

## SPIS TREŚCI

### NUMERU 8 (68)

|   |         |
|---|---------|
| Jeśli liczby całkowite położyc na zbiorze Cantora<br><i>Prof. dr Jerzy Mioduszewski</i> | str. 1  |
| Podstawowe prawa elektrodynamiki<br><i>Doc. dr Andrzej Szymacha</i>                     | str. 4  |
| Laboratorium w domu<br><i>Mgr Andrzej Gołębiewski</i>                                   | str. 6  |
| Gazy doskonałe<br><i>Dr Marek Cieplak</i>   | str. 8  |
| Patrz w niebo   | str. 13 |
| Mała Delta  | str. 14 |
| Rozstrzygnięcie konkursu o trójkącie  | str. 16 |
| Zadania   | str. 17 |

**W następnym numerze:**  
**O mierzeniu**

**Rysunki techniczne:**  
**Bogusław KRETKIEWICZ.**

„Delta”  
matematyczno-fizyczno-astronomiczny  
miesięcznik popularny  
Polskiego Towarzystwa  
Matematycznego, Polskiego  
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
Towarzystwa Astronomicznego  
wydawany przy poparciu  
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny:  
doc. dr J. Bartke  
doc. dr A. Bączyński  
doc. dr B. Gleichgewicht  
prof. dr B. Grabowski  
dr J. Hanasz  
doc. dr B. Iwaszkiewicz  
doc. dr T. Iwiński  
doc. dr A. Januszajtis  
doc. dr T. Jarzębowski  
prof. dr L. Jeśmianowicz  
mgr H. Kaczorek  
prof. dr M. Kuczma  
mgr A. Mąkowski  
prof. dr B. Paczyński  
prof. dr Z. Pawlak  
prof. dr A. Piekara  
doc. dr S. Ruciński  
prof. dr K. Rudnicki  
prof. dr Z. Semadeni  
doc. dr G. Sitowski

prof. dr J. Smak  
prof. dr J. Stankowski  
doc. dr K. Stępień  
prof. dr M. Subotowicz  
doc. dr S. Turnau  
prof. dr J. Wdowczyk  
doc. dr A. Woszczyk  
prof. dr Janusz Zakrzewski —  
wiceprzewodniczący  
prof. dr Wojciech Żakowski —  
przewodniczący

Redaguje Kolegium w składzie:  
doc. dr T. Hofmokl — z-ca red. nac.  
B. Jaworska-Kordos — ilustracje  
dr M. Kordos — red. nac.  
dr M. Szurek  
dr K. Prażmowski — red. techn. graf.  
mgr K. Szypcio — sekr. red.,  
doc. dr M. Świącki

Adres Redakcji  
ul. Hoża 69 pok. 151,  
00-681 Warszawa  
Zakład Narodowy im.  
Ossolińskich — Wydawnictwo  
Wrocław, Oddział w Warszawie  
Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.  
wyd.; 2,50 ark. druk.;  
papier offsetowy III kl. 80 g. 61×86  
Wydrukowano w Drukarni im.  
Rewolucji Październikowej  
Warszawa, ul. Mińska 65  
Nr zam 607/79 C-35

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60,— cena prenumeraty półrocznej zł 30 —

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach:  
— do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i cały rok następny  
— do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego.  
Jednostki gospodarki społecznej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienie w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”.  
Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW, oraz prenumeratorki indywidualni zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.  
Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej

**Sprzedż numerów bieżących i uprzednich**

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.  
Sprzedż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.  
Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Konto PKO I OM W-wa 1531-912

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław  
w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa  
w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7 00-068 Warszawa, Poland or with  
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland.  
— Earls Court Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain,  
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia

Cena 1 egzemplarza zł 5— nr indeksu 35723/35550

# Jeśli liczby całkowite położyć na zbiorze Cantora...

Prof. dr Jerzy MIODUSZEWSKI

Aby dodać dwie liczby naturalne zapisane w układzie dwójkowym, np.  $0+0 \cdot 2+1 \cdot 2^2+1 \cdot 2^3$  i  $1+1 \cdot 2+1 \cdot 2^2$ , podpisujemy ich symboliczne zapisy jeden pod drugim i dodajemy tak, jak to robimy na co dzień (kierunek zapisu zależy od przyzwyczajień):

$$\begin{array}{r} 0011 \\ 111 \\ \hline 11001 \end{array}$$

Wynik oznacza liczbę  $1+1 \cdot 2+0 \cdot 2^2+0 \cdot 2^3+1 \cdot 2^4$ . To formalne dodawanie zgadza się z dodawaniem prawdziwym: dodawaliśmy 12 i 7 i dostaliśmy 19.

