czyli
$$\Omega^2 R_r \leq \frac{GM}{R_r^2}.$$

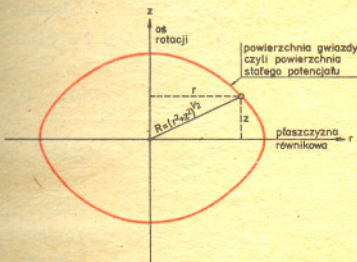
Tak więc spłaszczenie musi się zawierać w granicach

$$0 \leq \frac{R_r - R_b}{R_b} \leq \frac{1}{2}.$$

Innymi słowy stosunek promienia biegunowego do równikowego musi być zawarty w granicach

$$\frac{2}{3} \leq \frac{R_b}{R_r} \leq 1.$$

Sprawdźmy teraz wzór (1) wykorzystując go dla teoretycznej oceny spłaszczenia wirujących planet. Saturn jest na pewno planetą zbudowaną z gazu, gdyż jego średnia gęstość jest blisko dziesięciokrotnie mniejsza niż gęstość Ziemi. Tak więc jego masa jest zapewne silnie skoncentrowana wokół środka i wzór (1) powinien dać dobry wynik. Masa Saturna wynosi



Rys. 1 Przekrój przez wirującą gwiazdę

$5,69 \times 10^{29}$ g, promień równikowy $6,04 \times 10^6$ cm, zaś okres obrotu wokół osi 10 godzin i 14 minut, czyli około $3,68 \times 10^4$ s. Okresowi temu odpowiada prędkość kątowna $1,706 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$. Podstawiając wszystkie wielkości do wzoru (1) otrzymujemy przewidywane spłaszczenie Saturna

$$\frac{R_r - R_b}{R_b} = 0,084,$$

tymczasem obserwowane spłaszczenie wynosi 0.098, a więc jest tylko nieco większe. Sprawdźmy teraz wzór (1) w przypadku Ziemi. Masa jej wynosi $5,98 \times 10^{27}$ g, promień równikowy $6,38 \times 10^8$ cm, zaś okres obrotu wokół osi (liczony względem gwiazd a nie względem Słońca) 23 h i 56', czyli około $8,62 \times 10^4$ s. Odpowiada temu prędkość kątowna $7,29 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$. Ze wzoru (1) wynika spłaszczenie równe 0,0017, tymczasem obserwowane wynosi 0,0034, jest więc dwukrotnie większe. Rozbieżność wywołana jest bardzo równomiernym rozkładem masy w całej objętości Ziemi. Ruch wirowy deformując Ziemię równocześnie zmienia jej potencjał grawitacyjny. Tymczasem zmiany te zostały zaniedbane przy wyprowadzeniu wzoru (1). Tak więc wzór (1) ma zastosowanie jedynie do planet i gwiazd gazowych.

Co by się stało, gdybyśmy spróbowali rozkręcić gwiazdę tak szybko, aby przyspieszenie odśrodkowe na równiku było większe od przyspieszenia grawitacyjnego? Oczywiście materia zaczęłaby wypływać z gwiazdy i mogłaby utworzyć wirujący pierścień lub dysk. W ogólności struktura takiego obiektu może być bardzo skomplikowana, więc ograniczymy się do najprostszej sytuacji. Przyjmijmy, że gwiazda wiruje sztywno z taką prędkością, że na równiku przyspieszenie odśrodkowe jest dokładnie równe grawitacyjnemu. Natomiast wokół gwiazdy, w płaszczyźnie równikowej wiruje cienki gazowy dysk. Aby dysk mógł pozostawać w równowadze hydrostatycznej musi on wirować z tak zwaną prędkością keplerowską. Jest to prędkość, przy której przyspieszenie odśrodkowe i grawitacyjne są równe. Zatem w każdym punkcie dysku

$$\text{spełniona jest równość} \quad \frac{GM}{r^2} = \Omega_k^2 r,$$

w którym Ω_k oznacza keplerowską prędkość kątowną. Po lewej stronie równania użyliśmy małej litery r w mianowniku, ponieważ rozpatrujemy dysk wirujący w płaszczyźnie równikowej, w której zachodzi $r = R$. Tak więc keplerowska prędkość kątowna dana jest wzorem

$$\Omega_k = \sqrt{\frac{GM}{r^3}},$$

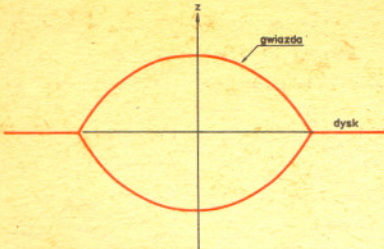
zaś keplerowską prędkość rotacji obliczymy jako

$$(2) \quad v_k = \Omega_k r = \sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

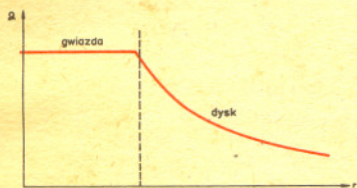
Przekrój poprzeczny sztywno wirującej gwiazdy i cienkiego keplerowskiego dysku przedstawiony jest na rysunku 2. Na rysunku 3 przedstawiona jest prędkość kątowna, zaś na rysunku 4 prędkość rotacji jako funkcja odległości od osi obrotu dla obiektu przedstawionego na rysunku 2. Jeżeli za spłaszczenie gwiazdy z dyskiem uważać stosunek promienia biegunowego gwiazdy do zewnętrznego promienia dysku, to oczywiście spłaszczenie to może być dowolnie silne. Powinniśmy tylko pamiętać, że masa dysku musi być zaniedbywalnie mała, tak aby potencjał grawitacyjny wyrażał się prostym wzorem: GM/R .

W ogólności mogą istnieć obiekty znacznie bardziej skomplikowane. Na przykład gwiazda (lub planeta) może wirować niezbyt szybko, zaś dysk nie musi swym brzegiem wewnętrznym sięgać aż do równika gwiazdy (lub planety). Najlepiej znanym obiektem tego typu jest Saturn wraz ze swymi pierścieniami widocznymi nawet przez niewielki amatorski teleskop. Tak zwane pierścienie są właściwie bardzo cienkim dyskiem złożonym z drobnych kamieni lub bryłek lodu. Średnica dysku wynosi ponad ćwierć miliona kilometrów, zaś grubość zapewne nie przekracza kilkudziesięciu metrów. Dysk składa się z kilku części przedzielonych niewielkimi przerwami. Najbardziej znana z nich to przerwa Cassiniego. Cały obiekt w przekroju przedstawiony jest na rysunku 5. Rysunek 6 przedstawia zależność prędkości kątownej i prędkości rotacji od odległości od osi obrotu dla Saturna i jego pierścieni.

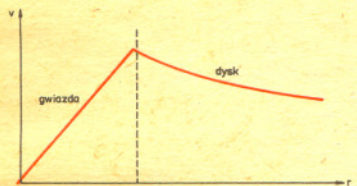
Wiele gwiazd jest także otoczonych dyskami. Dotyczy to zwłaszcza gwiazd podwójnych, w których jeden składnik ma bardzo małe rozmiary, drugi jest bardzo duży, zaś masy obu składników są mniej więcej takie same. Materia jest wyrwana z gwiazdy olbrzyma przez siły przyływowe wywołane przez gwiazdę-kałła. Materia ta nie może spaść wprost na kałła, gdyż ma zbyt duży moment pędu. W rezultacie gaz wyrwany z olbrzyma tworzy dysk wirujący wokół kałła. Cały obiekt przedstawiony jest w przekroju na rysunku 7. W wielu gwiazdach podwójnych dysk świeci jaśniej niż obie gwiazdy. Tak więc sam dysk też przypomina gwiazdę, lecz w dobrym przybliżeniu jest ona płaska. Większość zwykłych, kulistych gwiazd świeci dzięki reakcjom termojądrowym zachodzącym w ich wnętrzu. Natomiast dysk gazowy świeci dzięki temu, że różne jego części wirują z różną prędkością i trą o siebie. Tarcie to prowadzi do wydzielania dużej ilości ciepła, które jest następnie wypromieniowane. Z drugiej strony tarcie prowadzi do transportu momentu pędu z wewnętrznych, szybciej wirujących części dysku, na zewnątrz. Dzięki temu materia stopniowo traci moment pędu i porusza się niezupełnie po orbicie kołowej, lecz raczej po bardzo



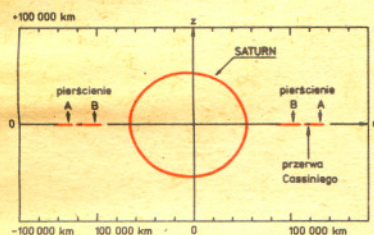
Rys. 2 Przekrój przez szybko wirującą gwiazdę z dyskiem



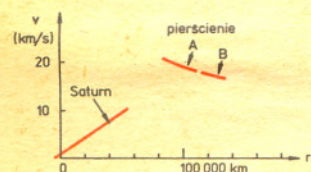
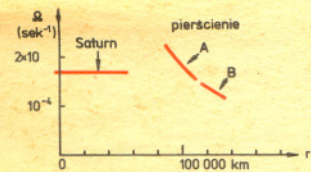
Rys. 3 Zależność prędkości kątownej od odległości od osi rotacji dla gwiazdy z dyskiem



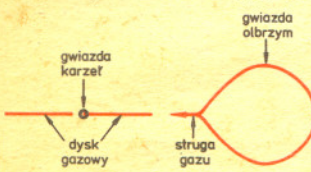
Rys. 4 Zależność prędkości rotacji od odległości od osi rotacji dla gwiazdy z dyskiem. Zachodzi równość $v = \Omega r$.



Rys. 5 Przekrój przez Saturna z pierścieniami.



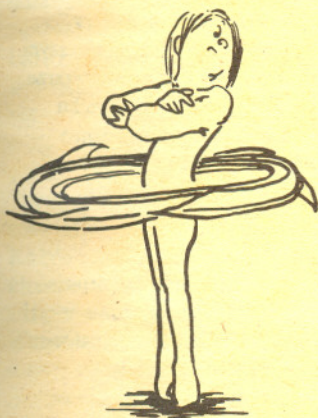
Rys. 6 Zależność prędkości kątownej i prędkości rotacji od odległości od osi rotacji dla Saturna i jego pierścieni.



Rys. 7 Przekrój przez ciasny układ podwójny złożony z gwiazdy karła i gwiazdy olbrzyma. Struga gazu wyrwana przez siły przyływowe płynie do dysku wirującego wokół karła.



Rozwiązanie zadania M 217. Przedstawmy każdą z 1001 liczb n_1, \dots, n_{1001} w postaci $2^{k_i} \cdot l_i$ gdzie l_i jest liczbą nieparzystą. Ponieważ liczb nieparzystych mniejszych od 2000 jest tylko tysiąc, więc dla pewnej pary n_i, n_j będzie $l_i = l_j$, skąd wynika, że większa z liczb n_i, n_j dzieli się przez mniejszą.



gęstej spirali, powoli zbliżając się do gwiazdy centralnej. Tymczasem moment pędu po przekazaniu do najbardziej zewnętrznych części dysku jest stamtąd odbierany przez siły przyływowe i przekazywany do ruchu orbitalnego dwu gwiazd. Tak więc przepływowi materii z gwiazdy olbrzyma do karła nie towarzyszy prawie żaden przekaz momentu pędu, natomiast w ostatecznym bilansie energetycznym dysk promieniuje dzięki wydzieleniu dużej ilości energii grawitacyjnej materii, która stopniowo osiada na gwiazdzie-karle. Oceńmy ilość energii, która wydzieli się w dysku. W tym celu obliczmy tak zwaną energię wiązania grawitacyjnego cząstki o masie m , krążącej po keplerowskiej orbicie kołowej wokół gwiazdy o masie M . Energia ta równa jest algebraicznej sumie grawitacyjnej energii potencjalnej i energii kinetycznej, a więc wyraża się wzorem

$$E_w = -\frac{GM}{r}m + \frac{1}{2}mv_k^2.$$

Jeżeli wykorzystamy wzór (2) wiążący prędkość keplerowską z promieniem orbity kołowej, to wzór na energię wiązania będziemy mogli zapisać w prostszej postaci:

$$E_w = -\frac{GM}{2r}m.$$

Oczywiście, interesują nas jedynie orbity leżące w płaszczyźnie równikowej, toteż mamy równość $r = R$. Cząstka, która stopniowo przepływa od zewnętrznego brzegu dysku o promieniu R_z do brzegu wewnętrznego o promieniu R_w może przekazać na rzecz promieniowania energię równą różnicy energii wiązania na dwu brzegach. Zazwyczaj mamy spełnioną silną nierówność $R_w \ll R_z$, zatem różnicę energii wiązania możemy obliczyć ze wzoru

$$\Delta E_w = \frac{GM}{2R_w}m - \frac{GM}{2R_z}m \approx \frac{GM}{2R_w}m.$$

Jasność dysku jest to ilość energii wypromieniowana w jednostce czasu Δt . Oznaczając jasność dysku przez L_d mamy zależność

$$(3) \quad L_d = \frac{\Delta E_w}{\Delta t} \approx \frac{GM}{2R_w} \frac{\Delta M}{\Delta t},$$

gdzie ΔM jest ilością masy przepływającej przez dysk i osiadającej na gwiazdzie w czasie Δt . Proces przepływu materii przez dysk nazywamy akrecją.

