

Centrum Astronomiczne im. M. Kopernika, Obserwatorium Astronomiczne Uniwersytetu Warszawskiego oraz Polskie Towarzystwo Miłośników Astronomii zapraszają na cykl odczytów popularno-naukowych:

25 X 1979 r.	Słońce, gwiazda nieznaną	doc. K. Stępień
29 X 1979 r.	Aktywne jądra galaktyk	mgr. M. Sikora
5 XI 1979 r.	Skąd wiemy jak wygląda wnętrze gwiazdy	prof. J. Smak
8 XI 1979 r.	Skąd wiemy jak wygląda nasza Galaktyka	dr T. Kwast
12 XI 1979 r.	Gwiazdy wybuchowe	mgr M. Sztajno
15 XI 1979 r.	Najstarsze gwiazdy	dr M. Kozłowski
19 XI 1979 r.	Berstery rentgenowskie	mgr M. Czerny

W poniedziałki odczyty odbywają się w Centrum Astronomicznym im. M. Kopernika, Warszawa, ul. Bartycka 18, o godz. 17.

W czwartki — w Obserwatorium Astronomicznym UW, Warszawa, Al. Ujazdowskie 4, o godz. 17. Wstęp wolny

SPIS TREŚCI

NUMERU 10(70)

Studia	str. 1
O skalach funkcyjnych, o suwakach niekoniecznie logarytmicznych i o krajobrazie z przednim planem	
<i>Doc. dr Andrzej Szybiak</i>	str. 4
O równaniu ruchu rakiety kosmicznej	
<i>Prof. dr Jacek Szarski</i>	str. 6
Podstawowe prawa elektrodynamiki	
<i>Doc. dr Andrzej Szymacha</i>	str. 9
Jak mierzyć najniższe temperatury?	
<i>Doc. dr Lucjan Śniadower</i>	str. 12
Zadania	str. 13
Mała Delta	str. 14
Patrz w niebo	str. 16
Drobiazi	str. 17

W następnym numerze ANALOGIE

Rysunki techniczne

Bogusław KRETKIEWICZ

W Małej Delcie 8/79 znalazł się przykry błąd. Wydrukowaliśmy: $6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{7})(1 - \sqrt{7})$, co — po pierwsze nie jest prawdą („zgubił się” minus). Po drugie zaś nie świadczy to o tym, że w pierścieniu $Z[\sqrt{7}]$ brak jednoznaczności rozkładu, bo $2 = (3 - \sqrt{7})(3 + \sqrt{7})$ i $3 = (2 + \sqrt{7})(-2 + \sqrt{7})$, oraz $1 + \sqrt{7} = (3 + \sqrt{7})(-2 + \sqrt{7}) - 1 + \sqrt{7} = (2 - \sqrt{7})(2 + \sqrt{7})$; zatem elementy te są rozkładalne. Przepraszamy naszych Czytelników za wprowadzenie ich w błąd. Prościej jest zobaczyć niejednoznaczność rozkładu w pierścieniu $Z[\sqrt{-7}]$, złożonym z liczb (zespolonych) postaci $m + ni\sqrt{7}$, m, n — całkowite. Mamy bowiem: $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = (1 + i\sqrt{7})(1 - i\sqrt{7})$; a tych czynników nie można dalej rozłożyć.

REDAKCJA

„Delta”

matematyczno-fizyczno-astronomiczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny:

doc. dr Jerzy Bartke
doc. dr Andrzej Bączyński
doc. dr Bolesław Głębicki
prof. dr Kazimierz Goebel
doc. dr Bolesław Grabowski
dr Jan Hanasz
doc. dr Bolesław Iwaszkiewicz
doc. dr Tadeusz Iwiński
doc. dr Andrzej Januszajtis
doc. dr Tadeusz Jarzembowski
prof. dr Leon Jaśmanowicz
mgr Henryk Kaczorek
prof. dr Marek Kuczma
mgr Andrzej Mąkowski
prof. dr Bohdan Paczyński
prof. dr Zdzisław Pawlak
prof. dr Arkadiusz Piekara
doc. dr Stawomir Ruciński
prof. dr Konrad Rudnicki
prof. dr Zbigniew Semadeni
doc. dr Grzegorz Sitarski

prof. dr Józef Smak
prof. dr Jan Stankowski
doc. dr Kazimierz Stępień
prof. dr Mieczysław Subotowicz
doc. dr Stefan Turnau
prof. dr Jerzy Wdowczyk
doc. dr Andrzej Woszczyk
prof. dr Janusz Zakrzewski —
wiceprzewodniczący
prof. dr Wojciech Żakowski —
przewodniczący

Redaguje Kolegium w składzie:

doc. dr T. Hofmokl — z-ca red. nac.
B. Jaworska-Kordos — ilustracje
dr M. Kordos — red. nac.
dr M. Szurek
dr K. Prażmowski — red. techn. graf.
mgr K. Szypcio — sekr. red.
doc. dr M. Święcki

Adres Redakcji

ul. Hoża 69 pok. 151,
00-681 Warszawa

Zakład Narodowy im.
Ossolińskich — Wydawnictwo
Wrocław, Oddział w Warszawie
Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.
wyd.; 2,50 ark. druk;
papier offsetowy III kl. 80 g. 61×86
Wydrukowano w Drukarni im.
Rewolucji Październikowej
Warszawa, ul. Mińska 65.
Nr zam. 879/79 C-30

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60, — cena prenumeraty półrocznej zł 30, —

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach:
— do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i cały rok następnego
— do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego.
Jednostki gospodarki uspołecznionej instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienia w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”.
Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW, oraz prenumeratorki indywidualni zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.
Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej

Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.
Sprzedaj gotówką i wysyłkową, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.

Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Konto PKO I OM W-wa 1531-912

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 00-068 Warszawa, Poland or with

— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68,
Bundesrepublik Deutschland.

— Earls Court Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain,

— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia

Cena 1 egzemplarza zł 5, — nr indeksu 35723/35550

Kim być (poradnik dla niezdecydowanych)

Jeżeli nie wiesz dokładnie, Czytelniku, jakie masz predyspozycje i jakiej nauce się poświęcić, nie przejmuj się. Za chwilę możesz już wiedzieć. Odpowiedz tylko na nasze Uniwersalne Pytanie.

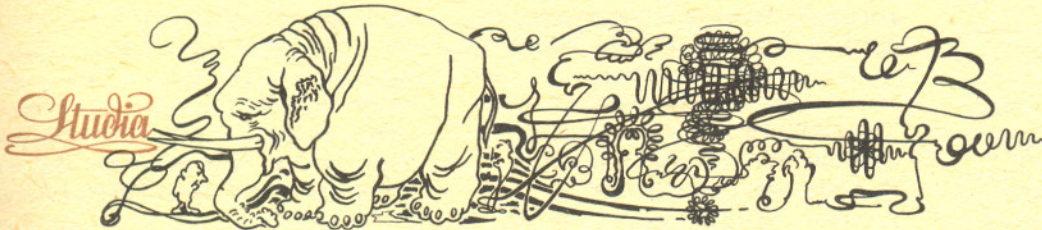
Oto ono.

Normalny słoń ma 4 nogi. Jeżeli trąbę policzymy także jako nogę, to ile nóg ma słoń?

Wybierz jedną z odpowiedzi.

Jeśli wybierzesz odpowiedź	powinieneś zostać
Przy tym założeniu słoń ma 5 nóg.	matematykiem
To jest nienormalna sytuacja. Zwykle słoń ma 4 nogi.	statystykiem
Odpowiem na to pytanie, jeżeli zobacę, że podpira się trąbą.	fizykiem
Trąba nie jest nogą, gdyż różni się od niej wyglądem, budową i przeznaczeniem.	zoologiem
Jeżeli policzymy trąbę jako nogę, to powinniśmy także uznać, że ogon jest nogą i wobec tego słoń ma 6 nóg	socjologiem, ponieważ umiesz w rozmaity sposób interpretować dane liczbowe
Powiedziane było, że normalny słoń ma 4 nogi, ale kto może zaręczyć, że słoń, który stoi przed nami jest normalny? Do czasu zajęcia stanowiska przez biegłych powstrzymuję się od wygłoszenia opinii na ten temat.	prawnikiem
O, świetne pytanie!	nauczycielem

wg „Manifold” (1971)



Studia fizyczne na Uniwersytecie

Doc. dr Piotr DECOWSKI

Studia te nie są łatwe. Poznaje się na nich przecież zjawiska leżące u podstaw wszystkiego, co obserwujemy w otaczającym nas świecie, oraz rządzące nimi szczególne prawa świata elektronów, atomów, jąder atomowych czy cząstek elementarnych. Aby je zrozumieć, trzeba opanować skomplikowany aparat matematyczny umożliwiający opis tych procesów. Trzeba też nauczyć się, jak się te zjawiska bada. Śledzić zachowanie się tak mikroskopijnych obiektów, jak atomy czy jeszcze mniejsze — jak jądra atomowe i cząstki elementarne można tylko wtedy, gdy zastosuje się wyjątkowo finezyjne narzędzia i metody. Studiując fizykę trzeba zaznajomić się z wieloma często bardzo różniącymi się od siebie dziedzinami fizyki, trzeba włączyć się w wiele problemów matematycznych i opanować różne metody doświadczalne. Bardzo często wykorzystuje się w nich najnowsze osiągnięcia elektroniki i techniki komputerowej. Z tego też

Uwagi na temat studiów astronomicznych

Dr Marcin KUBIAK

Astronomia jest chyba najbardziej „artystyczną” dyscypliną wśród nauk matematyczno-przyrodniczych. Fascynacja otaczającym światem, leżąca u podstaw wszystkich zainteresowań przyrodniczych, w przypadku astronomii oddziałuje szczególnie silnie na emocjonalną stronę natury ludzkiej, a samo uprawianie astronomii, mające na celu poznanie historii Wszechświata w oparciu o bierne obserwacje zjawisk i obiektów odległych w przestrzeni i w czasie, wymaga odwołania się do wyobraźni w takim samym stopniu, jak tworzenie dzieła sztuki. Ale — i to już jest właściwość wspólna dla wszystkich skutecznych działań twórczych — uprawianie astronomii musi być poprzedzone biegłym opanowaniem jej warsztatu. Temu właśnie celowi służą studia astronomiczne. Trwają one pięć lat. Czas trwania studiów jest oczywiście określony przez zakres wiedzy, uznanej za niezbędne minimum wykształcenia absolwenta astronomii.

Czy studiować matematykę?

Czy łatwo dostać się na studia matematyczne? Łatwo, bo przeważnie wystarczy zdać egzamin (matematyka, fizyka, język obcy), aby zostać przyjętym — jedynie w Warszawie bywa, że trzeba mieć choć dwie trójki z plusem. Trudno, bo rokrocznie egzaminu nie zdaje około połowy zdających, a liczba ocen niedostatecznych z egzaminu pisemnego z matematyki sięga 75%. Panuje zaś opinia, że kandydat, który otrzymuje dwójkę z egzaminu pisemnego z matematyki (nawet, jeśli potem wyciągnie się na ustnym i zostanie przyjęty na studia) ma już minimalne szanse zostania dobrym studentem. Założmy, Czytelniku, że znalazłeś się już w owej „górnjej połówce”, odbyłeś praktykę wakacyjną i wręczono Ci uroczyste indeks. Nurtuje Cię pytanie: jak będzie? Czy studia pójdą Ci dobrze? Czy są łatwe, czy trudne? Łatwe, bo zajęć jest stosunkowo niewiele (I rok: 3 przedmioty matematyczne, laboratorium informatyczne, lektoraty, WF, ekonomia polityczna, na kierunku nauczycielskim psychologia), bo nie ma kłopotów z podręcznikami, bo wszystkiego można nauczyć się z książek i notatek

powodu na fizyce dobrze czują się ci studenci, którzy wykazują wyraźnie ukształtowane zdolności do nauk ścisłych i których nurtuje ciekawość i chęć poznania rzeczywistości. Dla tych, którzy przychodzą na fizykę z prawdziwie świadomego wyboru, studia te będą źródłem głębokiej satysfakcji i niejednokrotnie dadzą szansę na spotkanie z porywającą przygodą intelektualną. Dla tych, którzy trafiają tu przypadkowo, studia fizyczne mogą stać się powodem stresów, uczucia zniechęcenia i utraty wiary we własne siły, szczególnie na pierwszych latach, wypełnionych zasadniczo nowym i już dość trudnym materiałem.

Już od pierwszego roku studia fizyczne dzielą się na dwie specjalności: fizykę i fizykę nauczycielską. Zadaniem pierwszej specjalności jest wykształcenie fizyka zdolnego do prowadzenia różnego rodzaju badań w laboratoriach naukowych i przemysłowych. Druga specjalność kształci nauczycieli fizyki. Studia na pierwszej i drugiej specjalności trwają 5 lat.

Pierwsze dwa lata studiów przeznaczone są m.in. na opanowanie podstaw matematyki wyższej obszernie wyłożonych w kursach analizy matematycznej, algebry z geometrią oraz metod matematycznych fizyki. Jednocześnie w wykładzie ze „wstępu do fizyki” studenci poznają wszystkie główne działy fizyki, potraktowane w sposób znacznie bardziej zaawansowany niż w programie szkoły średniej. W tym czasie studenci uczą się również samodzielnego rozwiązywania problemów doświadczalnych w I pracowni fizycznej i elektronicznej. W końcu roku drugiego i na roku trzecim pojawiają się pierwsze przedmioty z „prawdziwej” fizyki teoretycznej — mechanika klasyczna i kwantowa, elektrodynamika. Studenci doskonałą swoje umiejętności doświadczalne w pracowni fizycznej dla zaawansowanych. Tu już muszą samodzielnie rozwiązywać zagadnienia wymagające przygotowań oraz wielu godzin pomiarów.

W wykładach ze wstępu do fizyki jądra atomowego i cząstek elementarnych oraz fizyki atomu, cząsteczek i ciała stałego zaznajamiają się już bardziej szczegółowo z problemami fizyki współczesnej. Wiadomości uzyskane w ciągu trzech pierwszych lat studiów w zasadzie umożliwiają studentom świadomy wybór węższej dziedziny, w której chcą się oni specjalizować. Podział na specjalizacje następuje na czwartym roku. Ci, którzy mają większe skłonności do matematycznego ujmowania problemów fizycznych, wybierają specjalizacje teoretyczne, inni, lubiący pracę z przyrządem, jedną z kilku specjalizacji

Nie wdając się w szczegółowe omawianie planu i programu studiów astronomicznych warto zwrócić uwagę na zasadnicze cechy procesu kształcenia astronomów.

