Rysunki techniczne:
Bogusław Kretkiewicz

W następnym numerze:
Gwiazdy kuliste, gwiazdy płaskie, gwiazdy z dziurą

„Delta”
matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego wydawany przy poparciu Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Adres Redakcji
ul. Hoża 69 pok. 151,
00-681 Warszawa
Zakład Narodowy im. Ossolińskich — Wydawnictwo Wrocław, Oddział w Warszawie
Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark. wyd.; 2,50 ark. druk.;
papier offsetowy III kl. 80 g. 61×86
Wydrukowano w Drukarni im. Rewolucji Październikowej Warszawa, ul. Mińska 65
Nr zam. 1263/79 C-49

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60—, cena prenumeraty półrocznej zł 30—

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach:
— do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i cały rok następny
— do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego.
Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienie w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”.
Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW, oraz prenumeratorzy indywidualni zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.
Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich
Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTĘ”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.
Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.
Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Konto PKO I OM W-wa 1531-912

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław
w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa
w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7 00-068 Warszawa, Poland or with
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland.
— Earlscourt Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain,
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia

Cena 1 egzemplarza zł 5— **nr indeksu 35723/35550**

Dla dzieci
należy pisać
krótko, prosto i ciekawie

Ten pogląd
zdaje się sugerować
że dla dorosłych należy pisać ...

Nie!
A że dla dorosłych można pisać jak dla dzieci
może zaświadczy ten numer
który w całości przygotowała

mała delta

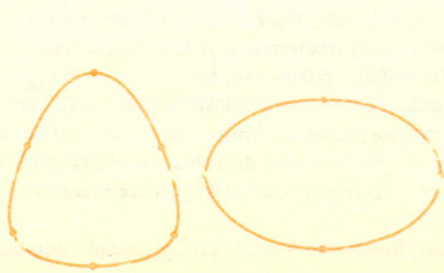
Teksty napisali: *Tomasz CHLEBOWSKI, Bożena JAWORSKA-KORDOS, Marek KORDOS, Andrzej KRASIŃSKI, Krzysztof NOWIŃSKI, Andrzej PELC* i *Michał SZUREK*

Więcej światła

Tomaszowi Edisonowi przypisuje się pomysł (umieszczony zresztą w amerykańskim filmie biograficznym), że aby umożliwić wykonanie operacji chirurgicznej w zbyt słabym oświetleniu, pozawieszał na ścianach pomieszczenia wszelkie dostępne lustra; oświetlenie ,,zrobiło się" lepsze i operację pomyślnie przeprowadzono.
Istotnie, Edison zawieszał lustra gdzie się dało, który to pomysł może się wydać głupi, choćby z tego powodu, że dziś nikt tak sal operacyjnych nie wyposaża — daje się tylko reflektor. No cóż, może mamy dostatecznie silne źródła światła i nie musimy tak ,,ciułać" jak wielki wynalazca?
Stawiając problem jasno:
1. Ile razy lepsze oświetlenie od bezpośredniego można uzyskać przez użycie luster? 2. Czy można ustawić lustra tak, by uzyskać oświetlenie lepsze niż z reflektora?
A teraz głupie pytanie służące jako test poprawności rozumowania, którego użyliście do uzyskania odpowiedzi na postawione problemy: Między dwa równoległe lustra wstawiamy żarówkę. Jak silnie będzie się ona oświetlała?

Owal

— to krzywa zamknięta ograniczająca figurę wypukłą na płaszczyźnie. Rozpatrujmy tylko krzywe (owale) bez ostrzy. W każdym punkcie takiej krzywej istnieje styczna i to tylko jedna. Owal można otrzymać, wygładzając lekko kanty przy wierzchołkach wielokąta wypukłego.
W pobliżu tych punktów krzywizna owalu jest maksymalna.
Wierzchołkami owalu nazywają się punkty o ekstremalnej (maksymalnej lub minimalnej) krzywiźnie. A więc każdy owal ma co najmniej dwa wierzchołki, bo funkcja ,,krzywizna" przyjmuje gdzieś maksimum, a gdzieś minimum. No i dobrze. Ale okazuje się, że
każdy owal ma przynajmniej cztery wierzchołki.
Skąd wziąć pozostałe dwa? Na rysunkach widać, że ,,muszą" się zawsze znaleźć. Ale ścisły dowód nie jest prosty.

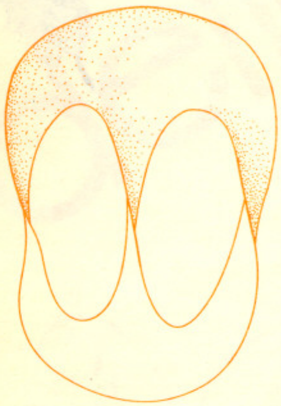


Ekonomia

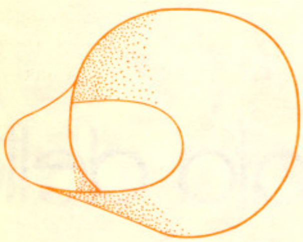
Czaszki małych ssaków stanowiące składnik złóż kostnych znajdowanych na pustyni Gobi obok kości olbrzymich jaszczurów to dowód, że istniały w owych czasach ssaki. Istnieje problem na razie niemożliwy do kategorycznego rozstrzygnięcia, czy były one stekowcami, torbaczami czy łożyskowcami.
Nasuwa się pytanie, czy to jest ciekawe. Otóż dla niektórych pewnie ciekawe, dla innych nieciekawe, ale dlaczego ciekawe — nie sposób właściwie wyjaśnić.
Lub czy ciekawe jest pytanie o istnienie liczb naturalnych x, y, z, n (przy czym $n > 2$) takich, że $x^n + y^n = z^n$?
,,A pies z nimi tańcował" — powiedzą niektórzy i nie będziemy mogli dyskutować z tą opinią.
Zwykle, aby udowodnić, że coś jest ciekawe lub co najmniej ważne, wzywa się w sukurs ekonomię. Lecz czy mogą mieć znaczenie ekonomiczne jakieś ssaki dawno już wymarłe i co może zależeć od pytania, czy miały one torbę czy łożysko? Albo czy zbiedniejemy od stwierdzenia, że Fermat jednak miał rację i liczby takie nie istnieją? Wbrew pozorom fakty te mają znaczenie ekonomiczne, i to bardzo doniosłe i bardzo bezpośrednie. Jest mało prawdopodobne, aby człowiek, który sądzi, że pytania te są ciekawe, wyciągnął portmonetkę z kieszeni kolegi. Dlaczego? — też nie sposób wyjaśnić.

Rozwiązanie zadania M 216

a)



b)



Pochwała ścisłości

Fizykę przenikają dwa nurty, dwa różne style tworzenia nowych odkryć. Jeden z nich — to wykrywanie ścisłych, na ogół prostych, matematycznych reguł, które przyroda realizuje tylko w przybliżeniu albo w skrajnie wyidealizowanych i praktycznie nieosiągalnych warunkach. Drugi — to próby uchwycenia rzeczywistych procesów zachodzących w przyrodzie, w całej ich komplikacji i złożoności, jednak przy niedokładnej znajomości rządzących nimi ogólnych praw. Przykładem odkrycia pierwszego typu jest teoria grawitacji Newtona. To prawda, że stosuje się ona do rzeczywistości tylko w przybliżeniu, ponieważ żaden realny układ fizyczny nie spełnia jej założeń.

Na przykład, ruch Ziemi wokół Słońca da się opisać przez ścisłe rozwiązanie równań ruchu Newtona dla punktu materialnego w polu grawitacyjnym o symetrii kulistej. Opis ten jest jednak tylko przybliżony, nie uwzględnia bowiem faktu, że oprócz Ziemi okrążają Słońce inne planety, które także oddziałują grawitacyjnie z Ziemią i zaburzają jej orbitę. Nie uwzględnia faktu, że Ziemia krąży wokół wspólnego środka masy z Księżycem, faktu, że Słońce nie jest dokładnie kulą, że przestrzeń międzyplanetarna nie jest dokładnie pusta, lecz wypełniona cząstkami pyłu i wiatru słonecznego, które hamują obieg Ziemi przez tarcie. Jeśli wziąć pod uwagę te wszystkie efekty, opis orbity Ziemi staje się dokładniejszy, lecz tak skomplikowany, że mogą się nim posługiwać tylko komputery. A mimo to ...

Ten skomplikowany opis powstaje po prostu przez sumowanie oddziaływań grawitacyjnych Ziemi ze Słońcem, Księżycem i planetami, z których każde osobno wyraża się tym samym, genialnie prostym i łatwym do zapamiętania prawem

$$\mathbf{F} = -G \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Mimo więc, że nie potrafimy ująć jednym równaniem rzeczywistych torów planet, potrafimy je sobie poskładać z prostszych elementów, które dobrze znamy i rozumiemy dzięki Newtonowi. Jakże prymitywnie i ubogo wygląda w porównaniu z tym taki np. opis profilu prędkości dla przepływu turbulentnego cieczy ponad płaską powierzchnią szorstką, oparty na równaniu:

$$\frac{u}{\sqrt{\tau_0/\varrho}} = 8{,}48 + 5{,}75 \ln\left(\frac{y}{K}\right),$$

gdzie u — prędkość cieczy w punkcie odległym o y od powierzchni, K — charakterystyczny rozmiar elementów szorstkich (ziarna piasku lub zagłębienia), τ_0 — naprężenie na powierzchni dna, ϱ — gęstość cieczy.

Równanie to ma odtwarzać pewne cechy przepływu ściśle i wiernie, lecz w rzeczywistości nie pozwala nam zrozumieć elementów dynamiki przepływu i odzwierciedla tylko naszą słabość i bezradność, której wyrazem są całkowicie niezrozumiałe współczynniki liczbowe. Zostało ono dopasowane do pewnego małego zbioru wyników doświadczalnych i nie jest w stanie objaśnić niczego ponadto. Wystarczy, żeby dno kanału stało się gładkie lub przestało być płaskie, i już trzeba uciekać się do całkiem innych równań, w żaden widoczny sposób nie powiązanych z powyższym. Jest to sytuacja typowa dla drugiego spośród omawianych stylów pracy naukowej. Stanowczo opowiadam się za pierwszym.

Uniwersalny szyfr

W naszych czasach coraz więcej rzeczy staje się tajnych. To dlatego, że nasze życie jest coraz bardziej uzależnione od setek i tysięcy drobiazgów, a kontrolę nad nimi każdy chce zachować dla siebie. Przyjdzie może czas, kiedy na posiadanie tablic logarytmicznych wymagane będzie zezwolenie. Żarty? Mam nadzieję. Na razie grozi nam utajnienie tablic rozkładów liczb na czynniki pierwsze. A oto dlaczego.

Każdy szyfr ma jedną zasadniczą wadę: jeżeli znamy sposób szyfrowania, to i deszyfrowania. Dlatego im więcej osób może przesyłać nam zaszyfrowane wiadomości, tym łatwiej policja rozpracuje naszą siatkę. Nawet, gdy używamy tak doskonałego szyfru, jak ten opisany w przygodach dzielnego wojaka Szwejka (tom III, „*Przesławne lanie*"). Każdy z nas bez wahania założyłby się, że znajomość sposobu szyfrowania umożliwia odczytanie każdej zaszyfrowanej wiadomości. A tymczasem rzecz ma się trochę inaczej. Oto jak grupa osób może ustalić system szyfrów tak, by

1) każda z osób mogła ogłosić publicznie (na przykład w gazecie): adresowane do mnie wiadomości proszę szyfrować tak a tak. Szyfrowaną wiadomość (adresowaną do jednej z osób tej grupy) może wysłać dowolna, niekoniecznie wtajemniczona osoba. Dowolna osoba może ogłosić: przystępuję do spółki; proszę przeznaczone dla mnie wiadomości szyfrować tak a tak, oraz, by

2) zaszyfrowanego komunikatu nie mógł odczytać nikt poza adresatem.

Do zbudowania takiego szyfru posłużono się teorią liczb. Oto nieskomplikowane twierdzenie: *Jeżeli liczba naturalna N jest iloczynem dwu liczb pierwszych p, q, to dla* $M = (p-1)(q-1)+1$ *i dla każdego* $n < N$ *zachodzi*

$$n^M \equiv n \pmod{N};$$

tj. n^M i n dają z dzielenia przez N tę samą resztę.

Każda z osób, chcących mieć własny szyfr, wybiera sobie dwie dość duże liczby pierwsze (co najmniej kilkudziesięciocyfrowe) p, q, oblicza ich iloczyn N, oraz liczbę $M = (p-1)(q-1)+1$. Do wiadomości ogólnej podaje N i pewien dzielnik liczby M, oznaczmy go przez K. Dla siebie zachowuje rozkład N na p i q oraz liczbę M.

Gdy nadawca **NAD** chce wysłać wiadomość do odbiorcy **ODB**, postępuje tak. Zamienia tekst słowny na ciąg cyfr w jakiś standardowy, ustalony i jawny sposób, np. A = 1, B = 2 itd. Otrzymaną tak dużą liczbę (komunikat nie może być długi) podnosi do potęgi K_{ODB} i bierze resztę z dzielenia przez N_{ODB}. Potrzebna jest do tego maszyna matematyczna, ale nic ponadto. Tak zakodowaną wiadomość (będącą teraz liczbą mniejszą niż N_{ODB}) wysyła się do odbiorcy lub publikuje w gazecie. Odbiorca winien podnieść tę liczbę do potęgi $\dfrac{M_{ODB}}{K_{ODB}}$ — otrzyma wtedy ciąg liczb wysłany przez nadawcę. Przetworzenie go na tekst słowny odbywa się we wspomniany jawny i standardowy sposób.