Wyrażenia nieskończone  $x_0+x_1 \cdot 2+x_2 \cdot 2^2+\dots$  nie są już liczbami, ale dodawać je można: jak poprzednio, ich symboliczne zapisy  $x = x_0x_1x_2\dots$  podpisujemy jeden pod drugim dodając na każdym miejscu tak, że jeśli np. mielibyśmy dostać 2, to piszemy na tym miejscu 0, pamiętając o dodaniu na następnym miejscu 1.

To dodawanie (przemienne) czyni ze zbioru liczb dwójkowych, bo tak nazwiemy rozpatrywane wyrażenia, grupę; element  $0 = 000\dots$  jest neutralny przy tym dodawaniu.

O matematykach mówią, że biorą zbiór, na nim działanie, sprawdzają, że to jest grupa, a potem się cieszą. Ta uszczypliwość może dotyczyć zamieszczonego wyżej fragmentu: fakt, że liczby dwójkowe tworzą grupę, mógłby być zatajony bez szkody dla rozumienia dalszego ciągu. Aby uniknąć zarzutów, autor postara się ten fakt wykorzystywać.

\*

Zbiór liczb dwójkowych można zobaczyć na prostej, przypisując liczbie dwójkowej  $x_0x_1x_2\dots$  liczbę rzeczywistą  $2x_0/3+2x_1/3^2+2x_2/3^3+\dots$ . Liczby te mieszczą się na odcinku  $[0, 1]$  prostej: najmniejszą jest 0, a największą jest  $2/3+2/3^2+2/3^3+\dots = 1$ . W licznikach ułamków brak jest jedynek (są tylko zera i dwójki). Brak jedynki przy  $1/3$  znaczy brak liczb z przedziału  $(1/3, 2/3)$ ; brak jedynki przy  $1/3^2$  znaczy brak liczb z przedziałów  $(1/3^2, 2/3^2)$  i  $(7/3^2, 8/3^2)$ . Rozpatrywane liczby tworzą więc (być może dobrze znany) zbiór Cantora, który stanowi pozostałość odcinka  $[0, 1]$  po usunięciu przedziałów, które zaczęliśmy wypisywać, a których brak (oraz brak czwórek następnych) pokazany jest na rysunku.

Przedziały dopełniające zbiór Cantora do odcinka  $[0, 1]$  ważne są jedynie dla pogłębienia. Naprawdę ważne jest to, co po usunięciu tych przedziałów zostaje. Po usunięciu przedziału  $(1/3, 2/3)$  zostają dwie porcje składające się, jedna, z liczb dwójkowych  $0x_1x_2\dots$  i, druga, z liczb dwójkowych  $1x_1x_2\dots$ . Po usunięciu dwu następnych przedziałów zostają cztery porcje, każda złożona z liczb dwójkowych  $00x_2x_3\dots$ ,  $01x_2x_3\dots$ ,  $10x_2x_3\dots$  i (czwarta) z liczb  $11x_2x_3\dots$ . Ogólnie, porcja  $n$ -tego rzędu to zbiór liczb dwójkowych  $a_0\dots a_{n-1}x_nx_{n+1}\dots$ , gdzie pierwszych  $n$  cyfr jest ustalonych. Niech zapis  $a_0\dots a_{n-1}$  będzie symbolem porcji.

\*

Liczby naturalne to wielokrotności liczby dwójkowej  $e = 1000\dots$ . Oto zapisy dwójkowe kilku pierwszych z nich:

$$\begin{aligned} e &= 1000\dots \\ 2e &= 01000\dots \quad 3e = 1100\dots \\ 4e &= 001000\dots \quad 5e = 101000\dots \quad 6e = 011000\dots \quad 7e = 111000\dots \end{aligned}$$

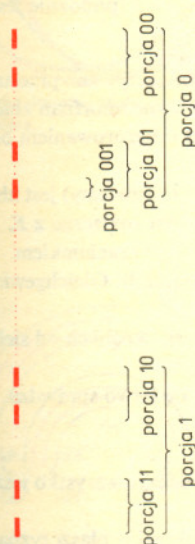
A oto liczby przeciwne do wypisanych wyżej:

$$\begin{aligned} -e &= 1111\dots \\ -2e &= 01111\dots \quad -3e = 10111\dots \\ -4e &= 001111\dots \quad -5e = 110111\dots \quad -6e = 010111\dots \quad -7e = 100111\dots \end{aligned}$$

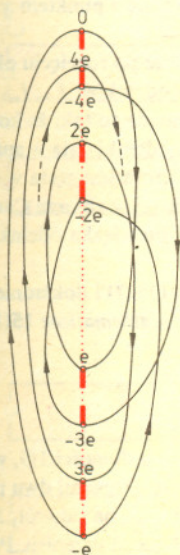
Dla obliczenia np. liczby dwójkowej  $-e$  szukaliśmy liczby dwójkowej  $x_0x_1x_2\dots$ , która dodana do  $e = 1000\dots$  dawałaby  $0000\dots$ . Dostaliśmy liczbę dwójkową  $1111\dots$ , która już nie jest liczbą w zwykłym sensie, mając w zapisie dowolnie daleko jedynki. Jeśli ktoś próbował odejmować na arytmometrze od zera jedynkę, dostając serię dziewiątek od końca, ten zdaje sobie sprawę z tego, co wyszło.