Pierwsze dwa lata studiów to wspólne ze studentami fizyki zdobywanie podstawowej wiedzy fizycznej i matematycznej. Najważniejszymi wykładami są w tym czasie „Wstęp do fizyki”, „Analiza matematyczna” oraz — żeby nie zapomnieć całkowicie, że się jest studentem astronomii — wykład „Wstęp do astronomii”. (Nawiasem mówiąc, ten ostatni wykład odgrywa szczególną rolę: Z tych czy innych względów wiedza astronomiczna przekazywana uczniom przez szkołę średnią jest tak bardzo fragmentaryczna i w istocie tak niereprezentatywna dla dzisiejszych badań astronomicznych, że studenci pierwszego roku astronomii dopiero na tym wykładzie zaczynają rozumieć, dlaczego zainteresowali się tą nauką). Trzeci rok studiów jest okresem stopniowego wnikania w problematykę czysto astronomiczną: studenci słuchają wówczas wykładów z bardziej zaawansowanych dziedzin fizyki (np. „Mechanika kwantowa”, „Elektrodynamika”), a także zapoznają się z najważniejszymi metodami i obiektami badań astronomicznych (np. „Wstęp do astrofizyki”, „Statystyka astronomiczna”). Czwarty rok studiów jest praktycznie cały wypełniony przedmiotami astronomicznymi, wśród których najpoważniejszy jest kurs „Astrofizyki teoretycznej”, poświęcony teoretycznemu opisowi fizycznego stanu i ewolucji najważniejszych obiektów niebieskich. Piąty, ostatni rok studiów poświęcony jest przede wszystkim wykonaniu pracy magisterskiej oraz wysłuchaniu wykładów z dziedziny wybranej specjalizacji.

Oczywiście zasadniczy nurt kształcenia matematyczno-fizyczno-astronomicznego jest uzupełniany przez wiele przedmiotów pomocniczych, takich jak lektoraty, pracownie (w tym pracownia komputerowa) itp. Dzięki temu absolwenci studiów astronomicznych odznaczają się wszechstronnością, która — jak na to wskazuje dotychczasowa praktyka — często ułatwia im znalezienie atrakcyjnej pracy również poza astronomią.

Przypuszczam, że powyższe uwagi wystarczą do zorientowania się, co studiuje się na astronomii. Nie mniej ważne wydaje się pytanie o to, jak studiuje się na astronomii? W tym miejscu pozwolę sobie posłużyć się tym

z wykładów, bo spotkasz się z wieloma ludźmi ze światowej czołówki naukowej (dotyczy wszystkich większych ośrodków, w pierwszym rzędzie Warszawy i Wrocławia). Trudne, bo każda godzina wykładu czy ćwiczeń to co najmniej drugie tyle nauki w domu, bo nie można sobie pozwolić na niedokładne opanowanie materiału i luki, bo wszystkiego trzeba się nauczyć z notatek z wykładów lub z książek, bo śledzenie wykładu lub tekstu w książce wymaga znacznego wysiłku umysłowego, zaangażowania wyobraźni i stałego korzystania z przerobionego już materiału. Postępy w rozumieniu matematyki są powolne i najczęściej (choć nie wyłącznie) bardzo uzależnione od ilości posiadanej już wiedzy: do zrozumienia teorii T może być nadzwyczaj pomocne rozumienie teorii S, W, X, Y, Z, choćby z pozoru dotyczyły one rzeczy dość odległych. Może właśnie dlatego studia matematyczne potrafią dostarczyć głębokich przeżyć intelektualnych. Fascynacja pięknem, harmonią i logiczną spójnością matematyki potrafi przysłonić wiele codziennych spraw, zwykle uznawanych za ważniejsze, a radość z poczynionych odkryć może być równa radości zdobywcy nowego szczytu (warto może zauważyć, że bardzo dużo matematyków uprawia wspinaczkę lub turystykę górską).

Pora na konkrety. Studia matematyczne trwają 4 lub 4,5 roku (zależnie od specjalności), ale prawdopodobnie zostaną wszystkie przedłużone do 5 lat. Na pierwszych dwóch latach studenci wysłuchują wykładów z analizy matematycznej, geometrii z algebrą liniową, topologii, logiki matematycznej, algebry abstrakcyjnej, geometrii różniczkowej, wstępu do informatyki i kilku przedmiotów niematematycznych. Po dwóch latach studenci przechodzą pod opiekę poszczególnych zakładów. Jest to równoważne z wyborem specjalizacji: geometria, algebra, topologia, rachunek prawdopodobieństwa, równania różniczkowe, analiza matematyczna, podstawy matematyki, logika, zastosowania matematyki, jej dydaktyka i wiele innych. Studenci kierunku informatycznego mają własne specjalizacje (oprogramowanie maszyn matematycznych, analiza numeryczna); to samo dotyczy specjalności mechanicznej (mechanika cieczy i gazów, mechanika ciała stałego).

Dalszy ciąg studiów odbywa się pod kierunkiem bezpośredniego opiekuna — pracownika danego zakładu (choć nie we wszystkich uczelniach panuje ten zwyczaj). Student wybiera i uzgadnia z opiekunem, na jakie wykłady i seminaria będzie chodził. Na IV roku student

doświadczalnych. Możliwości jest sporo. Np. na Uniwersytecie Warszawskim zarówno teoretycy jak i przyszli fizycy doświadczalni mogą wybrać fizykę ciała stałego, fizykę jądra atomowego, fizykę cząstek elementarnych, optykę kwantową, geofizykę. Teoretycy mają do wyboru ponadto tak „teoretyczne” dziedziny, jak fizyka statystyczna, teoria pola, astrofizyka relatywistyczna, kosmologia, ogólna teoria względności, metody matematyczne fizyki, a ci, którzy wybrali fizykę doświadczalną, mogą skierować się na biofizykę lub fizykę medyczną. Na czwartym roku studenci wysłuchują zaawansowanych wykładów specjalistycznych i uczestniczą w fachowych seminariach. Rok piąty poza tym poświęcony jest na zbieranie materiałów doświadczalnych lub opracowywanie zagadnień teoretycznych dla pracy dyplomowej.

Ogólny przebieg studiów na sekcji nauczycielskiej jest podobny. Studenci i tu zapoznają się z podstawowymi działami fizyki w ujęciu zarówno doświadczalnym jak i teoretycznym. Różnica w porównaniu z sekcją nienauczyielską polega na tym, że studia nauczycielskie nie stawiają sobie za cel nauczania studenta specyficznych metod i technik badawczych, a zorientowane są przede wszystkim na dobre opanowanie przez niego strony pojęciowej fizyki. Poza tym na sekcji nauczycielskiej pojawiają się zajęcia z historii i metodologii fizyki, z logiki, z filozofii przyrodznawstwa i socjologii grup szkolnych, psychologii dzieci i młodzieży, a wreszcie pedagogiki i dydaktyki fizyki. Nauczyciel opuszczający nasze pięcioletnie studia będzie znał fizykę bez zarzutu, a jego przygotowanie fachowe pozwoli mu z zadowoleniem i w sposób kompetentny pełnić swoją trudną lecz niezbędną rolę społeczną.

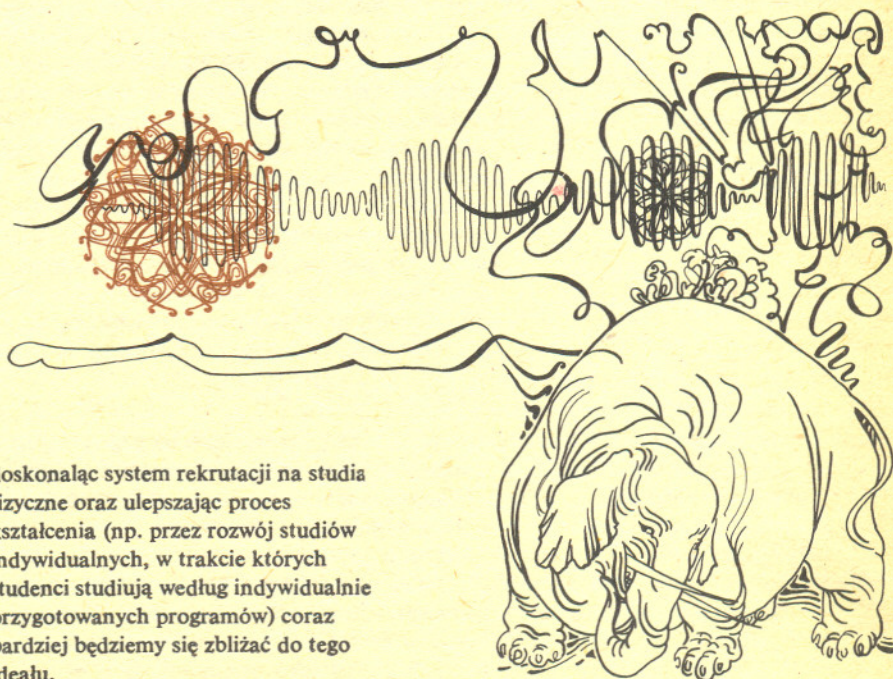
W zasadzie oczekuje się, że absolwent wydziału fizyki powinien być człowiekiem o głębokiej ogólnej wiedzy fizycznej, szczególowej znajomości dziedziny, w której się specjalizuje, o biegłej znajomości podstawowego warsztatu nowoczesnych badań — techniki obliczeniowej, znającym co najmniej dwa języki obce w zakresie umożliwiającym swobodne korzystanie z literatury fachowej. I, co może jest jedną z najważniejszych cech absolwenta, biegle umiejącym szybko dostrzegać nowe zagadnienia i twórczo podchodzić do rozwiązywania napotkanych problemów. Taki człowiek jest przydatny w każdej gałęzi techniki i gospodarki i w każdym laboratorium badawczym. Rzeczywistość czasem, niestety, odbiega od tego ideału. Uzasadniona jest jednak nadzieja, że

samym porównaniem, co na wstępie: Jeżeli astronomia rzeczywiście ma w sobie coś ze sztuki, to owo „coś” przedostaje się również do atmosfery studiów astronomicznych. Niewielka na ogół liczebność grup studenckich sprzyja „indywidualizacji” stosunków między studentami i nauczycielami, a rygory administracyjne, konieczne niestety w licznych grupach studenckich, stają się zazwyczaj zbyteczne w odniesieniu do studentów astronomii.

Nie chciałbym, aby ktoś odniósł wrażenie, że staram się przedstawić studia astronomiczne jako wyjątkowo łatwe i przyjemne. Wręcz przeciwnie, studia należą raczej do trudnych i nie wszyscy wieńczą je sukcesem. Natomiast tych kandydatów na studia astronomiczne, którzy są już na tyle dojrzałi, by zdawać sobie sprawę z wartości, jaką ma swoboda intelektualna, mogę zapewnić, że jeżeli na egzaminie wstępnym wykażą wystarczające uzdolnienia do podjęcia studiów astronomicznych, to znajdują się w atmosferze całkowicie różnej od tej, którą odczuwali dotychczas jako dokuczliwy „przymus szkolny”. Jak ją wykorzystają zależeć będzie tylko od nich samych.

Studia astronomiczne prowadzone są w Uniwersytetach: Warszawskim, Wrocławskim, Toruńskim i Jagiellońskim. Szczegółowe plany studiów są różne w różnych ośrodkach, zasadniczy schemat jest jednak wszędzie taki sam. Przytoczone wyżej nazwy wykładów obowiązują tylko w Uniwersytecie Warszawskim.

powinien już być zorientowany, jakie zagadnienie oberze za temat swojej pracy magisterskiej. Studia kończą się egzaminem magisterskim; przedtem trzeba, rzecz jasna, pozdawać wszystkie inne obowiązujące egzaminy i uzyskać pozytywną ocenę pracy magisterskiej. Programy studiów uwzględniają specyfikę kierunku: na kierunku nauczycielskim jest sporo przedmiotów pedagogicznych i praktyki w szkołach, studenci kierunku mechanicznego wysłuchują większej liczby wykładów z analizy i równań różniczkowych, a informatycy uczą się kilku języków programowania i teoretycznych przedmiotów informatycznych. Każdy jednak student powinien znać przynajmniej jeden język programowania, aby móc pracować przy maszynie matematycznej. Pracy dla matematyków nie brak, choć nie każdy znajduje sobie pracę na miarę swoich ambicji. Najlepsi studenci znajdują zatrudnienie na wyższych uczelniach jako pracownicy naukowci lub zdają na studia doktoranckie. Wielu absolwentów wybiera pracę w resortowych instytutach badawczych, centrach naukowo-produkcyjnych, instytutach przemysłowych lub ośrodkach obliczeniowych, absolwenci kierunku nauczycielskiego przeważnie w szkołach. Niezależnie jednak od miejsca pracy każdy magister matematyki powinien być „prawdziwym matematykiem”, ale wyjaśnianie, co to znaczy, zajęłoby zbyt dużo miejsca i skierowało uwagę Czytelnika w zupełnie inną stronę. A może systematyczne czytanie Delty pozwoli Wam to lepiej zrozumieć...?



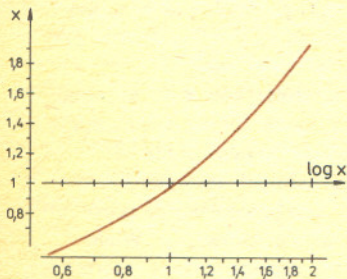
doskonaląc system rekrutacji na studia fizyczne oraz ulepszając proces kształcenia (np. przez rozwój studiów indywidualnych, w trakcie których studenci studiują według indywidualnie przygotowanych programów) coraz bardziej będziemy się zbliżać do tego ideału.

O skalach funkcyjnych, o suwakach niekoniecznie logarytmicznych i o krajobrazie z przednim planem



Doc. dr Andrzej SZYBIAK

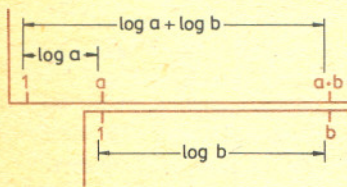
Żyjąc w dobie komputeryzacji często zapominamy albo też nie zauważamy, jak byśmy mogli sobie ułatwić pracę i rozrywkę stosując do szybkiego wykonywania przybliżonych wyliczeń stare, proste metody graficzne. Metody te mają tę zaletę, że stosując je ćwiczymy się w szybkim ocenianiu wyniku, uczymy się przewidywać, gdzie na prostej liczbowej znajdzie się interesująca nas wielkość. Prostim, a w wielu wypadkach niezastąpionym przyrządem ułatwiającym nam szybkie rachunki przybliżone, jest suwak logarytmiczny. Wprawdzie nie o logarytmicznym ma tu być mowa, ale na początek zastanówmy się nad zasadą mnożenia na suwaku. Mamy dwie listewki, na każdej z nich jest zaznaczona skala funkcji $x \mapsto \log_{10} x$. Skala ta powstaje w ten sposób, że na osi wartości funkcji (osi y , przy czym $y = \log_{10} x$) zaznaczamy wartości funkcji odpowiadające pewnym wybranym wartościom zmiennej i przy tych punktach wypisujemy wartości argumentu. Bardziej poglądowo rzecz ujmując postępujemy tak: robimy wykres funkcji logarytmicznej, powiedzmy, w przedziale $[0,6; 1,1]$ a następnie rzutujemy na oś wartości funkcji punkty wykresu odpowiadające wybranym wartościom argumentu.