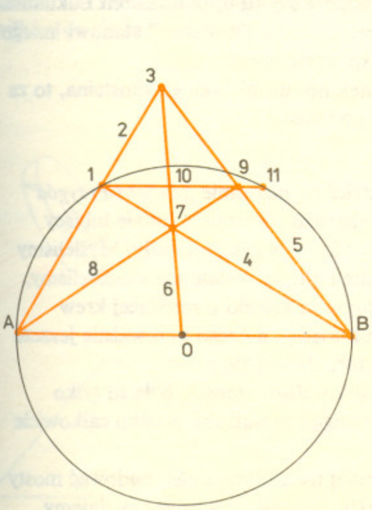
Co w tym takiego rewelacyjnego? — zapytacie. A to, że podniesienie nawet bardzo dużej liczby do bardzo dużej potęgi M jest dla maszyny matematycznej mało pracochłonne, zwłaszcza że wszystkie obliczenia robi się i tak modulo N. Wynik dostaje się w ułamku sekundy. Osoba postronna nie zna jednak liczby M; mogłaby ją obliczyć, znając p i q. Ale zna tylko N, równe pq. Gdy p i q mają po kilkadziesiąt cyfr, N ma sto kilkadziesiąt. Znalezienie rozkładu takiej liczby na czynniki nawet najszybciej działającej maszynie zajęłoby (przy obecnym stanie techniki, informatyki i organizacji maszyn cyfrowych) wiele, wiele lat pracy.

Szyfr ten nie daje się złamać najgroźniejszą bronią: analizą statystyczną, rozpracowującą szybko wszystkie szyfry polegające na stałym przyporządkowaniu litera-liczba. Autorzy tego szyfru napisali (w *Scientific American*), że są niezbicie pewni, iż nikt nie potrafi odczytać zaszyfrowanej przez nich do samych siebie wiadomości.

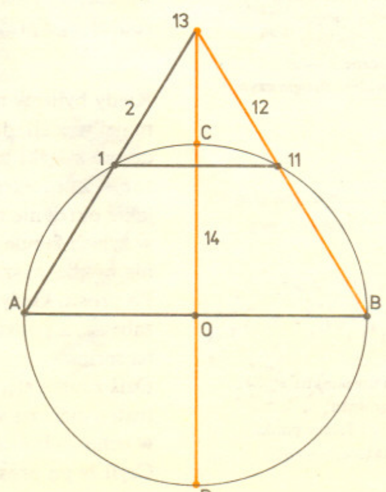
Tylko linijką

Jeżeli mamy na kartce papieru narysowany okrąg z zaznaczonym środkiem *O*, to możemy bez trudu samą linijką wpisać w ten okrąg kwadrat. Robi się to w następujący sposób (rysunek podzieliliśmy na dwa etapy): Prowadzimy dowolną średnicę. Jej końce oznaczamy *A* i *B*. Obieramy na okręgu jeszcze jeden punkt *1*. Na prostej *2* przechodzącej przez *A* i *1* obieramy na zewnątrz okręgu punkt *3*. Łączymy *1* z *B* prostą *4*, *3* z *B* prostą *5* i *3* z *O* prostą *6*. Przez punkt *7* leżący na prostych *4* i *6* prowadzimy prostą *8* do przecięcia z *5* w punkcie *9*. Prosta *10* łącząca *1* i *9* przecina okrąg w punkcie *11*. Przez *B* i *11* prowadzimy prostą *12* do przecięcia z *2* w punkcie *13*. Prosta *14* łącząca *O* i *13* przecina okrąg w punktach *C* i *D*. Czworokąt *ACBD* jest kwadratem, co Czytelnik z łatwością udowodni wykazując, że prosta *10* jest równoległa do *AB* (pierwszy rysunek), zaś kąt *AOC* jest prosty (drugi rysunek).

Półtora wieku temu Steiner wykazał, że każda konstrukcja wykonalna cyrklem i linijką jest wykonalna samą linijką, o ile tylko mamy do dyspozycji (być może nawet dość daleko, ale na tej samej karcie) jeden narysowany okrąg z zaznaczonym środkiem. Można spróbować dowieść, że tak jest w istocie, lub znaleźć steinerowską konstrukcję dla jakiegoś wybranego zadania.



W okrąg z zaznaczonym środkiem można wpisać kwadrat za pomocą samej linijki

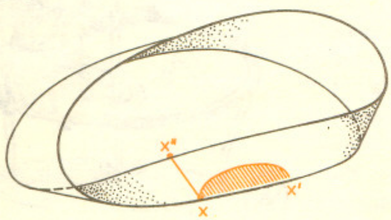


Nobel dla pracowitych

W roku 1978 połowę nagrody Nobla w dziedzinie fizyki przyznano dwu amerykańskim radioastronomom, Arno Penziasowi i Robertowi Wilsonowi, za odkrycie reliktowego promieniowania elektromagnetycznego, które powstało we wczesnych etapach ewolucji Wszechświata (por. B. Kuchowicz, Delta 10/1976). Odkrycia tego dokonali oni zupełnie przypadkowo podczas pracy o czysto inżynierskim charakterze. Testowali mianowicie skonstruowaną przez siebie antenę przeznaczoną do telekomunikacji satelitarnej. Antena przekazywała do aparatury odbiorczej sygnał nieco silniejszy niż szum, którego należało oczekiwać wskutek ruchów cieplnych atomów w materiałach konstrukcyjnych. Mimo że ów dodatkowy szum był bardzo słaby i aparatura mogła z powodzeniem pracować, Penzias i Wilson postanowili znaleźć jego przyczynę. Potrzeba było wiele pracy, zanim upewnili się, że źródłem szumu nie jest defekt aparatury, i stwierdzili, że odbierają sygnały docierające do Ziemi z przestrzeni.
Odkrycie warte najwyższej nagrody naukowej przyniosła im więc staranność i sumienność w pracy. I jeszcze coś: zaufanie do staranności i sumienności wszystkich innych ludzi, którzy pracowali przy budowie elementów ich aparatury. Mogli przecież powiedzieć: dajmy sobie spokój, ten szum w niczym nam nie przeszkadza. Mogli też pomyśleć: znowu ktoś coś spartaczył, coś źle kontaktuje w aparaturze, nie zawracajmy sobie głowy, bo ten defekt może kryć się wszędzie i miną lata zanim go znajdziemy.
Jednak ufali w uczciwą pracę innych i chcieli swoją pracę wykonać do końca solidnie. Nie myśląc przy tym o nagrodzie Nobla.
A czy Ty, Czytelniku, miałbyś takie zaufanie?

Rozcinanie wstęgi Möbiusa

Wstęga Möbiusa powstaje, gdy prostokątny (najlepiej dość długi) pasek papieru skleimy tak, że przedtem obrócimy jeden ze sklejanych końców o 180°. Ta powierzchnia ma tylko jedną stronę, choć powstała z dwustronnej kartki papieru. Jej brzeg też jest jedną linią — a nie dwiema, jak prostej wstęgi. Nazwijmy rozcięcie wstęgi Möbiusa poprzecznym, jeżeli zaczyna się ono i kończy na jej brzegu. Na rysunku widzimy dwa cięcia poprzeczne $x - x'$ i $x - x''$. Pierwsze z nich odcina od wstęgi zakreskowany kawałek, drugie czyni tylko ze wstęgi pasek.



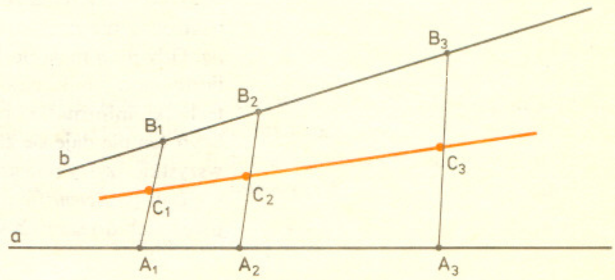
Odsuwajmy teraz punkt x' od punktu x. Zajdziemy wreszcie i do punktu x'' — ponieważ brzeg naszej wstęgi jest jedną linią. A od jakiego momentu rozcięcie $x - x'$ przestanie rozcinać wstęgę naszą na dwie części? Który punkt będzie „graniczny"? Nie widać żadnego naturalnego kandydata!
Już chwytacie za nożyczki? E, tak to nie sztuka!

Krzywa podłoga

Jak to, być może, jest znane Czytelnikom z praktyki, kwadratowy stół możemy ustawić na dowolnym miejscu nierównej podłogi tak, aby się nie chwiał — aby tylko nogi miały równe długości. Istotnie, przypuśćmy, że koniec nogi A nie dotyka podłogi. Wyobraźmy sobie teraz, że przy obracaniu stołu o kąt 90° względem środka, nogi B, C, D ślizgają się cały czas po podłodze (przez 3 punkty zawsze przechodzi płaszczyzna). Ponieważ po tym obrocie noga A zajmie miejsce nogi B, noga B — miejsce C itd., zauważymy łatwo, że po tym obrocie noga A musiałaby się znaleźć pod powierzchnią podłogi. Wobec tego gdzieś „po drodze" było miejsce, w którym noga A spoczęła na podłodze, czyli cały stół stał pewnie.

Środki

Na prostej a obierzmy trzy punkty A_1, A_2, A_3. Następnie na jakiejś innej prostej b trzy punkty B_1, B_2, B_3 takie, że $A_iA_j = B_iB_j$ $(i, j = 1, 2, 3)$. Niech teraz C_i będzie środkiem $\overline{A_iB_i}$ $(i = 1, 2, 3)$. Okazuje się, że punkty C_1, C_2, C_3 leżą na jednej prostej (mogą też być wszystkie równe).
Polecamy Czytelnikom dowód powyższego **twierdzenia Hjelmsleva**, ale mamy też własną sugestię: wystarczy wykazać, że punkty A_1, A_2, A_3 można nałożyć na punkty B_1, B_2, B_3, wykonując pewną symetrię osiową i przesuwając równolegle do jej osi. Wtedy każdy spostrzeże, że właśnie na osi tej symetrii leżą punkty C_1, C_2, C_3.



Twierdzenie Hjelmsleva. C_1, C_2, C_3 leżą na linii prostej

Styl

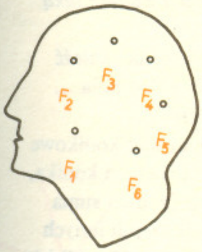
Powiadają, że szczęście wygląda inaczej dla każdego człowieka, że, innymi słowy, jeden ma temperament na bycie św. Szymonem Słupnikiem, drugi znów skłania się ku upodobaniom Lukullusa. A niezależnie od wszystkiego „dać się zasiekać" stanowi innego rodzaju przyjemność niż spożycie porcji lodów.
I może, jeśli mamy szacunek np. do niejakiego Einsteina, to za rodzaj jego przyjemności po prostu.

*

Kiedy byliśmy młodzi (gdzieś na poziomie „*Świata Przygód*" mniej więcej), dziwiło nas bardzo, że istnieją ludzie lubiący czytać książki bez mrożącej krew w żyłach fabuły. Myśleliśmy sobie, że to okropnie nudne i głupie. Wcale nie wiedzieliśmy, jakie okropnie nudne i głupie są książki o mrożącej krew w żyłach fabule, co dziś już wiemy, a czego przeważnie jeszcze nie wiedzą nasze dzieci, które dziwią się jw.
Po prostu kiedyś, kiedy budowaliśmy mosty, była to tylko zabawa, a podstawialiśmy nogę i dawaliśmy w ucho całkowicie na serio.
Dziś zdarza się, przynajmniej niektórym z nas, budować mosty (całkowicie na serio), a jeśli podstawiamy nogę czy dajemy w ucho — jest to raczej zabawa.
Czyli że po prostu zmienił się ulubiony bohater.

Lemniskata

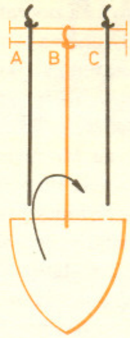
Jeżeli punkt wędruje po płaszczyźnie tak, że w czasie tego ruchu iloczyn odległości tego punktu od dwóch ustalonych przedtem punktów płaszczyzny jest stały, to drogą punktu jest krzywa zwana *lemniskatą* (co po grecku znaczy „wstęgopodobna").
No to nazwijmy n-lemniskatą krzywą złożoną z punktów, których iloczyn odległości od przedtem wybranych punktów $F_1, \ldots, F_n$ jest stały. Takie lemniskaty mają całkiem różne kształty. Co więcej, każda krzywa zamknięta jest „prawie lemniskatą".
Dokładniej, ma miejsce następujące twierdzenie:
Dla każdej dodatniej liczby ε i dla każdej krzywej zamkniętej na płaszczyźnie istnieje n-lemniskata odległa od niej mniej niż o ε.
(mówimy, że dwie krzywe są odległe od siebie o mniej niż ε, jeżeli jedna z nich mieści się całkowicie w pasku o szerokości ε wokół drugiej).
Kto potrafi to udowodnić?