Liczby dwójkowe ze zbioru  $E = \{\dots -2e, -e, 0, e, 2e, \dots\}$  powstają kolejno jedna z drugiej przez dodawanie  $e$ , co się na przykładzie wypisanych liczb łatwo sprawdza, a co w ogólności wynika z faktu, że liczby dwójkowe tworzą grupę. Zbiór  $E$  jest więc orbitą punktu  $e$ , jak się mówi.

Przez przyporządkowanie  $n \rightarrow ne$ , liczby całkowite zostały położone na zbiorze Cantora z zachowaniem działań. Ale teraz ich położenie geometryczne niczym nie przypomina położenia liczb całkowitych na prostej. Na rysunku (obok) naniesione zostały położenia liczb dwójkowych ze zbioru  $E$  od  $-8e$  do  $7e$ ; strzałki pokazują przejścia do liczb następnej.



Zbiór Cantora.



Nanoszenie liczb dwójkowych na zbiór Cantora.

Podzbiór  $A$  przestrzeni metrycznej  $X$  nazywa się gęsty w  $X$ , gdy w każdym otoczeniu dowolnego punktu  $p \in X$  są punkty zbioru  $A$  (np. zbiór liczb wymiernych na prostej). Przestrzeń metryczna  $X$  jest spójna, gdy nie da się podzielić na dwa zbiory otwarte, niepuste i rozłączne. Przestrzeń metryczna  $X$  nazywa się zwartą, gdy każdy ciąg punktów tej przestrzeni zawiera podciąg zbieżny. Odcinek z końcami jest przestrzenią zwartą i spójną. Pojęcia te są dokładnie omawiane w każdej książce z elementami topologii (np. we wzmiankowej w końcu artykułu książce A. Lelka).

Nanoszenie liczb dwójkowych na odcinek objaśnijmy na przykładzie liczby  $3e = 11\ 000\dots$ : leży ona w porcji 11, na jej lewym końcu, mając w zapisie zera do końca. Orbita  $E$  jest równa zbiorowi wszystkich punktów skrajnych w porcjach, punkty  $n \cdot e$  są lewymi końcami porcji, jeśli  $n \geq 0$ ; są prawymi końcami porcji, jeśli  $n < 0$  (wtedy zamiast zer do końca występują jedyńki); nietrudny rachunek pokazuje, że wszystkie końce porcji będą wyczerpane przez liczby  $ne$ . Orbita  $E$  jest więc gęsta w zbiorze Cantora, mając punkty w każdej porcji, jakkolwiek małej.

Czy to ciekawe, że orbita pewnego punktu jest gęsta? Na okręgu, jeśli odkładać od zera stale kąt np. jednego radiana (a jest on niewspółmierny z kątem pełnym), to otrzymane punkty pokrywają gęsto okrąg (można spróbować dowieść tego samemu, albo zajrzeć do książki J. F. Koksmy, *Diophantische Approximationen*, Springer, Ergebnisse der Mathematik 4, 1936, str. 10). Czy więc podobna rzecz na zbiorze Cantora miałaby już nas nie interesować? Dodajmy, że do uzyskania orbity gęstej nie potrzebowaliśmy liczb niewymiernych.

\*

Za odległość liczb dwójkowych można przyjąć np. ich odległość jako punktów zbioru Cantora. Nie zmienimy istoty rzeczy, jeśli za odległość liczb dwójkowych przyjmijemy liczbę  $1/n$ , gdzie  $n$  jest numerem miejsca, na którym cyfry w zapisach tych liczb zaczynają się różnić w sposób istotny: za nieistotne uznajemy zaokrąglenia w rodzaju  $0, \dots 1001111111 \dots \sim 0, \dots 10100000 \dots$ . Dodawanie i przypisywanie elementowi elementu przeciwnego są operacjami ciągłymi: jeśli zmienimy składniki mniej niż o  $1/n$ , to suma zmieni się mniej niż o  $1/n - 1$  (podobnie jest dla operacji  $-$ ).

Mając element  $a$  w zbiorze Cantora, weźmy pod uwagę odwzorowanie, nazywane przesunięciem o  $a$ , przypisujące elementowi  $x$  zbioru Cantora element  $x + a$ . Jest to homeomorfizm zbioru Cantora na siebie: ciągłość była wyjaśniona, a przesunięcie o  $-a$  jest odwzorowaniem odwrotnym ciągłym w myśl poprzedniej uwagi.