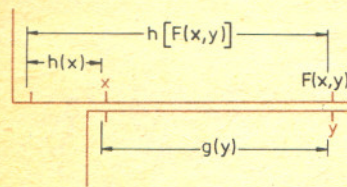
Przy otrzymanych rzutach wypisujemy odpowiednie wartości argumentu. Logarytm iloczynu dwóch danych liczb a i b otrzymamy, ustawiając jedną skalę funkcji logarytmicznej względem drugiej takiej skali tak, aby dodać długości odcinków odpowiadających logarytmom tych liczb. Taka jest zasada suwaka logarytmicznego, genialnego w swojej prostocie przyrządu, który ułatwiający rachunki ćwiczy zarazem w szybkim przewidywaniu wyniku, wykrywaniu błędów rachunkowych, interpolowaniu wzrokiem i w tym wszystkim, co robimy na osi liczbowej. Suwak logarytmiczny nie jest jedynym suwakiem stosowanym w praktyce. Uogólnienia i modyfikacja narzucają się same. Niech h i g będą dwiema funkcjami ciągłymi i monotonicznymi, określonymi, powiedzmy, na półprostej $x \geq 0$ i niech w oznacza funkcję odwrotną do h . Podamy metodę konstruowania suwaka do obliczania wartości następującej funkcji dwóch zmiennych

$$F(x, y) = w(h(x) + g(y))$$

oraz zastosowania takiego suwaka do szybkiego oszacowania tzw. głębi ostrości przy fotografowaniu. Na jednej linijce zaznaczamy skalę funkcji h , na drugiej skalę funkcji g , obie w interesujących nas przedziałach. Wartości funkcji F znajdujemy według schematu, który najlepiej odczytamy z rysunku-przykładu.



Modyfikacja będzie polegała na tym, że skale funkcyjne zaznaczamy na dwóch koncentrycznych okręgach lub pierścieniach obracających się wokół wspólnej osi. Takie właśnie suwaki mamy na pierścieniach służących do nastawiania odległości oraz wielkości przysłony u większości współczesnych aparatów fotograficznych. Ażeby zapoznać się z ich zasadą działania warto zapoznać się z kilkoma faktami i wzorami z optyki fotograficznej. Wtedy lepiej zrozumiemy przyczynę nieostrości niektórych zdjęć i będziemy mogli konstruować suwaki do szybkiego oszacowywania głębi ostrości w przypadkach, kiedy albo obiektyw, którym się posługujemy, nie jest wyposażony w odpowiednie skale na pierścieniach, albo też stawiamy sobie wymagania wyższe od „fabrycznych” odnośnie do ostrości negatywu.



Zacznijmy może od pojęcia głębi ostrości. Jeżeli obejrzymy zdjęcie formatu 13×18 , lub większego, przez szkło powiększające, to zauważymy, że granice pomiędzy obszarami czarnym a białym nie są na ogół liniami „geometrycznymi”, a smużkami o różnych odcieniach szarości. Właśnie szerokość tych smużek stanowi o ostrości zdjęcia. W praktyce amatorskiej przyjmuje się, że odbitka (powiększenie) jest ostra, jeżeli szerokość tych smużek nie przekracza $1/10$ mm. Obraz świecącego punktu rzucony na materiał negatywowy przez obiektyw aparatu nie jest punktem, a krążkiem, tzw. krążkiem rozproszenia. Robiąc z tego negatywu powiększenie, np. siedmiokrotne, tylokrotnie powiększamy krążek rozproszenia. A więc w tym przykładzie negatyw będziemy uważać za praktycznie ostry, jeżeli średnica krążka rozproszenia na nim nie

$$\text{przekracza } \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{10} \text{ mm.}$$

Średnica p krążka rozproszenia na negatywie jest funkcją następujących wielkości:

- odległości fotografowanego punktu od obiektywu,
- odległości optycznego środka obiektywu od kliszy,
- czynnej średnicy d obiektywu,
- ogniskowej f obiektywu,

no i wad aparatu. (Przecież żaden obiektyw nie jest idealnie skorygowany na światło białe i jego ustawienie nigdy nie jest idealne. Te sprawy jednak tu pomijamy.)

Poprowadźmy wzdłuż osi optycznej aparatu półprostą od obiektywu w kierunku, w którym fotografujemy. Punkty świecące na tej półprostej, których obrazami na negatywie są krążki



rozproszenia o wielkości dostatecznie małej, tworzą oczywiście pewien przedział. Przedział ten nazywamy przedziałem ostrości. Wielkość tego przedziału zależy od tego, jakimi powiększeniami zadowolimy się. Inaczej mówiąc, od tego, jakie dopuszczamy maksymalne krążki rozproszenia na negatywie.

W celu funkcyjnego ujęcia rozważanych wielkości wprowadzimy pojęcie odległości nadogniskowej. Tak nazywamy najmniejszą odległość H , mierzoną wzdłuż osi aparatu, taką, że jeżeli nastawimy aparat na ∞ , to przedziałem ostrości będzie przedział (H, ∞) . Jeżeli przez p oznaczymy dopuszczalną średnicę krążka rozproszenia, przez f odległość ogniskową obiektywu, a przez c względną wielkość przysłony, to odległość nadogniskowa wyraża się wzorem

$$H = \frac{f^2}{cp} + f.$$

Ponieważ w praktyce zwykłej fotografii ogniskowa f jest wielkością bardzo małą w porównaniu z H , więc w rachunkach będziemy odrzucać drugi składnik prawej strony i będziemy korzystać ze wzoru

$$H = k/c,$$

gdzie

$$k = f^2/p = 10^4 f^2/\text{krotność powiększenia}.$$

Przykład: Fotografujemy aparatem formatu 6×6 , odległość ogniskowa wynosi 80 mm, przysłona $c = 5,6$ i będziemy robić powiększenia formatu 18×24 cm. Należy więc przyjąć krotność

powiększenia $l = 24:6 = 4$ i mamy $p = \frac{1}{40} \text{ mm}^{-1} = 25 \cdot 10^{-6} \text{ m}^{-1}$. Wyrażając wszystkie wielkości

w metrach mamy więc $k = 0,08^2 \cdot (25 \cdot 10^{-6}) = 256 \text{ m}$. A teraz $H = 256:5,6 = 45,7 \text{ m}$. A więc nastawiając aparat na ∞ otrzymamy praktycznie ostre obrazy przedmiotów znajdujących się na osi obiektywu w odległości co najmniej 45,7 m.

Z wzorów, które zaraz podamy, wyniknie, że jeżeli nastawimy aparat na odległość ogniskową H , to praktycznie ostre będą obrazy przedmiotów w odległościach większych od $H/2$.

Nastawmy aparat na odległość b . A więc ten obiekt, który ma wypaść najostrej, znajduje się w odległości b od środka optycznego obiektywu. Nastawienie polega na tym, że przy pomocy odpowiedniego pierścienia ustawiamy obiektyw w takiej odległości a od negatywu, że $(a-f)(b-f) = f^2$. Oznaczając przez b_1 i b_2 odpowiednio początek i koniec przedziału ostrości obliczamy te wielkości z następujących wzorów:

$$b_1 = \frac{Hb}{H+b} \quad b_2 = \frac{Hb}{H-b},$$

a wyrażając odległość nadogniskową przez wyżej wprowadzone wielkości k i c mamy

$$b_1 = \left(\frac{1}{b} + \frac{c}{k} \right)^{-1} \quad b_2 = \left(\frac{1}{b} - \frac{c}{k} \right)^{-1}.$$

Jeżeli stosując powyższy wzór otrzymamy wartość ujemną lub zero na b_2 , to — oczywiście — przedział ostrości będzie od b_1 do ∞ .

Dla szybkiego szacowania głębi ostrości skonstruujemy więc suwak tego typu, co rozważany na początku naszej czytanki dla funkcji $F(x, y) = w(h(x)+g(y))$, gdzie w i h są wzajemnie odwrotne. W naszym przypadku będzie $h(b) = 1/b$ dla $b > 0$, $h(\infty) = 0$, a więc $w(z) = 1/z$ i $g(c) = c/k$ oraz $\tilde{g}(c) = -c/k$ dla b_2 .

Wykonując skalę funkcji h zwróćmy uwagę na nietrudny do sprawdzenia fakt, mianowicie, że odstępny na skali będą równomierne, jeżeli dla trzech kolejnych wartości argumentu x_{i-1} , x_i , x_{i+1} zachodzi równość

$$\frac{1}{x_i} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x_{i-1}} + \frac{1}{x_{i+1}} \right).$$

Inaczej: x_i jest średnią harmoniczną liczb x_{i-1} i x_{i+1} . A stąd

$$x_{i+1} = \frac{x_{i-1}x_i}{2x_{i-1} - x_i}.$$

Przyjmując np. $x_0 = \infty$, $x_1 = 60 \text{ m}$ mamy więc $x_2 = 30 \text{ m}$, a dalej $x_3 = 60 \cdot 30 : (2 \cdot 60 - 30) = 20 \text{ m}$, $x_4 = 15 \text{ m}$, $x_5 = 12 \text{ m}$, $x_6 = 10 \text{ m}$, $x_7 = 60:7 = 8,5 \text{ m}$, $x_8 = 7,5 \text{ m}$, $x_9 = 20:3 = 6,66 \text{ m}$, $x_{10} = 6 \text{ m}$ itd. Skale obu funkcji g i \tilde{g} umieszczamy na wspólnej listewce względnie na tarczy. Poniższy rysunek przedstawia fragment suwaka wykonanego przy następujących wymaganiach: odległość ogniskowa $f = 50 \text{ mm}$ i żądamy, ażeby powiększenia negatywów małoobrazkowych do formatu 13×18 były praktycznie ostre, czyli stopień powiększenia $l = 6$. Wyliczamy $k = 150$. (Wytwórnice aparatów zaopatrujące oprawy obiektywów amatorskich w pierścieni ze skalą do szacowania głębi ostrości przyjmują niższe wymagania, zwykle $l = 3$). Z obrazka wynika, że jeżeli nastawimy aparat na $b = 12 \text{ m}$ i przyjmijemy liczbę przysłony $c = 2,8$, to przedział ostrości będzie — ostrożnie szacując — od 10 m do 22 m. Chcąc mieć horyzont ostry, a więc by ∞ mieściła się w przedziale ostrości, zastosujemy przysłonę o liczbie 11.



Prof. dr Jacek SZARSKI członek korespondent PAN

Drugie prawo mechaniki Newtona orzeka, że dla dowolnego ciała C pochodna jego pędu, traktowanego jako funkcja czasu, jest równa sumie sił działających na to ciało. Jeżeli więc oznaczymy przez $p(t)$ pęd ciała C w chwili t (wektory będziemy zaznaczać tłustym drukiem), a przez F sumę działających na nie sił, to otrzymamy następującą postać matematyczną drugiego prawa Newtona

$$(1) \quad \dot{p}(t) = F.$$

Kropka nad symbolem funkcji oznacza — zgodnie z przyjętą w mechanice umową — pochodną względem czasu. Równanie (1) jest równaniem różniczkowym w postaci wektorowej, tj. równaniem, w którym niewiadomą jest funkcja wektorowa występująca wraz ze swą pochodną. Przechodząc do współrzędnych wektorów można je zapisać w postaci układu trzech równań różniczkowych skalarnych. Z równań tych można, znając F oraz wartość początkową pędu np. w chwili 0, tzn. znając $p(0)$, wyznaczyć funkcję p , a więc pęd ciała C .

Równaniu (1) nadamy jeszcze inną postać, ale w tym celu wypada sprecyzować pewne, istotne w dalszym ciągu, wiadomości z mechaniki.

Jako model matematyczny ciała fizycznego przyjmijmy skończony układ punktów materialnych. Jak można wyobrazić sobie „realizację” takiego modelu? Otóż, dzieląc ciało fizyczne C na skończoną ilość małych bryłek, można następnie przyjąć, że każda taka bryłka zostaje zastąpiona przez punkt materialny o masie odnośnej bryłki, i w ten sposób powstaje skończony układ punktów materialnych, który aproksymuje ciało C . Intuicyjnie jest dość oczywiste, że aproksymacja ta jest tym lepsza, im ilość bryłek częściowych jest większa, a ich objętości są mniejsze.

Weźmy pod uwagę ciało C , złożone z N punktów materialnych o masach m_1, \dots, m_N . Masa ciała C równa się oczywiście

$$(2) \quad m = \sum_{j=1}^N m_j.$$

Oznaczmy przez $r_j(t)$ wektor zaczepiony w początku ustalonego inercjalnego układu odniesienia, którego końcem jest pozycja j -tego punktu materialnego w chwili t . Wówczas wektor $V_j(t) = \dot{r}_j(t)$ jest prędkością j -tego punktu w chwili t . Pędem $p(t)$ ciała C w chwili t jest suma pędów poszczególnych punktów materialnych tzn.

$$(3) \quad p(t) = \sum_{j=1}^N m_j V_j(t).$$

Jest widoczne, że jeśli ciało C potraktujemy jako zespół dwóch ciał, np. ciała C_1 złożonego z punktów m_1, \dots, m_n i ciała C_2 złożonego z punktów m_{n+1}, \dots, m_N , to pęd ciała C w dowolnej chwili jest sumą pędów ciał składowych C_1 i C_2 . W dalszym ciągu każde ciało złożone z części punktów ciała C będziemy nazywali częścią ciała C .

Wśród sił działających na punkty ciała C , siły, które pochodzą od wzajemnego oddziaływania między punktami ciała C , nazywamy siłami wewnętrznymi (ze względu na ciało C). O tych siłach zakładamy, że podlegają trzeciemu prawu mechaniki Newtona (prawo akcji i reakcji), skąd wynika, że suma sił wewnętrznych jest wektorem zerowym. Jeśli więc siły działające na punkty ciała C i nie będące siłami wewnętrznymi nazwiemy siłami zewnętrznymi (względem ciała C), to suma wszystkich sił działających na ciało C jest równa sumie sił zewnętrznych.