6-lemniskata

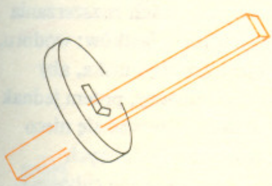
Węzły

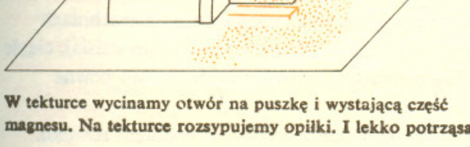
Weźmy trzy cienkie sznurki równej długości i przymocujmy je z jednej strony (powiedzmy) do poręczy krzesła, a z drugiej przywiążmy coś takiego jak na rysunku. Będziemy to nazywać plakietką. Powinna ona mieć strony w różnym kolorze. Przetykając je między sznurkami otrzymujemy różne węzły. Możemy przy tym albo starać się zachować ją w nie zmienionym położeniu (stale pionowo, pomarańczową stroną do nas, ostrzem w dół), bądź zaplątywać węzeł obracając ją o 180° wokół górnego brzegu (wtedy do nas będzie zwrócona druga jej strona).
Zaplączmy więc nasze sznurki i starajmy się rozplątać węzeł. Oczywiście w tym celu wystarczy operacje supłania wykonywać po prostu w odwrotnej kolejności. A może można rozplątać węzeł nie wyjmując plakietki z płaszczyzny — czyli wykonując tylko ruchy pierwszego z opisanych typów? Niestety nie. Nie można już tego zrobić np. z węzłem powstałym przez obrócenie plakietki w przód między sznurkami *B* i *C*. Ale jeżeli zaplączemy go jeszcze raz, obracając plakietkę między dwoma innymi sznurkami — dostaniemy węzeł możliwy do rozsupłania za pomocą tylko poziomych ruchów plakietki. Nie tak trudno się o tym przekonać. Znacznie trudniej odkryć ogólne twierdzenie: jakie węzły dadzą się rozplątać w ten sposób? Oto twierdzenie, udowodnione przez współczesnego matematyka, Emila Artina: *Węzeł można rozplątać bez obracania plakietki wtedy i tylko wtedy, gdy przy jego wiązaniu plakietkę obrócono parzystą liczbę razy.*
Dowód jest wcale niełatwy, a wykorzystuje bardzo obficie (właściwie wyłącznie) teorię grup. Bo przecież takie węzły tworzą grupę — ze względu na operację „supłania". Co dziś abstrakcyjne, jutro może znaleźć się w dziale „zastosowania".



Trudno się domyślić

jak wygląda pole magnetyczne pochodzące od monopola (*mono* — jedno, *polus* — biegun) magnetycznego, tym bardziej, że ogólna opinia skłania się ku przekonaniu, iż monopole nie istnieją (w Delcie 4/1974 opisaliśmy ich odkrycie, ale był to żart primaaprilisowy). Można oczywiście próbować to wydedukować ze znanego wyglądu pola magnetycznego dipola (*di* — dwu) lub — przez analogię — sądzić, że jest ono takie, jak pole elektrostatyczne naelektryzowanej kulki.
Daleko lepiej jednak sprawdzić to doświadczalnie. Jak wiadomo z lektur o łodziach podwodnych, stalowa puszka „ekranuje" pole magnetyczne. Skoro tak, to dysponując magnesem sztabkowym, pewną ilością opiłków żelaznych i zamykaną puszką możemy obejrzeć interesujące nas zjawisko. Wycinamy mianowicie w pokrywce puszki otwór akurat na nasz magnes, wstawiając magnes w ów otwór i zamykając puszkę... No właśnie. „Wyszedł" nam monopol, czy nie? Przy pomocy opiłków da się to sprawdzić.

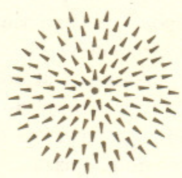




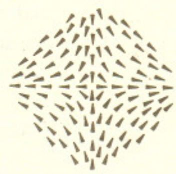
W tekturce wycinamy otwór na puszkę i wystającą część magnesu. Na tekturce rozsypujemy opiłki. I lekko potrząsamy.

Czesanie sfery

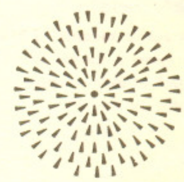
Powierzchni kuli (nazywamy ją sferą) pokrytej włosami nie można gładko zaczesać; zawsze utworzy się gdzieś:



„łysinka"

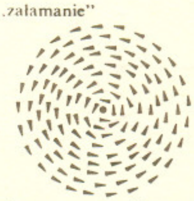


„załamanie"

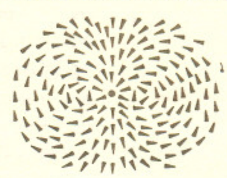


„czubek"

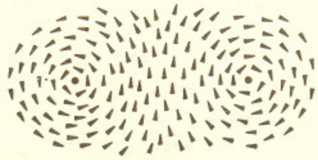
lub „wicherek".



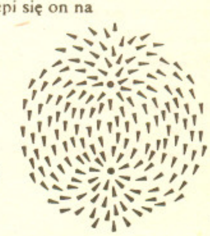
Co ciekawsze, osobliwości takie nie mogą wystąpić samotnie: liczba „łysinek" + liczba „czubków" + liczba „wicherków" = liczba „załamań".
Ponadto liczba „wicherków" musi być parzysta. Można wprawdzie uczesać naszą sferę gładko poza jednym punktem, w którym będzie „wicherek podwójny",



ale przy najmniejszej niedokładności rozszczepi się on na dwa „wicherki"



lub



„łysinkę" i „czubek".

PS. W każdej chwili są na Ziemi dwa miejsca, gdzie nie wieje wiatr.

16	9	6	27	18
7	26	17	14	5
10	15	8	19	28
25	30	23	4	13
22	11	2	29	20
1	24	21	12	3

Kwadrat Wenzelidesa

47	10	23	64	49	2	59	6
22	63	48	9	60	5	50	3
11	46	61	24	1	52	7	58
62	21	12	45	8	57	4	51
19	36	25	40	13	44	53	30
26	39	20	33	56	29	14	43
35	18	37	28	41	16	31	54
38	27	34	17	32	55	42	15

Zamknięta droga konia szachowego na trzydziestopolowej szachownicy

Szachy

W końcu ubiegłego i na początku obecnego wieku niezmiernie modne były tak zwane zadania konikowe. Polegały one na tym, by ruchem konika szachowego obiec wszystkie pola szachownicy i ewentualnie w ostatnim skoku powrócić na pole wyjściowe. Zagadnieniami skoków konika po szachownicy zajmowało się bardzo wielu matematyków (najgruntowniejsze są wyniki sławnego Eulera) i amatorów (spośród tych ostatnich największą sławę zdobył Wenzelides — emerytowany urzędnik kolejowy na Morawach w połowie ubiegłego wieku). Dopiero jednak niedawno (w 1978 roku) pojawiła się pierwsza praca zawierająca kompletne rozwiązanie problemu: czy pola dowolnej szachownicy prostokątnej można obejść ruchem konika? Kiedy można znaleźć taką drogę, by z ostatniego pola przeskoczyć z powrotem na pierwsze? Oto owo proste w sformułowaniu, a niełatwe do wykazania

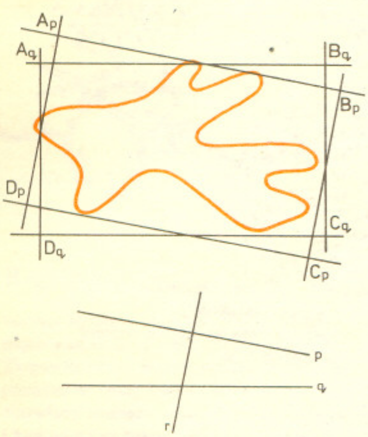
Twierdzenie: *Jeżeli obie liczby m, n są co najmniej równe 5, to szachownicę o rozmiarach $m \times n$ można obejść ruchem konika. Jeżeli liczba pól szachownicy jest parzysta, to można znaleźć taką drogę by z ostatniego pola dało się przeskoczyć na pierwsze.*

Zauważmy, że jeżeli liczba pól szachownicy jest nieparzysta, to na pewno nie można znaleźć zamkniętej drogi konikowej. A to dlatego, że przy każdym ruchu koń zmienia kolor pola ...

Na tych, którzy by jeszcze chcieli skakać konikiem po szachownicy, czeka wiele nie rozwiązanych zagadnień. Euler, Wenzelides i inni, mniej znani, próbowali zbudować konikowe kwadraty magiczne, tj. tak ponumerować pola szachownicy kolejnymi liczbami ruchem konika, by utworzył się kwadrat magiczny. Szybko zbudowano kwadraty półmagiczne (w nich suma liczb na przekątnych różni się od sumy liczb w rzędach). Wykazano, że na niektórych innych szachownicach można zbudować pełny kwadrat magiczny (16×16, 20×20, 24×24, 32×32) i że na pozostałych mniejszych od 36 nie można — z wyjątkiem właśnie zwykłej szachownicy 8×8. O niej w tej materii nic nie wiadomo. Na razie nie pomagają ani bystre umysły, ani szybkie maszyny. Konikowy kwadrat magiczny na szachownicy 8×8 nie chce wyjść.

Rozwiązanie zadania M 214

Na krzywej K można łatwo opisać prostokąt o dwóch bokach równoległych do dowolnej prostej p:



Łatwo zauważyć, że wymiary tego prostokąta zależą w sposób ciągły od kierunku tej prostej: gdy prosta q tworzy mały kąt z p, wymiary prostokątów $A_pB_pC_pD_p$ i $A_qB_qC_qD_q$ niewiele się różnią. Zauważmy teraz, że gdy prosta r jest prostopadła do p, to $A_rB_rC_rD_r = B_pC_pD_pA_p$: zamieniliśmy tylko boki prostokąta. Jeżeli więc $A_pB_p > B_pC_p$, to $A_rB_r < B_rC_r$ i pomiędzy kierunkami prostych p i r znajdzie się kierunek s taki, że $A_sB_sC_sD_s$ jest kwadratem. (Patrz „twierdzenie o kiwającym się stole").

Pochwała nieścisłości

Ścisłe prawa fizyki są w gruncie rzeczy nic niewarte. Co z tego, że potrafimy ściśle opisać oddziaływanie grawitacyjne dwu cząstek, skoro każdy realny układ grawitacyjny składa się z wielu ciał. Co z tego, że mamy ścisłe rozwiązania równań Schrödingera i Diraca opisujące atom z jednym elektronem, skoro obiekty w praktyce najważniejsze (np. kryształy półprzewodników czy rdzenie reaktorowe) składają się z wielkich zespołów atomów wieloelektronowych, do których opisu i tak trzeba tworzyć osobne formalizmy.

Ścisłość wodzi nas nawet na manowce. Na przykład rozszerzanie się Wszechświata jest opisywane prostym, ścisłym rozwiązaniem równań pola grawitacyjnego, które jednak otrzymuje się przy założeniu, że Wszechświat jest sferycznie symetryczny i jednorodny. Fakt, że obserwacje astronomiczne potwierdzają rozszerzanie się Wszechświata, i to w sposób w przybliżeniu zgodny z owym rozwiązaniem, niektórzy ludzie przyjmują jako dowód, że nasz Wszechświat jest i zawsze był jednorodny i sferycznie symetryczny. W modelu takim nie można jednak opisać np. tworzenia się galaktyk, które przecież istnieją. Aby stworzyć opis uwzględniający ten fakt, trzeba odstąpić od upraszczających założeń, czyli w rezultacie przejść do opisu przybliżonego, nieścisłego.

Większą wartość ma opis teoretyczny nakierowany wprost na wyjaśnienie zjawisk przyrody w całej ich złożoności, nawet jeśli jest on oparty o niedokładne i niekompletne dane o elementach składowych poszczególnych procesów. Na przykład na podstawie przybliżonych (uzyskanych przez ekstrapolacje z bezpośrednich pomiarów) danych dotyczących wydajności poszczególnych reakcji między cząstkami elementarnymi (przy różnych temperaturach i gęstościach materii) udało się odtworzyć w ogólnych zarysach proces powstawania wszystkich pierwiastków cięższych od wodoru. Rachunki, prowadzone na komputerach, wykazały, że w pierwszych fazach rozszerzania się Wszechświata mogą praktycznie powstać tylko jądra trzech najlżejszych pierwiastków: wodoru, helu i litu oraz ich izotopów. Po wytworzeniu litu temperatura materii jest już zbyt niska, aby reakcje mogły przebiegać dalej. Odkrycie to początkowo bardzo zmartwiło badaczy, potem jednak okazało się, że produkcja jąder cięższych pierwiastków może z powodzeniem odbywać się nieco później, we wnętrzach gwiazd, po ich utworzeniu. Testy obserwacyjne dostarczyły dalszych dowodów na taką „dwustopniową" produkcję pierwiastków. Obliczenia, wykonywane cały czas w oparciu o mało dokładne dane, pozwoliły w rezultacie wyjaśnić całkiem drobne nawet wzniesienia i luki na krzywej obrazującej zależność rozpowszechnienia danego izotopu we Wszechświecie od jego liczby masowej.

Podobnymi metodami udało się również opisać wiele skomplikowanych procesów mechanicznych, termodynamicznych i elektromagnetycznych zachodzących we wnętrzach i na powierzchniach gwiazd. Nad ścisłymi równaniami opisującymi te procesy siedzielibyśmy pewnie do dzisiaj, ciągle nic nie wiedząc, podczas gdy rachunki komputerowe pozwalają nawet wyrobić sobie pewne intuicyjne oczekiwania co do nowych wyników.

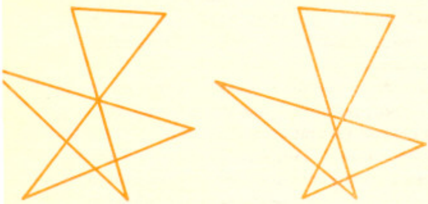
W gruncie rzeczy nie rozumiem, po co ludzie męczą się nad ścisłym rozwiązywaniem równań.