Ze wzoru (3) wynika, że jasność dysku jest wprost proporcjonalna do tempa akrecji, $\Delta M/\Delta t$, i do energii wiązania jednostki masy na wewnętrznym brzegu dysku. Im większa masa i im mniejszy promień gwiazdy centralnej, tym większa wydajność zamiany strumienia masy na strumień promieniowania.

Czy istnieje minimalny rozmiar ciała o zadanej masie M ? Ogólna teoria względności mówi, że tak. Jest to tak zwany promień grawitacyjny ciała dany wzorem

$$R_g = \frac{2GM}{c^2},$$

gdzie $c = 3 \times 10^{10} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ jest prędkością światła. Dla Słońca, którego masa jest równa $1,989 \times 10^{33} \text{ g}$, promień grawitacyjny wynosi niespełna trzy kilometry, dokładniej $2,95 \times 10^5 \text{ cm}$. Obiekt o promieniu równym swemu promieniowi grawitacyjnemu nazywamy czarną dziurą. Dowolne cząstki lub promieniowanie mogą tylko wpadać do czarnej dziury lecz nie mogą wydostać się z niej na zewnątrz. Tak więc masa czarnej dziury może rosnąć w wyniku akrecji, lecz nie może maleć. W pobliżu czarnej dziury natężenie pola grawitacyjnego rośnie bardzo szybko. Przestrzeń ulega silnemu zakrzywieniu. Tory cząstek można badać przy pomocy dość skomplikowanego aparatu matematycznego ogólnej teorii względności, lecz analiza ta nie nadaje się raczej do przedstawienia na łamach Deltę. Na szczęście okazuje się, że całkiem niezłe przybliżenie daje bardzo uproszczony model pola grawitacyjnego czarnej dziury, polegający na tym, że zapiszemy potencjał grawitacyjny w postaci

$$V = \frac{GM}{R - R_g}.$$

a przyspieszenie grawitacyjne będzie dane przez gradient potencjału, a więc w postaci

$$g_R = \frac{dV}{dR} = -\frac{GM}{(R - R_g)^2}.$$

W ramach tego przybliżenia będziemy analizować ruch cząstki po orbicie kołowej, zupełnie ignorując efekty zarówno szczególnej jak i ogólnej teorii względności. Mimo to tak przybliżony opis jest zaskakująco dobry nie tylko jakościowo, lecz nawet ilościowo. Po prostu w pobliżu tak zwanej czarnej dziury Schwarzschilda dominujący wpływ na ruch cząstek ma silnie rosnący potencjał grawitacyjny, zaś inne efekty są mniej ważne, przynajmniej ilościowo.



Rozwiązanie zadania M 218. Wiemy (algorytm Euklidesa), że $\text{NWD}(a, b) = \text{NWD}(b, r)$, gdy $a = bc + r$. Wobec tego $\text{NWD}(a_{n+1}, a_n) = \text{NWD}(1980a_n + a_{n-1}, a_n) = \text{NWD}(a_n, a_{n-1})$ i dalej, indukcyjnie $\text{NWD}(a_{n+1}, a_n) = \text{NWD}(a_2, a_1) = 1$, co było do okazania.

Prędkość kątową cząstki poruszającej się po kole w płaszczyźnie równikowej obliczymy przyrównując przyspieszenie odśrodkowe i przyspieszenie grawitacyjne:

$$\Omega_k^2 r = \frac{GM}{(r-R_g)^2}, \text{ otrzymamy więc } \Omega_k = \sqrt{\frac{GM}{r(r-R_g)^2}} = \sqrt{\frac{GM}{r^3}} \left(\frac{r}{r-R_g} \right).$$

Prędkość rotacji otrzymamy natychmiast jako

$$(4) \quad v_k = \Omega_k r = \sqrt{\frac{GM}{r}} \left(\frac{r}{r-R_g} \right).$$

Oczywiście powinniśmy pamiętać, że dla orbit w płaszczyźnie równikowej zachodzi równość $r = R$.

Obliczymy teraz energię wiązania cząstki o masie m poruszającej się po keplerowskiej orbicie kołowej wokół czarnej dziury. Podobnie jak w poprzednim przypadku energia wiązania będzie sumą energii potencjalnej i kinetycznej,

$$E_w = -\frac{GM}{r-R_g} m + \frac{1}{2} m v_k^2.$$

Wykorzystując wzór (4) możemy zapisać energię wiązania w postaci

$$(5) \quad E_w = -\frac{GM}{2(r-R_g)} m \left(\frac{r-2R_g}{r-R_g} \right).$$

Dla bardzo dużych wartości promienia r wzór na energię wiązania jest w przybliżeniu taki jak poprzednio, to znaczy $E_w = -0,5 GMm/r$. Natomiast dla niedużych wartości r energia wiązania może nawet stać się dodatnia! Widać to dobrze na wykresie przedstawionym na rysunku 8. Jak widać najmniejsza wartość energii wiązania osiągnięta jest dla $r = 3R_g$, i wynosi ona $-mc^2/16$. Można wykazać, że orbity cząstek o promieniu mniejszym od $3R_g$ są niestabilne, to znaczy cząstki takie bardzo szybko wpadają do czarnej dziury. Natomiast orbity o promieniu większym od $3R_g$ są stabilne. Oznacza to, że dysk gazowy może wirować wokół czarnej dziury w obszarze stabilnych orbit, zaś jego brzeg wewnętrzny jest kołem o promieniu równym $3R_g$. W wyniku tarcia w dysku następować będzie akrecja materii. Gaz będzie wirować wokół czarnej dziury i powoli zbliżać się do wewnętrzznego brzegu dysku. Następnie będzie swobodnie „wlewać się” do czarnej dziury. Dysk taki może świecić niezwykle jasno. Ze wzorów (3) i (5) wynika, że

$$L_d = \frac{c^2}{16} \frac{\Delta M}{\Delta t}.$$

Oznacza to, że podczas akrecji gaz wyświeci całą swą energię wiązania odpowiadającą orbicie o promieniu $3R_g$. W przeliczeniu na jednostkę masy gazu energii tej jest dziesięciokrotnie więcej niż mogłoby się wydzielić w najwydajniejszych reakcjach termojądrowych! Co więcej, „paliwem” może być zupełnie dowolny gaz. Aby zdać sobie sprawę z energetycznej wydajności dysku akrecyjnego wokół czarnej dziury dokonajmy prostego obliczenia. Aby dysk świecił tak jasno jak Słońce, to znaczy aby wypromieniowywał $4 \times 10^{33} \text{ erg} \cdot \text{s}^{-1}$, musi przez dysk przepływać strumień materii o masie

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} = L_{\text{Słońca}} \frac{16}{c^2} = \frac{4 \times 10^{33} \times 16}{9 \times 10^{20}} \approx 7 \times 10^{13} \text{ g} \cdot \text{s}^{-1}.$$

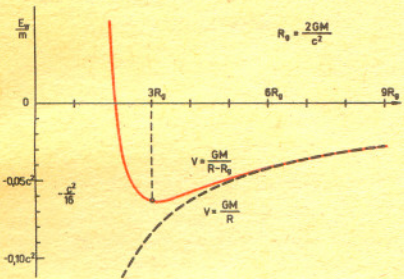
Masa Słońca wynosi około $2 \times 10^{33} \text{ g}$. Masy tej starczyłoby na zapewnienie słonecznej jasności dysku przez czas równy

$$\Delta t = M_{\text{Słońca}} \frac{\Delta M}{\Delta t} = \frac{2 \times 10^{33}}{7 \times 10^{13}} \text{ s} \approx 10^{12} \text{ lat}.$$

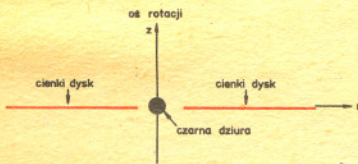
Jeżeli tempo akrecji masy, $\Delta M/\Delta t$, jest niezbyt duże, to dysk jest zupełnie cienki, jak to schematycznie ukazuje rysunek 9. Obiekt taki wygląda jak płaska gwiazda z dziurą w środku. Jeżeli jednak tempo akrecji jest bardzo duże, to dysk świeci tak jasno, że ciśnienie promieniowania wzdyma go. Dysk staje się gruby, nie jest już wcale płaski, lecz oczywiście ma w samym środku czarną dziurę, jak to widać na rysunku 10. Wzdłuż osi rotacji, po obu stronach dziury, tworzą się lejki przypominające wiry w wannie, w której szybko sływa woda. Przyczyna powstania wirów jest w obu wypadkach podobna; w obu wypadkach ciecz czy gaz wlewa się do dziury. Można wykazać, że z grubego dysku promieniowanie ucieka głównie przez powierzchnię obu lejków, które świecą jak dwa reflektory.

Skoro dyski akrecyjne wokół czarnych dziur mogą wykorzystywać dowolne gazowe „paliwo” z niezwykle dużą wydajnością, to nic dziwnego, że astronomowie podejrzewają istnienie tych egzotycznych obiektów wszędzie, gdzie coś świeci bardzo jasno.

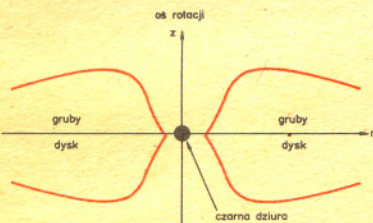
Najjaśniejszymi znanymi nam obiektami we Wszechświecie są kwazary, jądra dalekich galaktyk. Obserwacje mówią, że kwazary są stokrotnie jaśniejsze od najjaśniejszych galaktyk, 10^{13} razy jaśniejsze od Słońca. Tymczasem ich rozmiary są niewiele większe od naszego Układu Słonecznego, zaś masy są prawdopodobnie miliard razy większe od słonecznej. Oczywiście astronomowie przypuszczają, że kwazary są to jasne dyski wirujące wokół czarnych dziur o ogromnej masie. Jeżeli przypuszczenie to zostanie udowodnione, to kwazary będzie można nazywać gwiazdami z dziurą.



Rys. 8 Energia wiązania na jednostkę masy cząstki, E_w/m . Linia ciągła podaje energię wiązania dla cząstki krążącej po kole w potencjale $GM/(r-R_g)$. Linia przerywana odpowiada potencjałowi GM/r .



Rys. 9 Przekrój przez czarną dziurę z cienkim dyskiem. Wewnętrzny brzeg dysku ma promień trzykrotnie większy od promienia czarnej dziury, R_g .



Rys. 10 Przekrój przez czarną dziurę z grubym dyskiem. Dysk jest rozdęty przez ciśnienie promieniowania wynikające z dużego tempa akrecji. Promień wewnętrznego brzegu dysku zawarty jest pomiędzy $2R_g$ i $3R_g$.

Patrz w niebo

W lutym wieczorami górują mało zasobne w jasne gwiazdy konstelacje Raka (*Cancer*), Rysia (*Lynx*) i Węża Wodnego (*Hydra*). Jasne gwiazdy po godzinie 20 zaczynają chylić się ku zachodowi a blask pozostałych zaczyna przyćmiewać pod koniec lutego coraz większy Księżyc, który osiągnie pełnię 1 marca. Tego dnia będziemy świadkami zjawiska, które, mimo że nie tak częste, przechodzi niezauważone w prasie a i obserwatorom nieba umyka ze względu na nikły efekt. Jest to tzw. półcieniowe zaćmienie Księżyca.

