

## SPIS TREŚCI

NUMERU 9(69)

Jednoznaczność rozkładu  
i liczba klas

*Prof. dr Władysław  
Narkiewicz*

str. 1

Zadania

str. 3

Gdyby wszystkie zegary ...

*Mgr Ludwik Zajdler*

str. 4

Mierzenie jest stare jak  
myślenie

*Dr Wojciech Wojtyński*

str. 7

Pomiar krzywizny przestrzeni

*Mgr Bożena Muchotrzeb*

str. 10

Przyjrzyjmy się powierzchni

str. 11

O odległościach  
astronomicznych

*Mgr Tomasz Chlebowski*

str. 12

Laboratorium w domu

*Mgr Janusz Gasiński*

str. 13

Pomiary w podczerwieni

*Mgr Roman Stepiński*

str. 14

Patrz w niebo

str. 15

Mała Delta

str. 16

Drobiazgi

str. 2, 3, 15

**W następnym numerze:**

**O studiach**

**Rysunki techniczne:**

*Bogusław Kretkiewicz*

Centrum Astronomiczne im. M. Kopernika, Obserwatorium Astronomiczne UW oraz Polskie Tow. Miłośników Astronomii zapraszają na cykl odczytów popularno-naukowych w 1979 r.;

4.X — Rodzina naszego Słońca, *dr M. Sroczyńska-Kożuchowska*

8.X — Wielki wybuch, *doc. J. Stodółkiewicz*

11.X — Teleskop kosmiczny, *prof. S. Piotrowski*

15.X — Jak powstały pierwiastki chemiczne, *dr A. Krasieński*

18.X — Antymateria, *dr M. Kubiak*

22.X — Jak powstały galaktyki, *mgr B. Muchotrzeb*.

Wykłady odbywają się o godz 17; poniedziałkowe w Centrum Astronomicznym, ul. Bartycka 18, czwartkowe w Obserwatorium Astronomicznym, Al. Ujazdowskie 4. Wstęp wolny.

„Delta”

matematyczno-fizyczno-astronomiczny

miesięcznik popularny

Polskiego Towarzystwa

Matematycznego, Polskiego

Towarzystwa Fizycznego i Polskiego

Towarzystwa Astronomicznego

wydawany przy poparciu

Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny:

doc. dr J. Bartke

doc. dr A. Bączyński

doc. dr B. Gleichgewicht

prof. dr B. Grabowski

dr J. Hanasz

doc. dr B. Iwaskiewicz

doc. dr T. Iwiński

doc. dr A. Januszajtis

doc. dr T. Jarzębowski

prof. dr L. Jeśmanowicz

mgr H. Kaczorek

prof. dr M. Kuczma

mgr A. Mąkowski

prof. dr B. Paczyński

prof. dr Z. Pawlak

prof. dr A. Piekara

doc. dr S. Ruciński

prof. dr K. Rudnicki

prof. dr Z. Semadeni

doc. dr G. Sitowski

prof. dr J. Smak

prof. dr J. Stankowski

doc. dr K. Stepiński

prof. dr M. Subotowicz

doc. dr S. Turnau

prof. dr J. Wdowczyk

doc. dr A. Woszczyk

prof. dr Janusz Zakrzewski —

wiceprzewodniczący

prof. dr Wojciech Żakowski —

przewodniczący

Redaguje Kolegium w składzie:

doc. dr T. Hofmoki — z-ca red. nac.

B. Jaworska-Kordos — ilustracje

dr M. Kordos — red. nac.

dr M. Szurek

dr K. Prażmowski — red. techn. graf.

mgr K. Szypcio — sekr. red.

doc. dr M. Święcki

Adres Redakcji

ul. Hoża 69 pok. 151,

00-681 Warszawa

Zakład Narodowy im.

Ossolińskich — Wydawnictwo

Wrocław, Oddział w Warszawie

Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.

wyd.; 2,50 ark. druk.;

papier offsetowy IIII kl. 80 g. 61×86

Wydrukowano w Drukarni im.

Rewolucji Październikowej

Warszawa, ul. Mińska 65

Nr zam 750/79 C-35

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60,- cena prenumeraty półrocznej zł 30 —

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach:

— do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i cały rok następnny

— do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego.

Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienie

w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”.

Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW, oraz prenumeratorzy

indywidualni zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej;

przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw,

ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 w terminach podanych dla

prenumeraty krajowej

**Sprzedż numerów bieżących i uprzednich**

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.

Sprzedż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem

lub za zaliczeniem pocztowym.

Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Konto PKO I OM W-wa 1531-912

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7

00-068 Warszawa, Poland or with

— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68,

Bundesrepublik Deutschland.

— Earls Court Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain,

— Licosà Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia

Cena 1 egzemplarza zł 5— nr indeksu 35723/35550

# Jednoznaczność rozkładu i liczba klas

Prof. dr Władysław NARKIEWICZ



Liczby  $1, -1, i, -i$  są jedynymi elementami odwracalnymi pierścienia  $Z[i]$ , tj. takimi liczbami  $x \in Z[i]$ , że dla pewnego  $y \in Z[i]$  zachodzi  $xy = 1$ .



1. Twierdzenie o jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze w zbiorze liczb naturalnych wypowiada się najprościej w następujący sposób: każdą liczbę naturalną różną od jedności możemy przedstawić w postaci iloczynu  $p_1 p_2 \dots p_r$  liczb pierwszych na jeden tylko sposób, o ile rozkłady, różniące się kolejnością czynników, uważać będziemy za równe. Podobne twierdzenie można wysłowić także i dla liczb całkowitych, niekoniecznie dodatnich: każdą liczbę całkowitą, różną od  $0, 1, -1$  możemy przedstawić na jeden sposób w postaci iloczynu  $a p_1 \dots p_r$ , przy czym  $p_1, \dots, p_r$  są liczbami pierwszymi, a liczba  $a$  równa jest  $1$  lub  $-1$ . (Oczywiście i w tym wypadku należy utożsamiać rozkłady, różniące się kolejnością czynników). Nazwijmy pierścieniem liczbowym każdy zbiór zawarty w zbiorze liczb zespolonych, w którym wykonalne jest dodawanie, odejmowanie i mnożenie. Oczywiście zbiór  $Z$  liczb całkowitych jest takim pierścieniem. Nasuwa się naturalne pytanie, czy w każdym pierścieniu liczbowym zachodzi twierdzenie analogiczne do wysłowionego przed chwilą w przypadku pierścienia  $Z$ .

Rozpatrzmy dla przykładu pierścień liczb całkowitych Gaussa, złożony z wszystkich liczb zespolonych postaci  $A + Bi$ , przy czym  $A, B$  są liczbami całkowitymi. O tym pierścieniu można udowodnić następujące twierdzenie, analogiczne do twierdzenia o jednoznacznym rozkładzie w  $Z$ : jeśli  $z$  jest liczbą całkowitą Gaussa, różną od  $0, 1, -1, i, -i$ , to możemy ją przedstawić w postaci

$$z = P_1 \cdot \dots \cdot P_r,$$

przy czym liczby  $P_i$  są liczbami pierwszymi Gaussa, tj. mają tę własność, że z rozkładu  $P_i$  na czynniki,  $P_i = xy$ , gdzie  $x, y$  są liczbami całkowitymi Gaussa, wynika, że jeden z tych czynników jest równy,  $1, -1, i$  lub  $-i$ .

Jeżeli

$$z = P'_1 \cdot \dots \cdot P'_s$$

jest innym rozkładem tego typu, to  $r = s$ , a przy tym po odpowiednim przenumеровaniu liczb  $P'_1, \dots, P'_s$  zachodzą równości:  $P'_1 = a_1 P_1, \dots, P'_r = a_r P_r$ , przy czym każda z liczb  $a_i$  jest równa  $1, -1, i$  lub  $-i$ .

Dla przykładu rozłożymy na czynniki pierwsze w pierścieniu Gaussa liczbę  $2$ : mamy równość  $2 = (1+i)(1-i)$ , a rozkład ten jest rozkładem na czynniki pierwsze, bo jeśli np.

$1+i = (a+bi)(c+di)$ , to  $2 = |1+i| \cdot |1-i| = |1+i|^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$  a zatem  $a^2+b^2 = 1$ , lub też  $c^2+d^2 = 1$ , co pokazuje, że jedna z liczb  $a+bi, c+di$  jest równa  $1, -1, i$  lub  $-i$ .

Możemy przy tym także napisać  $2 = i(1-i)^2 = (-1)(1+i)(-1+i) = -i(1+i)^2$  co pokazuje, że możliwości podane w sformułowaniu twierdzenia rzeczywiście występują.

By móc sensownie sformułować twierdzenie o jednoznaczności rozkładu dla dowolnego pierścienia liczbowego, należy uprzednio określić, co będziemy rozumieli przez liczby pierwsze w takim pierścieniu i jakie liczby będą grały rolę liczb  $1, -1$  w pierścieniu liczb całkowitych, czy też liczb  $1, -1, i, -i$  w pierścieniu Gaussa. W tym celu zauważmy, że odwrotność każdej z liczb  $1, -1, i, -i$  również leży w pierścieniu Gaussa. To podsuwa następujące określenie: jeżeli  $R$  jest pierścieniem liczbowym, to liczba  $a$  należąca do niego nazywa się odwracalna w  $R$ , jeżeli  $a \neq 0$  oraz  $1/a$  należy do  $R$ . (Oczywiście liczby  $1$  i  $-1$  są odwracalne w każdym pierścieniu, a przykład pierścienia Gaussa pokazuje, że liczb odwracalnych może być więcej). Teraz możemy określić liczby pierwsze w pierścieniu  $R$ : różną od zera liczbę  $a$  pierścienia  $R$  nazywamy liczbą pierwszą w  $R$ , jeżeli z równości  $a = xy$  ( $x \in R, y \in R$ ) wynika, że jedna z liczb  $x, y$  jest odwracalna w  $R$ .

Używając tych definicji możemy teraz sformułować dla dowolnego pierścienia liczbowego  $R$  odpowiednik twierdzenia o jednoznaczności rozkładu: mówimy, że w  $R$  zachodzi twierdzenie o jednoznaczności rozkładu, jeżeli każda liczba  $a \in R$ , różna od zera i nieodwracalna da się zapisać w postaci

$$a = P_1 \cdot \dots \cdot P_r,$$

przy czym liczby  $P_1, \dots, P_r$  są liczbami pierwszymi w  $R$ , a przy tym jeżeli  $a = P'_1 \cdot \dots \cdot P'_s$  jest innym takim rozkładem, to  $r = s$  i po odpowiednim ponumerowaniu liczb  $P'_1, \dots, P'_s$  zachodzą równości  $P'_1 = c_1 P_1, \dots, P'_r = c_r P_r$ , przy czym liczby  $c_1, \dots, c_r$  są odwracalne.

2. Powstaje naturalne pytanie, w jakich pierścieniach liczbowych sformułowane powyżej twierdzenie jest prawdziwe. Następujący przykład świadczy o tym, że nie we wszystkich: rozpatrzmy pierścień  $R$  złożony z wszystkich liczb  $a + bi\sqrt{5}$  przy  $a, b \in Z$ . (Proponuję Czytelnikowi sprawdzenie, że  $R$  w istocie jest pierścieniem). Liczba  $6$  ma w  $R$  dwa różne rozkłady:  $6 = 2 \cdot 3 = (1+i\sqrt{5})(1-i\sqrt{5})$ . Nietrudno sprawdzić, że występujące tu czynniki są liczbami pierwszymi w rozważanym pierścieniu. Jeżeli np.  $2 = X \cdot Y = (x+yi\sqrt{5})(a+bi\sqrt{5})$  przy czym

## Czego można się dowiedzieć, mierząc precyzyjnie długość?

W ekspedycji wysłanej z planety Alfa na Ziemię uczestniczył Profesor Omega. Mimo, że wiedza techniczna Alfian stoi (w porównaniu z ziemską) bardzo wysoko, w niemal wszystkich pozostałych dziedzinach (szczególnie w zakresie nauk humanistycznych) nie dostają nam oni nawet do pięt. Profesor Omega postanowił zabrać na Alfę całe encyklopedie, leksykony, tomy powieści i roczniki gazet. Zastanawiano się, w jaki sposób zmieścić się do wszystkiego do niewielkiej rakiety, którą przybyli Alfianie, w dodatku i tak bardzo przeladowanej. Profesor Omega wyciągnął z kieszeni mały kalkulator i długo coś obliczał, wertując kartki książek i strony gazet. Następnie wyjął z rakiety długą linijkę z dziwnego metalu i specjalnym widać nożykiem zrobił na niej kreskę. „To wszystko” powiedział, „możecie zabrać z powrotem swoje książki”. Gdy Ziemianie zaczęli się domagać bliższych wyjaśnień, powiedział:

— To bardzo proste. Każdej literze naszego alfabetu przypisałem liczbę (A = 1, B = 2 itd.), każdemu znakowi przestankowemu czy specjalnemu symbolowi — liczbę między 51 a 99. Przepisałem na kalkulatorze wszystkie książki używając liczb zamiast liter. Literę oddzielałem znakiem 000, słowa — 00000, a 0000000 znaczy, że następujące cyfry należy czytać jako liczbę. Otrzymałem w ten sposób pewną liczbę. Dość dużą, około 200 milionów cyfr, ale nie przesadnie. Postawiłem przed nią 0 i przecinek dziesiętny, otrzymując liczbę wymierną a/b z przedziału (0, 1). Kreska, którą zrobiłem na mojej linijce, dzieli ją właśnie w stosunku a/b. Gdy wrócę na Alfę, w laboratorium zmierzmy dokładnie obie części linijki, obliczymy a/b, zapiszemy w postaci dziesiętnej i oto mamy wszystko z powrotem.



$x, y, a, b \in \mathbb{Z}$ , to  $4 = |x+yi\sqrt{5}|^2|a+bi\sqrt{5}|^2 = (x^2+5y^2)(a^2+5b^2)$ , a więc  $x^2+5y^2 = a^2+5b^2 = 2$  lub też jedna z liczb  $x^2+5y^2, a^2+5b^2$  jest równa 1, a druga równa 4. Ponieważ równanie  $u^2+5v^2 = 2$  nie ma rozwiązań całkowitych, musi zachodzić druga możliwość, a wówczas jedna z liczb  $X, Y$  musi być równa 1 lub  $-1$ . Podobnie sprawdzamy, że pozostałe czynniki naszych rozkładów są pierwsze. Pozostaje sprawdzić, że ilorazy czynników obu rozkładów nie są

odwracalne, ale to wynika z uwagi, że żadna z liczb  $\frac{1+i\sqrt{5}}{2}, \frac{1+i\sqrt{5}}{3}$  nie leży w  $R$ . Widzimy

ostatecznie, że w pierścieniu  $R$  twierdzenie o jednoznaczności rozkładu nie zachodzi.