Podwójne punkty

Jeżeli punkty $A_1, A_2, \ldots, A_n$ płaszczyzny są położone tak, że żadne trzy z nich nie leżą na jednej linii prostej, to łącząc A_1 z A_2, A_2 z A_3 itd., wreszcie A_n na powrót z A_1 otrzymamy łamaną zamkniętą. Mówmy jednak na nią *wielobok*. Odcinki $\overline{A_i A_{i+1}}$ to jego boki.

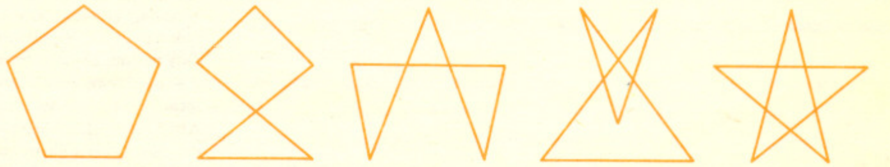
Boki wielokąta wypukłego spotykają się tylko w wierzchołkach, ale dla naszych wieloboków tak być nie musi. Nazwijmy punktami osobliwymi wieloboku punkty przecięcia boków.

Wierzchołków nie zaliczamy do punktów osobliwych, choć bez wątpienia są one pewnymi punktami charakterystycznymi.



Trójkąt (nie mogłem jakoś napisać „trójbok") nie może mieć punktów osobliwych, a czworobok może mieć tylko jeden (albo wcale). Umówimy się rozważać tylko osobliwości proste — tj. takie, w których przecinają się tylko dwa boki. Osobliwość „wyższego rodzaju", taką na przykład jak na rysunku, można w pewnym sensie sprowadzić do osobliwości prostych, lekko rozsuwając wierzchołki naszego wieloboku. Zastępujemy w ten sposób osobliwy punkt — k-krotny przez $\dfrac{k(k-1)}{2}$ prostych punktów osobliwych.

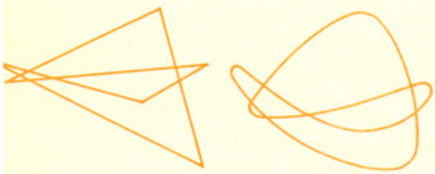
Pięcioboki mogą mieć 0, 1, 2, 3 lub 5 punktów podwójnych; a, o dziwo, nie mogą mieć ich 4.



Czy umiecie to wykazać? A może ujmiecie rzecz ogólniej i udowodnicie następujące **twierdzenie Straszewicza**:

Wielobok o nieparzystej liczbie boków n może posiadać $\dfrac{n(n-3)}{2}$ osobliwości prostych. Może też mieć ich mniej, ale nie $\dfrac{n(n-3)}{2}-1$. Wielobok o parzystej liczbie boków n może mieć $\dfrac{n(n-4)}{2}+1$ punktów osobliwych lub dowolną liczbę od niej mniejszą.

Spróbujcie narysować ośmiobok o 16 punktach podwójnych. Z pewnością nie uda się to Wam od razu.



Wygładźmy teraz szpice przy wierzchołkach wieloboków i zamieńmy proste odcinki boków na łagodne łuki. Zróbmy to tak, by otrzymana krzywa miała „podobnie" rozmieszczone punkty samoprzecięcia. Trudne twierdzenie analizy matematycznej głosi: można to zrobić tak, by naszą krzywą dało się opisać równaniem wielomianowym $f(x, y) = 0$. Zwrot „można to zrobić" znaczy tutaj tyle, że krzywymi o równaniach wielomianowych można nasz wielobok przybliżać z dowolną dokładnością.

Powiemy, że punkt samoprzecięcia krzywej jest punktem podwójnym, jeżeli przechodzą przez niego tylko dwie „gałęzie" krzywej. Przez niewielką zmianę wielomianu opisującego krzywą możemy zawsze wszystkie punkty samoprzecięcia zastąpić przez punkty podwójne. Możemy także wygładzić ostrza.

Rozpatrujmy zatem krzywą bez „ostrzy" i tylko z punktami podwójnymi. Od czego zależy liczba punktów podwójnych?

Odpowiedź: Od stopnia wielomianu opisującego krzywą:

Jeżeli f jest wielomianem stopnia n, to krzywa o równaniu $f(x, y) = 0$ nie może mieć więcej niż $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ punktów podwójnych.

Ten wynik jakoś łączy się z poprzednim $\left(\text{jak się ma } \dfrac{(n-1)(n-2)}{2} \text{ do } \dfrac{n(n-3)}{2}?\right)$, ale tak naprawdę to nie umiemy podać prostych i w miarę estetycznych warunków, mówiących, kiedy wielomian opisuje krzywą o takiej a takiej liczbie takich a takich punktów osobliwych. „Pół biedy" dla wielomianów (i krzywych) zespolonych. Geometria zespolonych tworów geometrycznych jest bardzo dobrze rozwinięta, można powiedzieć, że dziedzina zespolona jest bardziej odpowiednia dla uprawiania teorii zbiorów algebraicznych; geometria rzeczywista jest po prostu znacznie trudniejsza. A to dlatego, że równanie kwadratowe raz ma pierwiastki, raz nie ma..., a wolelibyśmy, żeby się zdecydowało.

Rozwiązanie zadania F 71

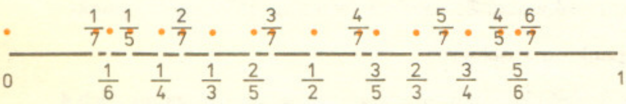
Aby podnieść kromkę przyklejoną masłem do podłogi należy użyć większej siły niż wtedy, gdy kromka upadła suchą stroną. Podniesienie kromki w tym pierwszym przypadku wiąże się zatem z wykonaniem większej pracy, a więc — kromka przyklejona masłem do podłogi ma niższą energię. Jest to zatem stan bardziej prawdopodobny, zgodnie z prawami fizyki statystycznej.

Ułamki

W to, że w znanej od dwu tysięcy lat geometrii euklidesowej można jeszcze znaleźć trudne, nowe i ciekawe twierdzenia, każdy chyba uwierzy. Trudniej uwierzyć w to, że coś nieoczywistego może być w zakresie arytmetyki ułamków. W każdym razie coś, gdzie trudności wykraczają poza kłopoty rachunkowe.
W 1816 roku geolog J. Farey odkrył i rozgłosił ciekawą własność ułamków o niewielkich mianownikach. Nie był jej w stanie udowodnić, ale choć zwrócono uwagę, że już w 1802 roku dowód był opublikowany przez C. Harosa, wspomniane ułamki tworzą ciąg nazywany ciągiem Fareya.
Ciąg Fareya rzędu n (oznaczany przez F_n) to ustawiony rosnąco ciąg ułamków właściwych, których mianowniki nie przekraczają n. Na przykład F_6 składa się z $0, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, 1$. Liczba wyrazów szeregu F_n rośnie szybko wraz z n (Czytelniku, jak?).
F_{1025} ma 319765 wyrazów.
Odkrycie Fareya można ująć w postaci **twierdzenia**:
Jeżeli $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}$ *są kolejnymi ułamkami Fareya* (zapisanymi w postaci nieskracalnej), *to*

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a+a''}{b+b''}.$$

Wydawane są tablice ciągów Fareya. Są one pomocne, jeżeli chcemy znaleźć dobre przybliżenie wymierne o możliwie małym mianowniku liczby z przedziału (0, 1).



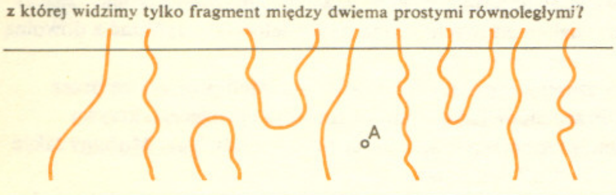
Ciąg Fareya rzędu 7

Śruba

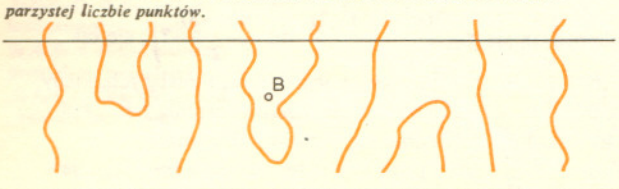
Jeżeli jakikolwiek trójwymiarowy przedmiot przeniesiemy w inne miejsce, to istnieje taka śruba, że gdyby przedmiot nasz przesuwać po jej gwincie, to znalazłby się w owym „innym miejscu" i tak właśnie, jak to zrobiliśmy poprzednio, położony. Warto chyba pogłowić się nad dowodem tego twierdzenia (dopuszczamy wśród śrub gwoździe i śruby z przekręconym gwintem).
Ciekawe, że dla płaszczyzny takiego uniwersalnego sposobu nie ma.

Wewnątrz, czy na zewnątrz

Czy punkt A znajduje się wewnątrz, czy na zewnątrz krzywej zamkniętej, z której widzimy tylko fragment między dwiema prostymi równoległymi?



Jeden ze sposobów stwierdzenia, że wewnątrz polega na poprowadzeniu półprostej z A całej mieszczącej się w danym pasie (a więc równoległej do brzegu). Ilość punktów jej przecięcia z krzywą jest nieparzysta — gdyby była parzysta, to punkt A leżałby na zewnątrz krzywej. Jest to wniosek z prostego w dowodzie **twierdzenia**:
Dowolna prosta niestyczna do gładkiej krzywej zamkniętej przecina ją w parzystej liczbie punktów.

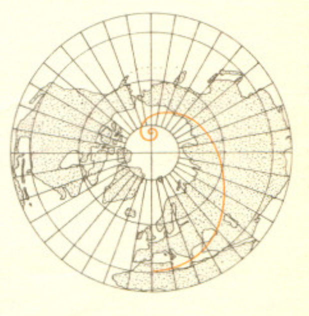


No, a punkt B? Sądzę, że każdy z Czytelników wykaże z łatwością, że tytułowe pytanie nie ma tutaj sensu. Krzywa na tym rysunku nie jest fragmentem krzywej zamkniętej.

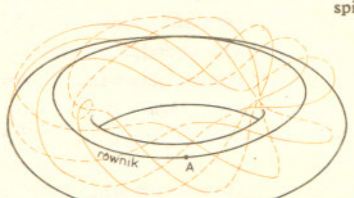
Dokąd dojdziemy idąc na północno-zachód?

Kto wierzy, że Ziemia jest płaska odpowie od razu: do nikąd (albo: do nieskończoności, lub: do krańców, co tu na jedno wychodzi), bo będziemy poruszać się po linii prostej.
Na powierzchni kuli jest inaczej. Narysujmy na niej siatkę geograficzną (mogą być tylko południki) i wyruszamy z równika, z punktu o długości geograficznej $\lambda = 0$. Leży on gdzieś w Zatoce Gwinejskiej. Pamiętając by trzymać azymut 315 lądujemy w Afryce i rychło opuszczamy ją koło Dakaru. Przepływamy Atlantyk, zahaczamy o Nową Funlandię, i skrajem Labradoru trafiamy na przylądek Foxe na Ziemi Baffina. Zostawiamy na północy biegun magnetyczny, osiągamy Wyspę Księcia Patricka i wkraczamy do Basenu Beauforta. Przekraczamy podwodny Grzebiet Mendelejewa, Basen Makarowa, Grzbiet Łomonosowa, Basen Nansena, drugi koniec ciągnącego się pod Biegunem Północnym Grzbietu Mendelejewa, i potem znów: Basen Makarowa, Grzbiet Łomonosowa, Basen Nansena ... Kręcimy się wkoło bieguna, mając go zawsze po prawej z przodu. Idziemy po krzywej zwanej loksodromą. Profesorowi Tadeuszowi Trajdosowi zawdzięczamy zwrócenie nam uwagi na błędy jakie zawierał zamieszczony w Delcie 3/1979 rysunek tej krzywej. Dziękujemy Mu, a właściwy rysunek pokazujemy obok.
Ale czy po loksodromie dojdziemy do bieguna? W zasadzie nie, bo owija się ona wokół niego nieskończenie wiele razy, chociaż ma skończoną długość (ogólnie, gdy podróżujemy pod azymutem α, to długość loksodromy od równika do bieguna jest równa promień kuli/cos α) i nasza stopa w końcu o biegun zahaczy ... Siatkę „geograficzną" możemy narysować na walcu i na stożku. Jak tam się podróżuje ze stałym azymutem?
Wiele razy opisywaliśmy torus (taką dętkę czy obwarzanek). Na nim też mamy południki i równoleżniki, a więc północ, południe i inne strony świata też.
Każdy punkt torusowy ma swoją długość geograficzną λ i szerokość φ, a każdej parze kątów λ, φ z przedziału [0, 360) albo (−180, +180] odpowiada tylko jeden punkt (jakie punkty na Ziemi nie mają określonej długości geograficznej?).
Torus można rozciąć, rozwinąć, chociaż nie bez zniekształceń i przedstawić w postaci prostokąta, w którym górna podstawa jest sklejona z dolną, a lewy bok z prawym. Wyruszamy z punktu $\lambda = 0$, $\varphi = 0$ w kierunku „pn.-zach.".
Gdy równik naszego torusa ma np. 12 jednostek długości, a południk 4 — dojdziemy do punktu wyjścia dość szybko. Ale gdy południk naszej torusowej planety jest długi na pięć jednostek, odbędziemy długą drogę ABCDEFGHIJKLMNOPQRA (Rysunek). A jak będzie przy innych proporcjach długości? Zastanówmy się teraz co będzie gdy udamy się w naszą podróż na takim torusie, w którym długość równika jest niewspółmierna z długością południka. Odpowiedzi łatwo domyślić się na podstawie rozważań z poprzedniego przypadku: do punktu wyjścia nigdy nie dojdziemy, jednak co pewien czas będziemy niemal ocierać się o niego i choćbyśmy mieli jak najmniejsze stopy, zawsze na niego wejdziemy — ale nigdy środkiem stopy...
Krzywa, która opisuje naszą drogę nosi w języku rosyjskim wdzięczną nazwę „obmotka" torusa i choć popieramy nazywanie wszystkiego po polsku, to „owijka" brzmi znacznie gorzej...
Czy pamiętacie, jak są owijane sznurkiem bombonierki z czekoladkami?