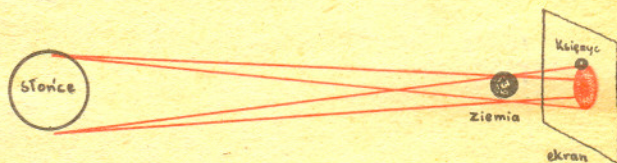
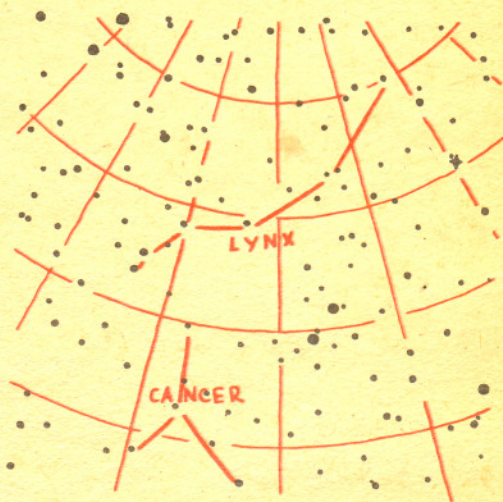
Co to jest półcień? Jest to miejsce, z którego nie widać całej powierzchni rozciągniętego źródła światła ze względu na częściowe jego zasłonięcie. Jeśli źródło światła jest kilka to półcieniem można nazwać takie obszary, z których widać nie wszystkie źródła ale widać choć jedno.

Zawodnik stojący na boisku oświetlonym przez 4 jupitery ma 4 swoje półcienie. Pełny cień panuje tylko pod jego stopami — jest on wspólną częścią wszystkich półcieni. Podobnie Ziemia obiegając Słońce rzuca w przestrzeń swój cień (niezbyt daleko — dlaczego?) i półcień. Kiedy Księżyc wejdzie całkowicie lub częściowo w cień Ziemi to obserwujemy piękne zjawisko zaćmienia Księżyca, jeśli jednak nasz satelita zawadzi tylko o półcień — tak jak to nastąpi właśnie 1 marca — to w wyniku można zaobserwować jedynie zmniejszenie jasności części (lub bardzo rzadko całej) tarczy Księżyca.

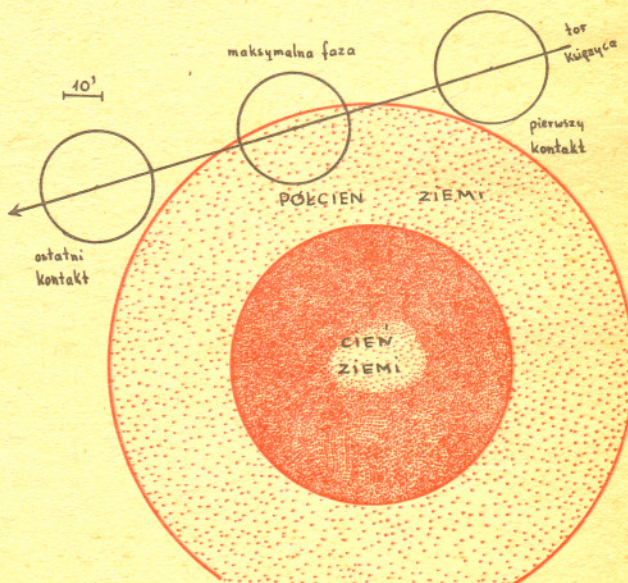
Zjawisko rozpocznie się o godz. 19⁴³ (pierwszy kontakt — patrz rys. 3), osiągnie kulminację o 21⁴⁵ i zakończy się o 23⁴⁷ (ostatni kontakt). W momencie największej fazy ponad 68% tarczy Księżyca pograży się w półcieniu Ziemi. Spróbujcie zaobserwować to „przyćmienie”. Podobne zjawiska nastąpią w tym roku 27 lipca i 26 sierpnia.

Każde z nich można łączyć w serie z pewnymi innymi charakteryzującymi się tym, że kolejne zaćmienia w serii osiągają coraz większą maksymalną fazę doprowadzając w końcu do zaćmienia przez „cień prawdziwy”. Nasze marcowe przyćmienie należy do serii, której ukoronowaniem będzie zaćmienie Księżyca 5 maja 2088 r.

mgr Tomasz CHLEBOWSKI



W momencie zaćmienia półcieniowego tuż za Księżycem ustawiamy wielki ekran (odległości nie zachowane).



Tor Księżyca względem cienia Ziemi



O doświadczeniu! ty jesteś pancernem
 Dla piersi, w której serce nie uderza;
 Jesteś latarnią nad morskim wybrzeżem,
 Do której człowiek w dzień pochmurny zmierza;
 O doświadczenie! ty jesteś ciepłym pierzem
 Dla samolubów; tyś gwiazdą rycerza,
 Bawelną w uszach od ludzkiego jęku;
 Dla mnie, śród ciemnej nocy — świecą w ręku.
 J. Słowacki — Beniowski

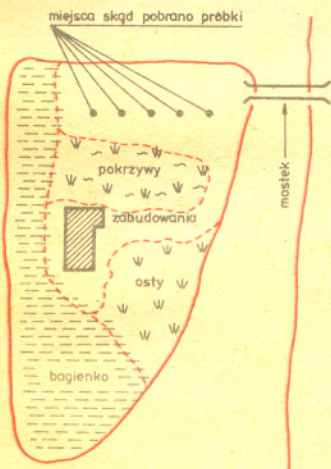
Każde doświadczenie...

Jeśliby ktoś przypuszczał, że cytat ów stanowi motto niniejszego artykułu ze względu na wybitną jasność opinii wieszczca, czy też doniosłość tej opinii, czy też klarowność rozróżnień, lub szczególnie trafną kolejność przytoczonych możliwości — mylili by się, jest zgoła, można powiedzieć, przeciwnie. Wydaje się raczej, że nieumieszczenie go zirykowałoby czytelnika jako przykre odstępstwo od przyjętych zasad, inaczej mówiąc, cytat ten zbyt jest wyświechtany, aby go nie przytoczyć. Unikanie bowiem pewnych skojarzeń może dla świadomości naszej stanowić mękę nie do przewyciężenia i lepiej jest, by ujawnił je autor, niżby w skrytości ducha mieli uczynić to czytelnicy. Obiektywnie, na usprawiedliwienie wieszczca należy zauważyć, że miał on na myśli zupełnie inny rodzaj doświadczenia, nie my jednak pierwsi wpadliśmy na omawiane skojarzenie, co z kolei może być naszym usprawiedliwieniem: „Każde doświadczenie daje bardziej albo mniej ciekawy wynik, ale każde rozszerza horyzonty naszego poznania”.

Ta opinia jest przynajmniej jednoznacznie pozytywna, co znakomicie równoważy estetyczną formę, w jakiej wieszcz wyraził podejrzanę zresztą przekonanie, że jak kto głupi, to mu doświadczenie nie pomoże, a jak kto mądry, to mu nie zaszkodzi. Bo to mamy niby wybór, w której z tych dwu sytuacji się znajdujemy? Każdy widzi, że wyboru takiego nie mamy, mamy natomiast wybór doświadczać czy nie doświadczać, doświadczać i nie doświadczać, czy nie doświadczać, czy może mieć się przed nim na baczności. Najprostszą metodą czynienia doświadczeń jest zmieniać jakiś element rzeczywistości i patrzeć, co z tego wyniknie. Dziecko wkłada paluszek w płomień świecy i ryczy. Jest to doświadczenie rozszerzające horyzont jego poznania. Jeśli jest rozgarnięte, już następny analogiczny eksperyment powinien potwierdzić jego hipotezę — płomień świecy, jeśli wsadzimy weń palec i potrzymamy odpowiednio długo, ZAWSZE PARZY. Trzecie i czwarte doświadczenie jest już zbyt liczne, a jeśli bachor mimo wszystko kontynuuje eksperymenty, przedmiotem jego badań staje się nie świeca lecz RODZICE.

To, co jednak oczywiste w przypadku dziecka, którego poziom umysłowy jesteśmy w stanie ocenić, komplikuje się niepomiarowo w przypadku osób dorosłych, a czasem odpowiedzialnych, czyniących doświadczenia. Wiemy np. że bez powtarzania w kółko tych samych doświadczeń nie nabierzemy przynigdy oglądy, wprawy ani tej przedziwnej fachowości, która poucza nas, że bez podciągnięcia spodni, odpowiedniego chodu, postawy, ba, nawet wyrazu twarzy, bez wypowiedzenia paru tajemniczych formuł, doświadczenie, nawet jeśli się uda, nie będzie miało owej powagi, rangi, doniosłości i wyrazu, jakiego od niego oczekujemy.

Wiadomo jak się należy poruszać, przemawiać, zachowywać wykonując np. inżynierskie pomiary (tzw. niwelację). Wiadomo, że obywatel uzbrojony w łatę (niesioną lekko i swobodnie przerzuconą przez ramię) ma prawo wejść na każdą posesję, absorbować swoją osobą całe osady nie mówiąc już o obejściach, gadać godzinami z dowolnie wybraną osobą, straszyć starców, kobiety, psy i dzieci, że wszędzie ma go otaczać nabożna trwoga i szacunek. Jeśli więc nawet przyjmujemy, że obywatel taki zapomni dokonać odczytów wstecz (co czyni jego pomiary zupełnie „niezlokalizowanymi” czy też jednostkowymi i nie odnoszącymi się zgoła do niczego) czy możemy rzeczywiście stwierdzić, że nie wykonał uczciwie i rzetelnie swej pracy? Czy nie płoszył krów ciskając w nie patykami? Czy nie odbył pogawędki z wieloma poważnymi jegomościami, którzy znosili cierpliwie pobłażliwość, z jaką się do nich zwracał? Czy nie nadwyrężył gardła porozumiewając się z kolegami przez długość pola? Czy nie wydeptał grządek, nie połamał gałęzi? Czy nie biegły za nim psy, czy wielu berbeciom, którzy podążali za nim dłubiąc w nosie, nie zaszczepił szczytnego ideału, że kiedy dorosną też zostaną inżynierami? Czy nie zaczął odwalony na koniec? Doprawdy, nie sposób twierdzić, że nie został odwalony kawał dobrej roboty. Zwłaszcza, że mamy tu do czynienia z zastosowaniami — czymś, czego stopień komplikacji obezwładnia nasz umysł czyniąc go narządem najzupełniej nieprzydatnym. Opinia ta, acz być może zbyt nieco krańcowa, przywodzi nam na pamięć inne doświadczenie, gdzie zarówno stopień komplikacji zagadnienia jak i nieprzydatne narządy odgrywają niebagatelną rolę. Doświadczenie to zostało przeprowadzone przez przeciwników Trofima Łysenki i po dziś dzień funkcjonuje jako poważny argument przeciw dziedziczeniu cech nabytych. Tak jest, moi kochani, chodzi oczywiście o nieszczęsne myszy, którym przez dziesięć bodaj pokoleń obcinano ogony, ażeby sprawdzić czy ulegną one w następnych



A oto rysunek przedstawiający plan błotnistej wyspy ze wskazaniem miejsc, skąd pobrano próbki gruntu w celu przebadania terenu pod względem geologicznym.



pokoleniach skróceniu. Jak widzimy, w tym doświadczeniu została nawet postawiona hipoteza. Tyle tylko, że głupia. Rozumując bowiem logicznie, czy istnieje lepsza metoda zachowania narządu w stanie niezmiennym niż jego amputacja? Pracochłonność, żmudność i drastyczność tego doświadczenia: Czy nie stanowią o jego wartości? Czy nie jest wznuszające owo charakterystyczne dla uczonego roztargnienie, jakie kazało badaczom dokonywać pilnie i skrzętnie zabiegów, których skutek powinien im być doskonale wiadomy ze zwyczajnej obserwacji świata; takie np. psy pozbawiane ogonów od więcej niż dziesięciu pokoleń nie mają ich ani odrobinę krótszych niż przed czterema tysiącami lat. Nie bagatelizujmy sprawy, tego rodzaju wadliwe zastosowanie narządu nie jest równoznaczne z jego amputacją, niestety. Dwukrotnie już w naszych rozumowaniach pojawił się element hipotezy, czyli celu doświadczenia, powodu, dla którego mamy doświadczać itd. Dopuszczenie tego elementu mąci czystość naszych spekulacji. Wiadomo, że jeśli wiemy, o co pytamy, wystarczy nam krótka i zwięzła odpowiedź TAK lub NIE i właściwie problem mamy, jak to się mówi, „z głowy”.