Przesunięcie  $E + a$  zbioru  $E$  o  $a$  (tak ten zbiór przesunięty oznaczmy i nazwiemy) jest zbiorem homeomorficznym z  $E$ . Jeśli  $a \in E$ , to  $E + a = E$ . Jeśli  $a \notin E$ , to  $E + a$  jest rozłączne z  $E$ . Więcej, różne przesunięcia zbioru  $E$  są rozłączne. Sprawdza się to prostym rachunkiem robionym w każdym systematycznym wykładzie o grupach; np. w książce B. Gleichgewichta, *Algebra*, rozdział XII, twierdzenie 12.4.

Zbiory  $E + a$  są przeliczalne. Wszystkie razem pokrywają zbiór Cantora. Różnych od siebie przesunięć zbioru  $E$  jest więc continuum. Jeśli zbiór  $E + a$  przesunąć o  $e$ , to dostanie się znowu zbiór  $E + a$ , co się łatwo sprawdza.

\*

Z liczb dwójkowych zrobimy teraz użytek, co przy okazji pozwoli zobaczyć wszystko jeszcze raz inaczej i, być może, wyraźniej.

Przez punkty zbioru Cantora przeprowadźmy jednakowej wielkości okręgi w płaszczyznach prostopadłych do osi  $x$ -ów, na której zbiór Cantora leży, i mających środki na prostej równoległej do osi  $x$ -ów. Bardziej formalnie: utwórzmy produkt zbioru Cantora przez okrąg. Ale teraz rozetniemy tak powstałą wiązkę okręgów wzdłuż zbioru Cantora, który rozważamy. Na miejscu zbioru Cantora powstały dwa zbiory Cantora,  $C'$  i  $C''$ . Spróbujmy teraz skleić całą rzecz z powrotem, ale inaczej, a mianowicie tak, by punkt  $x$  na  $C'$  skleił się z punktem  $x + e$  na  $C''$ .

To, co powstało, nie jest już niespójną wiązką okręgów. Odcinki powstałe po rozcięciu okręgów, przechodzące przez punkty orbity  $E$  punktu  $e$ , połączyły się w łańcuch odcinków  $\{\dots L_{-2}, L_{-1}, I_0, I_1, I_2, \dots\}$ : jeśli odcinkom wiązki nadać zwrot od  $C'$  do  $C''$ , to wygląda to tak, że koniec  $ne$  odcinka  $I_n$  skleił się z początkiem  $(n + 1)e$  odcinka  $I_{n+1}$ . Wspomniane odcinki dają w sumie linię, która jest obrazem ciągłym i wzajemnie jednoznaczny prostej i która jest gęsta w całości, bo powstaje z sumy okręgów przechodzących przez punkty orbity  $E$ , gęstej w zbiorze Cantora. Całość, zawierając podzbiór gęsty i spójny, jest spójna. Jest też zwarta, bo wiązka odcinków, z której powstała, była zwarta. Całość jest więc continuum.

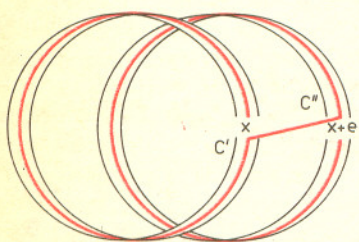
Kontinuum to nazywane jest solenoidem. Było odkryte przez Vietorisa (1927) i dokładnie zbadane przez van Dantzigą (*Über topologisch homogene Kontinua, Fundamenta Mathematicae 15(1930), str. 104-125*).

\*

Opis solenoidu można bardziej unaościć. W pierwszym przybliżeniu, zbiór Cantora to dwa odcinki rozłączne, oba o długości  $1/3$ , w których leżą porcje pierwszego rzędu. Pierwsze przybliżenie solenoidu to sklejenie brzegami dwu pasm nad tymi odcinkami. Przy przesunięciu o  $e$  porcja 0 przechodzi na porcję 1 i na odwrót. Rysunek dalej przedstawia sklejenie pasm pierwszego rzędu według tego przybliżonego przepisu. Przy sklejanu, mając pasma położone tak, że miałyby się zwinąć na powierzchnię walca, przekładamy je miejscami, właśnie tak jak na rysunku. Jednakże po takim sklejeniu pasma drugiego rzędu nie skleją się w sposób odpowiadający sklejanu się porcji drugiego rzędu: porcja 00 ma przejść

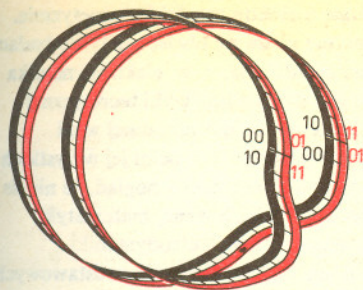


$C$  i  $C'$  są przeciwległymi tworzącymi „powierzchni walcowej” powstałej w opisany obok sposób.