Loksodroma na powierzchni kuli

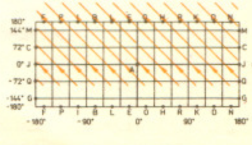


W rzucie powierzchni kuli na płaszczyznę styczną w biegunie loksodroma staje się spiralą logarytmiczną



Torus,

jego mapa w rzucie „Merkatora"



i podróż na pn.-zach.

Co się nam mniej podoba?

Termodynamika fenomenologiczna stwierdza stanowczo, że pewne procesy nie mogą nigdy zachodzić. Na przykład, ciepły przedmiot zetknięty z zimniejszym nie może od niego pobrać ciepła. Odważnik postawiony na stole nie może nagle oziębić się i podskoczyć do góry, zamieniając zmagazynowane w sobie ciepło na energię kinetyczną.
Fizyka statystyczna pozwala wyprowadzić prawa termodynamiki fenomenologicznej z kinematycznego opisu ruchu cząstek, tworzących ciała makroskopowe. Pozwala ona głębiej zrozumieć prawa termodynamiki fenomenologicznej, lecz równocześnie każe je wypowiadać w mniej kategorycznej formie. Według niej, mogą pojawiać się, z różnym od zera prawdopodobieństwem, dowolnie duże fluktuacje wszystkich wielkości termodynamicznych. W szczególności, odważnik może podskoczyć do góry kosztem swej energii cieplnej, lecz prawdopodobieństwo tego wydarzenia jest tak małe, że od początku istnienia Wszechświata upłynął jeszcze zbyt krótki czas, aby dało się ono zaobserwować.
A jak będzie w przyszłości?
Według przyjętych dziś poglądów, Wszechświat rozpoczął swoje istnienie wielkim wybuchem ok. 10^{10} lat temu i od tej pory systematycznie rozszerza się. Teoria względności pozwala zbudować dwa rodzaje modeli rozszerzającego się Wszechświata. Pierwszy, zwany zamkniętym, charakteryzuje się tym, że cała fizyczna przestrzeń ma skończoną objętość, zaś jego rozszerzanie się zostaje w pewnym momencie zatrzymane i zawarta w nim materia kurczy się z powrotem, pod wpływem sił grawitacyjnych, do małego, nadzwyczaj gęstego i gorącego obiektu. Drugi model, zwany otwartym, opisuje Wszechświat nieskończony przestrzennie i wiecznotrwały.
Dokładność obserwacji astronomicznych jest, i pewnie długo jeszcze będzie, zbyt mała na to, aby można było wskazać na jeden z tych dwu modeli jako jedyny właściwy. Moda astronomiczna nakazuje wprawdzie mieć określone zdanie w tej sprawie, lecz pogląd obowiązujący zmienia się na przeciwny co kilka lat, a czasem nawet co kilka miesięcy. W tej sytuacji argumenty za jednym lub drugim modelem muszą odwoływać się do filozofii, estetyki, ogólnie uznawanych przesądów i innych elementów myślenia niefizycznego.
Wszechświat zamknięty roztacza przed nami dość ponury obraz przyszłości: cała istniejąca materia spali się w ogniu wielkiej implozji, przy której wybuch bomby jądrowej znaczy niewiele więcej niż strzał z korkowca. Nastąpi to wprawdzie nie wcześniej niż za kilkadziesiąt miliardów lat, ale mimo wszystko nie wygląda przyjemnie.
Wszechświat otwarty obiecuje nam nieograniczoną przyszłość, lecz... właśnie dlatego w pewnym momencie stanie się dość stary na to, aby zaczęły zachodzić w nim wydarzenia zabronione przez termodynamikę fenomenologiczną. Stojące spokojnie przedmioty będą nagle podskakiwać lub przesuwać się, będą się zdarzać wypadki oparzeń zimną wodą, wypadki samorzutnego rozdzielenia herbaty na esencję i wodę (jakaż to straszliwa perspektywa dla pracy urzędów i placówek naukowych!).
No i właśnie: która możliwość mniej się nam podoba?

Prawdopodobieństwo wystąpienia „nieprawdopodobnego" zjawiska w serii obserwacji jest tym większe, im więcej pojedynczych aktów obserwacji zawiera seria. Każdy odcinek czasu t_1 = (czas lotu odważnika, który podskoczył) można uważać za akt obserwacji zjawiska podskoku, nawet jeśli nikt mu się wtedy nie przyglądał. Zatem, im dłużej istnieje Wszechświat, tym większe jest prawdopodobieństwo, że odważnik gdzieś kiedyś podskoczył.

Były takie czasy, kiedy nie znano jeszcze magnetofonów taśmowych, kasetowych, stereofonii i temu podobnych szlagierów współczesności. I telewizji wtedy nie było, moi kochani, ani nawet radia, bo były to czasy tak dawne, że mój ojciec uchodził wówczas za szczeniaka, ale i wtedy byli oczywiście na świecie wielbiciele nowoczesności, zwolennicy postępu, czyli innymi słowy ci, co popychają naprzód bryłę świata w tym najbardziej materialnym sensie, który każe nam obecnie zupełnie inaczej przystrzygać brodę, niż to czyniono w XVII wieku.

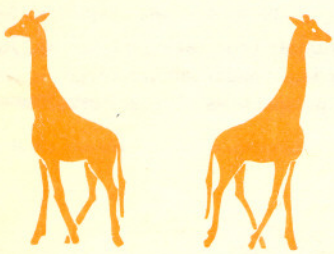
Z najnowszych odkryć były wtedy pianole, i to różne, a najnowocześniejsze funkcjonowały na taśmę papierową, perforowaną, nawijaną na szpule. Otóż żył wtedy w Warszawie pewien człowiek o tak nowoczesnych poglądach, tak wychylony w przód swoją płomienną duszą, tak stęskniony za tym, co przyniesie ludzkości postęp i czasy przyszłe, iż wolał (jak twierdził) obcować ze sztuką w najbardziej bezpośredni, najczystszy, najwznioślej wyabstrahowany sposób i przepuszczając przez palce zwoje owego dziurkowanego papieru doznawał najdoskonalszego pojęcia muzyki. Wolał to, niż nastawić sobie pianolę, bo posłuchać pianoli może każdy, z przeproszeniem, dureń i nawet nie wiadomo, co z tego rozumie.

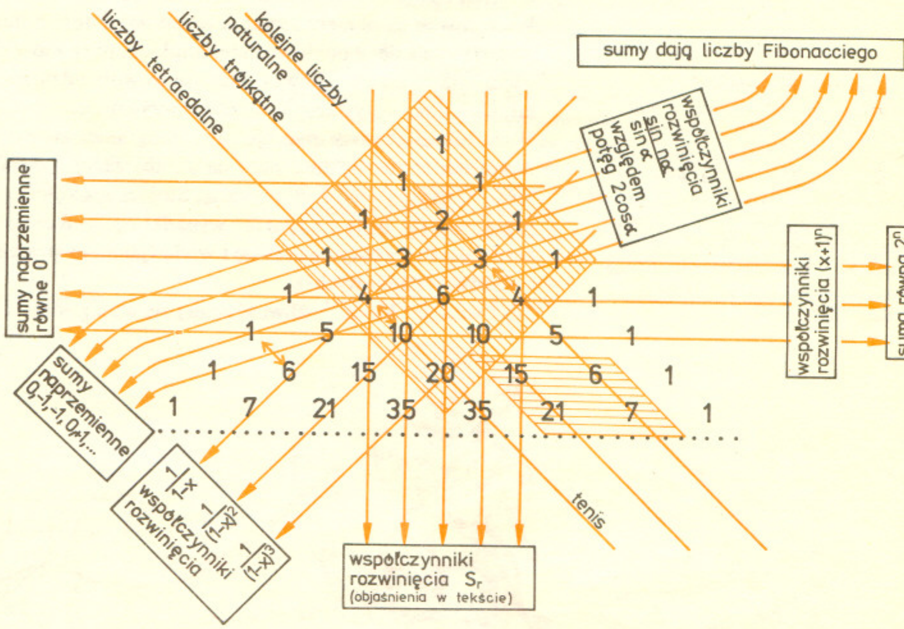
Im mniej tym lepiej

Tak można by w skrócie opisać zasadę właściwą rozmaitym układom fizycznym, mianowicie dążenie do minimum energii. Dlatego też piłka stacza się po pochyłości, wahadło beznadziejnie stara się zająć najniższe położenie, woda spływa z góry na dół. Dążenie to jest tak przemożne, że wodę można łatwo skłonić, by, w celu osiągnięcia minimum energii potencjalnej, popłynęła do góry. Rzeczywiście: tak właśnie opróżnia się np. duże akwaria. Do stojącego na stole akwarium (rybki wyłowiliśmy uprzednio i przenieśliśmy do słoja) wkładamy jeden koniec długiej gumowej rurki, zasysamy przez drugi koniec wodę i gdy już, już mielibyśmy się jej napić, kierujemy ów drugi koniec do stojącego pod stołem wiadra. I woda sama wycieka przez rurkę, aż akwarium się opróżni.
Może umiecie odpowiedzieć, skąd woda wpływająca do rurki w akwarium wie, że „potem" będzie miała niższą energię potencjalną? A jeśli nie wie, to po co tam wpływa? A może musi?

Trójkąt Pascala

Gdy chcemy podnieść $a+b$ do potęgi, dajmy na to, siódmej, korzystamy z trójkąta Pascala (regułą jego budowy jest: jedynki na bokach, a każdy inny wyraz jest sumą dwóch stojących nad nim). Potrzebne współczynniki znajdujemy w siódmym (licząc wierzchołkową jedynkę za zerowy) wierszu: 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1. Piszemy zatem $(a+b)^7 = a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+$ $+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7$.





Czy jeszcze coś możemy zobaczyć w trójkącie Pascala? Drugi rząd ukośny zawiera (gdyby ktoś zapomniał) kolejne liczby naturalne, następny — kolejne liczby trójkątne (tj. takie, że tę ilość jednakowych monet można ułożyć w trójkąt równoboczny), dalszy — liczby tetraedralne (mówiące ile kul można ułożyć w czworościenny sąg tak, by wykorzystać wszystkie). Następny rząd ukośny wypełniony jest przez liczby określające ile czterowymiarowych kul można ustawić w czterowymiarowy odpowiednik czworościanu foremnego itd.

Te same liczby w rzędach ukośnych dają współczynniki rozwinięć $\frac{1}{1-x}, \frac{1}{(1-x)^2}, \ldots$ na szeregi:

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots, \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = 1+2x+3x^2+4x^3+\ldots$$

zbieżne przy $|x| < 1$.
Centralna pionowa kolumna składa się z liczb 1, 2, 6, 20, …, a szereg $1+2x+6x^2+20x^4+\ldots$ jest rozwinięciem $S_1 = (1-4x)^{-1/2}$ $\left(\text{gdy } |x| < \frac{1}{4}\right)$. To można wykorzystać do niektórych

Można także zobaczyć kolejne współczynniki w wyrażeniach typu

$$x^7+\frac{1}{x^7}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^7-7\left(x+\frac{1}{x}\right)^5+$$
$$+\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-7\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

(należy zsumować liczby połączone krótkimi strzałkami).

Jeżeli w grze w tenisa reprezentujemy nieco inny poziom niż nasz partner, tak że prawdopodobieństwo wygrania przez nas piłki wynosi p, a przez partnera q, to prawdopodobieństwo, że wygramy gema, jest równe

$$P_g=p^4\left(1+4q+10q^2+20\,\frac{pq^3}{1-2pq}\right),$$

a że wygramy seta (Q_g to $1-P_g$):

$$P_s=P_g^6\left(1+6Q_g+21Q_g^2+56Q_g^3+\right.$$
$$\left.+126Q_g^4+252\,\frac{P_gQ_g^3}{1-2P_gQ_g}\right),$$

a co to ma wspólnego z trójkątem Pascala — chyba widać. Wzór trochę się zmieni „na korzyść”, jeżeli umówimy się, że przy 6:6 obowiązuje tie-break.

obliczeń. Biorąc na przykład $x = 0{,}0001$ mamy $(0{,}9996)^{-1/2} = 1+2\cdot 0{,}0001+6\cdot(0{,}0001)^2+$ $+20\cdot(0{,}0001)^3+70\cdot(0{,}0001)^4+\ldots$; inaczej

$$\sqrt{\frac{10\,000}{9\,996}}=\frac{100}{14\sqrt{51}}=\frac{100\sqrt{51}}{14\cdot 51}\approx 1{,}0002000600200070\ldots,$$

co daje $\sqrt{51}\approx 7{,}1414284285428499\ldots$, a to jest dokładne aż do 16 miejsca po przecinku.

Następna pionowa kolumna składa się ze współczynników rozwinięcia $S_2=\frac{1}{2x}\left((1-4x)^{-1/2}-1\right)$, następne kolejno $S_3, S_4, S_5, \ldots$,
gdzie

$$S_r+S_{r+1}=x\cdot S_{r+2}.$$

Powyższa zależność przypomina nieco związek między wyrazami ciągu Fibonacciego. Zresztą zwykły ciąg Fibonacciego można też „wydostać” z trójkąta Pascala, sumując wyrazy wzdłuż łagodnie pochyłych linii.