W równaniu (1) wektor F jest zatem sumą sił zewnętrznych.

Punkt materialny o masie m , danej wzorem (2), którego pozycją w chwili t jest koniec wektora

$$r(t) = m^{-1} \sum_{j=1}^N m_j r_j(t),$$

nazywamy środkiem masy ciała C . Z definicji tej wynika, że prędkość $V(t)$ środka masy w chwili t jest dana wzorem

$$V(t) = \dot{r}(t) = m^{-1} \sum_{j=1}^N m_j \dot{r}_j(t) = m^{-1} \sum_{j=1}^N m_j V_j(t).$$

Stąd i ze wzoru (3) dostajemy

$$(4) \quad p(t) = mV(t).$$

Wzór (4) pozwala zapisać równanie (1) w postaci równoważnej

$$(5) \quad m\dot{V}(t) = F,$$

gdzie $V(t)$ jest — jak pamiętamy — prędkością środka masy ciała C w chwili t , a F jest sumą sił





Rozwiązanie zadania M 206

Rozumując podobnie, jak w przypadku M 205, przekonamy się, że $p(x)+1$ musi być kwadratem pewnego trójmianu kwadratowego o współczynnikach całkowitych $q(x) = x^2+mx+n$, czyli $p(x) = (q(x))^2-1 = (q(x)+1)(q(x)-1)$, przy czym trójmiany $q_1(x) = q(x)+1$ i $q_2(x) = q(x)-1$ mają po dwa różne pierwiastki całkowite. Wynika stąd, że ich wyróżniki Δ_1 i Δ_2 są kwadratami liczb całkowitych. Ale $\Delta_2 = \Delta_1+8$, jedyną możliwością jest więc $\Delta_1 = 1, \Delta_2 = 9$.

Pierwiastkami q_1 są wtedy $\frac{-m-1}{2}$ i $\frac{-m+1}{2}$.

pierwiastkami q_2 są $\frac{-m-3}{2}$ i $\frac{-m+3}{2}$.

Pierwiastki te są całkowite, gdy m jest postaci $2k+1$ i wtedy szukanym wielomianem jest $p(x) = (x+k-2)(x+k+1)(x+k-1)(x+k)$. Tak więc jedynymi wielomianami spełniającymi warunki zadania są wielomiany, których pierwiastkami są cztery kolejne liczby całkowite.

zewnętrznych działających na ciało C . $\dot{V}(t)$ jest oczywiście przyspieszeniem środka masy. Równanie (5) rządzi ruchem każdego ciała, a więc także i rakiety. Tymczasem — jak zobaczymy — równanie, które nazywamy równaniem ruchu rakiety, jest w sposób istotny różne od równania (5). Otóż celem niniejszego artykułu jest wyprowadzenie wspomnianego równania i wyjaśnienie jego pozornej rozbieżności z równaniem (5).

W dalszym ciągu przez rakieta rozumieć będziemy ciało, które stanowi rakietą właściwa wraz z paliwem w chwili startu oraz wraz z ewentualnym statkiem kosmicznym zawierającym pasażerów i całe wyposażenie. Równanie, które wyprowadzimy, obowiązuje tak długo, jak działają silniki odrzutowe, przy czym — jak się okaże — w tej sytuacji istotną rolę odgrywa fakt, że ilość paliwa zużywana w jednostce czasu oraz prędkość wylotu gazów z silnika odrzutowego są bardzo duże.

Wprowadzimy teraz pewne definicje i oznaczenia. Przez część użyteczną $C(t)$ rakiety w chwili t rozumieć będziemy część rakiety złożoną z tych punktów, które nie wchodzi w skład paliwa zużytego od chwili startu do chwili t . Podkreślić wypada z naciskiem, że część użyteczną rakiety $C(t)$ możemy obserwować w dowolnej chwili różnej od chwili t , przy czym jest to stale ten sam podzbiór punktów rakiety. Przy ustalonym t , $C(t)$ nie zależy więc od chwili obserwacji, natomiast zmienia się wraz ze zmianą t .

Dla części użytecznej $C(t)$ oznaczymy prędkość jej środka masy w chwili t przez $v(t)$. Oznaczmy dalej przez $P(t, h)$, gdzie $h > 0$, tę część rakiety, która składa się z paliwa zużytego od chwili t do chwili $t+h$. Uwaga, którą zrobiliśmy przed chwilą w odniesieniu do $C(t)$, przenosi się na $P(t, h)$; mianowicie, zbiór punktów $P(t, h)$ przy ustalonych wartościach t i h nie zależy od chwili obserwacji i zmienia się dopiero przy zmianie t lub h .

Przy powyższych oznaczeniach jest widoczne, że $C(t)$ (część użyteczna rakiety w chwili t) jest zespołem dwóch ciał, złożonym z $C(t+h)$ (część użyteczna rakiety w chwili $t+h$) i z $P(t, h)$ (paliwo zużyte od chwili t do chwili $t+h$). Jeśli oznaczymy jeszcze przez $m(t)$ masę $C(t)$, to jest oczywiste, że masa części $P(t, h)$ jest równa różnicy mas części $C(t)$ i części $C(t+h)$, tzn. masa $P(t, h)$ wynosi $m(t)-m(t+h)$.

Oznaczmy wreszcie przez $u(t, h)$ prędkość w chwili $t+h$ środka masy części $P(t, h)$ rakiety. W dalszym ciągu założymy, że funkcje $v(t)$ i $m(t)$ są różniczkowalne, oraz że istnieje granica

$$(6) \quad \lim_{h \rightarrow 0} u(t, h) = u(t).$$

Granice tę nazywamy prędkością w chwili t wylotu gazów z silnika odrzutowego. Powyższe założenia są w przyjętym przez nas modelu rakiety (skończony układ punktów) spełnione z tym lepszym przybliżeniem, im więcej jest punktów wchodzących w skład rakiety i im mniejsze są ich masy.

Postaramy się teraz obliczyć pochodną w chwili t pędu części $C(t)$ rakiety. Utworzymy w tym celu iloraz różnicowy pędu i przejdziemy do granicy 0 z przyrostem czasu h . Otóż pęd części $C(t)$ w chwili t wynosi (zgodnie ze wzorem (4) i przy wprowadzonych przez nas oznaczeniach)

$$m(t)v(t).$$

Pęd tejże części $C(t)$ w chwili $t+h$ jest (zgodnie z poprzednio uczynioną uwagą) sumą pędu w chwili $t+h$ części $C(t+h)$ oraz pędu w chwili $t+h$ części $P(t, h)$, tzn. wynosi

$$m(t+h)v(t+h) + (m(t)-m(t+h))u(t, h).$$

Wspomniani wyżej iloraz różnicowy można więc zapisać w postaci

$$h^{-1}[m(t+h)v(t+h) + (m(t)-m(t+h))u(t, h) - m(t)v(t)],$$
 lub po prostym przekształceniu

$$h^{-1}[m(t+h)v(t+h) - m(t)v(t)] - h^{-1}(m(t+h) - m(t))u(t, h).$$

Przy $h \rightarrow 0$ dostajemy w granicy szukaną pochodną w chwili t pędu części użytecznej $C(t)$ rakiety.

Przy naszych założeniach i oznaczeniu (6) granica ta równa się $\frac{d}{dt}[m(t)v(t)] - \dot{m}(t)u(t)$,

lub po przekształceniu

$$(7) \quad m(t)\dot{v}(t) - w(t)\dot{m}(t),$$

gdzie $w(t) = u(t) - v(t)$ jest — zgodnie z określeniem $u(t)$ — prędkością w chwili t wylotu gazów względem środka masy części użytecznej $C(t)$ rakiety.

Ponieważ równanie (1) obowiązuje w dowolnej chwili t dla dowolnego ciała, zatem stosując je w chwili t do ciała $C(t)$ dostajemy na podstawie wzoru (7) określającego pochodną w chwili t pędu ciała $C(t)$

$$(8) \quad m(t)\dot{v}(t) - w(t)\dot{m}(t) = F(t),$$

gdzie F jest sumą sił zewnętrznych względem $C(t)$.

Równanie (8) jest właśnie równaniem, o którym mowa w tytule artykułu. Różni się ono formalnie od równania (5) o składnik

$$(9) \quad -w(t)\dot{m}(t).$$

Skąd ta rozbieżność między równaniem (5) i (8)? Odpowiedź na to pytanie jest bardzo prosta.





Rozwiązanie zadania M 207

Przyjmując $x = un, y = vn$ otrzymamy (ponieważ $\sin \pi x = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy x jest liczbą całkowitą) równoważny układ

$$\begin{aligned} 2u + 3v &= k \\ 3u + v &= l, \end{aligned} \text{ gdzie } k \text{ i } l \text{ są dowolnymi} \\ \text{liczbami całkowitymi. Wynika stąd, że liczby} \\ 3l - k = 3(3u + v) - (2u + 3v) = 7u \text{ oraz} \\ 3k - 2l = 3(2u + 3v) - 2(3u + v) = 7v \text{ są} \\ \text{całkowite, czyli } u \text{ i } v \text{ są ułamekami} \\ \text{o mianowniku 7. Oznaczając ich liczniki} \\ \text{odpowiednio przez } m \text{ i } n \text{ dochodzimy do} \\ \text{układu kongruencji} \\ 2m + 3n &= 0 \pmod{7} \\ 3m + n &= 0 \pmod{7} \\ \text{równoważnego układowi wyjściowemu.} \\ \text{Ale } 3(3m + n) &= 9m + 3n \equiv 2m + 3n \pmod{7}, \\ \text{czyli pierwsza kongruencja wynika z drugiej.} \\ \text{Wystarczy więc, aby } 3m + n &= 0 \pmod{7}, \text{ czyli} \\ n &= 4m \pmod{7}, \text{ i przyjmując za } m \text{ dowolną} \\ \text{liczbę całkowitą z przedziału } [0, 6] \text{ otrzymamy} \\ \text{7 serii rozwiązań:}$$

m	n	x	y
0	0	k	l
1	4	$(k + \frac{1}{7})$	$(l + \frac{4}{7})$
2	1	$(k + \frac{2}{7})$	$(l + \frac{1}{7})$
3	5	$(k + \frac{3}{7})$	$(l + \frac{5}{7})$
4	2	$(k + \frac{4}{7})$	$(l + \frac{2}{7})$
5	6	$(k + \frac{5}{7})$	$(l + \frac{6}{7})$
6	3	$(k + \frac{6}{7})$	$(l + \frac{3}{7})$

W równaniu (5) wektor $V(t)$ oznacza prędkość środka masy stale tego samego ciała; natomiast w równaniu (8) wektor $v(t)$ oznacza prędkość w chwili t środka masy części użytecznej $C(t)$ rakiety, a więc wraz ze zmianą t coraz to innego ciała (innej części rakiety).

W tym miejscu powstaje jednak następne pytanie. W naszym rozumowaniu nigdzie nie korzystaliśmy z tego, że chodzi o raketę poruszaną silnikami odrzutowymi; raketą mógł być również dobrze np. samochód poruszany zwykłym silnikiem tłokowym. Dlaczego więc w przypadku rakiety kosmicznej posługujemy się równaniem (8), a w przypadku samochodu używamy równania (5)? Odpowiedź na to pytanie jest również łatwa. Oba czynniki $w(t)$, tj. prędkość wylotu gazów z silnika, oraz $\dot{m}(t)$, tj. prędkość zużycia paliwa, mają w sytuacji rakiety kosmicznej bardzo duże wartości bezwzględne, wobec czego człon (9) w równaniu (8) gra istotną rolę; natomiast w przypadku samochodu wartości bezwzględne obu tych czynników są bardzo małe i dlatego składnik (9) można pominąć i w ten sposób dostać równanie (5). Z uwagi tej wynika następujący wniosek: w przypadku samochodu równanie (8) stanowi lepsze przybliżenie rzeczywistości fizycznej, ponieważ jednak z punktu widzenia praktycznych zastosowań ta lepsza aproksymacja nie ma istotnego znaczenia, dlatego posługujemy się prostszym równaniem (5). Obecnie poświęcimy jeszcze trochę uwagi szczególnej sytuacji, dla nas mieszkańców Ziemi bardzo ważnej, gdy chodzi o raketę kosmiczną wystrzeloną z powierzchni Ziemi pionowo do góry. Oznaczając przez $v(t)$, $w(t)$ i $F(t)$ miary rzutów wektorów $v(t)$, $w(t)$ i $F(t)$ na oś skierowaną pionowo do góry i zakładając, że $|w(t)| = w = \text{const}$, dostajemy z (8) równanie skalarne

$$(10) \quad m(t)\dot{v}(t) + w\dot{m}(t) = F(t).$$

Zastanówmy się, co w tym przypadku składa się na wielkość $F(t)$, która jest miarą rzutu sumy sił zewnętrznych ze względu na część użyteczną $C(t)$ rakiety. Otóż, siła odrzutu w chwili t jest siłą wewnętrzną ze względu na $C(t)$; jeśli więc pominiemy opór powietrza, to na F składa się wyłącznie siła przyciągania ziemskiego, tzn. $F = -m(t)g$, gdzie g jest skalarnym przyspieszeniem ziemskim. Ostatecznie równanie (10) przyjmuje postać $m(t)\dot{v}(t) + w\dot{m}(t) = -m(t)g$, lub po podzieleniu przez $m(t)$

$$(11) \quad \dot{v}(t) = -w\dot{m}(t)m(t)^{-1} - g.$$

Zakładając, że w chwili startu $t = 0$ jest $v(0) = 0$ (prędkość początkowa równa 0) oraz $m(0) = m_0$ (masa rakiety lub inaczej masa części użytecznej rakiety w chwili startu), i całkując równanie (11) w przedziale $\langle 0, t \rangle$ dostajemy

$$v(t) = w \log[m_0 m(t)^{-1}] - gt.$$

Z równania tego możemy się dowiedzieć np., jaka ilość paliwa musi zostać zużyta do danej chwili t , by przy: 1° zadanej prędkości wylotu gazów w oraz 2° danej masie $m(t)$, prędkość $v(t)$ była równa drugiej prędkości kosmicznej, tj. równała się 11,2 km/s. Istotnie z ostatniego równania (wobec $w > 0, -gt < 0$) dostajemy nierówność

$$e^{v(t)/w} \leq m_0 m(t)^{-1},$$

gdzie e jest podstawą logarytmów naturalnych, skąd (mnożąc przez $m(t)$ i potem odejmując $m(t)$):

$$m_0 - m(t) \geq m(t) (e^{v(t)/w} - 1).$$

Przyjmując $v(t) = 12$ km/s i $w = 1$ km/s otrzymujemy stąd

$$m_0 - m(t) \geq 160000 m(t).$$

Z ostatniej nierówności wynika, że jeżeli $m(t) = 1$ tona, to masa zużytego paliwa $m_0 - m(t)$ musi wynosić co najmniej 160 000 ton.