3. Powyższe przykłady wskazują, że istnieją pierścienie z jednoznacznością rozkładu na czynniki pierwsze, jak i bez tej jednoznaczności. Okazuje się, że można w pewien sposób mierzyć, jak bardzo dany pierścień liczbowy odbiega od pierścienia z jednoznacznością rozkładu. Do tego celu potrzebne nam będzie pojęcie ideału.

Jeżeli  $R$  jest pierścieniem liczbowym, to niepusty podzbiór  $I \subset R$  nazywamy ideałem, jeśli jest w nim wykonalne dodawanie i odejmowanie oraz mnożenie przez elementy z  $R$  (niekoniecznie należące do  $I$ ). Przykładem ideału w pierścieniu liczb całkowitych jest zbiór liczb parzystych (ale zbiór liczb nieparzystych nie jest ideałem, gdyż suma liczb nieparzystych jest parzysta!), czy też zbiór wszystkich liczb podzielnych przez daną liczbę naturalną  $N$ . Przykład ostatni można uogólnić: jeżeli  $a$  jest dowolnym elementem pewnego pierścienia  $R$ , to zbiór wszystkich liczb  $x \in R$  dających się zapisać w postaci  $x = ba$ , przy pewnym  $b \in R$  jest ideałem. Ten ideał oznaczamy przez  $I_a$  i nazywamy ideałem głównym, wyznaczonym przez  $a$ . (Czytelnik zechce spróbować udowodnić, że w pierścieniu  $\mathbb{Z}$  każdy ideał jest ideałem głównym, wyznaczonym przez pewną liczbę naturalną).

Jeżeli  $I$  jest ideałem w  $R$ , a  $x$  jest pewną liczbą z  $R$ , to przez  $xI$  oznaczamy zbiór wszystkich liczb  $y \in R$ , dających się zapisać w postaci  $y = zx$  przy pewnym  $z$  należącym do  $I$ . I tak np. ideał  $I_a$  możemy zapisać w postaci  $I_a = aR$ .

Dwa ideały  $I, J$  nazywamy równoważnymi, jeżeli można znaleźć niezerowe liczby  $a, b \in R$  takie, że  $aI = bJ$ . Zauważmy, że dowolne dwa ideały główne, powiedzmy  $I_a$  i  $I_b$  przy  $a, b \neq 0$  są równoważne, gdyż zachodzi równość  $bI_a = baR = abR = aI_b$ . Zauważmy także, że jeżeli ideały  $I, J$  oraz  $I, J_1$  są równoważne, to także i ideały  $J$  i  $J_1$  będą równoważne. To pozwala nam podzielić zbiór wszystkich ideałów, różnych od ideału zerowego  $\{0\} = I_0$  na klasy, zaliczając dwa ideały do tej samej klasy wówczas, gdy są równoważne. Jeżeli liczba takich klas jest skończona, to nazywamy ją liczbą klas pierścienia  $R$  i oznaczamy przez  $h(R)$ . Liczba ta w wielu wypadkach pozwala mierzyć, jak bardzo własności pierścienia  $R$  odbiegają od własności pierścienia z jednoznacznym rozkładem. By móc to sformułować precyzyjniej, ograniczymy teraz klasę rozważanych pierścieni. Rozpatrywać będziemy dwa typy pierścieni liczbowych — pierścienie kwadratowe oraz pierścienie cyklotomiczne.

4. Pierścienie kwadratowe określimy w następujący sposób: jeżeli  $D$  jest liczbą całkowitą, niepodzielną przez kwadrat liczby naturalnej, różnej od jedności (tj.  $D = p_1 \dots p_r$ , lub  $D = -p_1 \dots p_r$ , gdzie  $p_1, \dots, p_r$  są różnymi liczbami pierwszymi), a przy tym  $D$  daje resztę 2 lub 3 z dzielenia przez 4, to przez pierścień kwadratowy, wyznaczony przez  $D$ , będziemy rozumieli zbiór wszystkich liczb postaci  $a+b\sqrt{D}$ , przy czym  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Jeżeli zaś  $D$  daje z dzielenia przez 4 resztę 1, to pierścieniem kwadratowym, wyznaczonym przez nią, będziemy nazywali

zbiór wszystkich liczb postaci  $\frac{a+b\sqrt{D}}{2}$ , gdzie  $a, b \in \mathbb{Z}$  i są jednakowej parzystości. Otrzymany pierścień oznaczamy przez  $R_D$ .

(Niejednoznaczność podanej definicji może wydać się dziwna. Naturalniej byłoby podać także i w przypadku drugim definicję taką samą jak w pierwszym. Okazuje się jednak, że takie podejście nie prowadzi do przejrzystej teorii.)

Pierścienie cyklotomiczne, które teraz wprowadzimy, zostały zdefiniowane w połowie ubiegłego wieku przez matematyka niemieckiego E. E. Kummera, który je wykorzystał przy badaniu rozwiązalności sławnego równania Fermata:  $x^n + y^n = z^n$  przy czym  $x, y, z$  są liczbami całkowitymi dodatnimi, a  $n \geq 3$ . (Do dziś zresztą nie wiemy, czy to równanie ma rozwiązania).

Wybermy liczbę pierwszą nieparzystą  $p$  i oznaczmy przez  $z_p$  liczbę zespoloną  $\cos(2\pi/p) + i \sin(2\pi/p)$ . (Jest to  $p$ -ty pierwiastek z jedności, gdyż wzór Moivre'a daje  $z_p^p = 1$ ). Przez  $R[p]$  oznaczamy zbiór wszystkich liczb zespolonych dających się zapisać w postaci

$$a_0 + a_1 z_p + a_2 z_p^2 + \dots + a_{p-2} z_p^{p-2} + a_{p-1} z_p^{p-1},$$

przy czym  $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$  są liczbami całkowitymi. Nietrudno sprawdzić, że  $R[p]$  jest pierścieniem. Będzie to właśnie pierścień cyklotomiczny wyznaczony przez  $p$ . (Słowo „cyklotomia” oznacza podział okręgu, a użyte jest tutaj z tego względu, że liczby  $1, z_p, z_p^2, \dots, z_p^{p-1}$  leżą na okręgu jednostkowym i wyznaczają podział tego okręgu na  $p$  równych części).

5. Podamy teraz podstawowe twierdzenia dotyczące wprowadzonych pierścieni i wiążące się z liczbą klas oraz jednoznacznością rozkładu.

Jednym z najważniejszych i najstarszych rezultatów w tej dziedzinie jest następujące twierdzenie, podające związek między liczbą klas a jednoznacznością rozkładu: *W pierścieniu  $R_D$  lub  $R[p]$  zachodzi twierdzenie o jednoznaczności rozkładu wtedy i tylko wtedy, gdy jego liczba klas równa jest 1*, tj. gdy wszystkie ideały są równoważne.

Twierdzenie to sprowadza zagadnienie jednoznaczności rozkładu do obliczenia liczby klas. Dla konkretnego pierścienia nie jest to zagadnienie trudne, szczególnie przy użyciu maszyn cyfrowych. Znacznie trudniej jest wyznaczyć wszystkie pierścienie o tej własności. Okazuje się, że pierścieni  $R_D$  przy  $D$  ujemnym, oraz  $R[p]$  z jednoznacznością rozkładu jest skończenie wiele. Dla pierścieni  $R_D$  z  $D$  dodatnim tego nie wiemy. Obliczenia numeryczne skłaniają do przypuszczenia, że takich  $D$  jest nieskończenie wiele, ale metody matematyki współczesnej nie są dostatecznie mocne na to, by problem ten rozstrzygnąć.

A oto lista ujemnych  $D$ , dla których w  $R_D$  zachodzi jednoznaczny rozkładzie:  $D = -1, -2, -3, -7, -11, -19, -43, -67, -163$ . Pierwszy dowód tego, że nie ma innych  $D$  ujemnych o tej własności podał młody matematyk amerykański, H. M. Stark, w 1967 roku. Dla pierścieni  $R[p]$  sytuacja jest podobna. Wiemy, dzięki badaniom K. Uchidy, J. Masleya i H. Montgomery'ego, że jednoznaczność rozkładu zachodzi w  $R[p]$  jedynie dla  $p = 3, 5, 7, 11, 13, 17$  oraz 19.

Znane są także wszystkie pierścienie cyklotomiczne oraz pierścienie kwadratowe  $R_D$  z ujemnym  $D$ , dla których liczba klas równa jest 2. Jak zauważył L. Carlitz, w takich pierścieniach zachodzi następujący fakt: *w każdym rozkładzie liczby na czynniki pierwsze wystąpi ta sama ilość czynników pierwszych*. Przy tym własność ta jest charakterystyczna dla pierścieni z liczbą klas równą 2.

Byłoby interesującą rzeczą znalezienie podobnych charakterystyki dla pierścieni z liczbą klas równą 3, 4, itd., jednakże nie otrzymano tu jeszcze definitywnych rezultatów.



## Zadania

Redaguje mgr Krzysztof NOWIŃSKI

**M 202.** Wykazać, że dla dowolnego  $n > 0$  istnieje taki  $m$ -ką, że  $n$  jego przekątnych leży wewnątrz niego, a wszystkie pozostałe — na zewnątrz.

Rozwiązanie na str. 8

**M 203.** „Litera T” nazywamy sumę prostopadłych odcinków  $AB$  i  $CD$  o długości 1 każdy, przy czym  $C$  jest środkiem odcinka  $AB$ . Wykazać, że w ograniczonym obszarze płaszczyzny nie można pomieścić nieskończenie wielu rozłącznych „liter T”.

Rozwiązanie na str. 12

**M 204.** Czy sześcian o wymiarach  $6 \times 6 \times 6$  może być zbudowany z 27 klocków o rozmiarach  $1 \times 2 \times 4$ ?

Rozwiązanie na str. 5

(Zadanie to nadesłała Małgorzata TOPER z Lubienia).

Redaguje dr Halina ABRAMOWICZ

**F 68.** Wiązka cząstek  $\alpha$  o strumieniu  $N$  cząstek na jednostkę powierzchni pada na folię metalową o grubości  $x$  i gęstości  $n$  atomów na jednostkę objętości. W wyniku oddziaływania cząstek  $\alpha$  z polem jąder atomów folii następuje odchylenie cząstek w stosunku do kierunku lotu pierwotnego. Odchylenie to zależy od tzw. parametru zderzenia — tzn. odległości między torem cząstki daleko od centrum oddziaływania a prostą równoległą do tego toru przechodzącą przez centrum siły (czyli przez jądro). Znaleźć rozkład kątowy cząstek  $\alpha$  po przejściu przez folię, zakładając, że folia jest na tyle cienka, że jedna cząstka  $\alpha$  może się „zderzyć” tylko z jednym jądrem, oraz zakładając, że jądro pozostaje nieruchome w wyniku oddziaływania (bardzo duża masa jądra w porównaniu z masą cząstki  $\alpha$ ).

Rozwiązanie na str. 6

### Zmierzyć wysokość wieży za pomocą barometru —

— takie zadanie dano przedstawicielom różnych nauk. Oto jak je rozwiązywali:

Matematyk wykorzystał twierdzenie Talesa (i to, że dzień był słoneczny): ustawił barometr pionowo, zmierzył jego długość oraz długość jego cienia i wieży i szybko miał odpowiedź. Fizyk-teoretyk wykorzystał fakt, że ciśnienie maleje wraz z wysokością, fizyk-doświadczalnik przywiązał barometr do sznurka, spuścił z wieży i potem zmierzył długość sznurka. Chemik wylał rtęć z barometru do kolby, doprowadził do stanu wrzenia u stóp i na szczycie wieży i z różnicy temperatur wrzenia obliczył żądaną wysokość. Humanista zaś zapukał do stojącej nieopodal chatki. „Dostanie pan barometr, jeśli powie mi pan, ile ta wieża ma wysokość” powiedział do siwego staruszka, który otworzył mu drzwi.

# Gdyby wszystkie zegary...

Mgr Ludwik ZAJDLER

W takim prostym zliczaniu też można się pomylić. Obowiązujący w Etiopii kalendarz ma wspólny początek z naszym (rok narodzenia Chrystusa). Jednakże w Etiopii jest dopiero rok 1972 — te 7 lat „zgubiło się” gdzieś w mrokach średniowiecza. Chyba że w Europie je dodano.



Każdy pomiar polega na porównaniu dwóch wielkości: tej mierzonej, z drugą — którą przyjmujemy za wzorzec. W przypadku pomiaru czasu mamy do czynienia zawsze z metodą pośrednią. Mierzony odstęp czasu porównujemy z czasem trwania jakiegoś zjawiska fizycznego, co do którego mamy pewność, że przebiega ono za każdym powtórzeniem w ten sam sposób. Spośród różnych zjawisk, które nadawałyby się do mierzenia czasu, na czoło wysuwają się zjawiska przebiegające periodycznie, jako że odstępy czasu łatwo zmierzyć przez zliczanie okresów.

Poczucie biegu czasu wynika przede wszystkim z następstwa dnia po nocy i z kolejności pór roku. Stąd związek między rachubą czasu a astronomią, analizą ruchów ciał niebieskich, szczególnie ruchów Słońca i Księżyca. Stąd wybór jednostki czasu jako pochodnej doby słonecznej i roku zwrotnikowego.

Astronomowie są odpowiedzialni za utrzymywanie rachuby czasu od tysiącleci. I w starożytności, kiedy wystarczała tylko orientacja w porze dnia lub roku dla celów rolnictwa, i w czasach nowszych — dla ustanawiania rozkładów jazdy środków komunikacji, i dziś — kiedy przebiegi różnych procesów badamy z dokładnością wprost niewiarygodnych ułamków sekundy. Co prawda, można by powiedzieć, że w procesach tych nie uciekamy się już od dawna do obserwacji astronomicznych, posługujemy się dziś wyłącznie zegarami. Od czasów Galileusza i Huyghensa — wahadłowymi, a od pięćdziesięciu lat — kwarcowymi lub tzw. atomowymi, lepiej nawet realizującymi zasadę ruchu periodycznego niż ruch wirowy naszej planety czy ruch po orbicie dokołosłonecznej. Nie zapominajmy jednak o tym, że za jednostkę czasu uznajemy wciąż sekundę, której wartość wynika z obserwowanego przez astronomów okresu ruchu Ziemi. Wszelkie zegary, nawet te najdokładniejsze, muszą być systematycznie uzgadniane z Zegarem Przyrody.

Zastąpienie tego zegara przez przyrządy skonstruowane ręką człowieka stało się koniecznością już w starożytności, przede wszystkim dlatego, by móc w sposób obiektywny tworzyć krótkie odstępy czasu, a w czasach rozwoju techniki — by lepiej realizować ruchy periodyczne i to o coraz krótszych okresach. I tak, „serce” dzisiejszego cezowego zegara atomowego drga 9 192 631 770 razy na sekundę. Trwające od lat badania wykazały, że rytm ten odznacza się tak wielką stabilnością, że w obowiązującym od roku 1967 międzynarodowym układzie jednostek SI posłużył dla zdefiniowania jednostki czasu (zwanej sekundą układu SI). Służy on dotąd jako praktyczny wzorzec jednostki czasu we wszelkich pracach naukowych (z wyjątkiem niektórych astronomicznych) i technicznych.