Te pochyłe linie zawierają również współczynniki, jakie znajdują się przy kolejnych potęgach $C = 2\cos\alpha$, gdy wyrażamy przez nie $S_n=\frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha}$ — należy tylko brać znaki na przemian. Na przykład $S_2 = C$, $S_3 = C^2-1$, $S_5 = C^4-3C^2+1$, $S_{11} = C^{10}-9C^8+28C^6-35C^4+15C^2-1$.

Zacieniowany na rysunku wyznacznik jest równy 1 (i jemu podobne też). Mały wyznacznik zakratkowany w prawej części diagramu jest równy 21 i wszystkie podobne wyznaczniki są równe lewej dolnej liczbie. Kto chce mieć jeszcze inne desenie geometryczne, niech napisze trójkąt Pascala do dwudziestego — trzydziestego wiersza, zamaluje na czerwono liczby niepodzielne przez 2 i spojrzy na to z daleka. Potem niepodzielne przez 3...

Wróćmy jeszcze na chwilę do siódmego wiersza trójkąta Pascala. Występujące tam liczby 7, 21, 35 tworzą ciąg arytmetyczny. W całym (nieskończonym) trójkącie Pascala takich trójek jest nieskończenie wiele, występują one w każdym k^2-2 wierszu w każdej połówce trójkąta po jednej. Pierwsze trzy z nich to

7, 21, 35
1001, 2002, 3003 w rozwinięciu $(a+b)^{14}$,
490314, 817190, 1144066 w rozwinięciu $(a+b)^{23}$.

Ciągów geometrycznych w trójkącie Pascala (dokładniej: w jego wierszach) nie ma.

Spośród różnych uogólnień trójkąta Pascala najbardziej narzucające się jest takie: niech każda liczba w trójkącie będzie równa sumie trzech stojących najbliżej nad nią. Boki trójkąta znów niech się składają z jedynek:

1
1 1 1
1 2 3 2 1
1 3 6 7 6 3 1
1 4 10 16 19 16 10 4 1
1 5 15 30 45 51 45 30 15 5 1
1 6 20 50 90 126 90 126 90 50 20 6 1
1 7 27 76 160 266 357 393 357 266 160 76 27 7 1
....

Ile tu można ciekawych rzeczy zobaczyć — pozostawiamy już chętnym Czytelnikom. My podamy tylko jedną obserwację. Umieśćmy nasz trójkąt (ile go się zmieści) na szachownicy tak, by wierzchołek znalazł się np. na polu e1. Postawmy na tym polu króla. Na ile sposobów może on dostać się najszybciej do innego pola? Właśnie na tyle, jaka liczba stoi na tym polu.

Pochwała umiarkowania

Ścisłe podejście do zjawisk przyrody ma swoje wady, i ma je również podejście „praktyczne”. Podejścia te mają jednak zalety, które uzupełniają się nawzajem. Pierwsze, jeśli prowadzi do konkretnych rozwiązań, pozwala nam wniknąć w przyczynowo-skutkowe łańcuchy procesów, drugie — pozwala uzyskiwać ilościowe wyniki opisujące zjawiska, których szczegółowego przebiegu nie rozumiemy i w stosunku do których pierwsze podejście jest bezsilne. Na wiedzę fizyczną składają się rezultaty uzyskane obydwoma sposobami. Byłaby ona znacznie uboższa, gdyby ją pozbawić któregokolwiek z tych składników. Styl pracy badacza jest jego cechą indywidualną, której modyfikowanie na siłę może dać fatalne skutki. Jeśli ktoś okazał się utalentowanym twórcą ścisłych teorii, to wcale z tego nie wynika, że uzyskiwałby wartościowe wyniki, gdyby go zapędzić przemocą do roboty heurystyczno-komputerowej, i vice versa.
Co stąd wynika? W zasadzie banał: szanujmy cudzą pracę. Niestety, banał ten trzeba czasem przypominać...

Rozwiązanie zadania M 215
Na początku zabawy suma liczb na szachownicy wynosiła 63. W jednym ruchu zmieniamy tę sumę o $(8-k)-k=8-2k$, jeżeli w wybranym wierszu lub kolumnie było k jedynek. Widać więc, że suma ta będzie zawsze nieparzysta.

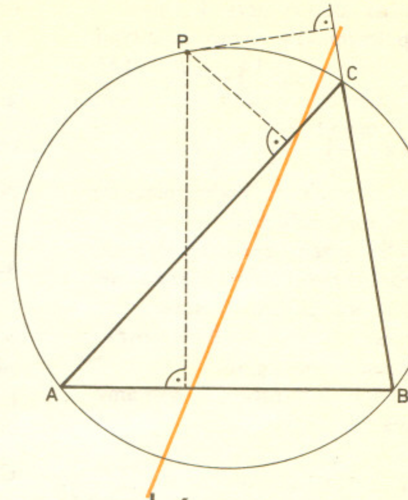
Okręgi dziewięciu punktów

Opiszmy na trójkącie, dowolnym zresztą, okrąg i wybierzmy punkt p na tym okręgu. Nietrudno wykazać, że rzuty punktu p na wszystkie trzy boki trójkąta lub ich przedłużenia są współliniowe. Przechodząca przez nie prosta nazywa się *linią Simsona*, a punkt p — jej biegunem.

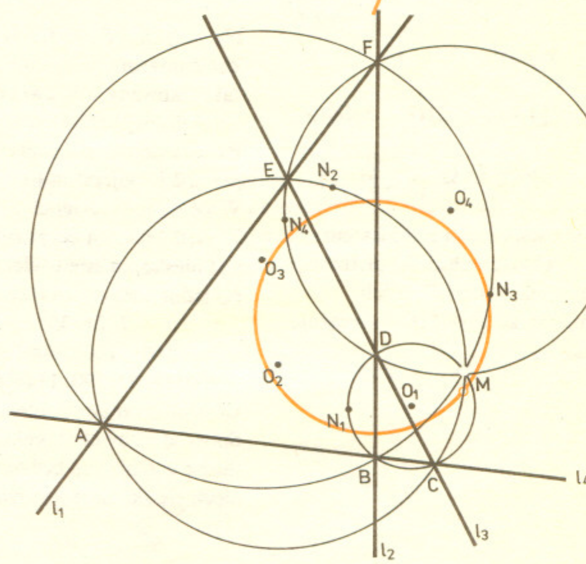
Rozpatrzmy teraz cztery dowolne proste (byle żadne dwie nie były równoległe) l_1, l_2, l_3, l_4. Środki O_1, O_2, O_3, O_4 okręgów opisanych na czterech trójkątach T_1, T_2, T_3 i T_4 utworzonych przez te proste leżą zawsze na okręgu. Nazwijmy go *okręgiem środków*.

Wszystkie cztery okręgi opisane mają punkt wspólny M i leży on na okręgu środków. Pozostałe punkty przecięcia okręgów opisanych na T_1, T_2, T_3 i T_4 z okręgiem środków (oznaczmy je przez N_1, N_2, N_3, N_4) są także pewnymi punktami charakterystycznymi trójkątów T_1, T_2, T_3, T_4. Są mianowicie biegunami linii Simsona tych trójkątów równoległych do pozostałych prostych spośród l_1, l_2, l_3, l_4. Okrąg środków można by nazwać „okręgiem dziewięciu punktów", gdyby nie to, że nazwa ta jest już zwyczajowo używana dla innego okręgu, zawierającego dziewięć innych specjalnych punktów trójkąta (rysunek). Dowody, że odpowiednie punkty rzeczywiście leżą na okręgu, stanowią tak zwane „dobre ćwiczenie" — co znaczy, że są wystarczająco trudne.

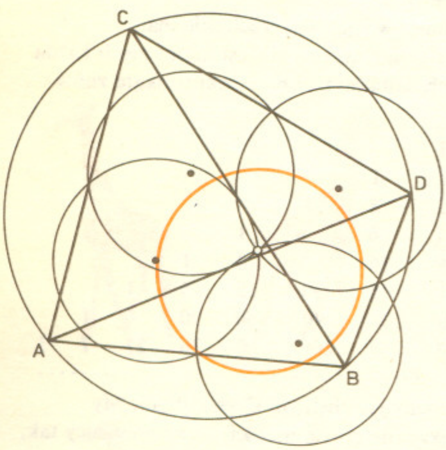
A teraz wpiszmy w okrąg dowolny czworokąt $ABCD$ i narysujmy okręgi „dziewięciu punktów" czterech trójkątów ABC, ACD, BCD i ABD. Nie dość, że mają one ten sam promień, to jeszcze przecinają się w jednym punkcie, a ich środki znów leżą na okręgu..

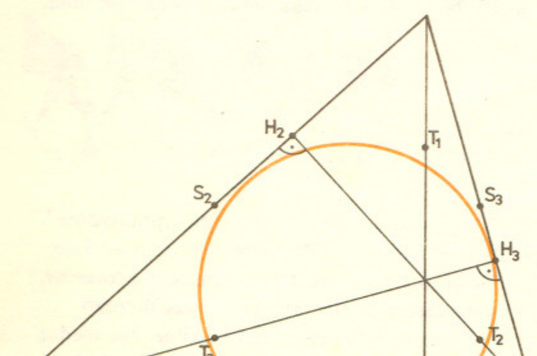


Linia Simsona o biegunie p



Okrąg środków (zaznaczona tylko jedna linia Simsona)





„Klasyczny" okrąg 9 punktów przechodzi przez spodki wysokości trójkąta, środki boków i środki odcinków wysokości (od wierzchołków do punktu przecięcia)

Jak na obrazku

Współcześnie dla Europejczyka poznać oznacza zobaczyć, przy czym przedmiotem oględzin nie musi być rzeczywisty obiekt, wystarczy nam fotografia, film, obraz, rysunek. Zawierzamy bez zastrzeżeń tym wyobrażeniom, czerpiąc z nich wiele pozaplastycznych informacji. Tory cząstek elementarnych, rekonstrukcje gadów kopalnych, a wreszcie to, co jeszcze nie poznane i to, co niepoznawalne.

Śmierć jest niewiastą z kosą, jest to oczywiste nawet dla tych, którzy rozumieją związek tej postaci z osobą Kronosa, który, jak wiadomo, nie był niewiastą, nawet dla tych, którzy kosę widzieli tylko jako rekwizyt śmierci.

Madonna ma różne oblicza, a ta dowolność i nieobliczalna nieodpowiedzialność twórcy pod tym względem daje nam pojęcie o nieograniczoności rzeczy świętych, coś z wabiącej ucieczki wszechobecnego bóstwa ukazującego się nam w coraz to innym aspekcie, coraz to innym przejawie.

Daleko nam do obrazoburstwa, a ornament nie jest żadną propozycją. Tym ciekawsze więc, że tyle płócien abstrakcyjnych zaludnia nasze sale i salony. Może jest to przejaw zmęczenia? Finał to czy antrakt? Nie żartujmy ze spraw poważnych. Wiele osób „pamięta" generała de Gaulle'a i wielu ludzi „wie", kto to jest Louis de Funes, „w tym samym czasie", w którym nie potrafi odpowiedzieć, jaki obraz wisi w holu instytucji, w której pracują — czerwony jest raczej czy niebieski.

Po prostu nie wszystkie rzeczy są jednakowo ważne.

O grach i strategiach zwycięskich

Każdy, kto grywał w szachy czy warcaby, wie, że pozycję nazywamy wygraną dla jednego z graczy, jeśli ma on plan gry, który bez względu na wysiłki przeciwnika prowadzi do zwycięstwa. Taki plan nazywamy strategią zwycięską.

Są gry, w których już pozycja początkowa jest wygrana dla jednego z partnerów. Tak jest np. w grze w wilka i owce, gdzie owce mają od początku strategię zwycięską. W szachach ani w warcabach nie jest znana żadna strategia zwycięska w pozycji wyjściowej i dzięki temu obie te gry są nadal interesujące.

Poniżej opiszemy pewien rodzaj matematycznych gier dwuosobowych i na ich przykładzie sprecyzujemy pojęcie strategii zwycięskiej. Wymyślili je polscy matematycy: S. Banach i St. Mazur.

Gra toczy się na odcinku $\langle 0, 1\rangle$, w którym gracze, zanim siedli do gry, wybrali pewien podzbiór A. W pierwszym ruchu gracz **I** wybiera dowolny odcinek I_1, zawarty w $\langle 0, 1\rangle$, gracz **II** odcinek $I_2 \subset I_1$ i w dalszym ciągu gracze wybierają na przemian coraz to mniejsze odcinki. Partia trwa nieskończenie długo i w jej wyniku powstaje nieskończony, malejący ciąg odcinków $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$. Jeśli zbiór A zawiera przynajmniej jeden punkt z części wspólnej wszystkich zbiorów I_n, wygrywa gracz **I**, w przeciwnym razie zwycięzcą zostaje **II**.

Strategia zwycięska (np. dla gracza **II**) ma być przepisem mówiącym, jak wykonać ruch zgodny z regułami gry w każdej chwili, gdy kolej przypada na gracza **II**, i to tak, by zapewnić wygraną. Gracz **II** wybiera odcinki o numerach parzystych. Strategia zwycięska dla **II** jest to więc funkcja s o następujących własnościach:

1. każdemu ciągowi odcinków takich, że $\langle 0, 1\rangle \supset I_1 \supset \ldots \supset I_{2k+1}$ przyporządkowuje odcinek $J = s(I_1, \ldots, I_{2k+1})$ taki, że $J \subset I_{2k+1}$ (zapewniliśmy zgodność z regułami),

2. dla dowolnego ciągu odcinków $I_1, I_3, I_5, \ldots$ takiego, że $I_3 \subset s(I_1)$, $I_5 \subset$ $\subset s(I_1, s(I_1), I_3, s(I_1, s(I_1), I_3))$ itd., zbiór A jest rozłączny z częścią wspólną odcinków $I_1, s(I_1), I_3, s(I_1, s(I_1), I_3), I_5, s(I_1, s(I_1), I_3, s(I_1, s(I_1), I_3), I_5)$ itd. (ten warunek zapewnia, że **II** gracz wygrywa stosując strategię s, gdy jego przeciwnik wybiera kolejno I_1, I_3, I_5 itd.).