Wynik tego rachunku tak został skomentowany przez Stefana Banacha w jego podręczniku „Mechanika”, wydanym w roku 1938, a więc 41 lat temu: „Żeby więc odbyć podróż międzyplanetarną w wozie, mającym wraz z podróżnymi masę 1 tony, należałoby zabrać z sobą 160 000 ton materiałów pędnych, co jest oczywiście niemożliwe. Dowodzi to, że przy dzisiejszym stanie techniki podróż taka jest niewykonalna. Sprawa posunęłaby się naprzód, gdybyśmy mogli wydalnie zwiększyć w , tj. prędkość wypływu gazów, która dzisiaj, praktycznie biorąc, dochodzi do 2 km/sek”.

Tyle cytatu z „Mechaniki” Banacha; natomiast żywiołowy rozwój techniki po II wojnie światowej sprawił, że w niespełna 30 lat po tej wypowiedzi Banacha rakiety kosmiczne zaczęły penetrować układ słoneczny, a człowiek po raz pierwszy postawił stopę na Księżycu. Ten fakt stał się możliwy m.in. dzięki temu, że znane było równanie, któremu poświęcony jest ten artykuł. Na zakończenie należy podkreślić raz jeszcze, że równanie (8) obowiązuje w czasie działania silników odrzutowych, natomiast z chwilą ich wyłączenia ruchem rakiety zaczyna rządzić równanie postaci (5), gdyż wtedy $w(t)$ i $\dot{m}(t)$ stają się zerami. Jeśli więc z chwilą wyłączenia silników pojazd kosmiczny wejdzie np. na orbitę okołozemską, to ruch po orbicie przebiega zgodnie z równaniem (5), w którym F oznacza teraz siłę mającą — według prawa powszechnej grawitacji — wartość proporcjonalną do iloczynu masy pojazdu i masy Ziemi oraz odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości pojazdu od środka Ziemi.

Doc. dr Andrzej SZYMACHA

Przypomnijmy podstawowe prawa rządzące niezależnymi od czasu polami elektrycznymi i magnetycznymi (Delta 8/1979).

- (1) Strumień E (zamknięta powierzchnia) $= \frac{1}{\epsilon_0} Q$ (obejmowany przez tę powierzchnię)
- (2) Strumień B (zamknięta powierzchnia) $= 0$
- (3) Krążenie E (zamknięty kontur) $= 0$
- (4) Krążenie B (zamknięty kontur K) $= \mu_0$ strumień j (przez płat rozpięty na K)

Naturalne pytanie, jakie nasuwa się w związku z tymi prawami, brzmi: czy prawa te zachowują swą słuszność, gdy sytuacja fizyczna nie jest ustalona, lecz zmienia się w czasie? Przez zmianę sytuacji możemy tu rozumieć zwiększanie lub zmniejszanie natężenia prądu wytwarzającego pole magnetyczne, lub zmianę konfiguracji ładunków wytwarzających pole elektryczne. Częściowej odpowiedzi na to pytanie udzielił już Faraday w latach 30-ych XIX w., odkrywając doświadczalnie zjawisko indukcji elektromagnetycznej. Zjawisko indukcji elektromagnetycznej polega, jak wiadomo, na pojawieniu się w obwodzie elektrycznym zamkniętym dodatkowej siły elektromotorycznej, ilekroć strumień magnetyczny obejmowany przez ten obwód jest zmienny w czasie. Ilościowo

$$\epsilon = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Kącik filatelistyczny (11)

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) był niemieckim matematykiem i filozofem. Stworzył, niezależnie od Newtona, podstawy rachunku różniczkowego i całkowego. Wprowadził matematykę do logiki, którą traktował jako pewien rachunek. Był także organizatorem życia naukowego w Niemczech — w 1700 r. założył Akademię Nauk w Berlinie. Jako ciekawostkę podamy, że poza matematyką i filozofią Leibniz interesował się również polityką i m.in. napisał traktat na temat elekcji króla w Polsce w latach 1668–69. Znaczniki z podobizną G. W. Leibniza wydano w Niemczech w roku 1927, w NRD w roku 1950 (w 250 rocznicę założenia Niemieckiej Akademii Nauk) i w RFN w roku 1966 (w 250 rocznicę śmierci uczonego). Reprodukujemy ten ostatni znaczek.

Jerzy BARTKE



Prawo Faradaya można stosować dla dwóch zasadniczo odmiennych sytuacji. Po pierwsze, strumień magnetyczny obejmowany przez obwód może się zmieniać wskutek ruchu (lub deformacji) przewodnika tworzącego ten obwód w niezmiennym polu magnetycznym. Po drugie, strumień może się zmieniać nawet dla nieruchomego obwodu, jeśli wartość pola magnetycznego w różnych punktach przestrzeni zależy od czasu. Jest faktem doświadczalnym, że w obu tych przypadkach obowiązuje ten sam wzór $\epsilon = \frac{d\Phi}{dt}$. W dotychczas sformułowanym języku te dwa przypadki musimy opisywać przy pomocy dwóch różnych mechanizmów.

Sytuację pierwszą, gdy przewodnik porusza się w polu magnetycznym nie zależnym od czasu, możemy łatwo zrozumieć uświadamiając sobie, że ruch przewodnika nadaje pewną prędkość elektronom w nim się znajdującym. Tym samym, zgodnie z wzorem Lorentza, na elektrony zaczyna działać siła $e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, gdzie \mathbf{v} jest prędkością przewodnika. Siła ta zmusza elektrony do ruchu wokół obwodu wbrew siłom oporu. Praca tej siły wzdłuż całego obwodu wykonana nad jednostkowym ładunkiem, to zgodnie z definicją siła elektromotoryczna. Łatwo dowieść, że równa się ona właśnie $\frac{d\Phi}{dt}$. Dowód można znaleźć w standardowym podręczniku szkolnym.

Zatem w zastosowaniu do tych sytuacji prawo Faradaya nie jest niczym szczególnie nowym. Można powiedzieć, że gdyby historia nieco inaczej się potoczyła, prawo to łatwo mogłoby być przepowiedziane teoretycznie.

Przypadek drugi, pola zależnego od czasu i nieruchomego obwodu, jest znacznie ciekawszy. Ponieważ przewodnik jest nieruchomy, nie możemy siły elektromotorycznej wiązać teraz z pracą siły Lorentza, czyli siły pochodzącej od pola magnetycznego. Praca jednak jest wykonywana, i nie robią tego krasnoludki! Musimy przyjąć, że w przypadku nieruchomego przewodnika w zmiennym polu magnetycznym siła elektromotoryczna jest pracą (nad jednostkowym ładunkiem) sił pola elektrycznego wzdłuż obwodu.

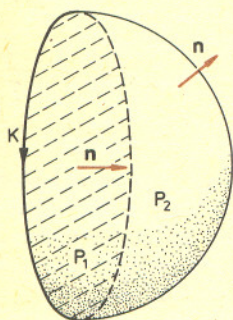
$$\text{Zatem} \quad \text{Krążenie } E \text{ (wzdłuż konturu } K) = - \frac{d}{dt} \text{ strumień } B \text{ (przez płat rozpięty na } K) = \text{strumień} \left(- \frac{dB}{dt} \right).$$

W przypadku pól zmiennych, trzecie z podanych na początku tego artykułu praw musimy zastąpić powyższym. W podanym powyżej sformułowaniu nosi ono nazwę pierwszego prawa Maxwella. Czy to jest jednak jedyna niezbędna zmiana w poznanych prawach, konieczna by dostosować je do najogólniejszej sytuacji, gdy wszystkie wielkości zależą od czasu? To właśnie pytanie postawił sobie Maxwell około roku 1864. W przeciwieństwie do Faradaya rozwiązał problem na drodze czysto teoretycznej, bez prób doświadczalnych w tym kierunku.

Żeby zrozumieć ideę Maxwella, musimy najpierw omówić dwie sprawy. Pierwsza to pewne czysto matematyczne własności równania wiążącego krążenie pewnego pola wektorowego ze strumieniem innego pola. Taką właśnie strukturę ma zarówno prawo Ampera (4), jak i wprowadzone przed chwilą z prawa Faradaya I prawo Maxwella. Drugi potrzebny element to prawo zachowania ładunku.

W równaniu wiążącym krążenie ze strumieniem uderzyć może pewna pozorna nielogiczność.

Mówiąc kontur mamy na myśli nie tylko geometryczną krzywą, ale i określony jeden z dwóch możliwych kierunków jej obchodzenia (orientację).



Wszak przy zadanym polu krążenie zależy tylko i wyłącznie od wybranego konturu. Natomiast aby obliczyć strumień, należy wybrać określony płat. Istnieje jednak nieskończenie wiele płatów rozpiętych na danym konturze! Sprzeczności unikniemy pod jednym tylko warunkiem, jeśli pole, którego strumień nas interesuje, ma tę szczególną własność, że jego strumień przez różne płaty rozpięte na tym samym konturze jest taki sam. Niezależność strumienia od płatu można sformułować inaczej. Weźmy bowiem kontur K i dwa jakiegokolwiek rozpięte na nim płaty. Wektor normalny na każdym z płatów kierujemy w tę samą stronę względem orientacji konturu. Płaty P_1 i P_2 ograniczają pewien obszar przestrzeni. Wektor n na P_2 skierowany jest na zewnątrz tego obszaru, a wektor n na P_1 do wewnątrz. Oznaczmy strumień przez płat P_1 literą Φ_1 , a strumień przez płat P_2 literą Φ_2 . Mamy $\Phi_2 - \Phi_1 = 0$.

Ale $-\Phi_1$ to strumień przez płat P_1 z wektorem $-n$ (też skierowanym na zewnątrz). $\Phi_2 - \Phi_1$ to zatem nic innego, jak całkowity strumień wypływający z obszaru zawartego między P_1 i P_2 . Niezależność strumienia od płatu rozpiętego na danym konturze oznacza znikanie strumienia pola wektorowego przez każdą powierzchnię zamkniętą.

Patrząc z tego punktu widzenia na I prawo Maxwella, w którym występuje strumień pola magnetycznego, widzimy, że wszystko jest w porządku, bowiem na mocy prawa (2) pole magnetyczne ma tę przyjemną własność. Sprzeczności nie ma, a zarazem zyskujemy sugestię, że prawo o znikaniu strumienia magnetycznego przez każdą zamkniętą powierzchnię powinno pozostać bez zmiany przy przejściu do teorii pól zależnych od czasu.

A co z prawem Ampera (4)? Występuje w nim strumień gęstości prądu j . Czy i ten strumień znika przez każdą zamkniętą powierzchnię? W przypadku prądów stacjonarnych tak. Strumień gęstości prądu przez zamkniętą powierzchnię równy jest liczbowo ładunkowi, jaki w jednostce czasu wypływa z objętości ograniczonej tą powierzchnią. Dla prądów stałych, płynących dowolnie długo, z danego obszaru tyle ładunku wypływa, ile doń wpływa — czyli strumień całkowity wynosi właśnie zero. Jest to nic innego, jak znane dobrze pierwsze prawo Kirchhoffa, sformułowane w szkole dla obszaru otaczającego rozgałęzienie przewodów. Znikanie strumienia gęstości prądu wyraża prawo zachowania ładunku dla sytuacji stacjonarnej. Gdyby ładunek mógł powstawać z niczego, to rodząc się stale w pewnym obszarze mógłby stale zeń wypływać, a jego ilość w rozpatrywanym obszarze nie zmieniałaby się. Wtedy mielibyśmy kłopot z prawem Ampera. Na szczęście ładunek jest zachowany.

Ale co będzie w przypadku sytuacji niestacjonarnej, jeśli ilość ładunku w danym obszarze przestrzeni może być raz większa, raz mniejsza? Oczywiście teraz całkowity strumień j przez powierzchnię ograniczającą ten obszar jest różny od zera — kiedy ładunku ubywa, strumień jest dodatni, kiedy go znów przybywa, strumień jest ujemny.

W powyższym zdaniu zawarliśmy znów treść odpowiadającą prawu zachowania ładunku. Skoro ładunek nie ginie bez śladu, ani nie powstaje z niczego, to właśnie strumień j w danej chwili równa się szybkości ubywania ładunku. Ładunek maleje tylko dzięki temu, że dokładnie tyleż go wypływa przez powierzchnię.

$$\text{Strumień } j = -\frac{dQ}{dt}.$$

W sytuacji stacjonarnej wszystkie pochodne względem czasu równają się zeru i powyższe ogólne prawo zachowania redukuje się do znikania strumienia j .

W ogólności jednak, gdy $\frac{dQ}{dt} \neq 0$, strumień j nie znika i prawo Ampera traci sens.

To właśnie zauważył Maxwell.

Skoro prawo Ampera w podanej postaci traci sens, gdy $\frac{dQ}{dt} \neq 0$, to trzeba je niewątpliwie zmienić.

Zauważając, że zgodnie z prawem Gaussa (1) $\frac{dQ}{dt} = \epsilon_0$ strumień $\frac{dE}{dt}$,

możemy ogólne prawo zachowania ładunku zapisać w postaci strumień $\left[j + \epsilon_0 \frac{dE}{dt} \right] = 0$.

A zatem wektor $j + \epsilon_0 \frac{dE}{dt}$ ma w najogólniejszym przypadku znikający strumień przez każdą

zamkniętą powierzchnię. Innymi słowy, strumień tej sumy zależy tylko od danego konturu, a nie od płatu, który na tym konturze rozpiemy. Własność tę zasugerowała Maxwellowi, że ten właśnie wektor powinien być wstawiony do prawa Ampera w miejsce samego j , które tam

dotychczas występowało: Krążenie $B = \mu_0$ strumień $\left(j + \epsilon_0 \frac{dE}{dt} \right)$.

Powyższe prawo nosi nazwę II prawa Maxwella i jest matematycznie najprostszym uogólnieniem prawa Ampera usuwającym sprzeczność, o której wspominaliśmy.

Ponieważ w sformułowaniu prawa zachowania ładunku korzystaliśmy z prawa Gaussa, to znów wydaje się, że prawo to nie powinno ulec zmianie dla sytuacji zależnych od czasu (bez wywołania całego łańcucha kolejnej modyfikacji II prawa Maxwella itd.). Jest to znów argument o charakterze prostoty matematycznej.