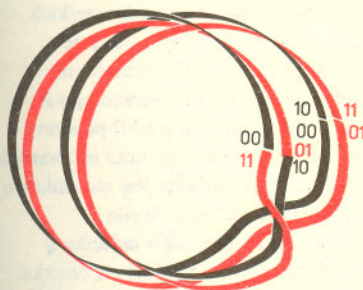


Igła gramofonowa, biegnąc po rowku dochodzącym do  $x$ , przeskakuje na rowek wychodzący z  $x + e$ .

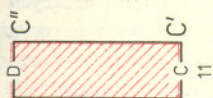
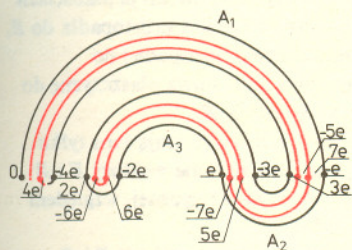
Solenoid = zwojnica. Termin „kontinuum” oznacza tu przestrzeń metryczną zwartą i spójną. „Continuum” to tzw. liczba kardynalna, wyrażająca ilość wszystkich liczb rzeczywistych.



Pasma pierwszego rzędu dają w sumie wstęgę spójną (zakreskowana). Pasma drugiego rzędu dają w sumie dwie wstęgi (czarna i czerwona)



Teraz pasma drugiego rzędu dają w sumie wstęgę spójną.



Inny opis połączeń pasm drugiego rzędu (sklej paski, doklejając A do A, B do B itd.).

na porcję 10, porcję 10 na porcję 01, porcja 01 na porcję 11, a porcja 11 znów na porcję 00. Aby uczynić zadość tym warunkom, wystarczy na jednym ze sklejeń przełożyć miejscami pasma tak, aby 11 przeszło na 00, tak jak na rysunku niżej. Otrzymujemy znowu wstęgę spójną. W przekroju wszystkich budowanych kolejno wstęg dostaje się linie. Mogły one równie dobrze powstać jako przekrój kabli (torusów) biegnących tak samo, jak przedtem wstęgi. Można by pomyśleć, że po tych kablach płynie wkóło prąd.

W interpretacjach fizycznych nie warto iść za daleko: jeśli chcielibyśmy pomyśleć, że i po liniach solenoidu płynie prąd, to stwierdzilibyśmy, że jego strumień rozpadł się na continuum części (mimo że w przybliżeniach był zawsze tylko jeden strumień). Jedną z tych części to linia, o której była już mowa, powstała z odcinków przechodzących przez punkty orbity  $E$ . Resztę linii dostaniemy przesuując orbitę  $E$  (Pamiętamy, że zbiory  $E+a$  przechodzą każdy na siebie przy przesunięciu o  $e$ ). To zapewnia sklejanie się ze sobą dwu egzemplarzy zbioru  $E+a$ , jednego na  $C'$  i drugiego na  $C''$ , i połączenia się wszystkich odcinków przechodzących przez punkty zbioru  $E+a$  w jedną linię, taką samą jak ta, która przechodzi przez punkty zbioru  $E$ .

Paradoks z rozpadem strumienia prądu jest, jak wiele tzw. paradoksów nieskończoności, pozorny: dotyczy nie zjawiska powstał, lecz wyobrażeń, które w sytuacjach granicznych przestają pełnić swoją poprzednią rolę.

\*

Każde continuum zawarte w solenoidzie, różne od całości, jest odcinkiem jednej z continuum linii, na które rozpada się solenoid; wydaje się to na tyle widocznym (czyżby?), żeby opuścić dowód (wątpliwości te można pogłębić: jeśli by w przeprowadzonej konstrukcji posłużyć się nie zbiorem Cantora, lecz okręgiem, na którym obrót o jeden radian spełniałby rolę przesunięcia o  $e$ , to dostalibyśmy również continuum linii rozłącznych, które wszakże dają w sumie powierzchnię torusa, i wypowiedziane zdanie przestaje być prawdziwe). Taki odcinek jest położony w sumie skończonej ilości odcinków wiązki odcinków przechodzących przez punkty zbioru Cantora, z której solenoid powstał. Jest więc rzadki w solenoidzie (bo wspomniana suma skończona jest rzadka w wiązce; rzadka — znaczy nigdzie (nie) gęsta). Continua takie, że continua w nich zawarte, różne od całości, są zawsze rzadkie, nazywane są nierozkładalnymi. Nazwa bierze się stąd, że nie można przedstawić takiego continuum jako sumy dwu kontinuumów różnych od całości; nie można, bo suma dwu zbiorów rzadkich jest zbiorem rzadkim. Solenoid jest właśnie takim continuum nierozkładalnym.