Wzorcowa wartość sekundy może być łatwo odtworzona w każdej chwili i w każdym laboratorium dysponującym cezowym zegarem atomowym. Przed 30 laty były to modele niepowtarzalne, dziś produkowane są seryjnie. Laboratorium pomiarów czasu w Polskim Komitecie Normalizacji i Miar w Warszawie posiada dziś trzy cezowe zegary atomowe. Posiadanie jednak nawet najdokładniejszego zegarów nie może zapewnić ciągłości rachuby czasu.

W rachubie czasu występuje bowiem szczególna trudność, w której nie da się pominąć obserwacji astronomicznych. Chodzi tu o odniesienie biegu czasu do pewnej chwili początkowej, jak gdyby punktu zerowego skali czasu. Z wyborem tego punktu są od dawna kłopoty, o czym niżej. I tu postawić sobie możemy pytanie wymienione w tytule niniejszego artykułu: „Co by się stało, gdyby wszystkie zegary zatrzymały się?”

Podobny wypadek zdarzył się — co prawda na ograniczonym obszarze — przed 50 laty. Zegarów atomowych ani kwarcowych jeszcze nie było.

Były natomiast precyzyjne zegary wahadłowe, niewiele ustępujące pod względem dokładności współczesnym. W czasie wielkiego trzęsienia ziemi w 1927 roku w Chinach zatrzymały się wszystkie zegary w obserwatorium astronomicznym Zi-ka-wei koło Szanghaju. Wypadek ten uwiecznił pięknie grafik na czołowej stronie rocznika wydawanego przez obserwatorium z podpisem „Astronomowie z Zi-ka-wei poszukują sekundy”. Rysunek przedstawiał wnętrze laboratorium z otwartymi szafami, szufladami biurka, dokoła których krzatali się pracownicy w habitach (obserwatorium prowadzili księża-jezuici), jeden z nich zaglądał pod łóżko. Dziś uruchomienie zegarów w zgodności ze wskazaniami czasu uniwersalnego nie napotkałoby większych trudności. Zegary kwarcowe i atomowe nie przerywają ciągłości wskazań, chyba że znalazłyby się w pobliżu epicentrum trzęsienia, ale wtedy mogłyby ulec raczej całkowitemu zniszczeniu. Ustawienie zegarów na czas właściwy nie stanowi problemu, gdyż można posłużyć się radiowymi sygnałami czasu. Szereg specjalnych radiostacji nadaje przez całą dobę bez przerwy bądź w określonych porach sygnały w postaci krótkich impulsów w odstępach sekundowych, z markowaną sygnałem dłuższym pełną minutą. Pewien kłopot stanowiłoby ustalenie numeru minuty. Ale i temu można łatwo zaradzić, w każdym razie poszukiwano by nie sekundy lecz minuty. Natomiast sekundę sygnały podają z dokładnością do 0,0001 sekundy. Jak widać, dziś zagubić rachubę czasu jest raczej trudno.

Inaczej by było, gdyby katastrofa spotkała całą Ziemię i gdyby sygnały czasu w ogóle ustały. W takim razie należałoby całą służbę czasu stworzyć od nowa, z nawiązaniem do poprzedniej skali czasu. I tu wylania się od razu sprawa wspomnianego już punktu zerowego. Od czasów najdawniejszych do ok. XVII w. za początek rachuby czasu przyjmowano chwilę południa, północy albo wschodu lub zachodu Słońca. Cały cykl dobowy dzielono na 24 albo 12

Gdyby więc system egipski utrzymał się do dziś, w lecie pracowalibyśmy dłużej niż w zimie, lekcje szkolne w czerwcu trwałyby dwukrotnie dłużej niż grudniowe, a co działyby się na kolei — strach pomyśleć.

(podwójnych) godzin. Rozpowszechniły się dwa systemy godzin: babiloński, powstały przez podział całej doby na 24 równe części i egipski, w którym oddzielnie dzień i noc liczyły po 12 godzin — a zatem długość ich ulegała zmianie zależnie od pory roku. Reliktem godzin babilońskich jest system utrzymany do dziś. Wraz z udoskonaleniem zegarów wyszło na jaw, że długość tak pojętej doby ulega zmianom (co prawda niewielkim) w ciągu roku. Wprowadzono więc pojęcie czasu średniego, w ten sposób wszystkie doby w roku uznano za równe, równymi też stały się godziny (średnie). Czas odmierzany był zatem nie nierównomiernym biegiem Słońca po sklepieniu niebieskim w ciągu roku, lecz biegiem fikcyjnego punktu nazwanego słońcem średnim, który dokonuje pełnego obrotu wzdłuż równika niebieskiego w tym samym czasie co Słońce prawdziwe po ekliptyce. Teraz wygodnie było uważać południe (lub północ), czyli chwile przejścia tego punktu przez południk, za początek doby. Poszczególne doby numerowano systemem kalendarzowym i sprawa ciągłości rachuby czasu wydawałaby się uregulowana.

Tylko zegary słoneczne wskazywały czas prawdziwy, ich wskazówki rzucały najkrótszy cień w chwili górowania Słońca prawdziwego. Wymyślono zresztą i zegary słoneczne, które automatycznie lub za pomocą prostego rachunku uwzględniały różnicę między czasem średnim i prawdziwym (zwaną równaniem czasu).

Obok rachuby czasu według czasu średniego słonecznego często (w astronomii, geodezji i nawigacji) posługujemy się czasem gwiazdowym. Tu za okres podstawowy, dobowy, przyjmuje się rzeczywisty czas obrotu Ziemi wokół osi, liczony nie względem położenia Słońca, lecz w odniesieniu do kierunku niezmiennego w przestrzeni, określonego położeniem wśród gwiazd punktu równonocy wiosennej, tj. punktu, w którym przecina się równik niebieski z ekliptyką. Doba gwiazdowa jest krótsza od średniej słonecznej o prawie 4 minuty: w ciągu roku zwrotnikowego 365-dniowego Ziemia obraca się 366 razy. Zegar wyregulowany na czas gwiazdowy będzie się spieszył o 24 godziny w ciągu roku, ale to nie utrudnia w niczym rachuby. Odpowiednie różnice uwzględnić łatwo w rachunku. Użycie zegara gwiazdowego jest natomiast bardzo wygodne w obserwacjach astronomicznych, bowiem każda gwiazda przekracza południk miejsca obserwacji dokładnie co 24 godziny (gwiazdowe). Na tej zasadzie reguluje się właśnie wszystkie zegary: przejście każdej gwiazdy przez zaznaczoną w lunecie oś optyczną (w ten sposób w obserwatoriach wyznaczany bywa południk miejscowy) przewidziane jest w katalogach gwiazd — w tzw. efemerydach — z dokładnością do 0,0001 sekundy. W praktyce codziennej sprawa nie jest może tak prosta, mamy bowiem do czynienia z licznymi błędami instrumentalnymi i obserwacji, które ograniczają zwykle do 0,01 sekundy dokładność wyznaczania dokładnego czasu, ale jakoś obserwacji kompensujemy ilością. Na pojedynczą obserwację składa się seria kilkunastu gwiazd. Oprócz służby czasu w licznych obserwatoriach, w problemie zapewnienia dokładnego czasu wzięła udział międzynarodowa organizacja (Międzynarodowe Biuro Czasu — Bureau International de l'Heure) z siedzibą w Paryżu. Wszystkie wyniki obserwacji astronomicznych są tam przesyłane, a zegary porównywane są drogą odbioru radiosygnarów czasu.

Przed 150 laty, kiedy nie było podstaw do snucia domysłów na temat nierównomierności ruchu wirowego Ziemi, na propozycję jednego z najwybitniejszych astronomów — Karola Gaussa — przyjęto sekundę (określoną jako  $1/86400$  część średniej doby słonecznej) do ustanowionego w roku 1832 układu jednostek CGS (centymetr-gram-sekunda). Dokładnie w sto lat później, w roku 1932, dwaj astronomowie poczdamscy — A. Scheibe i U. Adelsberger — wykazali przy użyciu zegarów kwarcowych, że Ziemia wiruje nierównomiernie! Spostrzeżenie potwierdzono w następnych latach i ustalono nawet przebieg tych zmian, a także — przynajmniej częściowo — ich przyczynę: zmiany momentu bezwładności naszej planety, wywołane m.in. okresowym spływaniem lodowców z okolic podbiegunowych oraz mas powietrza, także tarciem wód o dna oceanów, opadaniem liści jesienią (!) itp. Zmiany te bądź o charakterze sezonowym, bądź systematyczne a także nieregularne nie mają jednak żadnego wpływu na okres obiegu Ziemi po orbicie dokołosłonecznej. Nazwano je fluktuacjami i mogą być uwzględniane w obliczeniach efemeryd czyli pozycji ciał niebieskich na niebie. Toteż wkrótce (lata 1947—1954) opracowano nową definicję sekundy (tzw. sekunda efemerydalna), przyjmując na jej wartość ułamek  $1:31556925,9747$  roku zwrotnikowego 1900. Uściślenie, że chodzi tu o rok, którego środek przypada o północy, od której zaczął się 1900 r., było konieczne, ponieważ długość roku zwrotnikowego ulega systematycznemu skracaniu (ściślej mówiąc — układ współrzędnych astronomicznych ulega zmianie) o 0,00530320 sekundy w ciągu roku. Tak zdefiniowana jednostka czasu jest wartością stałą — jako zlokalizowana w określonej epoce 1900,0 — spełnia warunki, by być przyjętą za wzorzec. Z wyjątkiem jednego warunku: nie jest łatwo odtwarzalna. Dla odtwarzania odstępów czasu sekundowych (względnie ich wielokrotności) służą zegary. Jednak nawet te najlepiej realizujące zasadę periodyczności elementu regulującego ich chód są tylko wzorcami wtórnymi. Wymagają porównywania systematycznego z praworcem, według którego obserwowane są zjawiska astronomiczne.

Rozwój fizyki i techniki doprowadził do tego, że udało się skonstruować praktyczne wzorce częstotliwości — kwarcowe bądź atomowe — realizujące inne zjawiska periodyczne, ze świata mikrokosmosu, z powodzeniem konkurujące ze zjawiskami makrokosmosu. Ich przewaga polega głównie na tym, że posługujemy się łatwo odtwarzalnymi krótkimi cyklami, rzędu  $10^{-12}$  sekundy

Ekliptyka jest torem, po którym porusza się Słońce w jego pozornej rocznej wędrówce po sferze niebieskiej.

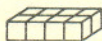
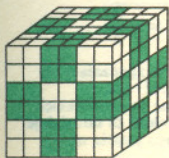
Pojęcie roku zwrotnikowego jest wyjaśnione w dalszej części artykułu.

Gaussa też można nazwać „jednym z najwybitniejszych matematyków,” jak i „jednym z najwybitniejszych fizyków” i nie stoi to w sprzeczności z określeniem go jako „jednego z najwybitniejszych astronomów”.



#### Rozwiązanie zadania M 204

Nie. Przypuśćmy, że jest to możliwe i podzielmy w myśli tak zbudowany sześcian na 27 sześcianików o rozmiarach  $2 \times 2 \times 2$ . Znow w myśli, nasycmy te sześcianiki na przemian farbą białą i czarną. Musi być zatem 14 białych i 13 czarnych (lub na odwrót). Zauważmy teraz, że niezależnie od położenia dowolnej cegiełki  $1 \times 2 \times 4$  połowa jej jednostkowych sześcianików jest czarna, a połowa biała. Jest to sprzeczne z faktem, że duży sześcian ma więcej białych sześcianików niż czarnych — albo odwrotnie.



(lub krótszymi), o czym była już mowa. Realizują więc z wystarczającą w fizyce i technice dokładnością jednostkę czasu, zwaną także sekundą atomową w odróżnieniu od sekundy efemerydalnej. Jednak utworzona przez sumowanie odstępów sekundowych skala czasu (atomowego) nie zawiera elementu umiejscawiającego punkt zerowy — początek skali czasu. Tu już niezbędne są obserwacje astronomiczne.

Co gorzej, przyjęta wspomniana już relacja 9192631770 drgań na sekundę we wzorcu cezowym wyznaczona została empirycznie, dla uzgodnienia wartości sekundy atomowej (cezowej) z jednostką astronomiczną. Że nie jest to relacja ścisła, świadczy fakt, że od czasu do czasu (mniej więcej raz w roku) zachodzi potrzeba korygowania skali czasu atomowego przez wprowadzanie tzw. sekundy przestępnej.

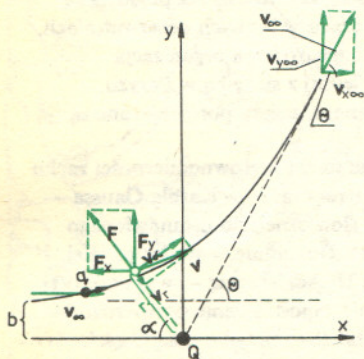
Dla ujednolicenia wskazań wszystkich zegarów na naszym globie wprowadzono system międzynarodowy sygnałów czasu. Liczne dziś specjalne radiostacje pokrywają swym zasięgiem cały obszar Ziemi, nadając przez całą dobę lub w określonych porach sygnały, słyszalne w głośnikach niby sekundowe tykanie zegara. Wszystkie sygnały są zgodne ze sobą, gdyż korelowane są przez centralę międzynarodowej służby czasu w Paryżu. Tak pomyślana skala czasu nie może odchylić się od czasu astronomicznego więcej niż o pół sekundy, bo w przypadku zbliżania się do tej granicy Międzynarodowe Biuro Czasu ogłasza wprowadzenie sekundy przestępnej. Może to być sekunda dodatnia albo ujemna, a polega to na dodaniu (albo odjęciu) jednej sekundy w ostatniej minucie 31 grudnia (lub 30 czerwca), co praktycznie przejawia się przesunięciem o sekundę przedłużonego impulsu sekundowego markującego pełną minutę (godzinę), czyli wprowadza jedynie zmianę numeracji sekund. Od czasu, gdy system ten wprowadzono (w 1971 r.), zaszła potrzeba dokonania tej operacji już 8 razy; ostatnio (ósma sekunda przestępna) nastąpiło to przez cofnięcie zegarów o sekundę w nocy z 31 grudnia 1978 r. na 1 stycznia 1979 r. Tak więc ostatnia minuta 1978 r. liczyła nie 60 lecz 61 sekund.

Czas ustalony międzynarodowymi sygnałami obowiązuje we wszystkich dziedzinach. Jego relacja do czasu efemeryd interesuje w zasadzie tylko astronomów. Służą temu celowi specjalne wydawnictwa, w których publikowane są poprawki sygnałów czasu, ustalone drogą obserwacji astronomicznych.