Czytelnicy proponują

Pan Andrzej MOJSKI z Sopotu przysłał list, w którym dowodzi, że prawdziwa jest następująca zależność

$$1 + 2 \cdot (1,1) + 3 \cdot (1,1)^2 + \dots + 9 \cdot (1,1)^8 + 10 \cdot (1,1)^9 = 10^2$$

lub ogólniej

$$\sum_{j=1}^n j \left(\frac{n+1}{n} \right)^{j-1} = n^2.$$

Równość tę możemy otrzymać, różniczkując wzór na sumę ciągu geometrycznego

$$\sum_{j=1}^n x^j = \frac{x^{n+1} - x}{x-1}$$

i podstawiając w otrzymanej równości $x =$

$$= \frac{n+1}{n}.$$

Przepiszemy jeszcze raz zaproponowany przez Maxwella zestaw kompletnych równań elektromagnetyzmu

- I. Krążenie $E = -\text{strumień} \frac{dB}{dt}$ (kontur zamkn.)
- III. Strumień $E = \frac{1}{\epsilon_0} Q$ (pow. zamkn.)
- II. Krążenie $B = \mu_0 \text{strumień} \left(j + \epsilon_0 \frac{dE}{dt} \right)$ (kontur zamkn.)
- IV. Strumień $B = 0$ (pow. zamkn.)

Równania powyższe noszą nazwę równań Maxwella. Są to jedne z najważniejszych równań fizyki.

Najważniejszą konsekwencją nowego członu dopisanego przez Maxwella na podstawie argumentów teoretycznych jest to, że teraz równania te dopuszczają istnienie różnych od zera rozwiązań nawet wtedy, gdy $Q = 0$ i $j = 0$.

Jeżeli na przykład włączyliśmy na pewien czas prąd zmienny w pewnym obwodzie (nazwijmy go anteną), a potem prąd ten wyłączyliśmy, to od tego momentu rzeczywiście $Q = 0$ i $j = 0$. Gdyby nie było członu Maxwella $\epsilon_0 \mu_0 \frac{dE}{dt}$, to mielibyśmy strumień $B = 0$, krążenie $B = 0$.

Można dowiedzieć, że jeśli zarówno krążenie jak i strumień pola (przez każdy zamknięty kontur i każdą zamkniętą powierzchnię) są równe zeru, to pole takie jest tożsamościowo równe zeru. Bez członu Maxwella dostalibyśmy po wyłączeniu prądu w antenie: $B = 0$. Wstawiając tę wartość do I prawa Maxwella i korzystając z prawa Gaussa (III) napisalibyśmy strumień $E = 0$, krążenie $E = 0$.

Zatem musiałyby być $E = 0$. Nie istniałyby żadne fale. Z członem Maxwella sytuacja jest inna. Nawet po położeniu $Q = 0, j = 0$ równania dopuszczają różne od zera rozwiązania opisujące sytuację np. po wyłączeniu prądu. Sprawdźmy to w pewnym szczególnym przypadku. Przekonamy się, że może istnieć wędrujący w przestrzeni obszar, gdzie zarówno pole E jak i pole B są różne od zera. Wyznamy jednocześnie szybkość przesuwania się tego obszaru. Rysunek przedstawia dwie równoległe płaszczyzny poruszające się w kierunku do nich prostopadłym z prędkością v . Wprowadzamy ponadto ustalony układ odniesienia. Nasze wędrujące płaszczyzny są równoległe do płaszczyzny xy , a kierunek ich poruszania się jest kierunkiem osi z .

Twierdzimy, że konfiguracja, w której pola E i B są równe zeru na zewnątrz płaszczyzn, a wewnątrz przyjmują wartości $E = (E_x, 0, 0)$, $B = (0, B_y, 0)$

spełnia wszystkie równania Maxwella, o ile prędkość v i stosunek $\frac{E_x}{B_y}$ są odpowiednio dobrane.

Ze strumieniami pól E i B przez zamkniętą powierzchnię nie ma problemu, gdyż linie sił pól E i B są liniami prostymi i każdą zamkniętą powierzchnię przecinają parzystą ilość razy — wchodząc i wychodząc. Kluczowe są pozostałe dwa prawa, tj. I i II prawo Maxwella.

Rozpatrzmy dwa nieruchome kontury K_1 i K_2 zaznaczone na rysunku. Są one tak usytuowane, że w danej chwili znajdują się częściowo w obszarze, gdzie pola są różne od zera, a częściowo w obszarze na zewnątrz płaszczyzn. Obliczmy krążenie pola B wzdłuż konturu K_2 . Odczytujemy z rysunku, że wynosi ono $+B_y \cdot a$. Strumień pola E jest zależny od czasu, gdyż w miarę upływu czasu pole E przenika przez coraz większą część (zaciemnioną na rysunku) prostokąta K_2 . Szybkość zmian tego strumienia wynosi oczywiście $v \cdot a \cdot E_x$.

Na mocy II prawa Maxwella musi być $aB_y = \epsilon_0 \mu_0 v a E_x$.

Podobnie dla konturu K_1 stosujemy I prawo Maxwella dostając $aE_x = v a B_y$ (krążenie E wynosi $-aE_x$, w I prawie jest jeszcze jeden znak minus).

Podstawiając E_x z drugiego równania do pierwszego mamy

$$B_y = \epsilon_0 \mu_0 v \cdot v B_y, \quad \text{skąd} \quad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Przypomnijmy w tym miejscu, że w układzie SI amper zdefiniowany jest przez wybór stałej μ_0 jako pewnej „okrągłej” liczby, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$.

Stała ϵ_0 występująca w prawie Gaussa (i Coulomba) musi być wyznaczona z pomiarów siły między znanymi ładunkami wyrażonymi w kulombach. Jej wartość wynosi

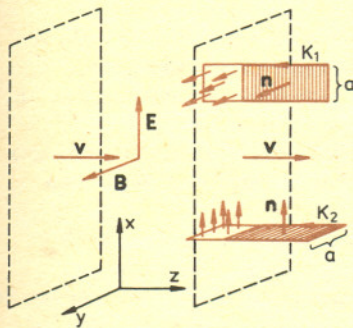
$$\epsilon_0 = 8,84 \cdot 10^{-12}$$

Podstawiając dostajemy $v = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$.

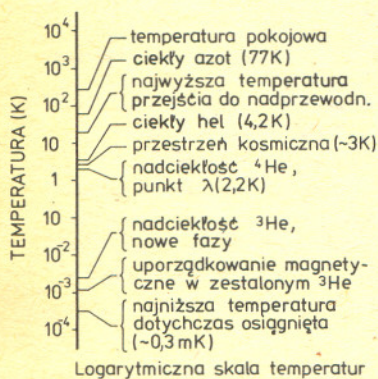
Rachunek ten wykonał Maxwell (oczywiście nie w układzie SI, ale nie zmienia to istoty rzeczy). Zbieżność otrzymanej liczby ze znaną z zupełnie innych pomiarów prędkością światła ma oczywistą interpretację. Światło, to tajemnicze światło, którego natury nie mogły przeniknąć najtęższe umysły fizyków i filozofów żyjących przed Maxwellem, to nic innego, tylko fale elektromagnetyczne! Ale fale mogą mieć różne długości. W odróżnieniu od światła, które jest generowane drganiami ładunków wewnątrz atomów, fale o większych długościach mogą być i są generowane drganiami ładunków w obwodach makroskopowych (antenach). Uzyskał je w pracowni po raz pierwszy Hertz w 25 lat po ogłoszeniu teorii Maxwella (Maxwell nie dożył już tego triumfu swojej teorii). Słuchając radia czy oglądając telewizję nie mamy wątpliwości, że fale te istnieją.

Rozwiązanie zadania M 205

Przypuśćmy, że $p(x) - 1 = q(x) \cdot r(x)$, gdzie $st \ q < st \ p, st \ r < st \ p$ i współczynniki wielomianów q oraz r są całkowite. Dla wszystkich pierwiastków wielomianu p mamy $q(x_i) \cdot r(x_i) = p(x_i) - 1 = -1$. Wynika stąd, że $q(x_i) = -r(x_i) = \pm 1$, bo wartości $q(x_i), r(x_i)$ są całkowite. Wielomian $q(x) + r(x)$ stopnia mniejszego niż n ma więc n różnych pierwiastków, co jest możliwe tylko, gdy jest wielomianem zerowym. A zatem $q(x) = -r(x)$ i $p(x) - 1 = - (q(x))^2$, co jest niemożliwe, ponieważ najwyższym współczynnikiem wielomianu p jest 1.



Doc. dr Lucjan ŚNIADOWER



Świat prawdziwie niskich temperatur rozpoczyna się dla fizyka gdzieś około 1 kelwina. Nie zawsze zdajemy sobie sprawę, iż obniżenie temperatury od 4,2 K (temperatura wrzenia ciekłego helu) do 10 mK to pod względem trudności prawie to samo, co na przykład ochłodzenie ciała o temperaturze 1000 K do temperatury 4,2 K. Ilustruje to diagram temperatury wykreślony w skali logarymicznej. W ostatnich kilkunastu latach opanowano doświadczalnie obszar temperatur od 1 K do 0,3 mK, znacznie rozleglejszy w tej skali od obszaru zawartego między temperaturą pokojową a temperaturami helowymi, stanowiącego przez wiele ubiegłych lat domenę fizyki niskich temperatur.

Praca w niskich temperaturach, już poniżej ok. 3 K, stanowi dla fizyka olbrzymią atrakcję; jest on w stanie zrealizować w swoim laboratorium, w sposób sztuczny, warunki, których nie ma nigdzie na zewnątrz. Temperatura przestrzeni kosmicznej wynosi właśnie ok. 3 K i nie są nam znane naturalne obiekty o temperaturze niższej. Mamy tu zupełnie inną sytuację niż na przykład w fizyce wysokich energii, gdzie w warunkach ziemskich, przy pomocy największych nawet akceleratorów, jesteśmy w stanie osiągnąć energię stanowiącą jedynie cząstkę energii promieniowania kosmicznego.

Najogólniej mówiąc, fizyka niskich temperatur jest fizyką stanów uporządkowanych; im subtelniejsza jest natura tego uporządkowania, tym niższej potrzebujemy temperatury, aby ją zaobserwować i zbadać. Nadprzewodnictwo, nadciekłość, uporządkowanie magnetyczne i jądrowe — to kolejne szczeble osiągane przez fizykę niskich temperatur. Zjawiska te, czułe na temperaturę, odgrywają zasadniczą rolę w jej pomiarze.

Pomiar niskich temperatur jest często równie skomplikowanym zadaniem jak ich otrzymywanie i przekazywanie. Termometry rtęciowe zamarzają już przy silnych mrozach i wcale niełatwo zbudować termometr działający w temperaturze np. 1 mK.

Do temperatury ok. 50 mK można z powodzeniem stosować półprzewodnikowe termometry oporowe, wykorzystując fakt silnej zależności oporu elektrycznego półprzewodników (domieszkowany german) od temperatury. Poniżej tej temperatury opór kryształu bardzo wzrasta, jest on już właściwie izolatorem i termometria jest już niemożliwa. Dodatkową trudnością jest pojawianie się oporu cieplnego na granicy dwóch ośrodków (tzw. opór Kapicy), maskującego prawdziwą temperaturę badanej próbki.

Z kilku zjawisk fizycznych, zależnych od temperatury w zakresie milikelwinów, prawo obywatelstwa w termometrii mili- i mikrokelwinów zyskały sobie w ostatnich latach dwa: orientacja jąder atomowych (NO — nuclear orientation) oraz magnetyczny rezonans jądrowy (NMR — nuclear magnetic resonance). Inne, możliwe do wykorzystania zjawiska, takie jak efekt Mössbauera, ciśnienie osmotyczne w kapilarach łączących ciekły ^3He i ciekłą mieszaninę $^3\text{He} + ^4\text{He}$, zestalanie ^3He , szum cieplny, paramagnetyzm soli CMN (azotan cerowo-magnezowy) czy też statyczna jądrowa podatność magnetyczna nie wytrzymują konkurencji z wymienionymi uprzednio najnowocześniejszymi metodami. Metoda orientacji jąder pozwala na pomiar temperatur w zakresie $100 \div 2$ mK, magnetyczny rezonans jądrowy służy do pomiaru najniższych uzyskiwanych obecnie temperatur sięgających ok. 0,3 mK.

Termometria NO

W rozpadzie promieniotwórczym jąder atomowych emitowane są cząstki α lub β oraz fotony γ . W pewnych warunkach kierunek tej emisji nie jest przypadkowy i zależy właśnie od temperatury. Dokładniej, rozkład kierunkowy tego promieniowania zależy od względnego obsadzenia tzw. nadsubtelnych podpoziomów jądrowych. W „wysokich” temperaturach (powyżej 100 mK) wszystkie poziomy są mniej więcej tak samo obsadzone i rozkład kierunkowy emitowanego promieniowania jest średnią rozkładów na każdym z poziomów i wobec tego nie zależy od temperatury. Z kolei poniżej 2 mK kierunek promieniowania zależy tylko od własności jąder atomowych i także nie jest czuły na temperaturę. Między tymi granicami, w przedziale $100 \div 2$ mK, dla określonych jąder atomów o znanych schematach rozpadu promieniotwórczego, pomiar niejednorodności kierunków promieniowania daje pojęcie o obsadzeniach poziomów i może stanowić czuły termometr.

Wielką zaletą takiego termometru jest fakt, iż pomiar odbywa się bez żadnych przewodów i doprowadzeń do „zimnej” części aparatury. Materiał promieniotwórczy umieszcza się w bezpośrednim kontakcie z obszarem, którego temperaturę chcemy zmierzyć, natomiast detektor promieniowania znajduje się na zewnątrz.

W termometrii NO najbardziej użyteczny jest kobalt. Stabilny izotop ^{59}Co poddaje się działaniu niewielkiego strumienia neutronów w reaktorze, przeprowadzając go w izotop ^{60}Co . Schemat rozpadu ^{60}Co jest bardzo dobrze znany (emituje fotony γ o energii 1,173 i 1,332 MeV z okresem rozpadu 5,26 lat), stąd stosunkowa łatwość pomiaru. Jedynym wymaganym narzuconym na próbkę kobaltu jest jej monokrystaliczność i heksagonalność struktury krystalograficznej.

Sama aparatura jest w zasadzie bardzo prosta, poza niewielkim monokryształem kobaltu (typowe wymiary $1 \times 1 \times 5$ mm) składa się z licznika scyntylicyjnego i wielo- lub jednonkanałowego analizatora amplitudy. Dokładność wyznaczenia temperatury wynosi ok. 2% w 40 mK, a przy 2 mK jest nieco gorsza i wynosi ok. 7%.