\*

A oto inne continuum nierozkładalne, którego konstrukcja może być podpowiedziana przez budowę zbioru liczb dwójkowych, jeśli przyjrzeć się wzajemnemu położeniu liczb dwójkowych  $x$  i  $-x$ .

Mając na uwadze kolejność  $0, -e, e, -2e, 2e, \dots$  punktów orbity  $E$ , połączmy punkty  $0$  i  $-e$  górą półokręgiem, punkty  $-e$  i  $e$  dołem półokręgiem, a potem znów górą półokręgiem punkty  $e$  i  $-2e$ , i podobnie dalsze, jak na rysunku. Dostaniemy łańcuch łuków,  $A_1, A_2, A_3, \dots$  (p. rysunek obok), których suma jest obrazem ciągłym i wzajemnie jednoznaczny półprostej  $[0, \infty)$ . Rozszerzmy ten sposób łączenia półokręgami dołem na wszystkie pary złożone z punktów  $x$  i  $-x$ , i półokręgami górą na wszystkie pary złożone z punktów  $x$  i  $-(x+e)$ , symetrycznych względem środka zbioru Cantora. Powstaje continuum nierozkładalne, którego opis tu podany pochodzi od Bronisława Knastera.

\*

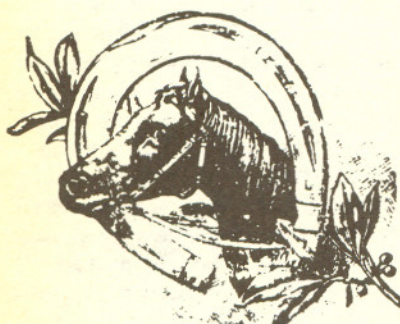
Trudno było tu powiedzieć wiele o liczbach dwójkowych, o solenoidzie, czy też o opisanym tu continuum Knastera. Liczby dwójkowe to inaczej liczby 2-adyczne, szczególny przypadek liczb  $p$ -adycznych (p. artykuł Krystyny Wojtków, Delta nr 9/1978; systematyczny wykład można znaleźć w książce W. Narkiewicza, *Teoria liczb*, Biblioteka Matematyczna 50, PWN, Warszawa 1977, na str. 327–339). Pokazaliśmy z grubsza, jak zobaczyć liczby  $p$ -adyczne. Przypadek  $p = 2$  oddaje w dużym stopniu istotę rzeczy. Dodajmy jednak, że była tu mowa jedynie o tzw. liczbach 2-adycznych całkowitych (rozwinęcia rozciągają się w jedną stronę, a można by pomyśleć, że w obie).

Najlepszą początkową lekturą na temat kontinuumów nierozkładalnych jest odpowiedni rozdział (str. 82–96) książki A. Lelka, *Zbiory*, Biblioteczka Matematyczna 26, PZWS, Warszawa 1966. Solenoid jest grupą, czego nie zobaczyliśmy, ale od czego nie byliśmy daleko (p. książka D. Montgomery'ego i L. Zippina, *Topological transformation groups*, New York 1955, str. 66; na str. 48 jest tam mowa o liczbach dwójkowych).

Kontinuum Knastera powstaje z solenoidu przez utożsamienie punktów  $p$  i  $-p$ , gdzie  $-p$  oznacza element przeciwny do  $p$  w solenoidzie jako grupie. Continuum to, poza obrazem półprostej, składa się z continuum linii, które są obrazami ciągłymi i wzajemnie jednoznacznie całej prostej. Nie wiadomo, czy wszystkie te pozostałe linie są homeomorficzne, chociaż David Bellamy (którego praca sprzed kilku lat, nie opublikowana, inspirowała autora do napisania tego artykułu) dowiódł homeomorficzności niektórych z nich.

# Podstawowe prawa elektrodynamiki

Doc. dr Andrzej SZYMACHA



W programie szkolnym bardzo dużo uwagi poświęca się nauce o elektryczności i magnetyzmie. Jest to zrozumiałe. Bez znajomości praw elektromagnetyzmu nie może się obejść nie tylko badacz czy inżynier, ale wręcz żaden człowiek otoczony współczesną cywilizacją. Tzw. elektrodynamika klasyczna (to znaczy nie rozpatrująca zjawisk kwantowych) jest dyscypliną fizyki teoretycznej ukształtowaną w niemal ostatecznej postaci już ponad 100 lat temu. Mimo ogromnej wagi elektrodynamiki oraz jej „klasycyzmu”, w szkole średniej nie wyklada się w pełni jej wszystkich fundamentalnych praw w sformułowaniu ilościowym. Panuje dość powszechny pogląd, że nie da się tego zrobić bez nadmiernie — ponad możliwości programu — rozbudowanej matematyki. Oczywiście, bez zaawansowanej matematyki nie da się korzystać z praw elektrodynamiki w większości jej zastosowań do konkretnych problemów, ale samo sformułowanie podstawowych praw i ich zrozumienie jest w pełni możliwe przy użyciu niezbyt skomplikowanych pojęć matematycznych.