Tak więc w przypadku zatrzymania się zegarów zwykli ludzie nie napotkają szczególnych trudności.



Rozwiązanie zadania F 69



Rozpatrzmy ruch cząstki o ładunku  $q$  w polu wytworzonym przez nieruchomy ładunek  $Q$ . Siła, z jaką ładunek  $Q$  działa na ładunek  $q$  jest skierowana wzdłuż kierunku łączącego położenie obu ładunków (tzw. promienia wodzącego) i wynosi

$$F = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Wiadomo, że w polu kulombowskim zachowana jest całkowita energia cząstki oraz moment pędu ( $r||L$ ) — to znaczy, że w każdej chwili cząstka ma taką samą energię  $E$  i tę samą wartość momentu pędu  $L$ , co przed rozproszeniem,

$$\text{daleko od centrum działania siły, przy czym } E = \frac{mv_\infty^2}{2}, \quad L = mv_\infty b,$$

gdzie  $v_\infty$  — prędkość cząstki daleko od centrum,  $b$  — tzw. parametr zderzenia (patrz rysunek).

Poza tym na rysunku wprowadzono oznaczenia:  $v_\alpha$  — prędkość transwersalna (prostopadle do promienia),  $v_r$  — prędkość radialna (wzdłuż promienia),  $\theta$  — kąt rozproszenia,  $r$  — promień wodzący,  $\alpha$  — droga kątowna.

Interesuje nas związek między  $b$  i  $\theta$ . Rozpatrzmy ruch wzdłuż osi  $y$ .

$$m \frac{dv_y}{dt} = F_y = F \sin \alpha = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \alpha, \quad m dv_y = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \alpha dr. \quad \text{W równaniu tym zarówno } \alpha, \text{ jak i } r \text{ zależą od czasu.}$$

Z zasady zachowania momentu pędu otrzymujemy  $L = mv_\infty b = mrv_\alpha = mr^2 \omega = mr^2 \frac{d\alpha}{dt}$ , skąd  $r^2 = \frac{L}{m(d\alpha/dt)} = \frac{v_\infty b}{(d\alpha/dt)}$ . Wstawiając to do poprzedniego

równania otrzymujemy  $m dv_y = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 v_\infty b} \sin \alpha d\alpha$ , gdzie nie występuje już jawna zależność od czasu. Prędkość  $v_y$  zmienia się od wartości 0 do  $v_{y\infty} = v_\infty \sin \theta$ , a kąt  $\alpha$  — od 0 do  $\pi - \theta$ . Znalezienie zależności  $v_y$  od  $\alpha$  daje nam możliwość wyznaczenia związku między warunkami początkowymi i kątem rozproszenia  $\theta$ :

$$m \int_0^{v_\infty \sin \theta} dv_y = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 v_\infty b} \int_0^{\pi - \theta} \sin \alpha d\alpha,$$

$$\text{skąd } mv_\infty \sin \theta = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 v_\infty b} (1 + \cos \theta). \text{ Po przekształceniu otrzymujemy } b = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 m v_\infty^2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}.$$

Przez rozkład kątowy  $P(\theta)$  rozumiemy procent cząstek ze strumienia padającego, które połączą w kąt bryłowy  $d\Omega$  przy określonej wartości kąta  $\theta$  (ze względu na symetrię osiową wynik rozpraszania nie zależy od kąta azymutalnego).  $P(\theta) = \frac{1}{N} \frac{dN}{d\Omega}$ , gdzie  $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ .

Czynnik  $2\pi$  jest wynikiem zsumowania po kącie azymutalnym. Aby wyznaczyć  $\frac{dN}{d\Omega}$  dla określonego kąta  $\theta$  należy obliczyć, ile spośród padających cząstek  $\alpha$  będzie miało parametr zderzenia  $b$  w stosunku do jąder rozmieszczonych w folii.

Powierzchnia pokrywana przez cząstki  $\alpha$  o parametrze zderzenia  $b$  wynosi  $2\pi b db \cdot nx$ , czyli  $dN(b) = 2\pi b db \cdot nx \cdot N$ , skąd  $\frac{dN(b)}{db} = 2\pi b nx N$

$$P(\theta) = \frac{1}{N} \frac{dN}{d\Omega} = \frac{1}{N} \frac{1}{2\pi \sin \theta} \frac{dN}{d\theta} = \frac{1}{N} \frac{1}{2\pi \sin \theta} \frac{dN}{db} \frac{db}{d\theta} = \frac{1}{2\pi N \sin \theta} 2\pi b nx N \frac{db}{d\theta} = nx \left( \frac{qQ}{mv_\infty^2} \right)^2 \frac{\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}}{\sin \theta} \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}, \quad P(\theta) = \frac{nx}{4} \left( \frac{qQ}{mv_\infty^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}.$$

Jest to słynny wzór Rutherforda.

W doświadczeniu przeprowadzonym przez Geigera i Marsdena (rozpraszanie cząstek  $\alpha$  na cienkiej folii ze złota) uzyskano rozkład kątowy bardzo dobrze zgadzający się z tym wzorem i to nawet dla takiej energii cząstek  $\alpha$ , przy której mogą one zbliżyć się do odpychającego centrum kulombowskiego na odległość rzędu  $10^{-12}$  cm. Dla większej energii (mniejsze odległości) dane doświadczalne przestają być zgodne ze wzorem Rutherforda. W opisanym doświadczeniu rozpraszanie na bardzo lekkich elektronach nie ma istotnego znaczenia. Wyniki rozpraszania na pozbawionej elektronów pozostałości atomów złota prowadziły do wniosku, że pozostałość ta oddziałuje kulombowsko aż do odległości rzędu  $10^{-12}$  cm, a potem wszystko się psuje. W ten właśnie sposób zmierzono rozmiary jądra atomowego, a powód owego psucia na bardzo małych odległościach nazwano oddziaływaniami silnymi (jądrowymi).

# Mierzenie jest stare jak myślenie

Dr Wojciech WOJTYŃSKI



W swojej najprostszej postaci mierzenie polega na ocenianiu jakościowym przedmiotów lub ich zbiorów prowadzących do określeń typu duży-mały, lekki-ciężki, wysoki-niski, krótki-długi. W bardziej zaawansowanej formie — kiedy chcemy porównać („zmierzyć”) skończone podzbiory jakiegoś zbioru o podobnych („identycznych”) elementach, jest liczeniem. Wprowadzamy kryterium porównawcze: miarę zbioru, która jest liczbą jego elementów. Znacznie bardziej zawiła staje się sytuacja dla zbiorów nieskończonych. Idea wszelkiego pomiaru pozostaje jednak zawsze taka sama — pomiar polega na porównywaniu „dużych” zbiorów przez ich podział na małe („regularne”) przystające części.

Jedną z praktycznie najoczywistszych czynności związanych z mierzeniem jest pomiar długości odcinków. Już starożytni Grecy natrafili tu na znamienne trudność — istnienie odcinków niewspółmiernych — której analiza doprowadziła między innymi do sprecyzowania pojęcia liczby rzeczywistej (znowu mierzenie = liczenie), pojęcia granicy ciągu liczbowego itp. Rzeczy te są na ogół dobrze znane, a właściwie trudności związane z mierzeniem jeszcze przed nami. Zakładając, że umiemy mierzyć długości odcinków, postaramy się rozszerzyć pojęcie „miary” (czyli „długości” odcinka) na większą klasę podzbiorów prostej rzeczywistej. Zaczniemy od sprecyzowania podstawowego naszego celu

## CO CHCEMY MIERZYĆ I CO TO ZNACZY MIERZYĆ?

Jak to zwykle bywa, zamiast odpowiedzieć na powyższe pytania matematyk — po rozważeniu pewnej liczby przykładów „wziętych z życia” odwraca sytuację — wprowadza pewien schemat formalny, a następnie usiłuje nagiąć do niego inspirujące go przykłady.

W przypadku mierzenia jego refleksja wygląda tak. Mamy zbiór  $\Omega$  (np. prosta liczbowa  $R^1$ ). Obiektami, które chcemy mierzyć, są pewne podzbiory zbioru  $\Omega$ . Czynności mierzenia nie będzie, natomiast pewne zbiory będą miały przyporządkowane liczby określające ich wielkość — miarę zbioru. Dopuszczymy także możliwość posiadania przez zbiór miary równej  $+\infty$ . Mówiąc inaczej, na pewnej rodzinie podzbiorów zbioru  $\Omega$  określona będzie funkcja  $\mu$  przyporządkowująca zbiorowi  $A$  liczbę  $\mu(A)$  — jego miarę. Wartości funkcji  $\mu$  są więc liczbami rzeczywistymi lub „nieskończonością”.

Jak zauważyliśmy już wcześniej — pomiar polega na „porównywaniu dużych zbiorów przez podział na małe”. W związku z tym, jeżeli jakiś zbiór  $A$  przedstawimy jako sumę rozłącznych podzbiorów  $B_1, B_2, \dots, B_k$  oraz jeżeli określone są liczby  $\mu(B_i), i = 1, \dots, k$ , powinniśmy mieć  $\mu(A) = \mu(B_1) + \dots + \mu(B_k)$ . Na przykład w przypadku zbioru składającego się z odcinków  $[0, 1], [2, 3]$  i  $[4, 5]$  rozsądne jest, aby jego miara (mająca być uogólnieniem „długości”) była równa sumie długości tych odcinków. Tego typu rozważania prowadzą do następującego postulatu

$$(0) \quad \text{Jeżeli } A = B_1 \cup \dots \cup B_k \text{ oraz } B_i \cap B_j = \emptyset \text{ dla } i \neq j \text{ to } \mu(A) = \sum_{i=1}^k \mu(B_i),$$

zwanego warunkiem addytywności funkcji  $\mu$ . Oczywiście zakładamy tu, że  $A, B_1, B_2, \dots, B_k$  należą do rodziny podzbiorów, na których określona jest miara  $\mu$ .

Jak już powiedzieliśmy,  $\mu$  ma być funkcją. Co jest więc jej dziedziną? Jest to najbardziej delikatna część sprawy. Patrząc na warunek (0) łatwo się domyślić, że rodzina  $\Sigma$  podzbiorów, na których określona jest  $\mu$  („rodzina zbiorów mierzalnych”), powinna mieć własność:

(1) Jeżeli  $B_i \in \Sigma, i = 1, 2, \dots, k$  oraz  $A = B_1 \cup \dots \cup B_k$ , to także  $A \in \Sigma$ .

Okazuje się, że dla uzyskania rozsądnej i interesującej teorii trzeba narzucić na  $\Sigma$  następujące naturalne warunki

(2)  $\Omega$  oraz  $\emptyset$  (zbiór pusty) należą do  $\Sigma$ .

(3) Jeżeli  $A \in \Sigma$  oraz  $A \cup B = \Omega, A \cap B = \emptyset$ , to  $B \in \Sigma$ .

Z warunków (1), (2), (3) wynika, że

Jeżeli  $C_i \in \Sigma (i = 1, 2, \dots, k)$  oraz  $D = C_1 \cap C_2 \dots \cap C_k$ , to także  $D \in \Sigma$ .

Rodzine podzbiorów ustalonego zbioru  $\Omega$  spełniającą warunki (1), (2), (3) nazywamy ciałem zbiorów. Schemat formalny, o którym mówiliśmy, polega więc na

1) wyróżnieniu ciała podzbiorów  $\Sigma$  zbioru  $\Omega$ ,

2) określeniu na  $\Sigma$  funkcji  $\mu$  przyjmującej wartości w zbiorze  $[0, +\infty]$  i spełniającej warunek (0).

## CZY ISTNIEJĄ MIARY?

Mamy już więc pogląd na to, co chcemy rozumieć przez miarę i mierzenie, ale to nie znaczy, że umiemy jakąś miarę podać. O nie, przepraszam, jeden przykład jest: niech ciało zbiorów składa się tylko z  $\emptyset$  i  $\Omega$ , oraz  $\mu(\emptyset) = 0, \mu(\Omega) = a$ , gdzie  $a$  jest pewną liczbą dodatnią, dowolnie obraną. Nietrudno znaleźć i drugi, mniej banalny przykład miary:  $\Sigma$  składa się ze wszystkich podzbiorów skończonych ustalonego zbioru  $\Omega$ , oraz z ich uzupełnień, natomiast miarę zbioru określamy jako liczbę jego elementów (przyjmując, rzecz jasna,  $+\infty$  dla zbiorów nieskończonych).





Zamiast podawać coraz to inne przykłady takiego typu, przejdźmy jednak do postawionego na początku zagadnienia, które obecnie możemy już precyzyjnie sformułować:

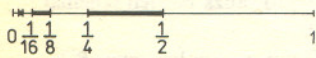
Czy istnieje ciało podzbiorów  $\Sigma$  prostej  $R^1$  zawierające wszystkie odcinki oraz miara  $\mu$  określona na  $\Sigma$ , która dla odcinków przyjmuje wartość równą ich długości?

Ciała podzbiorów o wymienionej własności łatwo podać (np. ciało wszystkich podzbiorów prostej), aby jednak poradzić sobie z drugą częścią zadania, przezorność nakazuje wybrać możliwie najmniejsze takie ciało (żeby nie mieć zbyt dużych kłopotów z istnieniem funkcji  $\mu$ ). Takie ciała będą tworzyły wszystkie podzbiory  $R^1$ , jakie możemy uzyskać za pomocą stosowania skończonej liczby działań dodawania i tworzenia części wspólnej poczynając od zbioru odcinków. Nie podamy tu dowodu istnienia miary o powyższych własnościach. Miara taka (zwana miarą Peano-Jordana) istnieje i jest jednoznacznie wyznaczona na opisanym najmniejszym ciełe zawierającym odcinki. Zasygnalizujemy jedynie kilka trudności powstających przy tej konstrukcji.

### MIERZYMY ZBIORY: OD ZEWNĄTRZ CZY OD WEWNĄTRZ?

Podzieliłiśmy zadanie określenia miary na dwie części: określenie ciała zbiorów i konstrukcji samej miary. Jest to droga naturalna, ale zwykle nie najprostsza. Okazuje się, że lepiej jest określić na rodzinie wszystkich podzbiorów zbioru  $\Sigma$  dwie funkcje stanowiące razem pewne „przybliżenie” miary — pierwsza z nich mierzy zbiory „od zewnątrz” i nazywa się miarą zewnętrzną, druga mierzy zbiory „od wewnątrz” i wobec tego nazywa się miarą wewnętrzną. Okazuje się, że zbiory, dla których miara wewnętrzna i zewnętrzna są równe, tworzą ciało i na nim obie funkcje są addytywne, wyznaczając miarę. Zatem sama metoda konstrukcji miary wyznacza tu jej dziedzinę — ciało zbiorów. Zilustrujemy to na kilku przykładach:

**Przykład 1.** Niech  $A$  będzie zbiorem będącym sumą odcinków



$$\left[ \frac{1}{2^{2n}}, \frac{1}{2^{2n-1}} \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{rysunek})$$

Chcąc zmierzyć zbiór  $A$  od wewnątrz, będziemy się starali znaleźć skończoną rodzinę rozłącznych przedziałów zawartych w  $A$  o możliwie dużej sumie długości. Mierząc zbiór  $A$  od zewnątrz będziemy starali się zawrzeć zbiór  $A$  w zbiorze będącym sumą (niekoniecznie skończoną) odcinków o jak najmniejszej sumie długości.