(Zagadnienie sprowadza się do zaplanowania takiego doświadczenia, które odpowie nam rzeczywiście na zadane pytanie, nie zaś na całkiem inne. I tak np. na pytanie, czy można zrobić złoto z ołowiu nie jest odpowiedzią negatywną powtórzenie któregośkolwiek ze starych przepisów alchemicznych prowadzących rzekomo do celu. Odpowiedź będzie co prawda negatywna, będzie jednak dotyczyła zupełnie innego zespołu zjawisk. Inaczej mówiąc, z wielu zagadnień musielibyśmy zupełnie nie zdawać sobie sprawy, aby odpowiedź „alchemiczna” była dla nas zadowalająca.

Kłopot zaś polega na tym, że do mądrego przekonania, iż złota nie da się zrobić z ołowiu ludzkość doszła na podstawie szeregu głupich doświadczeń nie mogących z natury rzeczy prowadzić do żadnego sensownego rezultatu.)

Już powyższe zastrzeżenie podważa nieco naszą wiarę w zbawczą rolę hipotezy, zauważmy jednak, iż przeważnie znów nie mamy wyboru: mieć hipotezę czy nie mieć, nie mamy jej bowiem w 99 wypadkach na 100 (lub mamy taką, że pożałuj się Boże), a mówiąc o poważnej pracy doświadczalnej nie możemy w ogóle stawiać takich wymagań.

Mimo to praca doświadczalnika ma oczywiście ogromnie doniosłe znaczenie. Że opinia ta nie jest gołosłownym, bezpodstawnym twierdzeniem zostało zdaniem autorki udowodnione (jeśli ktoś nie został przekonany, nie pozostaje mu nic innego jak cofnąć się do początku artykułu i czytać go jeszcze raz aż do osiągnięcia skutku). Na zakończenie dygresja, która jak większość prawdziwych dygresji nie ma nic wspólnego z omawianym zagadnieniem w ogóle, ani w szczególności z bronioną przez autorkę opinią. Nie jest prawdziwy powszechny skądinąd pogląd, że kluczową rolę przy tworzeniu teorii względności odegrały wyniki doświadczenia Michelsona — Morleya o stałości prędkości światła. Po pierwsze, Einstein prawdopodobnie wcale o tym doświadczeniu nie wiedział.

Po drugie, wyniki Michelsona — Morleya można było wyjaśnić zupełnie inaczej, co zresztą uczynił Lorentz. Po trzecie wreszcie, oczywistą gwiazdą przewodnią były dla Einsteina PIĘKNO I PROSTOTA PRAW ELEKTRODYNAMIKI, które (wobec tego) muszą być takie same we wszystkich układach odniesienia (czyli innymi słowy fakt, iż mu się zdawało, że tak powinno być). W czasie natomiast, gdy powstawała teoria względności znane były powszechnie, także i Einsteinowi, wyniki doświadczeń Kaufmanna, które wydawały się całkowicie sprzeczne ze szczególną zasadą względności. Einstein wyniki te zupełnie zignorował, odkładając ich wyjaśnienie na później, pomimo że na pierwszy rzut oka obalały one sam fundament jego teorii. Historia przyznała Einsteinowi rację. Doświadczenia Kaufmanna okazały się błędne, a doświadczenie Michelsona — Morleya odegrało kluczową rolę ugruntowując wśród reszty fizyków wiarę w skuteczność pięknej struktury logicznej teorii względności.

Jak nas uczono w szkole (skąd wynieśliśmy między innymi nieprecyzyjną znajomość przytoczonego motta) w poezji należy rozróżniać formę utworu poetyckiego od jego treści. Jest też nieźle, gdy w miarę poprawnej formie towarzyszy treść dająca się zrozumieć i wyrażająca mniej więcej precyzyjnie przekonania autora. Choć są oczywiście i wiersze będące li tylko czczą igraszką formalną. I są takie doświadczenia, a nawet teorie.



Historia badań anomalnego momentu magnetycznego elektronu dostarcza ciekawego przykładu rywalizacji między fizykami teoretykami i doświadczalnikami.

Moment magnetyczny μ_e jest wielkością, która określa zachowanie elektronu w polu magnetycznym. Dzięki oddziaływaniu elektronu obdarzonego momentem magnetycznym z polem o indukcji B pojawia się rozszczepienie linii widmowych atomów (zjawisko Zeemana). Mierząc to rozszczepienie możemy wyznaczać doświadczalnie moment magnetyczny elektronu. W mechanice kwantowej udowodniono, że energia elektronu w polu magnetycznym o indukcji B wyraża się wzorem:

$$(1) \quad E_{\text{magn}}[\text{MeV}] = -\mu_e \cdot B = -2(1+a_e) \cdot (0,57883 \times 10^{-10} \text{ MeV/T}) \cdot (s \cdot B [\text{T}]),$$

gdzie s jest wewnętrznym momentem pędu elektronu — spinem, a bezwymiarowy współczynnik a_e nazywamy właśnie anomalną poprawką do momentu magnetycznego elektronu.

W 1927 r. P. A. M. Dirac napisał równanie ruchu (zwane obecnie równaniem Diraca), z którego wynika, że $a_e = 0$. Dalszy rozwój teorii w latach trzydziestych doprowadził do przekonania, że wniosek ten jest słuszny w przybliżeniu i to tylko dlatego, że ładunek elektronu jest bardzo małą liczbą. Ówczesne dane doświadczalne w pełni potwierdzały wniosek, że $a_e \simeq 0$. Wydawało się więc, że nie ma potrzeby budować bardziej dokładnej teorii, mimo że już wtedy istniało wiele wskazówek, jak to należy zrobić. Teorię taką trzeba było zbudować dopiero w roku 1947. W wyniku wykonania nowych, dokładniejszych doświadczeń okazało się, że poprawka anomalna $a_e \neq 0$. W 1947 r. Kusch i Foley zbadali bardzo dokładnie widma promieniowania atomów sodu, jodu i galu umieszczonych w polu magnetycznym. Z ich doświadczeń wynikało, że:

$$(2) \quad a_e = (119 \pm 5) \times 10^{-5}.$$

W 1949 roku Julian Schwinger rozwinął te idee fizyczne, które pojawiły się w latach trzydziestych, i wyjaśnił, czym jest poprawka anomalna a_e i jak ją należy obliczać. (Schwinger był jednym z twórców teorii opisującej oddziaływania elektronów z polem elektromagnetycznym — elektrodynamiki kwantowej; innymi autorami tej teorii byli R. P. Feynman, S. I. Tomonaga i F. Dyson).

Rozumowanie Schwingera polegało na uwzględnieniu procesów wirtualnej emisji i absorpcji fotonów. Jak wiadomo, swobodny elektron nie może wypromieniować fotonu, gdyż taki proces gwałci zasady zachowania energii i pędu — tak jest przynajmniej w fizyce klasycznej. W fizyce kwantowej obowiązuje jednak zasada nieoznaczoności. Tak więc elektron, który wyemituje foton o energii ΔE (o którą to wielkość zostaje naruszona zasada zachowania energii), nie łamie praw natury pod warunkiem, że zaabsorbuje ten foton z powrotem po upływie czasu

$$(3) \quad \Delta t \sim \frac{\hbar}{\Delta E} \quad (\hbar \text{ — stała Plancka}).$$

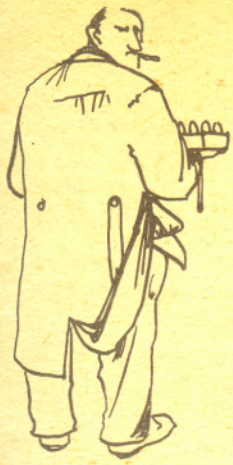
Wszystkie takie procesy, w których na bardzo krótko zostają naruszone prawa zachowania energii i pędu, nazywamy procesami wirtualnymi, a cząstki, które normalnie nie mogłyby się pojawić — cząstkami wirtualnymi. Ponieważ prawdopodobieństwa emisji i absorpcji fotonu są proporcjonalne do kwadratu ładunku elektronu e^2 , więc prawdopodobieństwo zajścia emisji oraz absorpcji jednego wirtualnego fotonu jest proporcjonalne do e^4 . Oczywiście możliwe są procesy, w których emitujemy i absorbujemy dwa, trzy itd. fotony; prawdopodobieństwa tych procesów są proporcjonalne do e^8, e^{12} itd. — ponieważ e^2 jest małą liczbą ($\approx \frac{1}{137}$), procesy te są coraz mniej prawdopodobne. Schwinger pokazał, że procesy wirtualne dają nam właśnie anomalną poprawkę do momentu magnetycznego elektronu. Jednocześnie stało się jasne, że najważniejszy jest proces z udziałem jednego fotonu, mniej ważne, tj. $\left(\frac{1}{137}\right)^2$ razy słabsze są wkłady od czterech możliwych procesów z udziałem dwóch fotonów. Aby uwzględnić wszystkie wkłady od procesów z wymianą czterech fotonów, należałoby uwzględnić ponad tysiąc możliwości. Każda z tych możliwości oznacza obliczanie skomplikowanych całek wielokrotnych, co możliwe jest tylko na maszynach cyfrowych. Schwinger obliczył tylko dominujący wkład wymiany jednofotonowej i otrzymał następujący wynik

$$(4) \quad a_e^{(1)} = \frac{e^2}{2\pi\hbar c} = 116,2 \times 10^{-5},$$

zgodny z danymi Kuscha i Foleya (2).

Od chwili sformułowania problemu przez Schwingera, dalsze rachunki teoretyczne wymagały przede wszystkim wielkiej sprawności rachunkowej. Prowadzi się je do tej pory, ponieważ doświadczalnicy potrafią mierzyć poprawkę anomalną z coraz to większą dokładnością. Ze wzoru (2) widać, że względny błąd pomiaru poprawki anomalnej $\delta a_e/a_e$ wyniósł w doświadczeniu Kuscha i Foleya $\sim 10^{-2}$. Okazało się, że metodami badania widm promieniowania nie sposób osiągnąć większej dokładności. Jednak w ciągu dwudziestu lat wymyślono bardzo pomysłowe metody pozwalające zwiększyć dokładność do 10^{-8} . Opiszę przykładowo metodę Schuppa, Pidda i Crane'a z 1961 roku, polegającą na pomiarze precesji swobodnych elektronów w polu magnetycznym. Metoda ta została zastosowana





w najdokładniejszych obecnie pomiarach anomalii a_e przez Wallsa i Steina (1973—1975), kiedy to dokładność względna wynosiła $\sim 10^{-8}$.

Spolaryzowane elektrony (tzn. elektrony o ustalonym rzucie spinu na kierunek prędkości) wpuszczane są w obszar jednorodnego pola magnetycznego B prostopadłego do ich prędkości v . Jak wiadomo, elektrony w takim polu poruszają się ruchem jednostajnym po orbitach kołowych, z pewną częstością (tzw. cyklotronową) ω_c . Jednocześnie w wyniku oddziaływania elektronów z polem (patrz wzór (1)) następuje obrót, czyli precesja momentu magnetycznego dookoła kierunku pola magnetycznego, z pewną częstością ω_s , którą możemy obliczyć. W wyniku złożenia się tych dwóch obrotów — prędkości z częstością ω_c i momentu magnetycznego z częstością ω_s , następuje obrót momentu magnetycznego względem kierunku prędkości. Okazuje się, że częstość obrotu ω_D jest proporcjonalna do poprawki anomalnej a_e :

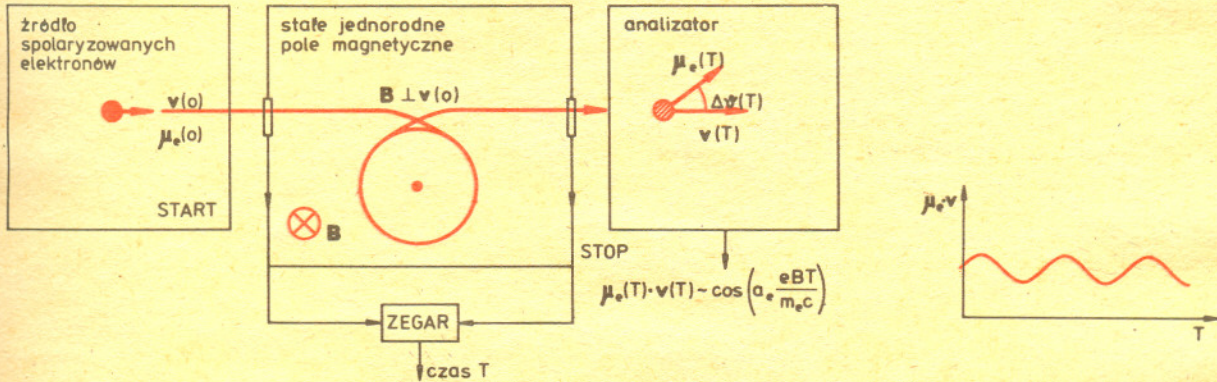
$$(5) \quad \omega_D = \omega_s - \omega_c = a_e \frac{eB}{m_e c}$$

„Recepta” na doświadczenie jest więc następująca:

- produkujemy elektrony o uporządkowanych momentach magnetycznych μ_e (np. $\mu_e \parallel v$).
- wpuszczamy je w obszar jednorodnego pola magnetycznego B .
- elektrony przebywają w polu przez pewien kontrolowany czas T .
- wypuszczamy je z pola, tak aby kąt $\Delta\theta$ między ich momentem magnetycznym $\mu_e(T)$ a prędkością $v(T)$ nie uległ zmianie, i mierzymy ten kąt; naprawdę lepiej jest mierzyć jakąś funkcję trygonometryczną tego kąta, np. $\cos \Delta\theta$, który jest proporcjonalny do iloczynu skalarnego $\mu_e(T) \cdot v(T)$.