Analogicznie definiuje się strategię zwycięską gracza **I**.

Oczywiście graczowi **II** łatwiej grać, gdy zbiór A jest „mały”, bo może go łatwiej ominąć. Nietrudno znaleźć strategię zwycięską dla **II**, gdy A jest np. nieskończonym ciągiem $(a_1, a_2, \ldots)$. (Jaka to strategia?). Gdy zbiór A jest „duży”, przewaga jest po stronie gracza **I**. Można wykazać, że jeśli A jest zbiorem liczb niewymiernych z przedziału $\langle 0, 1\rangle$, to **I** ma strategię zwycięską.

Dla obszernej rodziny zbiorów A o regularnej budowie (nie będziemy wnikać w sens tych słów), któryś z graczy — czasem **I**, czasem **II** — ma strategię zwycięską. Można jednak udowodnić istnienie zbioru — choć nie jest to takie łatwe — dla którego żaden z graczy nie ma takiej strategii. Gra jest wówczas szczególnie ciekawa, bo nabiera sensu wartościowanie ruchów (silny, słaby, zupełnie zły).

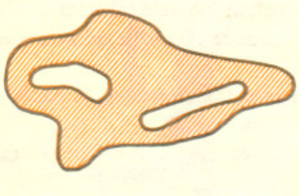
A jaki będzie wynik partii, gdy obaj gracze grają najlepiej jak mogą (jeśli rzeczywiście mogą). Bo remisu przecież w tej grze nie ma... .

Zadania

Redaguje mgr Krzysztof NOWIŃSKI

M 214. Wykazać, że na każdej krzywej zamkniętej można opisać kwadrat.
Rozwiązanie na str. 6

M 215. Na jednym z pól szachownicy 8×8 wpisano 0, na pozostałych — jedynki. W jednym „ruchu” możemy wybrać wiersz lub kolumnę i zamienić w tym wierszu lub kolumnie zera na jedynki i odwrotnie. Pokazać, że nie możemy w ten sposób otrzymać samych jedynek.
Rozwiązanie na str. 11



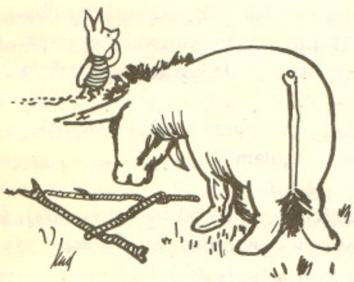
M 216. Brzegiem „zwykłego” płata powierzchni jest suma niezawęźlonych krzywych zamkniętych.
Czy mogą być brzegiem płata
a) krzywa zamknięta zawęźlona?
b) dwa zawęźlone okręgi?
Rozwiązanie na str. 2

Redaguje dr Andrzej KRASIŃSKI

F 72. Dlaczego upuszczona kromka chleba z masłem częściej upada stroną posmarowaną w dół?
Rozwiązanie na str. 7

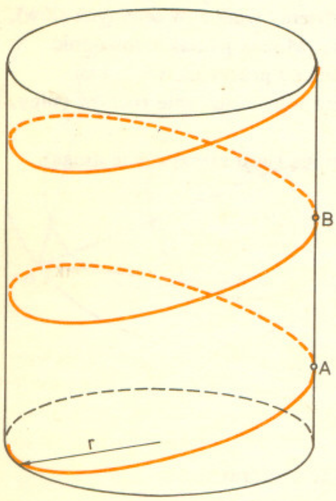
Wykreślanki

I. Napiszmy ciąg:
2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, ...
czyli po prostu kolejne liczby parzyste. Usuńmy co czwartą liczbę:
2, 4, 6, 10, 12, 14, 18, 20, 22, 26, 28, 30, 34, ...
a następnie utwórzmy ciąg sum kolejnych wyrazów: 2, 2+4, 2+4+6 itd.:
2, 6, 12, 22, 34, 48, 66, 86, 108, 134, ...
Z tego ciągu usuńmy co trzecią liczbę:
2, 6, 22, 34, 66, 86, 134, 162, ...
i znów utwórzmy sumy częściowe: 2, 2+6, 2+6+22 itd.:
2, 8, 30, 64, 130, 216, 350, 512, ...
a teraz usuńmy co drugą liczbę:
8, 64, 216, 512, ...
Dostajemy, jak widać, sześciany kolejnych liczb parzystych. Dlaczego? A może na dalszych miejscach już tak nie będzie? A jak otrzymać w ten sposób sześciany liczb nieparzystych?



II. Podzielmy ciąg kolejnych liczb naturalnych na grupy, zaliczając do *n*-tej grupy *n* kolejnych liczb:
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10, 11, 12, 13, 14, 15, ...
Usuńmy co drugą taką grupę:
1, 4, 5, 6, 11, 12, 13, 14, 15, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, ...
i obliczmy sumy liczb w kolejnych grupach:
1, 15, 65, 175, ...
Utwórzmy teraz ciąg sum częściowych 1, 1+15, 1+15+65, ...
1, 16, 81, 256, ...
Jak widać, otrzymaliśmy ciąg czwartych potęg kolejnych liczb naturalnych. A może dalej tak nie będzie?
A jak w podobny sposób dojść np. do piątych potęg?

O wyginaniu drutu



Ściślej — jest tak, gdy o ile krzywizna i skręcenie są w pewnym przedziale równocześnie równe 0, to są stałe. Odpowiada to niezawieraniu przez krzywą odcinków — chyba że jest prostą.

Każdy zauważył, że chcąc wygiąć drut tak, aby miał żądany kształt, możemy kolejno nadawać mu ten kształt „punkt po punkcie". Tak np. prostujemy drut, robimy z niego okrąg, nadajemy mu kształt inicjału, powiedzmy.
Drut jest dość dobrym przybliżeniem krzywej. Powyższe zaś spostrzeżenie (po uściśleniu) nosi nazwę twierdzenia Freneta. A uściślenie zostało w matematyce (dokładniej: geometrii różniczkowej krzywych) przeprowadzone tak:
Ustalono sposób mierzenia, na ile dana krzywa odbiega od prostej. Tak uzyskaną wielkość nazwano *krzywizną*. Oblicza się krzywiznę dość skomplikowanie, ale porównywać krzywizny można łatwo „na oko" — im większa krzywizna, tym bardziej musielibyśmy krzywą (drut) rozginać, aby go w tym miejscu wyprostować. A więc np. okrąg ma w każdym punkcie taką samą krzywiznę.
Krzywa (drut) nie zawsze da się położyć na płaszczyźnie. Wielkość określająca, na ile krzywa jest w danym punkcie „niepłaska", nazywa się *skręceniem*. Znów obliczyć trudno, a porównywać łatwo.
Gdy ustalimy jakoś (byle jak) punkt zerowy i kierunek poruszania się po krzywej (drucie), mamy do dyspozycji dwie funkcje długości krzywej (drutu): z plusem do przodu i minusem do tyłu — krzywiznę i skręcenie. Twierdzenie Freneta orzeka, że te dwie funkcje określają jednoznacznie kształt krzywej.
Zastosujemy to twierdzenie do znalezienia odpowiedzi na pytanie, jakie krzywe ślizgają się po sobie. Tu Czytelnik może przestać czytać, by samemu znaleźć odpowiedź, a potem porównać z naszą. Krzywa (drut) może ślizgać się po sobie, jeśli jest w każdym punkcie taka sama. Czyli jeśli ma w każdym punkcie taką samą krzywiznę i takie samo (choć może różne od krzywizny) skręcenie.
Gdy krzywizna jest równa 0, otrzymujemy prostą (z definicji nawet tak nieścisłej jak nasza), a wobec twierdzenia Freneta innych krzywych o zerowej krzywiźnie nie ma.
Niech więc krzywizna będzie teraz stała, ale różna od zera, ale skręcenie niech będzie równe 0 — dobry będzie okrąg, a wobec twierdzenia Freneta...
Gdy wreszcie i krzywizna, i skręcenie są stałe, ale różne od zera, pasuje linia śrubowa, a wobec...
Ponieważ nie ma innych możliwości niż rozpatrzone, więc jedynie prosta, okrąg i śruba ślizgają się po sobie i są powszechnie z tego względu wykorzystywane w technice, która nic innego nie ma do wyboru.
Można zresztą powiedzieć, że wszystko to są śruby, tylko że czasem o przekręconym gwincie, a czasem po prostu gwoździe.

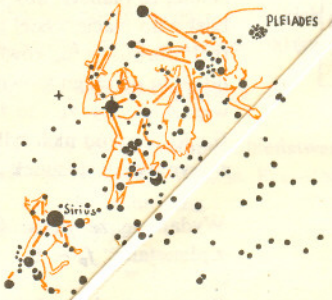
Podyskutujmy

Jeśli zdarzy ci się kiedykolwiek usłyszeć opinię, która ogólnie nie przypadnie ci do gustu, np.: „pająk ma 8 nóg", nie daj się ponieść niezdrowej pasji i nie argumentuj głupio: „a mnie się wydaje, że 4, bo każde zwierzę ma 4 nogi", albo „a ja słyszałem, że 6". Może się bowiem okazać, że przeciwnikowi wiadomo coś, czego tobie nie wiadomo. Innymi słowy, może wyjść na jaw twoja ignorancja, a co za tym idzie, narazisz się na ewentualność utraty autorytetu. Nie znaczy to, rzecz jasna, że masz obowiązek godzić się z twierdzeniem, które ci „nie leży", tylko dlatego, że w tym akurat przedmiocie nie jesteś szczególnie biegły. Polecaną odpowiedzią jest w tym wypadku pogardliwe „doprawdy?" lub „czyżby?", istnieje jednak ewentualność, że odpowiedź twoja jako nie dość irytująca i bezczelna zostanie zlekceważona. Lepiej jest więc uśmiechnąć się z politowaniem i wyszeptać: „tak przypuszczano pod koniec XIX wieku" (co dowodzi, że zapoznałeś się z najświeższymi informacjami na ten temat, czyli że masz dostęp do publikacji, jakich twój dyskutant nie widział na oczy). Taka odpowiedź pozwoli ci zasiać w umyśle antagonisty źdźbło niepewności, choćby sprawa była najzupełniej oczywista. Delikatniejszym chwytem jest wycedzić: „no, to mocno powiedziane" lub „po co zaraz takie kategoryczne sformułowania" — jest to odpowiedź „z asekuracją", gdyż w razie czego pozwoli przenieść dyskusję ze strony merytorycznej na stronę formalną i utrzymywać, że nie odpowiadał ci ton lub kontekst, w którym opinia została wygłoszona. Odpowiedź „No, ja bym tego nie był taki pewien*" jest jednak najlepsza, bo z całą pewnością zdenerwuje rozmówcę, co będzie dla niego najsłuszniejszą karą. A o to przecież chodzi!

* Ponadto jest prawdziwa — jak możesz być pewien, skoro nic nie wiesz na dany temat?

Co to znaczy blisko

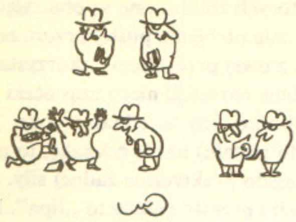
Mamy już dobrze ugruntowane przekonanie, że cząsteczki, z których zbudowane są otaczające nas ciała, są maleńkie, a między nimi znajdują się (w ich skali) całe otchłanie pustej przestrzeni. Cząsteczki jednak przyciągają się i dlatego trudno by nam było z owej przestrzeni „skorzystać". Siła owego przyciągania jest bardzo wielka; bo niech ktoś spróbuje rozsunąć nieco cząsteczki składające się na łyżeczkę od herbaty ciągnąc tę łyżeczkę za jej końce. Siły te jednak szybko maleją wraz z odległością. Jeśli bowiem przetniemy (np. piłką do metalu) naszą łyżeczkę, to po zetknięciu obu części ponowne ich rozdzielenie nie będzie wymagało praktycznie żadnej siły.
I tu budzi się wątpliwość. Może ta cała historyjka o cząsteczkach i przestrzeniach to „lipa". Bo przecież przy starannym dociśnięciu dwóch części przeciętej łyżeczki siły międzycząsteczkowe powinny znowu zadziałać. Może zatem łyżeczka jest „lita", a nie złożona głównie z pustej przestrzeni między przyciągającymi się cząsteczkami?
Wyjaśnia się to tak. Cięcie — to wyrywanie, i to bardzo niechlujne, cząsteczek z obu powstałych przez cięcie części. Powierzchnia cięcia jest zatem bardzo nierówna i dociśnięcie zbliża do siebie, na odległość, w której siły międzycząsteczkowe dają się zaobserwować, tylko niesłychanie nieliczne cząsteczki. No, ale skoro tak, to wygładzając powierzchnię powinniśmy móc ten stan poprawić. I możemy. W mechanice precyzyjnej używa się przymiarów, których potrzebną długość uzyskuje się przez złożenie ze sobą bardzo gładkich klocków stalowych, które od samego zetknięcia „trzymają się", i to dość mocno, aby przymiar nadawał się do użytku.
I jeszcze pytanie. Gdy dostarczane na budowę szyby zawilgotnieją przylegają do siebie tak mocno, że nie próbuje się ich nawet rozdzielać, a całą partię szkła przekazuje się „na stłuczkę". Czy to zjawisko takie samo jak opisane wyżej, czy to zupełnie inna historia?