Bardziej precyzyjnie: w celu określenia miary zewnętrznej dowolnego zbioru  $B$  rozpatrzmy rodzinę  $P$  zbiorów zawierających  $B$  jako podzbiór i będących skończonymi sumami przedziałów posiadających co najwyżej wspólne końce. Dla zbioru  $C \in P$  niech jego miara będzie określona jako suma długości tworzących go przedziałów.

Określmy teraz miarę zewnętrzną  $\mu_z(B)$  zbioru  $B$  jako kres dolny miar zbiorów rodziny  $P$ .

Miarę wewnętrzną  $\mu_w(B)$  zbioru  $B$  wygodnie będzie teraz określić wzorem

$\mu_w(B) = \mu_z(C) - \mu_z(C \setminus B)$ , gdzie  $C$  jest dowolnym zbiorem rodziny  $P$  (trzeba w tym celu wykazać, że  $\mu_w(B)$  nie zależy od wyboru  $C$ ).

Wróćmy do przykładu 1. Dla znalezienia miary zewnętrznej opisanego tam zbioru  $A$  możemy pokrywać  $A$  kolejno zbiorami  $C_k$  postaci

$$C_k = \left[ \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right] \cup \left[ \frac{1}{16}, \frac{1}{8} \right] \cup \dots \cup \left[ \frac{1}{2^{2k}}, \frac{1}{2^{2k-1}} \right] \cup \left[ 0, \frac{1}{2^{2k+1}} \right].$$

$$\text{Wtedy } \mu(C_k) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{2^{2k+1}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^k}{1 - \frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2^{2k+1}}$$

$$\text{i jak łatwo wykazać } \mu_z(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(C_k) = \frac{1}{3}.$$

Podobnie obliczymy miarę wewnętrzną. Mamy  $\mu_w(A) = \mu_z\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) - \mu_z\left(\left[0, \frac{1}{2}\right] \setminus A\right)$ ,

$$\text{gdzie } \left[0, \frac{1}{2}\right] \setminus A = \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{16}, \frac{1}{32}\right] \cup \left[\frac{1}{128}, \frac{1}{64}\right] \cup \dots$$

Otrzymamy więc (analogicznie jak dla zbioru  $A$ )

$$\begin{aligned} \mu_z\left(\left[0, \frac{1}{2}\right] \setminus A\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \dots + \frac{1}{2^{2n+1}} \right) + \frac{1}{2^{2n+2}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{8} \left( 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots \right) = \frac{1}{8} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots \right) = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

i wobec tego  $\mu_w(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ . Widzimy zatem, że miara wewnętrzna zbioru  $A$  jest równa jego mierze zewnętrznej. Nie zawsze jednak tak jest. Oto



#### Rozwiązanie zadania M 202

Narysujmy dowolny trójkąt na płaszczyźnie

i oznaczmy jego wierzchołki przez  $A_1, A_2,$

$A_{n+3}$ . Wewnątrz tego trójkąta

obierzmy punkty  $A_3, \dots, A_{n+2}$  tak, aby

wielokąt  $A_2, A_3, \dots, A_{n+3}$  był wypukły.

Szukany wielokąt jest  $A_1, \dots, A_{n+3}$ .

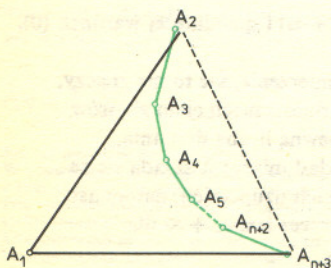
Istotnie, przekątne  $A_1A_i$ , gdzie  $2 < i < n+2$

leżą wewnątrz niego, a wszystkie pozostałe

są przekątnymi wypukłego wielokąta

$A_2, \dots, A_{n+3}$  i wobec tego leżą na zewnątrz

wielokąta  $A_1, \dots, A_{n+3}$ .





# Pomiar krzywizny przestrzeni

Mgr Bożena MUCHOTRZEB

Na wierzchołkach trzech niemieckich szczytów: Brocken, Hohenhagen i Inselberg, odległych od siebie o kilkadziesiąt kilometrów, ustawiono przyrządy geodezyjne, zmierzono trzy kąty tak utworzonego trójkąta i dodano je. Po uwzględnieniu błędów pomiaru otrzymano wartość  $180^\circ$ . W taki to sposób w latach 1821–23 wielki matematyk Karol Fryderyk Gauss doświadczalnie wyznaczał geometrię przestrzeni. Już wtedy uważał, że matematyka posługując się ogólnymi prawami geometrii może proponować wiele różnych rozwiązań, a to, jaki wariant jest realizowany w danym miejscu w przestrzeni, zależy od lokalnych warunków fizycznych. Ogólna teoria względności sformułowana przez Alberta Einsteina zastąpiła intuicję Gaussa precyzyjnym rozumowaniem. Koniecznym okazało się wprowadzenie pojęcia czasoprzestrzeni, a równania Einsteina określiły związek geometrii czasoprzestrzeni z wypełniającą tę czasoprzestrzeń materią. Tor cząstki swobodnej, to znaczy nie podlegającej działaniu innych sił oprócz pola grawitacyjnego, wprowadzono jako wzorzec linii prostej, nazywanej też linią geodezyjną. W czasoprzestrzeni całkowicie pustej tak wprowadzona geometria odpowiada geometrii euklidesowej. Wniosek taki podpowiada nam mechanika Newtona: jeśli jako przykład weźmiemy dwie cząstki, poruszające się w pewnym momencie równoległe z jednakowymi prędkościami, to w pustej przestrzeni będą się poruszać ruchem jednostajnym, zawsze równoległe i w tej samej odległości od siebie (jeśli zaniedbać ich wzajemne oddziaływanie). Rozpoznajemy natychmiast w tym modelu dwie proste równoległe nigdzie nie przecinające się, znane z geometrii euklidesowej.

Spróbujmy jednak wypełnić czasoprzestrzeń częściowo materią. Wtedy nasze dwie cząstki, poruszające się początkowo, w dużej odległości od obszaru zajętego przez materię, równoległe do siebie, przy przechodzeniu przez rejon silnego niejednorodnego pola grawitacyjnego mogą zacząć się wzajemnie oddalać lub zbliżać. Posługując się intuicją z mechaniki newtonowskiej możemy powiedzieć, że cząstka przechodząca powiedzmy bliżej jakiegóż większej masy zostanie silniej przyciągana, tory obu cząstek zakrzywią się w różnym stopniu — a więc rozbiegną. Ponieważ jednak w ramach teorii Einsteina tory ich nadal traktujemy jako geodezyjne w czasoprzestrzeni, więc efekt interpretujemy zakrzywieniem samej czasoprzestrzeni, a geometria staje się nieeuklidesowa.

Wiemy już więc, jak mierzyć krzywiznę czasoprzestrzeni: wystarczy mieć dwie cząstki poruszające się początkowo dość blisko siebie i równoległe, z podobnymi prędkościami, i patrzeć, co się z nimi dzieje. Wielkość, która charakteryzuje tendencję takich cząstek do oddalania się od siebie lub zbliżania czyli dewiację geodezyjnych, nazywamy krzywizną (tensorem krzywizny) czasoprzestrzeni. Aby ją określić, nie wystarczy jedna liczba, gdyż zachowanie dwóch cząstek w pobliżu danego punktu czasoprzestrzeni zwykle będzie zależało od ich wzajemnego położenia, gdyż pole grawitacyjne nie musi być jednorodne. W najbardziej ogólnym przypadku konieczny jest układ aż 20 liczb. Wyznaczyć krzywiznę czasoprzestrzeni jest więc w zasadzie bardzo łatwo, gdyż nawet spadanie rzuconego w górę kamienia jest jej efektem, ale typowe zjawiska spotykane na Ziemi można wyjaśnić na gruncie teorii grawitacji Newtona, bez odwoływania się do einsteinowskiej interpretacji geometrycznej, ponieważ są to zjawiska dotyczące słabych pól i małych prędkości. Dopiero dla silnych pól i prędkości porównywalnych z prędkościami światła wynik pomiaru krzywizny czasoprzestrzeni może być naprawdę interesujący, głównie ze względu na możliwość testowania ogólnej teorii względności. Dlatego wykorzystywano w tym celu tory fotonów (prędkość światła!) przechodzących możliwie blisko tarczy słonecznej (wystarczająco silne pole grawitacyjne). Porównanie obserwowanej odległości katowej na niebie źródła fotonów i źródła wzorcowego w przypadku bliskości Słońca oraz w przypadku znacznego oddalenia pozwala obserwować i mierzyć zjawisko dewiacji geodezyjnych.

Ugięcie promienia świetlnego przy przejściu w pobliżu tarczy słonecznej można w zasadzie przewidzieć i w ramach teorii newtonowskiej, jeśli traktować foton jako cząstkę materialną o prędkości  $c$  i energii  $\frac{1}{2}mc^2$  ( $m$  jest dowolną masą, wielkość ugięcia od niej nie zależy). Wzór, wyprowadzony już w 1801 roku przez niemieckiego uczonego. J. Soldnera, podaje wartość

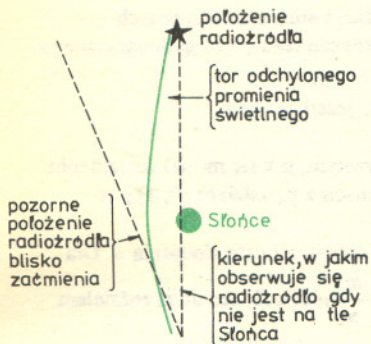
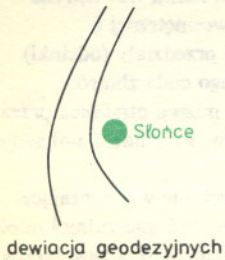
$$\Delta\varphi = \frac{2MG}{Rc^2}, \text{ gdzie } R \text{ — promień Słońca, } M \text{ — masa Słońca i } G \text{ — stała grawitacji.}$$

Takie traktowanie fotonu jest jednak błędne i dlatego wynik przewidywany przez ogólną teorię względności różni się o czynnik 2:

$$\Delta\varphi = \frac{4MG}{Rc^2}.$$

Czy jednak teoria względności ma rację, to powinno wynikać z obserwacji.

Najdokładniejszym z dotychczas wykonanych testów jest pomiar ugięcia mikrofal radiowych przechodzących w pobliżu tarczy Słońca, wykonany przez E. B. Fomalonta i R. A. Sramka

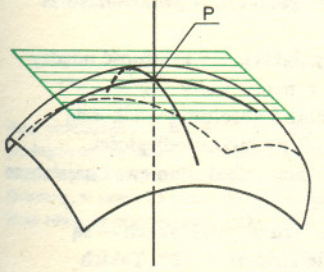




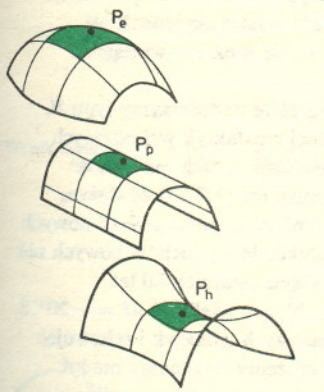
w obserwatorium w Green Bank (West Virginia, USA). Jako źródła mikrofal wykorzystano trzy radioźródła (oznaczone symbolami 0116+08, 0119+11 i 0111+02, określającymi ich położenie na niebie), które leżą prawie dokładnie na jednej prostej, a środkowe wiosną każdego roku jest zaćmiewane przez Słońce. Eksperyment wymagał niezwykle dużej dokładności, ponieważ przewidywana wartość odchylenia jest równa zaledwie  $1'',749$ . Pomiar położenia radioźródeł był dokonywany za pomocą interferometru o bazie 35 km. Dwa skrajne radioźródła służyły jako punkt odniesienia oraz, dzięki dokonywaniu wyłącznie pomiarów względnych, pozwalały usunąć zakłócenia związane z działaniem urządzeń elektronicznych, ruchami atmosfery ziemskiej oraz nieregularnościami ruchu obrotowego Ziemi. Duże trudności sprawiło usunięcie wpływu korony słonecznej na wielkość ugięcia mikrofal. W tym celu prowadzono obserwacje jednocześnie na dwóch częstotliwościach: 2695 MHz i 8085 MHz, ponieważ wielkość ugięcia pod wpływem korony zależy od długości fali, i to pozwalało na wprowadzenie odpowiedniej poprawki, równej  $0'',1$  dla 2695 MHz. Zmieniające się niejednorodności (oscylacje) korony usuwano przez uśrednianie wyników w czasie, dzięki obserwowaniu każdego radioźródła przez 6 min. Pomiaru wykonano w ciągu dwóch kolejnych wiosen: 1974 i 1975 roku. Wynik był niezwykle dokładny

$$\Delta\varphi = 1'',761 \pm 0'',016.$$

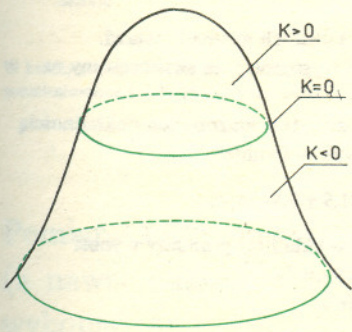
Zgodny z przewidywaniami ogólnej teorii względności, stanowi jej potwierdzenie, a jednocześnie bardzo silne ograniczenie na inne, konkurencyjne teorie grawitacji, proponowane po Einsteinie.



Płaszczyzna styczna i prosta normalna do powierzchni



Punkt, w którym krzywizna Gaussa powierzchni jest dodatnia nazywa się eliptyczny, jeśli jest ona ujemna — hiperboliczny, a gdy równa 0 — paraboliczny.



Punkty eliptyczne, paraboliczne i hiperboliczne na powierzchni w kształcie dzwonu.

### Przyjrzyjmy się powierzchni

ale lokalnie. Oznacza to, że interesować nas będą obserwacje dotyczące tylko „najbliższej okolicy”, czyli otoczenia wybranych (zresztą dowolnie) punktów. Weźmy więc pod uwagę kilka różnych powierzchni — np. powierzchnię szklanki, stołu, szkiełka od zegarka, kartki papieru, kapelusza czy beretu, globusa, albo jakiejś do niczego niepodobnej bryły ugniecionej z plasteliny. Poczynić należy tylko jedno ograniczenie — interesować nas będą wyłącznie powierzchnie bez kantów i rogów (możemy tam, gdzie są kanty i rogi, obserwować tę część powierzchni, która ich nie zawiera).