Obraz świata materialnego wytworzony przez elektrodynamikę klasyczną jest taki, że przestrzeń wypełniona jest poruszającymi się cząstkami (z których przynajmniej pewne są obdarzone cechą zwaną ładunkiem elektrycznym) oraz polem elektromagnetycznym. Abstrahując od wszelkich subtelności filozoficznych (oraz od efektów kwantowych) powiemy, że w każdym punkcie przestrzeni, w każdej chwili czasu określone jest pole elektromagnetyczne, jeśli wyznaczymy bądź teoretycznie, bądź drogą pomiarów, wartości dwóch wektorów — pola elektrycznego  $E$  i tzw. indukcji magnetycznej  $B$ . Prawa elektrodynamiki (wraz z prawami mechaniki) powinny określić, jak zależy pole od rozmieszczenia i stanu ruchu cząstek naładowanych, oraz jak wartość pola wpływa na ruch cząstek znajdujących się w tym polu. Druga część zadania jest stosunkowo prosta. Z mechaniki wiemy, że pochodna pędu cząstki względem czasu równa się sile działającej na tę cząstkę. Należy więc określić postać siły działającej na cząstkę o ładunku  $q$  w zależności od pól  $E$  i  $B$  w punkcie przestrzeni, w którym w danej chwili znajduje się cząstka. Ostateczny wzór na siłę w polu elektromagnetycznym został podany przez Lorentza w postaci

$$F = qE + qv \times B,$$

gdzie  $q$  jest ładunkiem, a  $v$  prędkością cząstki. Wzór ten może służyć do pomiaru pól  $E$  i  $B$  w danym punkcie. Wystarczy zmierzyć siłę działającą na spoczywający ładunek, by po podzieleniu przez  $q$  mieć wartość pola elektrycznego. Kierunek  $E$  pokrywa się z kierunkiem siły, wystarczy więc jeden pomiar. Następnie mierzymy dodatkową siłę pojawiającą się po nadaniu cząstce prędkości  $v$ . W celu wyznaczenia  $B$  potrzeba znaleźć siłę przy co najmniej dwóch prędkościach o różnych kierunkach. Ponieważ siła pochodząca od pola magnetycznego jest prostopadła do  $B$ , to po pierwszym pomiarze siły, wiemy, że  $B$  musi leżeć w płaszczyźnie prostopadłej do wyznaczonej siły. Przy innym kierunku prędkości znajdujemy nową siłę i nową płaszczyznę do niej prostopadłą. Krawędź przecięcia tych płaszczyzn wyznacza kierunek  $B$ .

Ponieważ w określeniu  $E$  i  $B$  występuje pojęcie spoczynku i prędkości, które mają sens tylko wtedy, gdy wskażemy jakiś inercjalny układ odniesienia, to jasne jest, że same wektory  $E$  i  $B$  mają sens też tylko po ustaleniu układu odniesienia. W tej samej sytuacji fizycznej, względem innego układu odniesienia, wartości  $E'$  i  $B'$  są na ogół różne od  $E$  i  $B$ .

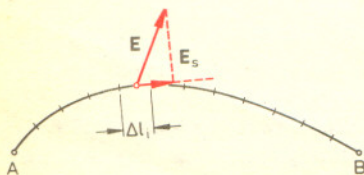
Wzoru na siłę Lorentza nie wolno oczywiście traktować wyłącznie jako definicji pól  $E$  i  $B$ . Np. to, że siła magnetyczna w danej chwili, w danym punkcie przestrzeni jest wprost proporcjonalna do wartości prędkości, jest prawem przyrody, a nie konsekwencją definicji. Natomiast współczynniki liczbowe w tym wzorze zależą od wyboru jednostek. Podany wzór obowiązuje w układzie SI.

Pozostaje teraz określić, jak pola  $E$  i  $B$  zależą od położenia i prędkości ładunków będących źródłami tych pól. Ze względów dydaktycznych, a także wzorując się na rozwoju historycznym elektrodynamiki zadanie to rozwiązuje się w trzech etapach: 1. pole elektryczne wytworzone przez spoczywające ładunki, 2. pole magnetyczne wytworzone przez stacjonarne (to znaczy stałe w czasie) prądy i wreszcie 3. w najogólniejszym przypadku, kiedy wszystko jest zmienne w czasie. Postać pola  $E$  wytworzonego przez spoczywające ładunki ustala znane prawo Coulomba wraz z tzw. zasadą superpozycji mówiącą, że pole wytworzone przez wiele ładunków punktowych jest wektorową sumą pól, jakie wytworzyłby w danym punkcie każdy z ładunków. Jednakże sformułowanie podstawowego prawa elektrostatyki w postaci prawa Coulomba