— ponieważ $\Delta\theta(T) = \omega_D \cdot T = a_e \frac{eBT}{m_e c}$, więc powtarzamy wszystko dla różnych czasów T

rysując wykres $\mu_e(T) \cdot v(T)$ jako funkcji T . Z tego wykresu znajdujemy ω_D , a następnie poprawkę anomalną a_e . Blokowy schemat doświadczenia przedstawia rysunek:



Jak widać, doświadczenie tego typu wymaga dużej pomysłowości oraz sprawności technicznej. Jak zbudować analizator — przyrząd, który będzie mierzył $\mu_e \cdot v$? Jak zapewnić jednorodność i stałość pola magnetycznego? Na te wszystkie pytania trzeba znaleźć odpowiedź i, co jest bardzo ważne, ocenić ewentualne błędy, wynikające z przyjęcia takiego a nie innego rozwiązania. Nic więc dziwnego, że już po zbudowaniu aparatury analiza błędów ciągnie się nieraz latami. W doświadczeniu Wesleya i Richa trwała cztery lata, a w doświadczeniu Wallsa i Steina — 2 lata. Bardziej szczegółową historię badań doświadczalnych i teoretycznych przedstawia tabela. Wynika z niej kilka interesujących faktów. W 1950 Karpus i Krol obliczyli anomalię momentu magnetycznego uwzględniając procesy dwufotonowe. Ulepszenie techniki doświadczalnej — zastosowanie tzw. magnetycznego rezonansu jądrowego — pozwoliło zmierzyć anomalię z dokładnością względną $\sim 10^{-3}$, co wystarczyło, żeby obalić wynik Karpusa i Krola. W rok później Petermann i Sommerfeld znaleźli błąd w obliczeniach Karpusa i Krola. Ich własny wynik świetnie się zgadzał z wynikami doświadczeń w 1956 r.

Drugi ciekawy moment to rok 1968, kiedy to Rich dokonał powtórnej analizy całego dotychczasowego materiału doświadczalnego, starannie uwzględniając błędy systematyczne. Jego najlepszy wynik był niezgodny z obliczeniami. Okazało się, że niezgodność wypływa ze złego pomiaru ładunku elektronu. Po powtórzeniu pomiarów ładunku wyniki stały się zgodne. W chwili obecnej najlepsza wartość doświadczalna anomalii momentu magnetycznego elektronu wynosi

$$(6) \quad a_e^{\text{dośw}} = (1159652410 \pm 200) \times 10^{-12},$$

zaś rachunki teoretyczne uwzględniające wkłady od emisji i absorpcji trzech wirtualnych fotonów dały wynik

$$(7) \quad a_e^{\text{teor}} = (1159652359 \pm 282) \times 10^{-12}.$$

Doświadczenie jest nieco bardziej dokładne niż teoria, zaś porównanie wyników (6) i (7) świadczy o tym, że elektrodynamika kwantowa jest teorią najdokładniej sprawdzoną doświadczalnie.



Teoria

Doświadczenie

1927. P. A. M. Dirac wyprowadza swoje równanie

$$a_e = 0.$$

1949 J. Schwinger podaje interpretację anomalnego momentu magnetycznego

$$a_e^{\text{teor}} = 1162 \times 10^{-6}.$$

1950 Karpus i Krol obliczają poprawki do wyniku Schwingera

$$a_e^{\text{teor}} = 1147 \times 10^{-6}.$$

1957 Petermann i Sommerfeld powtarzają obliczenia Karpusa i Krola i znajdują błąd

$$a_e^{\text{teor}} = 11602 \times 10^{-7}.$$

1963 Drell i Pagels obliczają najważniejsze wkłady od procesów trójfotonowych

$$a_e^{\text{teor}} = 1159615 \times 10^{-9}.$$

1968 Zmiana stałej e zmienia wyniki teoretyczne

$$a_e^{\text{teor}} = 1159641 \times 10^{-9}.$$

1969—71 Ukończenie obliczeń poprawek trójfotonowych

$$a_e^{\text{teor}} = (1159652359 \pm 282) \times 10^{-12}.$$

1973 Rozpoczęcie rachunków uwzględniających procesy czterofotonowe.

1947 Nafe, Nelson, Rabi badają widma atomowe i odkrywają niezgodności z wartością $a_e = 0$.

Kusch, Foley — pierwszy pomiar z badania widm atomowych

$$a_e^{\text{dośw}} = (1192 \pm 50) \times 10^{-6}.$$

1949 Garden, Purcell stosują magnetyczny rezonans jądrowy — zgodność z wcześniejszymi wynikami.

1956 Franken i Liebes metodą magnetycznego rezonansu jądrowego wyznaczają

$$a_e^{\text{dośw}} = (1168 \pm 5) \times 10^{-6}.$$

Niezgodność z obliczeniami Karpusa i Krola.

1961 Schupp, Pidd, Crane (SPC) stosują nową technikę doświadczalną

$$a_e^{\text{dośw}} = (11609 \pm 24) \times 10^{-7}.$$

1963 Wilkinson i Crane powtarzają pomiary tą samą techniką

$$a_e^{\text{dośw}} = (1159622 \pm 27) \times 10^{-9}$$

1966 Rich i Crane wykonują pomiar dla pozytonów e^+ . Świetna zgodność z a_e dla elektronów.

1968 Analiza istniejących danych i uwzględnienie poprawek systematycznych przez Richa

$$a_e^{\text{dośw}} = (1159657 \pm 130) \times 10^{-8}$$

1971 Wesley, Rich wykonują dokładniejsze pomiary techniką SPC

$$a_e^{\text{dośw}} = (11596577 \pm 35) \times 10^{-10}.$$

1973 Walls i Stein poprawiają poprzedni pomiar

$$a_e^{\text{dośw}} = (1159652410 \pm 200) \times 10^{-12}.$$



Rozwiązanie zadania F 73.

Zsuwający się pręt miedziany przecina linie sił pola magnetycznego. Powstaje prąd indukcyjny, którego natężenie jest tym większe im szybciej porusza się pręt. Na przewodnik z prądem poruszający się w polu magnetycznym działa siła elektrodynamiczna przeciwdziałająca (reguła przekory Lenza) ruchowi pręta. Im większe natężenie prądu, tym większa wartość tej siły. Po pewnym czasie (teoretycznie nieskończonym, praktycznie niewielkim) odpowiednie składowe siły ciężkości i siły elektrodynamicznej zrównoważą się i ruch stanie się jednostajny. Oceńmy wartość owej granicznej prędkości. Wystarczy nam tu jedynie zasada zachowania energii. Energia potencjalna pola grawitacyjnego zmienia się na energię wypromieniowaną przez pręt (energia kinetyczna już się nie zmienia), czyli na tzw. ciepło Joule'a — Lenza. Niech masa pręta wynosi m , jego długość l , a opór elektryczny R (opór przewodnic zaniedbujemy) Reszta oznaczeń jak na rysunku. Pole powierzchni zakreślone przez pręt poruszający się z prędkością v w czasie ωt równa się $lv\Delta t$. Strumień pola magnetycznego przechodzący przez tę powierzchnię wynosi $Blv\Delta t \cos\alpha$, gdzie B jest wartością wektora indukcji magnetycznej. Stąd siła elektromotoryczna wyindukowana w obwodzie równa się (prawo Faradaya)

$$U = Blv \cos \alpha.$$

Z praw Ohma otrzymujemy wartość natężenia prądu

$$i = \frac{U}{R} = \frac{Blv \cos \alpha}{R},$$

a z prawa Joule'a — Lenza ilość wypromieniowanej w czasie Δt energii

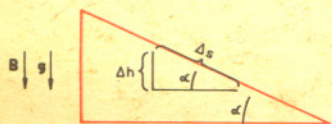
$$(*) \quad Q = i^2 R \Delta t = \frac{B^2 l^2 v^2 \cos^2 \alpha}{R} \Delta t.$$

W czasie Δt pręt przesunie się o odległość $\Delta s = v\Delta t$, co odpowiada zmianie wysokości (patrz rysunek) o $\Delta h = \Delta s \sin \alpha = v \sin \alpha \Delta t$. Energia potencjalna pręta zmniejszy się więc o

$$(**) \quad \Delta E = mgv \sin \alpha \Delta t,$$

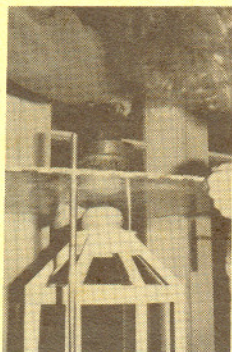
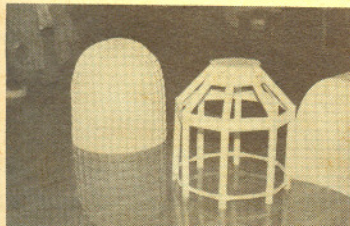
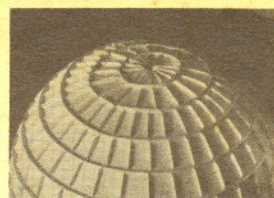
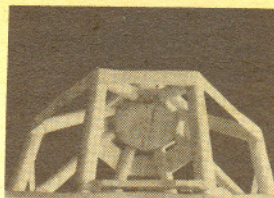
gdzie g jest przyspieszeniem ziemskim. Przyrównując (*) do (**) otrzymujemy

$$v = \frac{mg \sin \alpha R}{B^2 l^2 \cos^2 \alpha}.$$

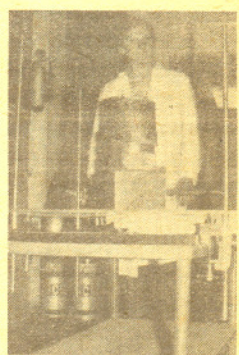
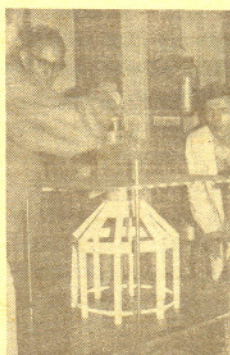
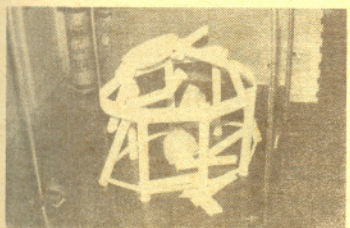
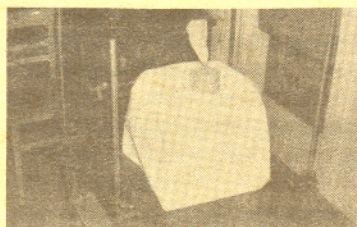
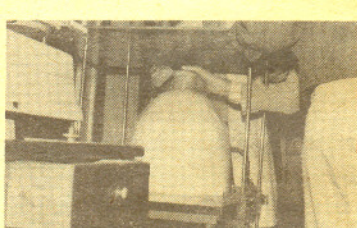
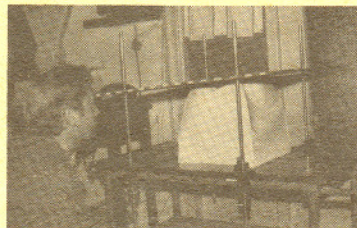


Wyniki konkursu „Budujemy kopułę”

Na konkurs nadesłano cztery kopuły. Wszystkie były wykonane zgodnie z warunkami konkursu. Niszczenie kopuł odbyło się w Instytucie Fizyki Doświadczalnej Uniwersytetu Warszawskiego i nie było wcale łatwe. Okazało się, że nam również warunki konkursu sprawiły sporo kłopotu.