Łatwo ustalić, co to jest płaszczyzna styczna w obserwowanym punkcie — wystarczy przyłożyć płaską blaszkę dotykającą powierzchni w tym punkcie, lub wyobrazić sobie, że ją przyłożyliśmy tam, gdzie jest to trudne do zrobienia lub niemożliwe (np. „w dołku”). Prosta prostopadła do płaszczyzny stycznej i przechodząca przez punkt styczności nazywana jest normalną do powierzchni. Ustalmy też (dowolnie, ale jakoś), po której stronie płaszczyzny stycznej będzie „dodatnia” a po której „ujemna” strona powierzchni. W tym miejscu potrzebna jest owa lokalność — na wstędze Möbiusa ustaliliśmy się tego dla całej powierzchni nie da, ale lokalnie można zawsze. Wyposażeni w powyższe ustalenia teoretyczne przystępujemy do badań. Przetnijmy (w wyobraźni choćby) powierzchnię wszystkimi płaszczyznami zawierającymi prostą normalną i zajmijmy się krzywiznami otrzymanych w przecięciu krzywych. A co to jest krzywizna? — odwrotność promienia okręgu najlepiej pasującego do krzywej w obserwowanym punkcie wzięta z takim znakiem, jaki ma ta strona krzywej, po której leży środek tego okręgu. Co się okaże (albo co się już okazało)? Otóż jeśli nie wszystkie krzywizny są równe, to krzywe mające największą i najmniejszą krzywiznę leżą w płaszczyznach prostopadłych. Odpowiedź na pytanie, dlaczego tak jest, nie jest łatwa do uzyskania, ale warto spróbować.

Jeżeli pomnożymy największą i najmniejszą z otrzymanych krzywizn, otrzymamy liczbę zwaną krzywizną Gaussa. Można spróbować sprawdzić doświadczalnie, że dla danego punktu jest ona niezależna od wyginania powierzchni (beret, kartka papieru), o ile tylko owej powierzchni nie rozciągamy (ale w podanych przykładach raczej to nie grozi). Udowodnił to Gauss i można o tym przeczytać w podręcznikach geometrii różniczkowej powierzchni — dowód jest bardzo rudny.

Ale nie trzeba tego dowodu znać, żeby korzystać z twierdzenia. Możemy łatwo wykazać na jego podstawie, że

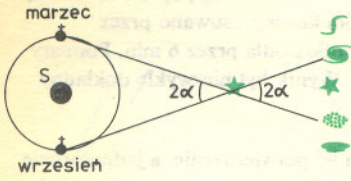
— każda mapa zmienia odległości nieproporcjonalnie (bo krzywizna sfery o promieniu  $R$  wynosi  $\frac{1}{R^2}$ , a kartki papieru 0 — musiało się coś rozciągnąć),

— rynnę czy rurkę z cienkiej blachy można zgiąć tylko łamiąc blachę (bo gdyby nie, to trzeba by ją rozciągnąć, a na to jesteśmy za słabi).

Można też wykonać demonstrację: cienką kartkę z zeszytu zwijamy w rurkę (można nawet nie sklejać), stawiamy pionowo na stole, a na wierzchu ustawiamy odważnik 1/2 kg. Dopóki kartka się nie rozwine, będzie utrzymywała ten ciężar. Czemu? bo krzywizna kartki i przed zwinięciem i po jest 0, aby się więc mogła ugiąć, należałoby rozciągnąć papier, a na to 1/2 kg nie wystarczy.

# O odległościach astronomicznych

Mgr Tomasz  
CHLEBOWSKI



Mierzenie paralaksy gwiazdy.

Łatwo jest wyobrazić sobie, jak mierzymy odległości do gwiazd. Podstawową metodą wyznaczania tych odległości, na której oparte są wszystkie inne metody, jest pomiar paralaksy trygonometrycznej. Paralaksa gwiazdy jest to kąt, pod którym widziany jest z gwiazdy średni promień orbity Ziemi (przy założeniu, że promień ten jest prostopadły do linii widzenia). Kąt ten mierzymy w taki sposób, że wyznaczamy zmianę położenia gwiazdy w ciągu pół roku na tle obiektów, o których wiemy, że znajdują się nieporównywalnie dalej (uznajemy, że w nieskończoności). Jest to kąt tak mały, że metoda ta pozwala na pomiar odległości tylko kilku tysięcy najbliższych gwiazd. Odległości dużo większe, do bliskich i dalekich galaktyk i kwazarów, wyznaczane są zupełnie innymi, przybliżonymi metodami. Ich dokładność ma decydujące znaczenie dla konstruowania i weryfikowania modeli kosmologicznych. Operowanie metrami czy parsekami przy tak ogromnych odległościach nie jest wygodne. Odległość do najbliższej gromady gwiazd — *Hiad* — wynosi 44 pc, odległość do ogromnej galaktyki M101 — 7,2 Mpc, do najdalszych obserwowanych obiektów — niemal 3 Gpc. Wprowadźmy więc wygodniejszą wielkość opartą na pojęciu wielkości gwiazdowej.

Przypominamy, że absolutna wielkość gwiazdowa  $M$  jest to jasność gwiazdy  $m$  sprowadzonej do standardowej odległości 10 pc.  $M = m + 5 - 5 \log r$ . Modułem odległości nazywamy wielkość  $m - M (= 5 \log r - 5)$ . Jego sens fizyczny jest następujący: o tyle wielkości gwiazdowych będzie jaśniejszy obiekt, jeśli ustawimy go w odległości 10 pc. Moduł odległości do Słońca wynosi  $-31,57$ , natomiast do gromady galaktyk *Virgo*  $+31,7$ . Wyobraźmy sobie, że wiemy, jaka jest wielkość absolutna danej gwiazdy. Niech to będzie biały karzeł w *Hiadach*. Wszystkie jego parametry przemawiają za tym, że jego wielkość absolutna powinna być  $M = +11^m,00$ . Natomiast wielkość widoma uzyskana z obserwacji wynosi  $m = +14^m,23$ . Stąd moduł odległości do tej gwiazdy  $+3,23$ . Spróbujmy wyznaczyć teraz moduł odległości do dalekiej gromady galaktyk w gwiazdozbiorze Panny (pamiętając o tym, że tonący chwyta się brzytwy).

Najwygodniejszą miarką pozwalającą na wyznaczanie odległości galaktyk jest zależność między okresem a jasnością dla cefeid. Cefeidy — bardzo jasne gwiazdy zmienne ( $M \sim -2^m \div -5^m$ ) mają tę własność, że istnieje prosta zależność między okresem zmian i absolutną wielkością gwiazdową. Wyznaczając okres i średnią jasność widomą otrzymujemy moduł odległości. Gromada w Pannie jest jednak tak daleko, że nie obserwujemy w niej cefeid. Ponieważ najslabsze rejestrowane gwiazdy mają jasność  $m = +21^m$ , więc  $m - M > 26$ .

Najjaśniejsze czerwone nadolbrzymy — jedne z najjaśniejszych gwiazd w galaktykach — są również dobrymi wskaźnikami odległości. Mają one absolutną wielkość  $M \sim -8^m$ . Takich czerwonych gigantów również w gromadzie Panny nie znaleziono, więc  $m - M > 29$ . Najjaśniejsze niebieskie gwiazdy zmienne mają absolutną jasność do  $M \sim -10^m$ , więc gdybyśmy zaobserwowali takie gwiazdy w którejś z galaktyk, to można by wyciągnąć wniosek, że moduł odległości jest mniejszy niż 32. Niebieskie zmienne nadolbrzymy nie występują jednak we wszystkich galaktykach, więc z faktu, że nie widzimy ich w Pannie, nie możemy wyciągnąć żadnego wniosku.

W ogóle najjaśniejszymi gwiazdami, jakie istnieją w przyrodzie, są żółte nadolbrzymy typu F. Najjaśniejsze z najjaśniejszych mają wielkość  $M \sim -11^m,0$ . W jednej z galaktyk wchodzących w skład gromady w Pannie zaobserwowano takie gwiazdy. Najjaśniejsza z nich ma jasność  $m = 20^m,8$ . A więc jest to pierwsza ocena modułu odległości. Wynosi on 31,7 z dość dużym błędem 0,5. Kolejną metodą wyznaczania dużych odległości są pomiary jasności gwiazd nowych i supernowych w maksimum blasku. Badana gromada jest tak daleko, że wybuchów nowych nie obserwujemy, natomiast wybuchy supernowych obserwowano w ciągu ostatnich 60 lat osmiokrotnie. Najjaśniejsze z supernowych osiągają w maksimum blasku wielkość  $M = -20^m,8$  (czyli tyle, co cała galaktyka). Znając własności supernowych z bliższych galaktyk i rejestrując jasność supernowych w Pannie na poziomie  $m = +12^m \div +14^m$ , możemy wyznaczyć moduł odległości do gromady na  $m - M = 32,2 \pm 0,6$ , co nie jest sprzeczne z poprzednim wynikiem. Badając bliskie galaktyki możemy analizować również inne zależności, np. zależność jasności i promieni obłoków zjonizowanego wodoru od widm oświetlających je gwiazd. Z obserwacji jednego takiego obłoku, który udało się odnaleźć w gromadzie Panny, otrzymujemy  $m - M = 31,9 \pm 0,3$ .

Galaktyki wchodzące w skład gromady zawierają dużą liczbę kulistych gromad gwiazd. Przebieg zależności jasności gromad kulistych od częstości ich występowania skalibrowany na bliskich obiektach daje moduł odległości  $31,65 \pm 0,5$ . Wyciągając średnią z wszystkich tych i jeszcze kilku innych rezultatów ważoną ich dokładnością otrzymujemy ostatecznie moduł odległości do gromady galaktyk w Pannie:

$$m - M = 31,7 \pm 0,08 \quad \text{czyli} \quad r = 21,9 \pm 0,9 \text{ Mpc.}$$

Średnia prędkość radialna układu 102 galaktyk wchodzących w skład tej gromady wynosi  $V_R = 1100 \text{ km/s}$  z prędkościami względnymi średnio  $\delta V_R = 68 \text{ km/s}$ . A więc z powyższych danych możemy wyznaczyć stałą Hubble'a

$$H_0 = \frac{V_R}{r} = (50,3 \pm 4,2) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}.$$

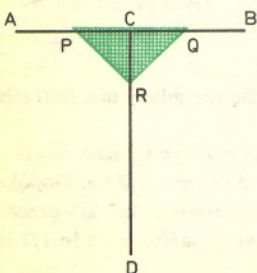


## Rozwiązanie zadania M 203

Niech  $P, Q, R$  będą punktami leżącymi odpowiednio na odcinkach  $CA, CB$  i  $CD$

w odległości  $\frac{1}{4}$  od punktu  $C$ . Można sprawdzić, że jeżeli „litera T”  $AB \cup CD$  i  $A'B' \cup C'D'$  są rozłączne, to również odpowiadające im trójkąty  $PQR$  i  $P'Q'R'$  są rozłączne. Trójkąt  $PQR$  ma pole  $\frac{1}{16}$

i w obszarze ograniczonym można zmieścić tylko skończenie wiele trójkątów z nim izometrycznych i rozłącznych. Stąd wynika, że w tym obszarze można pomieścić tylko skończoną liczbę rozłącznych „liter T”. Widzimy też, że liczba ta nie przekracza  $16 \times$  pole danego obszaru, ale to oszacowanie jest bardzo „grube”.



Gromada w Pannie jest jednym z najdalszych układów, których odległość wyznaczono kilkoma niezależnymi metodami. Odległości bardziej oddalonych obiektów możemy wyznaczać jedynie po dokonaniu karkołomnych założeń, np. że wszystkie galaktyki spiralne mają tę samą średnicę, lub że wszystkie galaktyki mają tę samą jasność!

Natomiast korzystając z prawa Hubble'a możemy wyznaczać odległości jeszcze dalszych obiektów (wszystkich jasnych na tyle, że możemy zmierzyć przesunięcie linii widmowych ku czerwieni) aż do momentu, kiedy krzywizna przestrzeni spowoduje, że prawo to nie będzie już liniowe. Wtedy musimy zdecydować się na określoną geometrię Wszechświata, aby dalej stosować prawo Hubble'a dostosowane do geometrii nieeuklidesowej.

Tym razem za obiekt pomiarów wybierzemy Słońce. Postaramy się wyznaczyć ilość energii emitowanej w przestrzeni oraz temperaturę powierzchniową Słońca. Nasz cel będziemy starali się osiągnąć najprostszymi metodami, stąd konieczność dokonania podczas pracy rozmaitych uproszczeń, co w efekcie obwaruje wynik pewnymi zastrzeżeniami.

Część pomiarowa sprowadza się do wyznaczenia stałej słonecznej, czyli ilości energii, jaką otrzymuje jednostka powierzchni (prostopadła do padających promieni) w średniej odległości Ziemi od Słońca, poza atmosferą, w jednostce czasu.

Pomiar polega na porównaniu promieniowania Słońca z promieniowaniem żarówki (np. 200-watowej) o bańce ze szkła przezroczystego.

Jako fotometru użyj zamkniętych oczu. W słoneczny dzień zapal żarówkę, odczekaj aż się nagrzej, a następnie zamknij oczy i zbliż do niej twarz (nie oparz nosa). Twoje oczy dostrzegą czerwień, oraz odczujesz ciepło (promieniowanie podczerwone). Nie otwierając oczu obróć twarz do Słońca, doznasz podobnych wrażeń. Postaraj się teraz umieścić twarz w takiej odległości od żarówki, by odcień czerwonego światła, widziany przez powieki, był taki sam, jak w przypadku „patrzenia” na Słońce. Zgodność odcieni będzie oznaczała równość natężenia promieniowania Słońca i żarówki. Równość ta dotyczy oczywiście zakresu światła widzialnego i częściowo podczerwieni przy dodatkowym założeniu, że widmo światła żarówki jest zbliżone do słonecznego i że rozkład tego promieniowania jest, podobnie jak w przypadku Słońca, równomierny we wszystkich kierunkach.

Pomiar odległości powiek od żarówki ( $d$ ), przy której stwierdzisz zgodność natężeń promieniowania, kończy część doświadczalną.

### Przystępujemy do obliczeń

#### a) Stała słoneczna ( $S$ )

Znając moc żarówki ( $P$ ) i wyznaczoną odległość ( $d$ ) możesz obliczyć ilość energii ( $E$ )

wydzieloną przez żarówkę na jednostkę czasu ( $t$ ) i powierzchni ( $u$ ) w pobliżu powiek  $\frac{E}{t \cdot u} = \frac{P}{4\pi d^2}$ .