Termometria NMR

Zastosowanie NMR do termometrii niskotemperaturowej pozwoliło przesunąć granicę pomiaru temperatury poniżej 1 mK. Wszystkie przeprowadzone w ciągu ostatnich 2–3 lat eksperymenty, w których osiągnęto temperatury $0,3 \div 0,4$ mK wykorzystywały tę właśnie zasadę pomiaru. Metoda NMR wykorzystuje fakt istnienia nieskomplikowanej zależności między temperaturą a momentem magnetycznym jąder atomowych. Wielkości te są odwrotnie proporcjonalne. Aby zmierzyć temperaturę, trzeba zatem zmierzyć moment magnetyczny jąder atomowych badanej próbki. Można to osiągnąć tak: Umieszczamy próbkę w stałym i jednorodnym polu magnetycznym. W tych warunkach wektor momentu magnetycznego każdego z jąder atomowych wykonuje ruch precesyjny wokół kierunku przyłożonego zewnętrznego pola magnetycznego z określoną częstością (tzw. częstość Larmora), a znajomość jej pozwala na obliczenie momentu magnetycznego jądra. Z kolei częstość Larmora wyznaczamy tak: Poddajemy próbkę działaniu fal elektromagnetycznych o częstości radiowej. Gdy częstość tych fal jest równa częstości Larmora, następuje rezonans: energia fal zamienia się w energię ruchu precesyjnego. Zatem, gdy będziemy znać długość fali elektromagnetycznej w chwili wystąpienia rezonansu, będziemy też wiedzieć, jaka jest częstość Larmora, więc i moment magnetyczny jąder, zatem i temperatura próbki.

Odwrotna proporcjonalność temperatury i momentu magnetycznego jąder obowiązuje aż do obszaru mikrokelwinowego i do tej granicy może służyć do wyznaczania temperatury. Próbkami termometrycznymi są sproszkowane metale, głównie miedź lub platyna.

Poza próbką należy w obszarze niskotemperaturowym umieścić także miniaturową cewkę zasilaną falami o częstości radiowej, będącą jednocześnie detektorem pochłaniania energii przez próbkę. Jest to duża niedogodność metody, same przewody elektryczne są już źródłem ciepła doprowadzonego do obszaru „zimnego”. Ponadto należy wytworzyć zewnętrzne pole magnetyczne o dużej jednorodności i stabilności. Jednakże wszystkie te mankamenty są z nawiązką skompensowane przez sam fakt wiarygodnego odczytu temperatury w zakresie mikrokelwinów. Uparte dążenie fizyków do osiągnięcia bezwzględnego zera przy pomocy coraz to bardziej zaawansowanych technik doświadczalnych nie jest rekordomanią. Odkryte w ostatnich latach fascynujące zjawiska fizyczne (nadciekłość ^3He , uporządkowanie magnetyczne zestalonego ^3He) świadczą o wielu nie zbadanych jeszcze możliwościach fizyki niskich temperatur. Fascynujące wydaje się być również i to, że granica zera bezwzględnego nie może być osiągnięta, fizyka niskich temperatur nie ma więc kresu...



Zadania

Redaguje mgr Krzysztof NOWIŃSKI

M 205. Wielomian $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ ma n różnych pierwiastków całkowitych x_1, \dots, x_n . Wykazać, że wielomian $p(x) - 1$ nie może być iloczynem dwóch wielomianów niższego stopnia o współczynnikach całkowitych.

Rozwiązanie na str. 11

M 206. Znaleźć wszystkie wielomiany $p(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, mające 4 różne pierwiastki całkowite i takie, że $p(x) + 1$ rozkłada się na iloczyn dwóch wielomianów niższego stopnia o współczynnikach całkowitych.

Rozwiązanie na str. 7

M 207. Rozwiązać układ równań $\sin(2x + 3y) = 0$

$$\sin(3x + y) = 0$$

Rozwiązanie na str. 8

Redaguje dr Halina Abramowicz

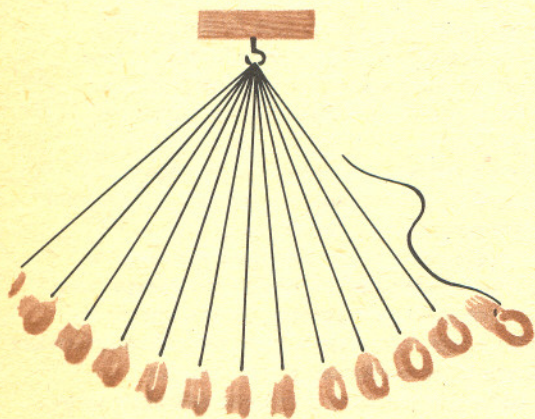
F 69. a. Jaka musi być masa gazów wypływających w jednostce czasu przez dyszę rakiety, aby rakieta mogła oderwać się od Ziemi? Prędkość wypływu gazów wynosi $w = 2$ km/s, a masa startującej rakiety $m_0 = 2729$ t (masa rakiety Saturn V z księżycowym statkiem Apollo).

b. W jakim czasie silniki rakiety startującej z Księżyca (brak oporu atmosfery) powinny wyrzucić określoną ilość gazów o stałej prędkości, na to by rakieta osiągnęła maksymalną wysokość?

Rozwiązanie na str. 16

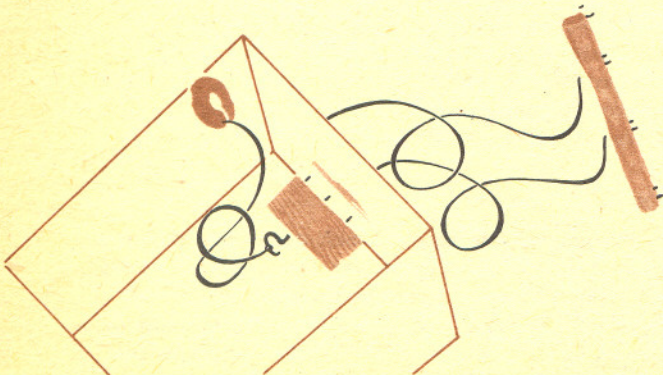


delta mała



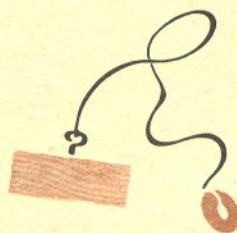
Przymocujmy więc swobodny koniec nitki do dużego klocka. Teraz wahadło wisi na klocku, który trzymamy w ręce. Pozostaje tylko rozhuścić i puścić (bez rzucania!). Wahanie i tym razem ustaje, chociaż teraz zadbaliliśmy o to, by zawieszenie (klocek) spadało razem z wahadłem.

Najbardziej uparci powiedzą, że wahadło wprawdzie wisi na klocku, ale klocek przestał wisieć. Dla tych mamy jeszcze jedno doświadczenie. Mocujemy nitkę wewnątrz dużego kartonowego pudełka tak, żeby było w nim wystarczająco dużo miejsca na swobodny ruch wahadła. Znow po upuszczeniu nie waha się, prawda? Wreszcie możemy poprosić starszego brata, żeby zeskoczył (bez odbijania się) wraz z wahadłem z wysokości około 1,5 m (niżej nic nie zdążymy zobaczyć).



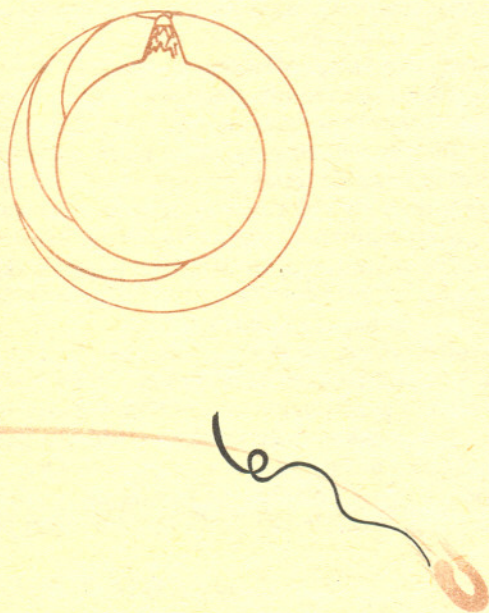
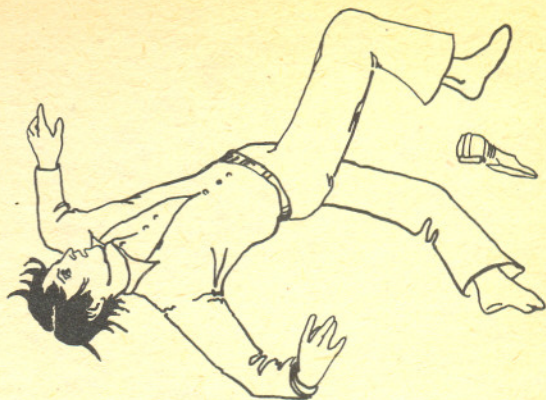
Pozbawieni ciężaru

Upuszczone na ziemię rozhuścane wahadło przestaje się wahać w czasie spadania. Aby się o tym przekonać, przywiązujemy mały, ciężki przedmiot, np. nakrętkę do śruby, na końcu nitki o długości około 10 cm, chwytamy za drugi koniec nitki, drugą ręką popychamy przedmiot i, po zaobserwowaniu kilku równomiernych wahnień, wypuszczamy nitkę z palców z wysokości co najmniej 2 m. Zobaczymy wyraźnie, że w trakcie spadania ruch wahadłowy ustaje. Nic w tym dziwnego, powiecie. Przecież ruch wahadłowy może odbywać się tylko wtedy, gdy wahadło na czymś wisi. Po upuszczeniu przestało wisieć, to i wahań nie ma.



Po wykonaniu tych wszystkich doświadczeń łatwo uwierzmy, że nie ma zupełnie żadnego znaczenia, na czym wisi wahadło: na klocku, ręce, wewnątrz pudełka czy rakiety kosmicznej. Jeżeli tylko miejsce zawieszenia spada bez przeszkód na ziemię razem z wahadłem, to nie ma ruchu wahadłowego. I to żadnego rodzaju. Jaki stąd wniosek? Ano, że podczas spadania nic na niczym nie wisi. Ani wahadło na klocku, ani klocek na wahadle. Zastanówmy się, co to znaczy, że wahadło na czymś wisi. Oczywiście nic innego jak to, że napina nitkę i usiłuje urwać się z miejsca zawieszenia. A to z kolei znaczy, że ciężarek przywiązany do nitki waży. Nic takiego nie obserwujemy jednak podczas spadania. Nitka nie jest w najmniejszym nawet stopniu napięta i ciężarek po prostu nic nie waży.

A ponieważ stwierdziliśmy, że np. w spadającej rakiecie kosmicznej nic nie wisi na niczym, więc wewnątrz tej rakiety nic nie ma wagi. Znajdujący się w niej ludzie również nie odczuwają swej wagi. Łatwo to zrozumieć, jeżeli uprzytomnimy sobie, że na Ziemi odczuwamy swój ciężar tylko dlatego, że wszystkie części ciała wiszą jedne na drugich. Ręka wisi na tułowiu i opuszczona swobodnie ciągnie do Ziemi, a rozhuśtana także przypomina wahadło. Tułów z kolei oparty jest poprzez nogi na podłodze. Gdyby ją usunąć, czego nikomu nie życzę, znikłyby wszystkie punkty zawieszenia, nic by niczego nie ciągnęło i przestalibyśmy ważyć. Odpowiednie doświadczenie można wykonać również przy pomocy przygotowanego poprzednio pudełka kartonowego z zawieszonym wewnątrz wahadłem. Odwracamy pudełko „do góry nogami”, prostujemy wahadło pionowo w górę i całość upuszczamy (bez kolegi nie dajmy sobie chyba rady). Ciężarek nie spada na podłogę pudełka. Podobnie kosmonauta może swobodnie unosić się wewnątrz spadającej bez przeszkód rakiety.

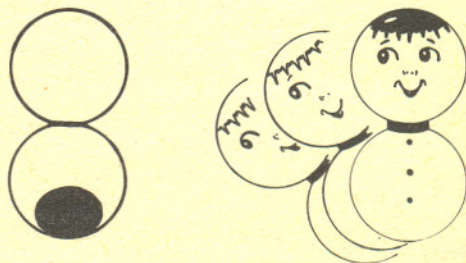


A dlaczego odkryty przez nas stan nieważkości występuje również wewnątrz satelity krążącego dokoła Ziemi? Przecież satelita ten nie spada.

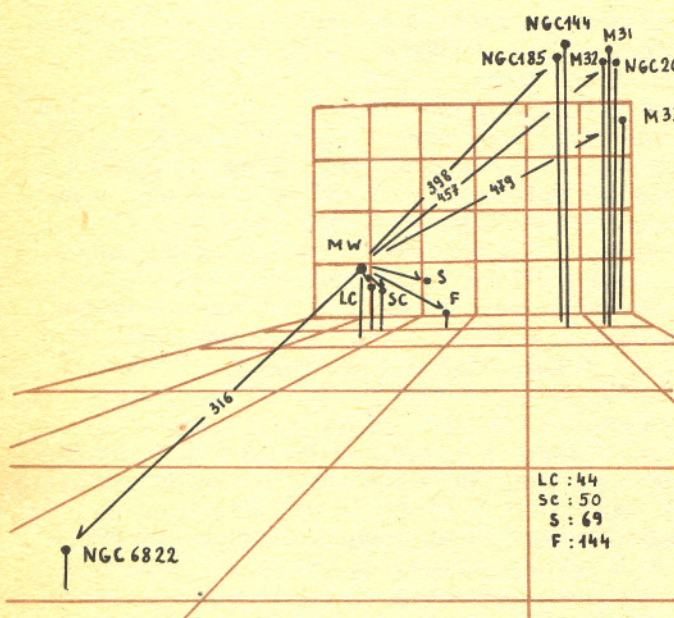
Wykonajmy jeszcze jedno doświadczenie. Powtórzmy lub wyobraźmy sobie, że powtarzamy którekolwiek z opisanych poprzednio doświadczeń (nie radzę jednak skakać z wysokości 1,5 m), upuszczając wahadło z okna rozpędzonego pociągu. Wprawdzie silny wiatr zakłóci wtedy obserwację, ale łatwo uwierzyć, że istota zjawiska nie zmieni się. Wahadło przestanie się wahać, tyle tylko, że nie spadnie pionowo, ale po pewnej krzywej. Spadnie tym dalej, im szybciej jechał pociąg. Wiemy jednak, że Ziemia jest kulą. Jeżeli więc rozpędzimy w jakiś sposób wahadło do większej prędkości, to spadnie ono dalej: w odległości 20 m, 1 km, w Paryżu, Ameryce, Azji i wreszcie okrzyki kulę ziemską. Opór powietrza (ten wiatr w pociągu) bardzo to wszystko skomplikuje. Jednak pozostaje faktem, że każdy rzut wahadła z dowolną prędkością daje taki sam rezultat, jaki obserwowaliśmy podczas zwykłego upuszczenia na ziemię. W każdym przypadku nic nie ma wagi. Po przekroczeniu zaś pewnej wartości prędkości rzutu (około 8 km/s) przedmiot nie powróci na Ziemię i będzie krążył wokół niej jako satelita. Stan nieważkości wcale wtedy nie ustanie.