Bezapelacyjnym zwycięzcą okazał się *Jerzy KAMIŃSKI* zamieszkały w Łodzi, ul. Kilińskiego 78 m 7. Wykonana przez niego kopuła wytrzymała obciążenie aż 75,35 kg (waga kopuły 0,14 kg)! Był to istny majstersztyk sztuki inżynierskiej. Konstrukcja kopuły oparta była na systemie rurek, w środku wypełnionych podobnie do bambusa. Wierzchołek stanowiło pudełko, również bardzo przemyślnie wypełnione. Pudełko to wytrzymało nawet silne uderzenie pięścią. Kopuła J. Kamińskiego została ponadto uznana za najładniejszą z nadesłanych na konkurs. Drugą nagrodę uzyskała kopuła wykonana przez *Janusza SOKOŁA* z Przeworska, ul. Manifestu Lipcowego 18. Wytrzymała ona obciążenie 12,50 kg przy wadze własnej 0,12 kg. Nagrody wysłaliśmy pocztą.



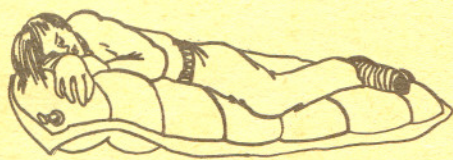


Ciekły piasek

Powszechnie wiadomo, że wszystkie ciała materialne składają się z niewyobrażalnie małych cząsteczek znajdujących się w ciągłym ruchu. Tak właśnie wyobrażamy sobie budowę materii chociaż nikt nigdy jej składników — owych cząsteczek — nie widział. Przyjmując taki obraz świata można zadać sobie pytanie: skąd biorą się różnice zachodzące między stanem stałym, ciekłym i gazowym materii? Wybitny uczyony siedemnastego stulecia, Robert Hooke, twórca teorii sprężystości ciał i odkrywca komórkowej struktury roślin, różnice te przypisywał ruchowi cząsteczek, który np. musi być większy w cieczach niż w ciałach stałych.

„Przede wszystkim, — powiada on, — co jest przyczyną płynności? Pojmuję ją jako nic innego, jak bardzo szybki i gwałtowny ruch cząstek danego ciała; cząstki danego ciała stają się przytem tak luźnemi względem siebie, że mogą z łatwością poruszać się w każdym kierunku i stają się płynnemi. Abym mógł to wytłumaczyć za pomocą nieco dalekiego podobieństwa, przypuśćmy, że naczynie z piaskiem umieszczone zostało na jakimś przedmiocie, znajdującym się w bardzo gwałtownym i szybkim ruchu tak, że naczynie to samo ulegnie szybkim i silnym drganiom, jakby to miało miejsce wówczas np., gdyby stało ono na jednym z kamieni młyńskich, wirujących luzem, albo też na bardzo mocno naciągniętej przeponie bębna, uderzanej gwałtownie lub też bardzo szybko pałeczkami. Na skutek tego piasek, który z początku spoczywał w naczyniu całkiem bezwładnie, staje się doskonałą cieczą; gdy tylko zrobimy w nim palcem zagłębienie, natychmiast zostanie ono wyrównane i powierzchnia piasku staje się znowu gładka. Nie da się też pogрузić w piasek jakiś przedmiot lekki, jak np. kawałek korka, gdyż natychmiast zostaje on wyrzucony na powierzchnię i jakby pływa po niej; nie można również położyć na powierzchni piasku przedmiotu cięższego, np. kawałka ołowiu, gdyż natychmiast zanurzy się on w piasek i opuści się na dno naczynia. Podobnie, gdy zrobimy otwór w bocznej ścianie naczynia, piasek natychmiast zacznie się wysypywać przez ten otwór aż do chwili, gdy powierzchnia piasku osiągnie poziom otworu. Tak więc piasek naśladuje wszystkie oczywiste własności cieczy, a wszystko to dzieje się jedynie na skutek gwałtownego ruchu, jakiemu podlega naczynie z piaskiem, gdyż w ten sposób każde ziarno piasku wykonywa ruch drgający lub wirowaty tak, że żaden przedmiot cięższy nie może na niem się utrzymać, o ile nie zostanie zewsząd podparty przez inne, żaden też inny przedmiot nie może pozostawać pod ziarnkiem piasku, o ile nie będzie od niego cięższy.”

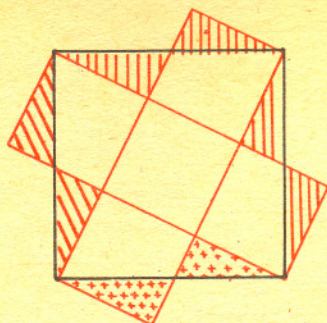
A jak w opisanej przez Hooke'a analogii przedstawia się stan gazowy? Otóż odpowiada on tak szybkiemu ruchowi ziaren piasku, że tracą one kontakt między sobą i zaczynają po prostu fruwać swobodnie.



Czy umiecie obliczyć, jakie jest pole środkowego małego kwadratu?



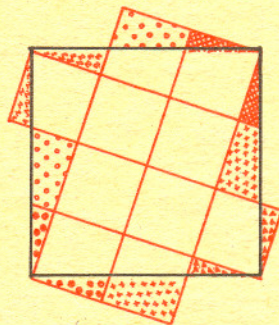
Nie? A teraz?



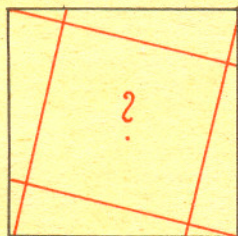
A gdy podzielimy bok na trzy równe części?



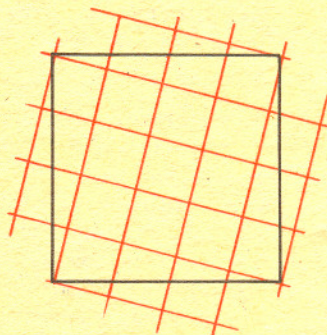
Znowu nie? A teraz?



Zrozumiałe, że z kolei zainteresujemy się podziałem boku na cztery równe części. Jakie jest pole małego kwadratu?



A na pięć?



Małą Deltę opracowali:
Michał SZUREK
i Michał ŚWIĘCKI



Zadania

Redaguje mgr Krzysztof NOWIŃSKI

M 217. Wykazać, że wśród każdych 1001 różnych liczb naturalnych mniejszych od 2000 znajdują się takie dwie, że jedna z nich jest dzielnikiem drugiej.

Rozwiązanie na str. 3

M 218. Wykazać, że każde dwa kolejne wyrazy ciągu liczb naturalnych określonego wzorem rekurencyjnym: $a_1 = 5$, $a_2 = 7$, $a_{n+1} = 1980a_n + a_{n-1}$ dla $n > 2$, są względnie pierwsze.

Rozwiązanie na str. 3

M 219. Wykazać, że dla każdego naturalnego n istnieje wielościan wypukły mający dokładnie n przekątnych. (Przekątnymi nazywamy odcinki łączące wierzchołki i nie będące krawędziami, ani przekątnymi ścian.)

Rozwiązanie na str. 15

Redaguje dr Marek KALINOWSKI

F 73. Na równi pochyłej umieszczono dwie prowadnice miedziane połączone ze sobą na szczycie równi (patrz rysunek). Po prowadnicach zsuwa się bez tarcia pręt miedziany. Jak zmieni się ruch pręta, gdy całość umieścimy w stałym, jednorodnym polu magnetycznym skierowanym pionowo?

Rozwiązanie na str. 10



Najpowszechniej znanym faktem matematycznym jest prawdopodobnie twierdzenie Pitagorasa o trójkącie prostokątnym. Z twierdzeniem tym związane jest stare zagadnienie poszukiwania trójkątów prostokątnych, których boki mają długości będące liczbami naturalnymi, a więc poszukiwanie rozwiązań równania

$$(1) \quad X^2 + Y^2 = Z^2$$

w liczbach naturalnych X, Y, Z . Jak głosi legenda, jedno z takich rozwiązań, mianowicie $3^2 + 4^2 = 5^2$, służyło starożytnym Egipcjanom do praktycznego wyznaczania kąta prostego (używano do tego sznura z 13 węzłami w równych odległościach i ... trzech niewolników). Łatwo sprawdzić, że dla dowolnych liczb naturalnych m, n takich, że $m > n$, liczby naturalne $x = m^2 - n^2, y = 2mn, z = m^2 + n^2$ spełniają równanie (1) (więc na przykład, dla $m = 2, n = 1$ otrzymujemy $x = 3, y = 4, z = 5$). Mamy więc prosty sposób konstrukcji trójkątów pitagorejskich.

Równanie pitagorejskie (1) można także interpretować arytmetycznie: czy istnieją kwadraty liczb naturalnych, które można przedstawić w postaci sumy kwadratów dwóch liczb naturalnych? Przy takim sformułowaniu nasuwają się jednak od razu inne, podobne pytania. A więc, na przykład, podwojony kwadrat jest oczywiście sumą dwóch kwadratów $2Z^2 = Z^2 + Z^2$, ale czy prócz tego trywialnego rozkładu istnieją jeszcze inne, postaci

$$(2) \quad X^2 + Y^2 = 2Z^2, \quad X \neq Y?$$

Tutaj także istnieje sposób skonstruowania całej serii rozwiązań. Jeśli mamy jedno rozwiązanie $x^2 + y^2 = 2z^2$ oraz jakiegokolwiek rozwiązanie równania pitagorejskiego $a^2 + b^2 = c^2$, to $(ax - by)^2 + (ay + bx)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = 2(cz)^2$, a więc dostajemy nowe rozwiązanie równania (2); na przykład, z trywialnego rozwiązania $x = y = z = 1$ równania (2) oraz „egipskiego” rozwiązania równania (1) $a = 4, b = 3, c = 5$ otrzymujemy $1^2 + 7^2 = 2 \cdot 5^2$. Jako następny przykład rozpatrzmy potrojony kwadrat liczby naturalnej Z i zapytajmy, czy taka liczba może być sumą dwóch kwadratów liczb naturalnych? Okazuje się, że nie! Mianowicie równanie

$$(3) \quad X^2 + Y^2 = 3Z^2$$

nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych. Przypuśćmy bowiem, że równanie (3) ma rozwiązania w liczbach naturalnych i spośród wszystkich takich rozwiązań x, y, z wybierzmy to, w którym z jest najmniejsze.

Wtedy liczby x, y nie mogą być obie parzyste, gdyż jeśli $x = 2u, y = 2v$ to $3z^2 = x^2 + y^2 = 4(u^2 + v^2)$, zatem także z jest parzyste, $z = 2w$. Dzieliąc teraz równość $x^2 + y^2 = 3z^2$ stronami przez 4 otrzymujemy $u^2 + v^2 = 3w^2$ a więc rozwiązanie równania (3), przy czym $w < z$ wbrew wyborowi rozwiązania x, y, z . A więc przynajmniej jedna z liczb x, y jest nieparzysta. Zauważmy teraz, że $(2a+1)^2 = 4(a^2+a)+1$, to zaś znaczy, że kwadrat liczby nieparzystej daje przy dzieleniu przez 4 resztę 1. Używając kongruencji zapisujemy ten fakt następująco: $(2a+1)^2 \equiv 1 \pmod{4}$. Podobnie $(2a)^2 \equiv 0 \pmod{4}$; kwadrat liczby parzystej dzieli się przez 4. Wracając do naszego rozwiązania równania (3), mamy $x^2 + y^2 \equiv 1 \pmod{4}$, jeśli jedna z liczb x, y jest parzysta, oraz $x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod{4}$, jeśli obie liczby x, y są nieparzyste. Z drugiej strony, $z^2 \equiv 0 \pmod{4}$ lub $z^2 \equiv 1 \pmod{4}$, a więc $3z^2 \equiv 0 \pmod{4}$ lub $3z^2 \equiv 3 \pmod{4}$. Tak więc równość $x^2 + y^2 = 3z^2$ jest wykluczona: reszty z dzielenia lewej i prawej strony przez 4 są różne! Udowodniliśmy więc, że równanie (3) nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych.