Wielkość ta, po uwzględnieniu podanych powyżej zastrzeżeń, będzie poszukiwaną stałą słoneczną ( $S$ )  $= \frac{P}{4\pi d^2} \left[ \frac{W}{m^2} \right]$ . Wynik porównaj z danymi tablicowymi. Najczęściej jest on

$$\text{podany w } \text{cal} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{min}^{-1}. \quad 1 \frac{\text{cal}}{\text{cm}^2 \cdot \text{min}} = \frac{4,18\text{J}}{10^{-4}\text{m}^2 \cdot 60\text{s}} = 696,67 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

Uwaga: bardziej poprawny wynik otrzymasz po uwzględnieniu faktu, że około 23% strumienia energii jest pochłaniane przez ziemską atmosferę i nie dociera do powierzchni Ziemi.

#### b) Energia

Znając stałą słoneczną w prosty sposób obliczysz ilość energii wypromieniowywanej przez Słońce z jednostki powierzchni w jednostce czasu.

Stosunek  $R/r$  (rysunek) ma wartość 215, więc stosunek powierzchni kul o promieniu  $R$  i  $r$  wynosi  $215^2 = 46\,225$ . Jeżeli  $1 \text{ cm}^2$  kuli o promieniu równym średniej odległości Ziemia-Słońce

otrzymuje  $1,99 \frac{\text{cal}}{\text{min}}$ , to każdy  $\text{cm}^2$  powierzchni Słońca wysyła w ciągu minuty 46 225 razy

więcej energii.

Mnożąc stałą słoneczną przez powierzchnię kuli o promieniu  $R$  otrzymasz ilość energii emitowanej przez Słońce w ciągu minuty ( $R = 149,5 \text{ mln km}$ ).

#### c) Temperatura

W celu obliczenia temperatury powierzchniowej Słońca możesz zastosować prawo

Stefana-Boltzmann'a:  $E = \sigma T^4$ ,

gdzie  $E$  — moc promieniowania z jednostki powierzchni Słońca  $\frac{W}{m^2}$ .

$$\sigma \text{ — stała Stefana, w układzie SI } \sigma = 5,6697 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K}$$

$T$  — temperatura w kelwinach.

(Wiadomości na temat tego prawa zaczerpniesz z podręcznika fizyki dla szkoły średniej.)

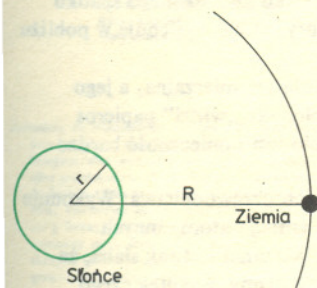
Jeżeli zechcesz pogłębić swe wiadomości z astronomii, polecam książkę P. G. Kulikowskiego „Poradnik miłośnika astronomii”, PWN, Warszawa 1976.

## Laboratorium w domu

Mgr Janusz GASIŃSKI

Przy pomiarach natężeń źródła światła posługujemy się metodą porównawczą. Najprostszym przyrządem jest fotometr Bunsena, w postaci kartki z tłustą plamką. Przy równym oświetleniu plamka znika.

Wynik tablicowy:  $S = 1,99 \frac{\text{cal}}{\text{cm}^2 \cdot \text{min}}$ .



W każdej minucie Słońce traci wskutek promieniowania około 255 mln ton masy.

Pomiar, który można (a nawet należy) wykonać z zamkniętymi oczami

## Pomiary w podczerwieni

Mgr Roman  
STĘPNIEWSKI

Fale elektromagnetyczne o różnej długości fali są wytwarzane i wykrywane całkiem różnymi metodami. Wiąże się z tym zresztą nazwy tych fal.

Fale radiowe mogą być wykrywane np. za pomocą radioodbiornika. Jego antena jest zasadniczym elementem wykrywającym te fale. Pozostała część służy jedynie wzmocnieniu i odpowiedniemu przetworzeniu odebranego sygnału.

Najbardziej cennym i jednocześnie bardzo precyzyjnym detektorem światła widzialnego jest oczywiście oko, w którym elementem bezpośrednio reagującym na padające światło są komórki światłoczułe. Układ nerwowy odpowiednio przetwarza te reakcje. Innym sposobem wykrywania światła jest użycie kliszy fotograficznej. W tym przypadku padające światło zapoczątkowuje przemiany chemiczne, które są następnie „wzmacniane” w procesie wywoływania.

W środku (nie jest to zbyt precyzyjne określenie) pomiędzy falami radiowymi i światłem widzialnym znajduje się obszar promieniowania elektromagnetycznego o długości fal od 50 do 1000 mikrometrów, określane jako daleka podczerwień. Ze względu na ten pośredni charakter wykrywanie takiego promieniowania sprawiało duże kłopoty. Detekcja w sposób typowy dla zakresu radiowego jest niemożliwa, gdyż odpowiednia antena musiałaby mieć długość rzędu setek mikrometrów (porównywalną z długością fali). Z drugiej strony częstotliwość a co za tym idzie energia pojedynczego kwantu tego promieniowania jest zbyt mała, by wywołać procesy fotochemiczne (np. w emulsji fotograficznej); promieniowanie elektromagnetyczne o tak niskiej częstotliwości jest za słabe. Najczęściej stosowane metody detekcji promieniowania dalekiej podczerwieni opierają się na fakcie wzrostu temperatury ciała, na które ono pada. Bardzo prostym urządzeniem tego typu jest termopara. Jedno z jej złącz wystawione na działanie promieniowania ogrzewa się i pojawia się napięcie termoelektryczne, które jest miarą natężenia padającej wiązki. W celu zapewnienia dużej czułości, termopary są wykonywane z bardzo cienkiej folii. Jest to przyczyną małej wytrzymałości mechanicznej tych urządzeń. Nie ma tego mankamentu tzw. komórka Golaya czyli detektor ciśnieniowy.

Stanowi ona wypełnioną gazem komorę zakończoną z obu stron bardzo cienkimi membranami. Na jedną z nich, pokrytą specjalną warstwą pochłaniającą, pada badane promieniowanie powodując ogrzewanie i podwyższenie ciśnienia gazu. Druga membrana jest oświetlona z zewnątrz światłem zwykłej żarówki. Zmiany jej kształtu są obserwowane za pomocą bardzo czułego układu optycznego i następnie przetwarzane na sygnał elektryczny dzięki użyciu fotokomórki. Napięcie wyjściowe otrzymywane z komórki Golaya jest na tyle duże, że może być bez większych trudności wzmacniane za pomocą wzmacniaczy elektronicznych.

Najmniejsza moc promieniowania, jaką potrafi wykryć taki detektor, wynosi ok.  $10^{-10}$  W. Może on np. „zobaczyć” zapalony papieros z odległości ok. 100 m. Gdyby można w prosty sposób zamienić energię mechaniczną w całości na promieniowanie podczerwone, to upadek lebką zapalki z wysokości 1 cm odbierany byłby jako bardzo silny sygnał.

Głównym ograniczeniem czułości takiego detektora jest tzw. szum termiczny. Jest to dodatkowy sygnał, który pojawia się wskutek statystycznej fluktuacji temperatury gazu w komorze.

Dla zbyt słabego natężenia promieniowania niemożliwe jest odróżnienie sygnału od szumu.

Znaczną poprawę warunków pracy detektorów termicznych uzyskuje się obniżając ich temperaturę np. za pomocą ciekłego helu.

Wykorzystuje się przy tym szereg substancji, których opór silnie zależy od temperatury.

Detektory wykonane z takich materiałów nazywane są bolometrami. Do najbardziej czułych należy bolometr nadprzewodzący. Działanie jego opiera się na zjawisku gwałtownego spadku oporu niektórych metali i stopów w czasie obniżania ich temperatury, które występuje w pobliżu temperatury przejścia w tzw. stan nadprzewodzący.

Zmiana oporu bolometru wskutek padającego promieniowania jest łatwo mierzalna, a jego czułość jest ok. 100 razy większa niż czułość detektora Golaya (bolometr „widzi” papieros z odległości 1 km). Największym utrudnieniem przy jego stosowaniu jest konieczność bardzo dokładnej stabilizacji temperatury.

Całkowicie odmienną klasą są detektory wykorzystujące zjawisko fotoprzewodnictwa. Wykonuje się je najczęściej ze związku półprzewodnikowego InSb, w którym istnieją atomy innych pierwiastków, które mogą bardzo słabo wiązać elektrony. Energia wiązania jest tak słaba, że nawet promieniowanie dalekiej podczerwieni może uwolnić takie elektrony, wskutek czego stają się one nośnikami prądu, a to powoduje wzrost przewodnictwa. I w tym przypadku detektor musi być chłodzony ciekłym helem, gdyż już dla temperatury ok. 20 K drgania termiczne sieci krystalicznej spowodowałyby uwolnienie wszystkich związanych elektronów. Należy przy tym jeszcze raz podkreślić, że jest to efekt całkowicie różny od efektu bolometrycznego, w którym zmiana oporu bezpośrednio związana jest ze zmianą temperatury detektora. Tutaj bezpośrednim skutkiem padającego promieniowania jest zmiana ilości nośników prądu.

Wszystkie te urządzenia mają szerokie zastosowanie w nauce i technice. Pozwalają nam widzieć to, czego oko ludzkie zobaczyć nie potrafi. Są one używane np. w astrofizyce przy analizie promieniowania termicznego gwiazd i planet. Promieniowanie dalekiej podczerwieni ze względu na małą energię pojedynczego kwantu jest używane w celu precyzyjnego określenia właściwości elektronów w półprzewodnikach i metalach. W eksperymentach takich dokładny pomiar mocy promieniowania jest oczywiście bardzo ważny.



$$? = 4,28 \cdot 10^{-26} \text{ (lut handlowy warszawski)} \times \frac{\text{(stopa litewska)}^2}{\text{doba}}$$

Układ jednostek jest sprawą umowną. Inna rzecz, że u podstaw każdej umowy leżą pewne przesłanki merytoryczne uzasadniające taki, a nie inny wybór. Niezależnie od wagi argumentów za przyjęciem jednego a odrzuceniem innego układu jednostek, ogromną rolę odgrywa siła przyzwyczajenia tych, którzy się tymi jednostkami posługują na co dzień. Na XI Generalnej Konferencji Miar w 1960 r. przyjęto Międzynarodowy Układ Jednostek Miar (Système International d'Unites), zwany w skrócie układem SI (Delta 2/1977). Proces wprowadzania w życie jednostek układu SI powinien być zakończony do 31 grudnia bieżącego roku. „Stare” jednostki, jak uczy życie, będą jednak z pewnością jeszcze pokutować w wielu dziedzinach, tak jak to było przy wprowadzaniu systemu metrycznego. Układ metryczny wprowadzono podczas Wielkiej Rewolucji Francuskiej ustawą z dn. 7 kwietnia 1795 r. Trzydzięci dwa lata później w podręczniku „Chemia z zastosowaniem do Sztuk i Rzemiosł ułożona przez Ignacego Fonberga” (Wilno 1827) znajdujemy:

*Miary liniowe.*

Stopa litewska jest u nas jednością miar liniowych. Półtorę stopy stanowią pręciak; dwie stopy razem złączone składają fokiei; sześć stop, sążon; 15 stop = 1. przętowi; 150 stop = 1. sznurowi; stała = 2625 stopom; mila = 21 000 stop = 3500 sążonom. Podobnym sposobem cal =  $\frac{1}{12}$  części stopy; linia =  $\frac{1}{12}$  stopy; linijka uważana jako  $\frac{1}{24}$  części linii jest  $\frac{1}{24}$  części stopy, a wzięta za  $\frac{1}{2}$  części linii jest  $\frac{1}{12}$  części stopy.

Stopy innych krajów wyrażona jest w następującej tabelicy przez linie stopy litewskiej:

	linia litewska
Stopa amsterdamska równa się	125,50.
— angielska	135,1152.
Stopa angielska (foot) równa się 12 calom (inches) a 120 linijom.	
— bawarska	135,00.
— bawarska	129,58.
— bazylijska	132,20.
— berlińska	137,50.
— bernska	130,00.
— darmstadtzka	127,60.
— drezdeńska	125,50.
— duńska (fod)	139,13.
— francuska (pied) dawna	144,00.

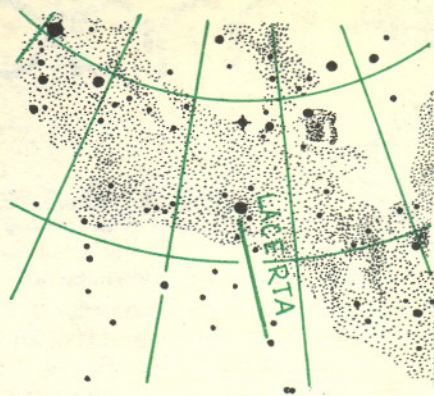
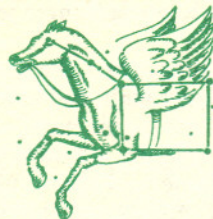
Metr stanowiący jedność nowych miar francuzkich równa się  $\frac{1}{1000000}$  części ćwierci południka ziemskiego, czyli 443,2959 linijom. Dzieli się zaś na dekametr = 10 metrów, hektometr = 100 metrów, kilometr = 1000 metrów, myriametr = 10000 metrów; iako też decymetr =  $\frac{1}{10}$  metra, centymetr =  $\frac{1}{100}$  metra.

*W a g i.*

Jednością do dochodzenia ciężaru ciała przez imię ciężary znane jest funt, którego wszystkie drobniejsze albo znaczniejsze wagi są pomnożeniem albo podzieleniem. Tak, kamień litewski równa się 40 funtom, bela = 150 funtom, centnar = 200 funtom, hierkowiec albo szyfunt = 400 funtom. Mark =  $\frac{1}{2}$  funta; uncya =  $\frac{1}{16}$  funta; lot =  $\frac{1}{24}$  funta; karat mennicy =  $\frac{1}{24}$  funta; drachma (gros) =  $\frac{1}{24}$  funta; skrupel (denier)  $\frac{1}{24}$  funta; karat =  $\frac{1}{24}$  funta; grai =  $\frac{1}{24}$  funta; ass =  $\frac{1}{24}$  funta.

Funt aptekarski (℔) = 12 uncyom (ʒ) = 96 drachmom (ʒ) = 288 skrupelom (ʒ) = 5760 granom (gr). Do nowych wag francuzkich za jedność obrano gram, to jest ciężar wody czystej w temper. 3°,5 R. pod objętością centymetru kubicznego. Dekagramm = 10 gramom, hektogramm = 100 gramom, kilogramm = 1000 gramom, myriagramm = 10000 gramom. Derygramm =  $\frac{1}{10}$  części gramma, centygramm =  $\frac{1}{100}$  gramma, milligramm =  $\frac{1}{1000}$  gramma.

Większość przytoczonych jednostek przeszła już do historii, chociaż do dziś jeszcze wielu sprzedawców zrozumie, że gdy prosi się o funt owoców — należy odważyć 1/2 kg. Nie do wyobrażenia jest balagan, jaki wywołaloby stosowanie tych jednostek w nauce lub technice. Czy łatwo bowiem rozpoznać w tytule podstawową stałą fizyki kwantowej?