Patrz w niebo

Styczniowe niebo jest chyba najpiękniejszą częścią sfery niebieskiej. Orion (*Ori*) przeniesiony przez greckich bogów pomiędzy gwiazdy walczy tu z Bykiem. Pomaga mu jego wierny Wielki Pies (*Canis Major*, *CMa*) o imieniu Syriusz (tę nazwę otrzymała najjaśniejsza gwiazda na niebie, α *CMa*).
Jeśli dobrze przyjrzeć się Orionowi, to w miejscu, gdzie znajduje się jego miecz, można gołym okiem zauważyć małą plamkę. Jest to tzw. Wielka Mgławica w Orionie — jedyna mgławica gazowa widoczna nieuzbrojonym okiem. Jest ona nazywana wielką tylko dlatego, że jest względnie blisko (ok. 1500 lat świetlnych), jej rzeczywiste rozmiary są zupełnie przeciętne. Mgławice gazowe są to obłoki wodoru, helu, tlenu i innych pierwiastków i związków chemicznych, które wypromieniowują energię uzyskaną od znajdującej się przypadkowo blisko jasnej gwiazdy oświetlającej obłok. Jeśli w pobliżu mgławicy nie ma żadnej takiej gwiazdy, to obserwujemy ciemny obłok pochłaniający światło docierające zza niego.
Po spojrzeniu przez duży teleskop na mgławicę Oriona może nasunąć się pytanie: czy nasze niebo jest ciekawe i w jakim stopniu jego wygląd mógłby wpłynąć na rozwój cywilizacji?
Wyobraźmy sobie, że nasza Ziemia wraz z Układem Planetarnym znajduje się w takiej samej odległości 1500 lat świetlnych, ale nie od mgławicy w Orionie, lecz od mgławicy o nazwie 30 *Dor*. Jest to chyba największa znana nam mgławica. Jej średnica wynosi 500 lat świetlnych, masa gazu w niej zawartego — milion mas Słońca, a znajduje się ona w sąsiedniej galaktyce — w Wielkim Obłoku Magellana.
Najbardziej charakterystycznymi, obok Słońca i Księżyca, obiektami byłyby tam na naszym niebie dwie wielkie plamy. Jedna z nich — biała, rozmyta elipsa o długości półosi wielkiej ok. 30—40° — to Droga Mleczna widziana z dalekiej perspektywy, druga natomiast — żółto-fioletowa nieregularna plama podobnej wielkości — to właśnie mgławica 30 *Dor*. Gdyby wymienić jeszcze Słońce na jakiś ciasny układ podwójny i dodać parę księżyców — to chyba nikt nie mógłby narzekać na brak atrakcji na niebie, jednak może do dzisiaj czekalibyśmy na Kopernika.

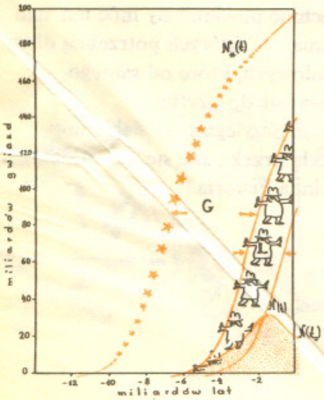
Ilu prócz nas



Zastanawiając się nad problemem życia we Wszechświecie musimy na samym początku dokonać wyboru, co do którego nie mamy żadnych podstaw. Nie istnieją do dzisiaj żadne argumenty za pozytywną albo negatywną odpowiedzią na pytanie: czy życie na Ziemi jest rzeczą unikalną, kwestią przypadku, czy też jest regułą wspólną dla całego kosmosu, jedną z dróg ewolucji materii.

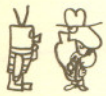
Ponieważ odpowiedź klasyfikująca życie do szufladki z unikatami i dziwami byłaby tu nieciekawa, więc założymy, że prawdziwa jest odpowiedź druga. Tego rodzaju założeń będziemy musieli w toku rozumowania dokonać więcej tylko po to, żeby uzyskać jakiekolwiek wyniki ilościowe. Jednak trzeba pamiętać, że każde z tych założeń nie jest niczym poparte — jest wręcz karkołomne. Ocenimy, jaka jest średnia odległość między cywilizacjami technicznymi, które rozwijają się na planetach według nas „życionośnych", czyli podobnych do Ziemi.

Gwiazdy można podzielić na dwie populacje — kryterium determinującym przynależność danej gwiazdy do populacji jest zawartość pierwiastków ciężkich (cięższych niż hel) w jej atmosferze: gwiazdy o dużej zawartości należą do tzw. populacji I, te o mniejszej — do populacji drugiej.



Wydaje się, że planety podobne do naszej mogą istnieć tylko wokół gwiazd populacji I — o dostatecznej ilości ciężkich pierwiastków. Najstarsze gwiazdy tego rodzaju mają po ok. 10 miliardów lat. Obecna ich liczba w Galaktyce wynosi $N_* \approx 2 \times 10^{11}$.

Nie wszystkie jednak gwiazdy populacji I są odpowiednie, aby spełniać zadane warunki. Gwiazdy o masie większej niż $2m_\odot$ (co odpowiada typowi widmowemu F na ciągu głównym) zbyt szybko ewoluują, aby na planetach im towarzyszących mogło rozwinąć się życie, które doprowadziłoby do powstania cywilizacji. Natomiast gwiazdy typu M na ciągu głównym są tak zimne, że planety, aby uzyskiwać podobne ilości energii co Ziemia, musiałyby zbliżyć się bardzo blisko do macierzystej gwiazdy. Na tak małej odległości siły przypływowe wyhamowałyby ich ruch obrotowy, co również uniemożliwiłoby rozwój życia „ziemiopodobnego". Gwiazdy po odejściu od ciągu głównego przechodzą wiele dramatycznych etapów w trakcie swojej ewolucji, więc założymy, że i tu życie nie istnieje. Pozostają tylko gwiazdy na ciągu głównym typów F, G i K. Spośród nich tylko ok. 15% to gwiazdy pojedyncze. Po uwzględnieniu tych czynników otrzymujemy stosunek „dobrych słońc" do wszystkich gwiazd populacji I: $f_g \approx 0{,}05$.



Wydaje się, że większość pojedynczych gwiazd typu F, G, K posiada planety, więc „część z planetami" $f_p \sim 1$.

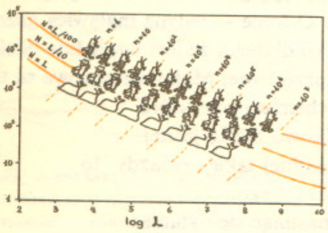
Przyjmijmy, że średnio wśród układów planetarnych duża część jest takich, które posiadają dostatecznie dużą planetę (aby była otoczona atmosferą) w odpowiedniej odległości od gwiazdy (aby posiadać odpowiednią temperaturę powierzchni) czyli obiegają słońce w obszarze nazywanym ekosferą. A więc liczba planet w ekosferze $0{,}1 < f_e < 1$. W przypadku naszego układu (nietypowo, jak przypuszczamy) $f_e = 2$ (Ziemia i Wenus).

Teraz szybko trzy założenia z serii „karkołomnych":

(1) Na każdej „dobrej planecie" rozwinie się życie: $f_{\dot{z}} = 1$.

(2) Ewolucja istot żywych doprowadzi zawsze do powstania istot inteligentnych: $f_i = 1$.

(3) Istoty inteligentne stworzą prawdopodobnie cywilizację techniczną zdolną do kontaktów z innymi cywilizacjami: $0{,}1 < f_c < 1$.



Wprowadźmy teraz iloczyn

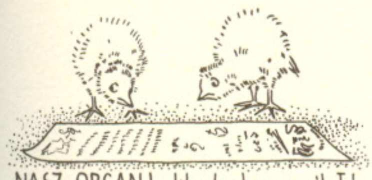
$$s = f_g f_p f_e f_{\dot{z}} f_i f_c,$$

który jest prawdopodobieństwem powstania cywilizacji technicznej wokół danej gwiazdy populacji I przy wszystkich dokonanych założeniach. Z naszych oszacowań wynika, że $0{,}0005 < s < 0{,}05$. Przyjmijmy $s = 0{,}005$.

Niech G będzie średnim czasem od powstania gwiazdy do powstania cywilizacji, natomiast L średnim czasem jej życia. O czasie G nie wiemy prawie nic, ponieważ możemy mówić tylko o G_{Ziemi}: $G_{\text{Ziemi}} \approx 4 \times 10^9$ lat; oczywiście $G < 10^{10}$ lat. Natomiast o L nie wiemy zupełnie nic. Wielu uczonych spekuluje (Szkłowski, Sagan), że rozkład L może być mniej więcej dwuwartościowy. Część cywilizacji, powiedzmy 1%, uporała się ze swoimi ekologicznymi i społecznymi problemami i dla tych cywilizacji $L \sim 10^9$ lat, natomiast reszta — 99% nie poradziła sobie i dla nich $L \sim 10^3$ lat. (Ciekawe, ile wyniesie nasze L_{Ludzie}). Załóżmy jednak, że można wprowadzić średnie L, od którego niewiele odbiegają indywidualne wartości. Jeśli tak, to liczba cywilizacji, które powstały przed czasem t będzie proporcjonalna do $N_*(t-G)$, a liczba cywilizacji, które do czasu t już zdążyły wyginąć, będzie proporcjonalna do $N_*(t-G-L)$.

THE ILLUSTRATED Broiler Times

THEY ARE COMING TO TAKE ME AWAY
HA,HA,HI,HI...



NASZ ORGAN! kto by to pomyślał!

Obie te krzywe są odpowiednio lewą i prawą granicą obszaru „zaludnionego" na rysunku i są po prostu krzywą $N_*(t)$ przesuniętą w prawo o G i $G+L$. Liczba cywilizacji współistniejących w czasie t będzie więc równa

$$N(t) = s(N_*(t-G)-N_*(t-G-L)).$$

Jeśli L nie jest zbyt duże, to

$$N_*(t-G)-N_*(t-G-L) \approx \frac{dN_*\left(t-G-\frac{L}{2}\right)}{dt}\,L.$$

Jeśli wprowadzimy teraz oznaczenia $G+\frac{L}{2} = \tau$ i $\frac{dN_*}{dt} = R_*$, które jest po prostu szybkością powstawania gwiazd, to otrzymamy słynny wzór Drake'a

$$N(t) = R_*(t-\tau)\cdot s\cdot L.$$

Niech $F = s\cdot R_*(t_0-\tau)$. Obecna liczba cywilizacji wyniesie

$$N(t_0) = F\cdot L.$$

R_* przed 5 miliardami lat wynosiło ok. 20 na rok, a więc $F = \frac{1}{10}\,\text{rok}^{-1}$, a więc

$$N(t_0) = \frac{L}{10}\ \text{(w latach)}.$$

Ponieważ liczba 10 w mianowniku jest konsekwencją wszystkich naszych założeń, więc możliwe, że trzeba by ją zastąpić inną wielkością (może 1, a może 100 lub więcej).

A więc jaka jest średnia odległość między cywilizacjami?

Zdefiniujmy wielkość $p = N/N_*$, która jest prawdopodobieństwem, że wokół przypadkowo wybranej gwiazdy istnieje obecnie rozwinięta cywilizacja. Prawdopodobieństwo, że wokół n tak wybranych gwiazd nie istnieje cywilizacja techniczna jest $(1-p)^n$, czyli prawdopodobieństwo, że istnieje ona choć wokół jednej gwiazdy jest

$$P = 1-(1-p)^n.$$

Ponieważ $p \ll 1$, to wzór powyższy można zamienić na inny (z definicji liczby e — podstawy logarytmów naturalnych)

$$P \approx 1-e^{-np}.$$

Średnia odległość między cywilizacjami jest wielkością obszaru, który obejmuje dostatecznie dużo gwiazd, aby $np = 1$. Gęstość gwiazd w okolicach Słońca wynosi mniej więcej $\varrho = 2/(\text{rok św.})^3$

Ponieważ $p = N/N_*$ a $n = \varrho\cdot V = \frac{4}{3}\pi R^3\varrho$

$$1 = np = \frac{4}{3}\frac{N}{N_*}\pi R^3\cdot\varrho$$

czyli

$$R = \left(\frac{3}{4}\frac{N_*}{N}\frac{1}{\pi\varrho}\right)^{1/3}.$$

Jeśli $L = 10^3$ lat to $N = 10^2$ i $R \approx 620$ lat świetlnych, jeśli $L = 10^9$ lat to $R \sim 6$ lat świetlnych.

Korzystając z dokładniejszych danych dotyczących gęstości interesujących nas gwiazd ciągu głównego typów F, G i K i uwzględniając rozkład gęstości tych gwiazd w Galaktyce otrzymujemy zależność średniej odległości współistniejących cywilizacji w okolicach Słońca od średniej długości życia L. Z rysunku widać, że jeśli $L \lesssim 3000$ lat, to cywilizacja wyginie wcześniej niż przyjdzie odpowiedź na sygnał radiowy.

Możliwe, że w centralnych rejonach Galaktyki, gdzie gęstość gwiazd jest kilkadziesiąt razy większa niż w okolicach Słońca, istnieje od dawna regularna łączność radiowa między wieloma bliskimi cywilizacjami. My na włączenie do systemu intergwiezdnej łączności będziemy musieli jeszcze poczekać parę tysięcy lat, jednak próby trwają.

(Wykorzystano tu pracę: Oliver, B. M., 1975, *Icarus* **25**, 360)