Ten negatywny rezultat nie powinien nas zniechęcać do badania następnych równań tego typu; ostatecznie fakt, że równanie nie ma rozwiązań jest przecież faktem interesującym.

Równaniem $X^2 + Y^2 = 4Z^2$ nie będziemy się zajmować, gdyż wobec $4Z^2 = (2Z)^2$ równanie to sprowadza się właściwie do równania pitagorejskiego. Natomiast równanie $X^2 + Y^2 = 5Z^2$ znowu ma całą serię rozwiązań w liczbach naturalnych, można tutaj bowiem użyć metody, którą wykorzystaliśmy do badania równania (2): jeśli $x^2 + y^2 = 5z^2$ oraz $a^2 + b^2 = c^2$, to $(ax - by)^2 + (ay + bx)^2 = 5(cz)^2$. A więc równość $1^2 + 2^2 = 5 \cdot 1^2$ wraz z egipskim trójkątem $a = 4, b = 3, c = 5$ daje $2^2 + 11^2 = 5 \cdot 5^2$.

Dwa następne równania $X^2 + Y^2 = 6Z^2$ oraz $X^2 + Y^2 = 7Z^2$ znowu okazują się nierozwiązalne w liczbach naturalnych. Można to udowodnić podobnie jak w przypadku równania (3), z tym, że w przypadku równania $X^2 + Y^2 = 6Z^2$ należy wziąć reszty z dzielenia przez 3 a nie przez 4. Po rozpatrzeniu tych przykładów nasuwa się nieodparcie pytanie: jak stwierdzić, czy dla danej liczby naturalnej n równanie

$$(n) \quad X^2 + Y^2 = nZ^2$$

ma rozwiązanie w liczbach naturalnych X, Y, Z ?

Najpierw zauważmy, że równanie (n) wystarczy rozpatrywać dla liczb naturalnych n bezkwadratowych, to znaczy takich liczb n , które nie są podzielne przez kwadrat żadnej liczby naturalnej $k > 1$. Rzeczywiście, niech $n = mk^2$. Jeśli x, y, z jest rozwiązaniem równania (n), to x, y, kz jest rozwiązaniem równania (m); na odwrót, jeśli x, y, z spełniają równanie (m), to kx, ky, z spełniają równanie (n).



Pełną odpowiedź na nasze pytanie dotyczące rozwiązalności równania (n) w liczbach naturalnych zawiera następujące twierdzenie, będące pewnym szczególnym przypadkiem zasady lokalno-globalnej.

Twierdzenie. Niech n będzie bezkwadratową liczbą naturalną. Na to, aby równanie (n) miało rozwiązanie w liczbach naturalnych potrzeba i wystarcza, by istniały liczby naturalne x, y, z takie, że

$$(W) \quad x^2 + y^2 \equiv nz^2 \pmod{n} \quad \text{i} \quad \text{NWD}(x, n) = 1.$$

Dowód. Przypuśćmy najpierw, że równanie (n) ma rozwiązanie w liczbach naturalnych X, Y, Z . Niech $d = \text{NWD}(X, Y, Z)$; zatem liczby $x = X/d, y = Y/d, z = Z/d$ są względnie pierwsze, oraz $x^2 + y^2 = nz^2$. Tutaj już $\text{NWD}(x, n) = 1$. Rzeczywiście, jeśli liczba pierwsza p dzieli x i dzieli n , to p dzieli $x^2 - nz^2 = y^2$, a więc p dzieli y . W takim razie p^2 dzieli $x^2 + y^2 = nz^2$, a ponieważ n jest liczbą bezkwadratową, wnioskujemy stąd, że p dzieli z . A więc wspólny dzielnik pierwszy p liczb x, n jest wspólnym dzielnikiem liczb x, y, z , wbrew temu, że są one względnie pierwsze. A więc $\text{NWD}(x, n) = 1$. Ponieważ liczby $x^2 + y^2$ i nz^2 są równe, więc mają równe reszty z dzielenia przez n . Zatem $x^2 + y^2 \equiv nz^2 \pmod{n}$ oraz $\text{NWD}(x, n) = 1$. Warunek konieczny rozwiązalności równania (n) został więc udowodniony.

Dowód dostateczności warunku poprowadzimy niewprost. Przypuśćmy, że istnieją liczby naturalne n spełniające warunek (W) takie, że równanie (n) nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych.

Wybierzmy najmniejszą liczbę naturalną n o tej własności i niech x, y, z będą liczbami spełniającymi warunek (W). Ponieważ $x^2 + y^2$ jest równe nz^2 , więc dzieli się przez n . Mamy zatem $x^2 + y^2 = kn$. Obieramy przy tym liczby x, y tak, by k było możliwie najmniejsze.

Pokażemy najpierw, że wtedy $k \leq \frac{1}{2}n$. Rzeczywiście, można od razu zakładać, że $0 < x < n, 0 < y < n$, gdyż wraz z liczbami x, y warunek (W) spełniają reszty z dzielenia x, y przez n .

Gdy $\frac{1}{2}n < x < n$, to zastępujemy x przez $n-x$; mamy wtedy $\text{NWD}(n-x, n) = \text{NWD}(x, n) = 1$ oraz $(n-x)^2 + y^2 = x^2 + y^2 + n^2 - 2nx = kn + n^2 - 2nx = (k+n-2x)n$,

a więc $n-x, y$ także spełniają (W) z tym, że teraz $0 < n-x < \frac{1}{2}n$. Podobnie można postąpić

w przypadku, gdyby $\frac{1}{2}n < y < n$. A więc można zakładać, że $0 < x \leq \frac{1}{2}n, 0 < y \leq \frac{1}{2}n$,

zatem $kn = x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{4}n^2 = \frac{1}{2}n^2$, skąd $k \leq \frac{1}{2}n$. Pokażemy teraz

jeszcze, że $\text{NWD}(x, k) = 1$. Rzeczywiście, gdy pewna liczba pierwsza p dzieliła x i k , to z równości $x^2 + y^2 = kn$ wynikałoby, że p dzieli y , skąd z kolei wynika, że p^2 dzieli $x^2 + y^2 = kn$. Ale p nie dzieli n , gdyż p dzieli x i $\text{NWD}(x, n) = 1$; zatem p^2 dzieli k i w rezultacie $(x/p)^2 + (y/p)^2 = (k/p^2)n$ oraz $k/p^2 < k$, wbrew wyborowi liczby k . A więc liczby x, k nie mają wspólnego dzielnika > 1 . Teraz możemy stwierdzić, że liczba k spełnia warunek (W) — po zastąpieniu w nim n przez k . Istotnie, $x^2 + y^2 = kn \equiv 0 \equiv k \cdot 1^2 \pmod{k}$ oraz $\text{NWD}(x, k) = 1$. Ponadto wiemy, że $k < n$. Zatem zgodnie z wyborem liczby n jako najmniejszej liczby naturalnej, dla której spełnienie warunku (W) nie pociąga rozwiązalności równania (n) , możemy stwierdzić, że równanie (k) jest rozwiązalne w liczbach naturalnych! Zatem istnieją liczby naturalne a, b, c takie, że $a^2 + b^2 = kc^2$. Mamy więc $(ax-by)^2 + (ay+bx)^2 = (a^2+b^2)(x^2+y^2) = kc^2 \cdot kn = n(kc)^2$, to znaczy, liczby $X = |ax-by|, Y = ay+bx, Z = kc$ są rozwiązaniem równania (n) . Jest to rozwiązanie równania (n) w liczbach naturalnych: nie ma bowiem wątpliwości, że Y i Z są liczbami naturalnymi, zaś $X \neq 0$, gdyż w przeciwnym razie $Y^2 = nZ^2$, wbrew temu, że n jest liczbą bezkwadratową. A więc nasze przypuszczenie, że istnieją takie liczby bezkwadratowe n , które spełniają (W), ale dla których równanie (n) jest nierozwiązalne w liczbach naturalnych, prowadzi do sprzeczności. Twierdzenie jest zatem w zupełności udowodnione.

Praktyczne stosowanie naszego twierdzenia może być uciążliwe dla dużych n , dlatego warto zwrócić uwagę na następujące uproszczenia. Liczbę bezkwadratową n zapiszemy jako iloczyn (różnych!) liczb pierwszych: $n = p_1 \cdot \dots \cdot p_s$. Okazuje się, że równanie (n) ma rozwiązanie w liczbach naturalnych wtedy i tylko wtedy, gdy każde z równań $(p_i), i = 1, \dots, s$, ma rozwiązanie w liczbach naturalnych. Jeśli bowiem równanie (n) jest rozwiązywalne, to spełniony jest warunek (W); biorąc reszty z dzielenia liczb x, y przez p_i otrzymamy liczby x_i, y_i takie, że $x_i^2 + y_i^2 \equiv 0 \pmod{p_i}$ oraz $\text{NWD}(x_i, p_i) = 1$. Zatem z naszego twierdzenia wynika, że równanie (p_i) jest rozwiązalne w liczbach naturalnych. Na odwrót, jeśli $x_i^2 + y_i^2 = p_i z_i^2, i = 1, \dots, s$, to wykorzystując tożsamość

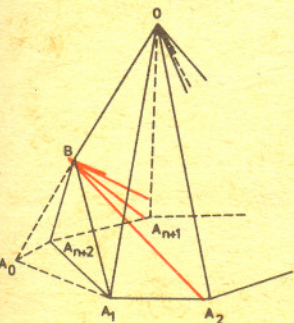
$$(A^2 + B^2)(X^2 + Y^2) = (AX - BY)^2 + (AY + BX)^2$$

stwierdzamy, że istnieją liczby naturalne x, y takie, że

$$x^2 + y^2 = (x_1^2 + y_1^2) \cdot \dots \cdot (x_s^2 + y_s^2) = n(z_1 \cdot \dots \cdot z_s)^2,$$



Rozwiązanie zadania M 219. Na krawędzi OA_0 ostrosłupa o wierzchołku O i podstawie wypukłej $A_0A_1 \dots A_{n+2}$ obierzmy punkt B . Szukanym wielościanem jest wielościan o ścianach $A_1BA_{n+2}, A_1BO, OA_1A_2, \dots, OA_nA_{n+1}, OA_{n+1}A_{n+2}, OA_{n+2}B$ i $A_1A_2 \dots A_{n+2}$, a jego przekątnymi — odcinki BA_2, \dots, BA_{n+1} .





to znaczy, rozwiązanie (n) ma rozwiązanie w liczbach naturalnych. A więc nasze twierdzenie można także sformułować następująco: Jeśli n jest bezkwadratową liczbą naturalną, to równanie (n) ma rozwiązanie w liczbach naturalnych wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby pierwszej p dzielącej n kongruencja $X^2 + Y^2 = nZ^2 \pmod{p}$ ma rozwiązanie w liczbach naturalnych x, y, z takie, że p nie dzieli x .

Na przykład równanie $X^2 + Y^2 = 303Z^2$ nie jest rozwiązalne w liczbach naturalnych, bo $303 = 3 \cdot 101$ i równanie $X^2 + Y^2 = 3Z^2$ nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych. Natomiast równanie $X^2 + Y^2 = 221Z^2$ ma rozwiązanie w liczbach naturalnych, gdyż $221 = 13 \cdot 17$ i równania (13), (17) są rozwiązalne w liczbach naturalnych.

Równanie (n) jest dość szczególnym równaniem stopnia drugiego o trzech niewiadomych. Czy nasze twierdzenie nie ma przypadkiem jakiegoś odpowiednika dla równań ogólniejszej postaci niż (n) ? Na przykład, weźmy równanie

$$(*) \quad a_1 X_1^2 + \dots + a_r X_r^2 = 0$$

gdzie a_1, \dots, a_r są liczbami całkowitymi, $r > 1$. Jak rozpoznać, czy równanie $(*)$ ma rozwiązanie w liczbach naturalnych? Jeden warunek konieczny jest dość oczywisty: jeśli równanie $(*)$ ma rozwiązanie w liczbach naturalnych, to liczby a_1, \dots, a_r nie mogą być wszystkie dodatnie (bo wtedy dla każdego liczb naturalnych x_1, \dots, x_r mamy $a_1 x_1^2 + \dots + a_r x_r^2 > 0$) ani też nie mogą być wszystkie ujemne. Ale przykład równania (3): $X_1^2 + X_2^2 - 3X_3^2 = 0$ pokazuje, że ten oczywisty warunek konieczny rozwiązalności równania $(*)$ nie jest warunkiem wystarczającym. Szukajmy więc dalszych warunków koniecznych rozwiązalności równania $(*)$ w liczbach naturalnych.