**Patrz w niebo**

We wrześniu gwiazdozbiory tworzące Wielki Trójkąt Letni wschodzą tak wcześnie że już niedługo po zmroku zaczynają chylić się ku zachodowi. W zenicie pojawiają się jesienne gwiazdozbiory Pegaza (Pegasus, Peg), Wodnika (Aquarius, Aqr), Cefeusza (Cepheus, Cep) i Jaszczurki (Lacerta, Lac).

W gwiazdozbiorze Jaszczurki odkryto obiekt, który coraz bardziej intryguje astronomów — jest nim BL Lacertae słaba gwiazdka, która po zbadaniu w 1929 r. okazała się zmienną nieregularną. Amplituda zmian jasności jest duża — zmienia się ona o 100% w ciągu tygodnia, a czasami nawet 15-krotnie w ciągu kilku miesięcy. Było to niezrozumiałe, lecz oczywiście nie wyjątkowe.

Dziesięć lat temu stwierdzono, że położenie BL Lac pokrywa się z położeniem źródła promieniowania radiowego VRO 42.22.01, o którym to źródle już wcześniej było wiadomo, że nie jest gwiazdą. Co więcej, zaraz potem odkryto, że jest ono bardzo odległe — najprawdopodobniej leży poza Galaktyką. Widma BL Lac i trzydziestu później znalezionych obiektów tego typu nie zawierają prawie żadnych szczegółów; jednak nieliczne i słabe linie pozwoliły na pomiar prędkości oddalania się niektórych lacertyd. Sama BL Lac oddala się z prędkością 21000 km/s, czyli 7% prędkości światła, co świadczy o tym, że jest ona 20 razy bardziej od nas oddalona niż gromada galaktyk w Pannie! (patrz artykuł *O odległościach astronomicznych*)

Skoro jest to obiekt tak daleki, a mimo to ciągle obserwowany (jedno z jaśniejszych źródeł na radiowym niebie), to moc jego promieniowania musi być niewyobrażalnie duża — wielokrotnie większa od jasności zwykłej galaktyki. Jednak na zdjęciach jego obraz jest prawie punktowy — co więcej — szybka zmienność obiektu świadczy o jego minimalnych rozmiarach. Średnica jego podzielona przez prędkość światła musi być mniejsza niż czasowa skala zmienności, aby przyczynki do zmian jasności pochodzące od różnych (bliższych i dalszych) części obiektu nie tłumili się wzajemnie. Wynika z tego, że wielkość aktywnej części lacertyd nie przekracza rozmiarów układu słonecznego. Dzisiaj nie wiemy jeszcze, co jest tak wydajnym a jednocześnie tak małym źródłem energii emitowanej przez lacertydy. Może pochłanianie materii przez szybko rotujące czarne dziury, może hipotetyczne „białe dziury”, zapadające się jądra galaktyk, wielokrotne supernowe lub zderzenia dużych liczby gwiazd?

Mgr Tomasz CHLEBOWSKI





# mała delta



Pewnego lata jechałem w nocy zatłoczonym pociągiem. O miejscu w przedziale mogłem tylko marzyć i wraz z kilkudziesięcioma innymi pasażerami kiwałem się na korytarzu w takt uderzeń kół o złącza. Gdy pociąg zwalniał, stukot stawał się wolniejszy, a gdy przyspieszał — koła stuknęły w szybszym rytmie. Wiedziałem, że szyny mają długość 15 m. Gdy będę znał częstotliwość stuknięć, to obliczę prędkość pociągu; ale te proste obliczenia, jak mnie czekały, wydawały się beznadziejnie trudne. Zacząłem, pół śpiąc, rozmyślać na ogólne tematy: jeżeli zacznę liczyć stuknięcia kół o złącza i w czasie  $t$  naliczę ich  $n$ , to będzie to znaczyć, że pociąg przejechał w tym czasie około  $15n$  metrów, a zatem jego prędkość wynosi  $\frac{15n}{t}$  metrów na sekundę. Metr na sekundę — to 3600 metrów na 3600

sekund, czyli jedną godzinę. A więc prędkość pociągu w kilometrach na godzinę wyniesie  $3,6 \cdot 15 \cdot \frac{n}{t}$  kilometra na godzinę, czyli  $54 \cdot \frac{n}{t}$  km/godz. „Zaraz, zaraz — pomyślałem. Coś dziwnego wychodzi. Podstawmy  $t = 54$  (jak gdybym liczył stuki przez 54 sekundy), to prędkość pociągu będzie wynosić  $n$  kilometrów na godzinę, ale  $n$  było liczbą tych stuknięć”. Sprawdziłem: zgadza się. Przy piętnastometrowych szynach liczba stuknięć kół o złącza w ciągu 54 sekund jest równa prędkości pociągu w kilometrach na godzinę.

Przez resztę nocy cieszyłem się tym odkryciem i bezustannie mierzyłem prędkość, z jaką zbliżałem się do Zakopanego. Dobrze, że mam zegarek z fosforyzowanym sekundnikiem.

Od kilku lat dojeżdżam do pracy pociągiem. Niestety, na mojej linii są tory bezstykowe. Ale „na szczęście” linia jest zelektryfikowana i przy torach stoją w równych odległościach słupy trakcyjne. Jest ich 16 lub 17 na kilometr (nie mam pojęcia dlaczego tyle). Ale to wystarczyło mi na znalezienie sposobu na obliczanie prędkości pociągu, jakim jadę — bez konieczności kłopotliwego (a często bardzo utrudnionego) śledzenia słupów kilometrowych. Moja robota w pewnym sensie poszła na marne: okazało się, że pociągi moje jeżdżą po prostu z prędkością 60 km/godz.

Często jeżdżę kolejką WKD, kursującą z Warszawy do Podkowy Leśnej, Grodziska i Milanówka. Jej szyny mają całkiem nieregularne długości, a metoda „liczenia słupów trakcyjnych” też się nie nadaje do obliczania prędkości kolejki.

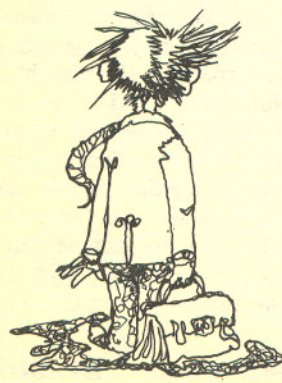
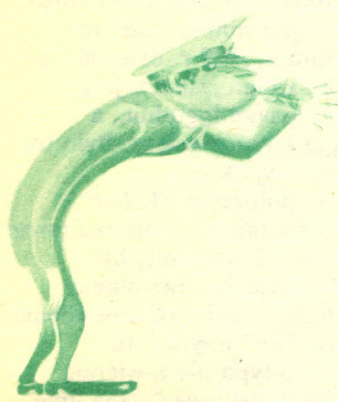
Zbyt długo należałoby liczyć te słupy, w tym czasie kolejka zdoła przejechać prawie cały przystanek, z ruszaniem i hamowaniem. Nie umiem mierzyć szybkości takiej kolejki inaczej niż „tradycyjnym” sposobem patrzenia na słupy rozstawione co 200 metrów i mierzenia czasu przejazdu kolejki między nimi.

Dojazdy do pracy podsunęły mi jeszcze jedno zadanie. Na mojej linii pociągi towarowe mają osobny tor i czasami pociąg, którym jadę, wyprzedza jadący po sąsiednim torze załadowany pociąg towarowy, który z kolei mijają nas, gdy stoimy na stacji — potem my go wyprzedzamy i tak dalej. Gdy zdarzy się taka sytuacja, często „z nudów” obliczam sobie długość pociągu towarowego (wagon towarowy są różnych długości i policzenie ich nic mi nie da). Jak się rzekło, wiem, że mój pociąg osobowy jedzie z prędkością 60 km/godz. Mierzę czas  $t$  w jakim mijamy towarowy. Potem mierzę czas  $u$ , w jakim towarowy mijają nas, gdy stoimy na stacji. Rozumuję teraz tak: jeżeli  $l$  jest długością pociągu towarowego, a  $v$  — jego prędkością (w km/godz), to  $60-v$  jest prędkością względną pociągu osobowego względem towarowego. Mam oto równanie  $(60-v)t=l$ . Muszę ułożyć jeszcze jedno. Na stacji towarowy mijają nas w  $u$  sekund. Zatem  $vu = l$ . Z tych dwóch

równań mamy  $v = \frac{60}{1 + \frac{u}{t}}$ ,  $l = \frac{60}{\frac{1}{u} + \frac{1}{t}}$ ; jeżeli jednak chcę otrzymać długość

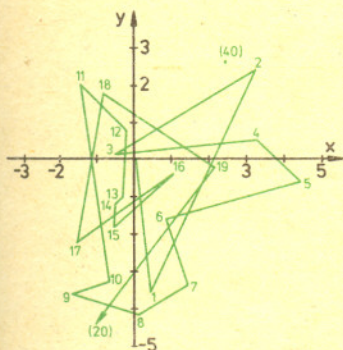
pociągu w metrach, muszę czas wyrazić w sekundach, a 60 km/godz przeliczyć na metry na sekundę ( $60 \text{ km/godz} = \frac{50}{3} \text{ m/sek}$ ).

A czy możecie rozwiązać to zadanie bez użycia równań?



## Trzy procesy

Często się zdarza, że różne zjawiska fizyczne można tak samo opisać w języku matematyki. Nie oznacza to jeszcze, że są one istotnie ze sobą związane. Podobny opis może być sprawą przypadku, ale mogą też istnieć głębsze przyczyny podobieństwa. Proponujemy Wam zajęcie się trzema procesami. To, co zaobserwujemy w dwóch pierwszych, jest wynikiem nałożenia się bardzo wielu przypadkowych czynników. Te trzy procesy to przypadkowe błądzenie po lesie, dyfuzja w cieczy oraz wędrówka fotonu z wnętrza Słońca do obserwatora na Ziemi.



Wyboru przypadkowego kierunku można dokonać kręcąc się w koło i zatrzymując na czyjś sygnał. Kierunek, w którym w chwili zatrzymania patrzymy będzie wybranym kierunkiem.

Średnia wartość kwadratu przesunięcia  $z$  błądzącego obiektu wzdłuż dowolnie wybranej osi zależy od czasu  $t$ , średniej wartości kwadratu prędkości  $v$  obiektu i średniego czasu swobodnego  $\tau$ .

$$\overline{z^2} = \left(\frac{1}{3} v^2 \tau\right) t.$$

Drugie zaproponowane doświadczenie należy wykonać w domu, wyszukując miejsce, gdzie moglibyśmy postawić słoik możliwie wąski i wysoki na okres kilku tygodni do kilku miesięcy w absolutnym spokoju. Na dno nalewamy nieco stężonego roztworu nadmanganianu potasu (można kupić w aptece) i dopełniamy słoik ostrożnie wodą tak, aby ciecz nie pomieszały się. Pozostawiamy słoik w spokoju, obserwując jak z tygodnia na tydzień podnosi się granica pomiędzy cieczą a roztworem nadmanganianu potasu. Przebieg procesu rozchodzenia się barwnika możemy wytłumaczyć tym, że cząsteczki jego błądzą przypadkowo wśród cząsteczek wody. To, że cząsteczki wody są również w ruchu, nie powinno nam zaciemniać obrazu. To tak, jakby drzewa również błąkały się po lesie. Spotkania z nimi byłyby dalej przypadkowe, zmianie mogłaby ulec tylko średnia droga swobodna.

Przedstawiony obraz ruchu cząsteczek w cieczy jest bardzo uproszczony. Ruchy te przypominają bardziej grę w komórki do wynajęcia: podskakiwanie w swoim polu i przeskoki na inne wolne miejsce. Nasz uproszczony obraz pozwala jednak zrozumieć, dlaczego samorzutne mieszanie się cieczy, czyli dyfuzja, zachodzi tak powoli.

Czas teraz na trzeci problem. Jak ocenić czas, jakiego potrzebuje światło zrodzone we wnętrzu Słońca na dotarcie do Ziemi. Z dużą dozą prawdopodobieństwa możemy założyć, że światło biegnie w bardzo gęstej materii wnętrza Słońca co chwila zmieniając kierunek. Można oszacować, że średnia droga swobodna między zmianami kierunku jest rzędu kilku centymetrów. Okazuje się wtedy, że średni czas potrzebny na wydostanie się fotonu z wnętrza na powierzchnię może być rzędu tysięcy lat. Dotarcie do Ziemi zabiera już tylko kilka minut.

Nasuwa się więc zaskakujący wniosek. Ta część promieniowania, która zrodziła się we wnętrzu Słońca i dociera teraz do nas, niesie informacje sprzed tysięcy lat.

A teraz pytanie: czy opisane zjawiska mają coś wspólnego, czy tylko tak samo je opisujemy?

Błądzenie po lesie, potraktowane jako doświadczenie, powinno być zabawą. Najlepiej bawić się w grupie, ale można przeprowadzić badania również samemu. Spod wybranego drzewa rosnącego niezbyt blisko skraj lasu startują kolejno uczestnicy gry. Kierunek marszu każdy wybiera przypadkowo i idzie po prostej, aż napotka następne drzewo. Przy nim zmienia kierunek znowu całkiem przypadkowo i idzie do kolejnego drzewa. Po dokonaniu 10 zmian kierunku marszu uczestnicy zabawy zatrzymują się i oceniają, jak bardzo grupa się rozproszyła. Na dany sygnał podejmujemy marsz do następnego zatrzymania się po dalszych dziesięciu spotkaniach z drzewem i znowu oceniamy rozproszenie się grupy.

Rozproszenie grupy można oczywiście odpowiednio zdefiniować i za każdym razem zmierzyć, ale ma to przecież być zabawa, więc poprzestańmy na ocenie „na oko”, czy rozproszenie grupy rośnie proporcjonalnie do ilości spotkań z drzewami, czy też wolniej. Jest to bardzo ważne zagadnienie, bo proces przypadkowego błądzenia napotykamy w wielu działach fizyki. Można oczywiście odtworzyć zabawę w błądzenie na kartce papieru, kreśląc odcinki o przypadkowo dobranej długości, skierowane przypadkowo w różnych kierunkach. Wykonałem rysunek takiego błądzenia, losując kierunek i odległość do przebycia. Korzystając z wędrówek po lesie lub z rysunku wprowadzimy dwa pojęcia. Średnią długość wszystkich przebytych odcinków (od drzewa do drzewa) nazywamy średnią drogą swobodną. Średni czas potrzebny na przebycie jednego odcinka nazywamy średnim czasem swobodnym. Jestem pewien, że przekonacie się, że rozchodzenie się uczestników gry po lesie przy błądzeniu przypadkowym jest bardzo powolne. Przeszedłszy do rzadszego lasu, gdzie średnia droga swobodna jest dłuższa, można zbadać jak zmieni się błądzenie.