Na zakończenie dwa pytania:

- (i) Znacie zabawkę zwaną Wańka-Wstańka? Jeżeli nie, to możecie ją zrobić: wystarczą dwie piłeczki pingpongowe — jedną przecinamy i do uzyskanej półkuli przymocowujemy kawałek ołowiu. Piłeczkę „nasioną” ołowiem skleamy dokładnie za pomocą taśmy papierowej posmarowanej dowolnym klejem acetonowym. Po sklejeniu obu piłeczek Wańka gotowa, położona na podłodze zawsze wstaje. Rzucajcie ją w górę na różne sposoby nad czymś miękkim (bo się stłucze). Jak wyjaśnicie jej zachowanie podczas ruchu?
- (ii) W wodzie ważymy znacznie mniej, właściwie prawie wcale. Dlaczego stan ten nie ma nic wspólnego ze stanem nieważkości? Czy wszystko jest wtedy nieważkie?



Małą Deltę opracował: Michał Świącki



Na październikowym niebie pojawiają się coraz ciekawsze gwiazdozbiory: bardzo charakterystyczna Kasjopea (*Cas*). Wieloryb (*Cetus*, *Cet*), zodiakalne Ryby (*Pisces*, *Psc*) i Andromeda (*And*). W tym ostatnim gwiazdozbiore można dojrzeć najdalszy obiekt Wszechświata widzialny gołym okiem. Jest to Wielka Mgławica Andromedy — galaktyka M31 — ledwo widoczna plamka koło gwiazdy ν *And*.

Wydaje się, że galaktyka Andromedy i nasza Droga Mleczna tworzą układ podwójny oddziałujących ze sobą dużych galaktyk spiralnych. Wokół nich można znaleźć kilkanaście trabantów (czyli satelitów) — małych i karłowatych galaktyk eliptycznych i nieregularnych. Drogę Mleczną obiegają także Wielki i Mały Obłok Magellana — dwie nieregularne galaktyki widoczne gołym okiem na niebie południowym, oraz galaktyki eliptyczne w gwiazdozbiorach Rzeźbiarza, Pieca, dwie w Lwie, Smoku i w Małej Niedźwiedzicy. Wielką Mgławicę Andromedy obiega 8 odkrytych dotychczas karłowatych galaktyk.

Te dwie duże galaktyki stanowią oś tzw. Układu Lokalnego, do którego należy najprawdopodobniej dużo więcej obiektów, niż wymienione powyżej; wiemy o bliżej, dość dużej galaktyce spiralnej M33 w gwiazdozbiore Trójkąta oraz dwóch nieregularnych w Wielorybie i Strzelcu.

W płaszczyźnie Drogi Mlecznej gromadzą się duże ilości gazu i pyłu, co bardzo utrudnia obserwacje obiektów pozagalaktycznych w tych kierunkach. Tłumienie światła jest tak silne, że widzimy wyraźnie mniej galaktyk w okolicach równika galaktycznego. Nieświadomi przyczyny tego zjawiska astronomowie wprowadzili kiedy nazwę „strefy unikania” dla okolic Drogi Mlecznej. Możliwe, że w strefie tej istnieją bliskie galaktyki, nawet gigantyczne, których światło jest tak tłumione, że praktycznie do nas nie dociera.

W ostatnich latach, obserwując płaszczyznę Drogi Mlecznej w promieniach podczerwonych (w których lepiej widać obiekty przesłonięte przez chmury gazu i pyłu), odkryto dwie bliskie, duże galaktyki, którym nadano prowizoryczne nazwy *Maffei-1* i *Maffei-2*. Oceny odległości do tych obiektów są jednak na tyle niepewne, że kwestia ich przynależności do Grupy Lokalnej pozostaje otwarta.

Mgr Tomasz CHLEBOWSKI

Rozwiązanie zadania F 68

Zmiana pędu rakiety dp w czasie dt związana jest z popędem działającym na rakietę siłą (siła przyciągania grawitacyjnego mg oraz siła oporu powietrza proporcjonalna do prędkości rakiety v dla małych wartości v) $F dt$ oraz ze zmianą masy wywołaną wypływem gazów. Pęd wynoszony przez gazy w czasie dt jest równy $\frac{dm}{dt}(v+w)dt$, gdzie v jest prędkością rakiety, a $(v+w)$ prędkością wypływających gazów w układzie odniesienia związanym z Ziemią. Z zasady zachowania pędu otrzymujemy równanie $\frac{dp}{dt} = F + \frac{dm}{dt}(v+w)$, gdzie $p = mv$. Mamy więc $\frac{dp}{dt} = ma + \frac{dm}{dt}v$ i równanie ruchu rakiety przyjmuje postać $ma = F + \frac{dm}{dt}w$.

a. W chwili startu $v(t=0) = 0$ i działa tylko siła ciężkości. Oznaczając $\frac{dm}{dt}(t=0) = -e$ ($e > 0$) otrzymujemy dla $t=0$ $a = -g + \frac{e w}{m_0}$

i warunek konieczny startu ($a > 0$) ma postać $e > \frac{m_0 g}{w}$. Po wstawieniu danych liczbowych: $e > 13,5$ t/s.

b. W jak najkrótszym. Przy braku siły oporu mamy $F = mg$ (g księżycowe) w każdej chwili. Wtedy $\frac{dv}{dt} = -g - \frac{1}{m} \frac{dm}{dt}w$ i ponieważ $\frac{1}{m} \frac{dm}{dt} = \frac{d \ln m}{dt}$,

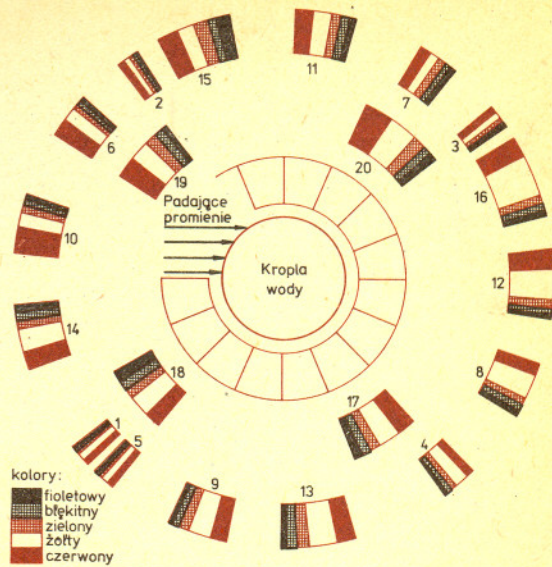
a prędkość wypływu gazów w jest stała, więc $v = -gt - w \int_0^{t_0} \frac{d \ln m}{dt} dt$, $v = -gt + w \ln \frac{m_0}{m(t_0)}$, gdzie t_0 jest chwilą wyłączenia silników ($t \geq t_0$).

Jak należało oczekiwać, od chwili wyłączenia silników rakietę porusza się ruchem jednostajnie opóźnionym z prędkością „początkową” (dla $t = 0 < t_0$), która zależy tylko od całkowitej ilości wyrzuconego gazu. Dla czasów $t < t_0$ na ruch ten nakłada się pewien rodzaj spadku, gdyż $v + gt - w \ln \frac{m_0}{m(t_0)} < 0$ dla $t < t_0$.

Szybkość tego spadku zależy oczywiście od postaci funkcji $m(t)$, a nie występuje on jedynie wtedy, gdy $t_0 = 0$. Można powiedzieć, że najbardziej ekonomiczny sposób odpalenia rakiety polega na jak najkrótszym przezwyłączeniu siły ciężkości. Takie armatnie wystrzelenie rakiety jest niewiastwie na Ziemi, gdzie siła oporu atmosfery rośnie gwałtownie ze wzrostem szybkości i maleje ze wzrostem wysokości.

Nawiązując do artykułu na temat tęczy z Delt 10/1978 proponuję obserwację tęczy wyższych rzędów. Będziemy je obserwować wokół kropki wody zawieszanej na końcu drutu. Do niedużego klocka przyklejamy poziomo kawałek niegrubego pręta, zaginając go na końcu pionowo w dół. Uprzednie pokrycie drutu czarnym woskiem nie jest konieczne, ale ułatwi obserwację zjawiska. Zmniejszy bowiem ilość światła odbitego, nie padającego wprost ze źródła. Poza tym kropla oczywiście przybierze bardziej kulisty kształt, będzie mniej przylegać do pręta. Przy pomocy rozpylacza z wodą na pionowym końcu drutu formujemy kroplę. (Jeżeli nie dysponujemy rozpylaczem, możemy ją też utworzyć maczając drut bezpośrednio w wodzie). Następnie całość wkładamy do ułożonego na boku otwartego tekturowego pudełka. Teraz w ścianie bocznej, mniej więcej na wysokości kropki, robimy niewielki otwór. Przez niego bowiem będziemy oświetlać kroplę. Zapewnimy sobie w ten sposób strumień światła o średnicy zbliżonej do kropki. Jako źródła światła możemy użyć rzutnika. Umieszczamy go tak, aby światło wchodzące przez otwór padało na całą kroplę.

Główną przyczyną uniemożliwiającą obserwację tęczy wyższych rzędów jest ich zbyt małe natężenie w stosunku do pozostałych promieni słonecznych. Także w naszym doświadczeniu promienie odbite będą utrudniać zauważenie zjawiska. Można je w dużym stopniu wyeliminować przez dodatkowe zasłanianie otworu kawałkiem kartonu. Znalezienie i zidentyfikowanie szukanej tęczy ułatwi koło na rysunku obok. Naniesione są na nim kąty, pod jakimi opuszczają kroplę po kolejnych odbiciach promienie tworzące odpowiednie tęcze. Warto przeprowadzić podobne doświadczenie używając innej cieczy. Należy pamiętać, że zwiększanie wymiarów kropki w każdym przypadku zwiększy wyrazistość zjawiska.



Czytelnicy proponują

Pan Tadeusz BONCLER z Warszawy przysłał list, w którym m.in. dowodzi następującej nierówności

$$(k-1)^{k/2} + k^{k/2} < (k+1)^{k/2} \text{ dla naturalnych } k > 4.$$

Przedstawiamy ten dowód po pewnych uproszczeniach. Wykażemy najpierw, że dla każdej liczby naturalnej $k > 4$ prawdziwa jest nierówność

$$(*) \quad \sqrt{\left(1 - \frac{1}{k}\right)^k} + 1 < \sqrt{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k}.$$

Oznaczmy prawą stronę tej (jeszcze nie udowodnionej) nierówności przez P_k , zaś lewą stronę przez $L_k + 1$. Jak wiadomo, ciąg $\{P_k\}$ jest rosnący i zbieżny do liczby $\sqrt{e} = 1,6487\dots$. Natomiast

ciąg $\{L_k\} = \left\{ \sqrt{\left(1 - \frac{1}{k}\right)^k} \right\}$ jest też rosnący i zbieżny do $\frac{1}{\sqrt{e}} = 0,6065\dots$. Lewa strona nierówności (*) jest więc zawsze mniejsza od 1,6065...

Ponieważ $\{P_k\}$ jest ciągiem rosnącym, więc dla każdego $k > 9$

$$\begin{aligned} \text{mamy } P_k > P_9. \text{ Ale } P_9 &= \sqrt{\left(1 + \frac{1}{9}\right)^9} = \sqrt{\frac{10^9}{9^9}} = \frac{\sqrt{10}}{3} \cdot \frac{10^4}{9^4} = \\ &= \frac{10000 \cdot \sqrt{10}}{3 \cdot 6561} > \frac{31622}{19683} > 1,6066. \end{aligned}$$

Nierówność (*) jest więc spełniona dla wszystkich $k \geq 9$. Dla $k = 5, 6, 7, 8$ można ją sprawdzić bezpośrednio. Zauważmy, że $3^2 + 4^2 = 5^2$, zatem (*) nie jest prawdziwa dla $k = 4$. Przez pomnożenie obu stron nierówności (*) przez $k^{k/2}$ otrzymujemy nierówność

$$(k-1)^{k/2} + k^{k/2} < (k+1)^{k/2},$$

prawdziwą, jak poprzednia, dla $k > 4$.

Pan Mariusz PISZCZEK z Wieliczki proponuje następujący szybki sposób obliczania kwadratów liczb dwucyfrowych. Szukany kwadrat jest mianowicie sumą dwu odpowiednich liczb. Pierwszą z nich otrzymujemy przez napisanie obok siebie kwadratów cyfr liczby danej, druga zaś liczba jest podwojonym iloczynem tych cyfr. Liczom jednocyfrowym należy jednak dopisywać na początku zero: 01, 02, ..., 09. Przy dodawaniu drugą liczbę podpisujemy w ten sposób, że przesuwamy ją o jedno miejsce w lewo. Przykłady: $97^2 = 9409$:

$$\begin{array}{r} 9^2 = 81 \quad 8149 \\ 7^2 = 49 \quad +126 \\ \hline 2 \cdot 9 \cdot 7 = 126 \quad 9409 \end{array}$$

Od redakcji. Metodę tę opartą bezpośrednio na wzorze $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ można uogólnić tak, by nadawała się do obliczania kwadratów dowolnych liczb. Wyjaśnimy ją na przykładzie.

Zadanie. Obliczyć 987654^2 .

Rozwiązanie.

1) zaczynając od lewej pomnóż każdą cyfrę przez następną, a wyniki zapisz jeden za drugim:

$$7256423020$$

2) każdą cyfrę pomnóż przez tę stojącą o dwa miejsca od niej:

$$63483524$$

3) i tak dalej... Wyniki podpisz jeden pod drugim w trójkąt:

$$\begin{array}{r} 7256423020 \\ 63483524 \\ 544028 \\ 4532 \\ 36 \\ \hline \text{dodaj} \dots\dots\dots 7950553060 \\ \text{jeszcze raz to samo} \dots\dots\dots 7950553060 \\ \text{kwadraty cyfr wyjściowej liczby} \dots\dots\dots 816449362516 \\ \hline \text{Suma} \dots\dots\dots 975460423716. \end{array}$$

Wynik gotowy: $987654^2 = 975460423716$.

(wg. Scripta Mathematica, 1952)