Jeśli równanie $(*)$ ma rozwiązanie w liczbach naturalnych, to istnieje też rozwiązanie tego równania w liczbach naturalnych względnie pierwszych, to znaczy takich, że $\text{NWD}(x_1, \dots, x_r) = 1$. Rzeczywiście, jeśli liczby naturalne y_1, \dots, y_r spełniają równanie $(*)$ oraz $d = \text{NWD}(y_1, \dots, y_r)$, to liczby $x_1 = y_1/d, \dots, x_r = y_r/d$ spełniają nasze równanie i są względnie pierwsze. Wtedy też dla dowolnej liczby naturalnej m mamy

$$a_1 x_1^2 + \dots + a_r x_r^2 \equiv 0 \pmod{m} \quad \text{i} \quad \text{NWD}(x_1, \dots, x_r, m) = 1.$$

Mamy więc następane warunki konieczne rozwiązalności $(*)$: Jeśli równanie $(*)$ ma rozwiązanie w liczbach naturalnych, to dla każdej liczby naturalnej m kongruencja $a_1 X_1^2 + \dots + a_r X_r^2 \equiv 0 \pmod{m}$ ma rozwiązanie w liczbach naturalnych x_1, \dots, x_r takich, że $\text{NWD}(x_1, \dots, x_r, m) = 1$.

Jakkolwiek trywialne wydawałyby się zauważone przez nas warunki konieczne rozwiązalności równania $(*)$, nie należy ich lekceważyć i to przynajmniej z dwóch powodów. Po pierwsze pozwalają one czasem stwierdzić, że równanie postaci $(*)$ nie ma rozwiązania w liczbach naturalnych. Na przykład, równanie $X_1^2 + X_2^2 + 3X_3^2 = 0$ a także równanie $X_1^2 + X_2^2 - 3X_3^2 = 0$ nie mają rozwiązań w liczbach naturalnych i stwierdzamy to na podstawie naszych warunków koniecznych rozwiązalności równania $(*)$. Po drugie, mamy interesującą wiadomość dla Czytelnika: nasze warunki konieczne rozwiązalności równania $(*)$ są równocześnie warunkami wystarczającymi! Jest to właśnie słynne stwierdzenie znane jako *zasada lokalno — globalna Minkowskiego — Hassego*:

Równanie $a_1 X_1^2 + \dots + a_r X_r^2 = 0$, gdzie a_1, \dots, a_r są liczbami całkowitymi, ma rozwiązanie w liczbach naturalnych wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są dwa następujące warunki:

- (a) Liczby a_1, \dots, a_r nie są wszystkie dodatnie ani nie są wszystkie ujemne.
- (b) Dla każdej liczby naturalnej m kongruencja $a_1 X_1^2 + \dots + a_r X_r^2 \equiv 0 \pmod{m}$ ma rozwiązanie w liczbach naturalnych x_1, \dots, x_r takich, że $\text{NWD}(x_1, \dots, x_r, m) = 1$.

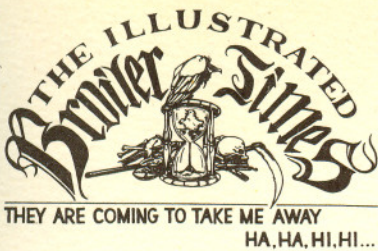
Twierdzenie to jest dość trudne do udowodnienia i nie zrobimy tu żadnego kroku w kierunku jego dowodu. Zauważymy tylko, że dla równania (n) udowodniliśmy zasadę lokalno — globalną, a nawet twierdzenie znacznie lepsze. Mianowicie, zgodnie z naszym twierdzeniem, dla rozwiązalności równania (n) w liczbach naturalnych wystarcza istnienie odpowiedniego rozwiązania jednej tylko kongruencji $X^2 + Y^2 - nZ^2 \equiv 0 \pmod{m}$, podczas gdy ogólna zasada lokalno — globalna wymaga istnienia rozwiązań nieskończenie wielu kongruencji $X^2 + Y^2 - nZ^2 \equiv 0 \pmod{m}$, dla $m = 1, 2, 3, \dots$. Przy tej okazji wychodzi na jaw pewna zasadnicza wątpliwość. Czy zasadę lokalno — globalną można naprawdę wykorzystać dla stwierdzenia istnienia rozwiązania równania $(*)$ w liczbach naturalnych? Jak sprawdzić mianowicie, czy spełniony jest warunek (b)? Jak sprawdzić rozwiązalność nieskończenie wielu kongruencji występujących w tym warunku?

Okazuje się, że jest to zawsze możliwe i że można to zrobić w skończonej liczbie kroków. Więc przede wszystkim można dowiedzieć, że warunek (b) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby pierwszej p równanie $(*)$ ma niezerowe rozwiązanie w ciele Q_p liczb p -adycznych. Dalej dowodzi się, że dla każdej liczby pierwszej $p > 2$, która nie dzieli żadnego ze współczynników a_1, \dots, a_r , równanie $(*)$ ma niezerowe rozwiązanie w ciele Q_p . Zatem pozostaje do sprawdzenia rozwiązalność równania $(*)$ w ciałach Q_p dla skończenie wielu liczb pierwszych, mianowicie dla $p = 2$ oraz tych liczb pierwszych, które dzielą przynajmniej jeden ze współczynników a_1, \dots, a_r . Istnieją zaś sposoby pozwalające dokonać takiego sprawdzenia w skończonej liczbie kroków.

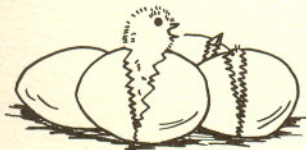
Podobnie można było postąpić i dla równania (3): $x^2 + y^2 = 3z^2$. Jeżeli liczby względnie pierwsze x, y, z spełniają to równanie, to widzimy, że prawa strona jest zawsze podzielna przez 3. Przez rozważenie różnych reszt z dzielenia x i y przez 3 dochodzimy do wniosku, że x i y też muszą dzielić się przez 3. Wtedy $x^2 + y^2$ dzieli się przez 9, więc z musi dzielić się przez 3 — co sprzeczne jest z naszym założeniem, że x, y, z są względnie pierwsze.



O liczbach p -adycznych pisaliśmy w Deltce 9/1978, 8/1979 i zamierzamy też napisać w następnym numerze.



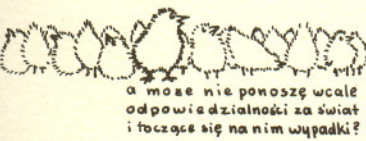
Standardyzacja intelektualna!
-ależ to taka sama niedorzeczność jak
pojęcie intelektualnego komfortu!



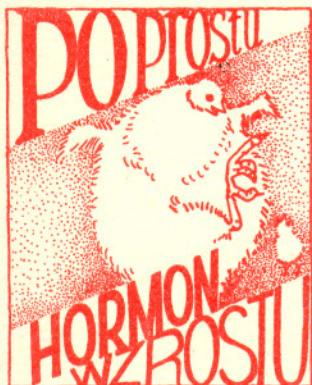
Brojlerzy. To słowo jest czymś więcej niż zwykłym terminem technicznym hodowli drobiu. To symbol naszych czasów. Czasów, w których, dzięki postępowi nauki i techniki, sabiedzone, dziobiące tu i ówdzie po śmietnikach kury ustąpiły miejsca racjonalnie żywionym dostarczycielom wysokowartościowej masy pokarmowej, realizując w ten sposób odwieczne marzenie o powszechnej sytości. Nie możemy więc przejść obok brojlerów obojętnie. Musimy im dać sposobność swobodnego wypowiedzenia swoich poglądów, co też czynimy na łamach IBT.



Nie mamy żadnych podstaw by sądzić, że to wszystko nie dzieje się w naszym interesie



a może nie ponoszę wcale
odpowiedzialności za świat
i tożące się na nim wypadki?



Oczywiście, przedstawiona tutaj argumentacja jest tylko bardzo ogólnikowym szkicem obszernej teorii związanej z twierdzeniem Minkowskiego — Hassego. W języku polskim nie ma jak dotąd żadnego pisanego wykładu tej teorii. Najłatwiej dostępną pozycją, którą rekomendujemy Czytelnikowi jest książka Z. I. Borewicza i I. R. Szafarewicza, Teoria czistej, wyd. 3, Moskwa 1972, gdzie znajduje się pełny wykład teorii liczb p -adycznych i dowód twierdzenia Minkowskiego — Hassego.

W końcu, chcemy odpowiedzieć na jeszcze jedno pytanie nasuwające się z pewnością Czytelnikowi: skąd bierze się nazwa „zasada lokalno — globalna”? Otóż ciała liczb p -adycznych są nazywane także ciałami lokalnymi. Mówimy, że równanie (*) jest rozwiązalne lokalnie, jeśli ma niezerowe rozwiązanie w ciele R liczb rzeczywistych oraz niezerowe rozwiązanie w każdym ciele Q_p liczb p -adycznych. Warunki (a), (b) są więc równoważne lokalnej rozwiązalności równania (*). Z drugiej strony, rozwiązanie równania (*) w liczbach naturalnych nazywamy rozwiązaniem globalnym. A więc zasada lokalno — globalna mówi, że jeśli $F(X_1, \dots, X_r)$ jest formą kwadratową o współczynnikach całkowitych, to równanie $F(X_1, \dots, X_r) = 0$ jest rozwiązalne globalnie wtedy i tylko wtedy, gdy jest rozwiązalne lokalnie.



Polskie Towarzystwo Matematyczne i nasz miesięcznik postanowiły w 1980 r. zorganizować konkurs prac maturalnych. Tych z naszych Czytelników, którzy są aktualnie uczniami klas maturalnych i ich nauczycieli zapraszamy serdecznie do wzięcia w nim udziału.

Regulamin Konkursu prac maturalnych z matematyki

1. Konkurs organizowany jest corocznie przez Zarząd Główny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i Redakcję miesięcznika „Delta”, przy poparciu Ministerstwa Oświaty i Wychowania.
2. W Konkursie mogą brać udział uczniowie wszystkich typów szkół piszący w danym roku maturalne prace pisemne z matematyki.
3. Konkurs składa się z eliminacji i finału.
4. W eliminacjach bierze udział każdy uczeń, który do dnia 1.04.1980 roku prześle pod adresem Redakcji „Delt” jeden egzemplarz swojej pracy maturalnej. Do pracy należy dołączyć następujące informacje: adres prywatny Autora, nazwa i adres szkoły, imię i nazwisko nauczyciela — opiekuna pracy. Praca powinna być oryginalna i zawierać pełną informację o źródłach, z których korzystał jej Autor. Prace czysto kompilacyjne nie będą dopuszczone do finału Konkursu.
5. Prace nadesłane na eliminacje zostaną ocenione przez Komisję Konkursu i kompetentnych recenzentów. Te spośród nich, które spełniają warunki Konkursu zostaną przedstawione Jury Konkursu. Jury zakwalifikuje najlepsze prace do finału, który odbędzie się w trakcie dorocznej Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego.
6. Zawiadomienia o zakwalifikowaniu do finału zostaną przesłane Autorom prac oraz nauczycielom — opiekunom prac do końca maja danego roku, nie później jednak niż na 20 dni przed początkiem Sesji. Finałiści i nauczyciele opiekujący się ich pracami otrzymają od Zarządu Głównego PTM zaproszenia do udziału w Sesji na koszt Towarzystwa.
7. Finał polega na wygłoszeniu przez ucznia, podczas specjalnego otwartego posiedzenia Sesji, referatu trwającego nie dłużej niż 15 minut i wzięcia udziału w dyskusji na temat, któremu poświęcona była praca.
8. Rezultaty finału oceni Jury Konkursu. Jury będzie brało pod uwagę, oprócz merytorycznej wartości pracy, również samodzielność i oryginalność ujęcia tematu oraz przebieg referatu i dyskusji. Jury przyzna medale: złoty, srebrny i brązowy.
9. Ogłoszenie wyników finału nastąpi w trakcie Walnego Zgromadzenia Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Medale wręczy Prezes Towarzystwa. Wszyscy uczestnicy finału otrzymają dyplomy.
10. Wyniki Konkursu i skróty zwycięskiej pracy będą opublikowane w miesięczniku „Delta”.