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \frac{r}{r}$$

nie jest jedynym możliwym. Do uogólnień na przypadki pola zmiennego w czasie oraz jako wzorec służący do sformułowania podstawowego prawa magnetyzmu o wiele przydatniejsza jest inna postać tego samego prawa. Po to by ją podać, musimy posłużyć się dwoma ważnymi pojęciami krążenia (cyrkulacji) i strumienia. Do pojęcia krążenia po pewnej zamkniętej krzywej najłatwiej dojść rozpatrując pracę pola elektrycznego. Ponieważ wzdłuż dowolnej krzywej pole  $E$  jest na ogół coraz to inne, i coraz inny kąt tworzy z krzywą, musimy w celu obliczenia pracy podzielić rozpatrywaną krzywą na wiele (w granicy nieskończenie wiele) fragmentów. Przy odpowiednio drobnym podziale, pracę na każdym z odcinków możemy obliczyć jako iloczyn długości tego odcinka przez składową styczną siły  $\Delta l_i = \Delta l_i \cdot qE_s$  (na  $i$ -tym odcinku),

a pracę całkowitą jako sumę tych prac  $L_{AB} = q \sum_A^B \Delta l_i \cdot E_s(i)$ .



Interesująca jest wartość tej pracy przypadająca na jednostkowy ładunek

$$\frac{L_{AB}}{q} = \sum_A^B \Delta l_i \cdot E_S(i).$$

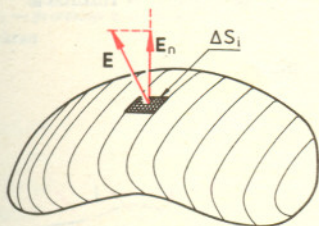
Korzystając z prawa Coulomba można obliczyć tę wartość dla pola wytworzonego przez ładunek  $Q$ , a w szczególności wykazać, że jeśli punkty  $A$  i  $B$  się pokrywają (krzywa jest zamknięta), to całkowita praca wynosi zero. Ze względu na zasadę superpozycji jest to słuszne i dla pola będącego sumą pól od dowolnej liczby ładunków punktowych.

$$0 = \sum_{\substack{\text{wzdłuż} \\ \text{zamkniętej} \\ \text{krzywej}}} \Delta l_i \cdot E_S(i).$$

Wartość powyższej sumy dla dowolnego pola nazywa się właśnie krążeniem tego pola wzdłuż danej zamkniętej krzywej. Dla pola elektrostatycznego

$$\text{Krążenie pola } E = 0 \text{ (po dowolnej krzywej zamkniętej)}$$

Pojęcie strumienia pola określa się dla dowolnej powierzchni rozpiętej na pewnym konturze. Powierzchnię dzielimy na wiele małych fragmentów (w przybliżeniu płaskich) i określamy strumień dla takiego fragmentu jako iloczyn składowej pola w kierunku prostopadłym do tego fragmentu,  $E_n$ , przez pole powierzchni fragmentu  $\Delta S_i$ .



Strumień całkowity 
$$\Phi = \sum_i \Delta S_i \cdot E_n(i).$$

Łatwo obliczyć taki strumień dla pola elektrycznego ładunku punktowego przez powierzchnię kuli o środku pokrywającym się z ładunkiem. W tym przypadku  $E_n = E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ , gdzie  $R$  — stały promień kuli.

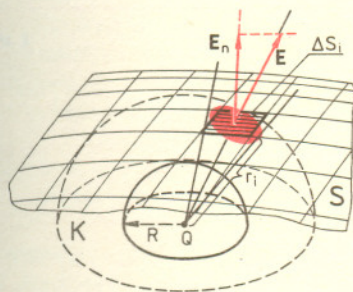
$$\Phi = \sum_i \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cdot \Delta S_i = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sum_i \Delta S_i.$$

Ale  $\sum_i \Delta S_i = 4\pi R^2$  jest całkowitą powierzchnią kuli. Zatem

$$\Phi(\text{kuli}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cdot 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Można wykazać, że wynik ten słuszny jest nie tylko dla kuli, ale dla dowolnej powierzchni otaczającej ładunek  $Q$ , niezależnie od wielkości i kształtu powierzchni.

Rozważmy ładunek  $Q$ , koncentryczną z nim kulę  $K$  i dowolną powierzchnię  $S$ . Podzielmy  $S$  na fragmenty i poprowadźmy stożek odpowiadający danemu fragmentowi  $\Delta S_i$ . Oznaczmy przez  $\alpha_i$  kąt między kierunkiem  $E$  a prostopadłą do fragmentu  $\Delta S_i$ . I wreszcie narysujmy rzut płaska  $\Delta S_i$  na płaszczyznę prostopadłą do  $E$ . Możemy sobie wyobrazić, że rzut ten o polu  $\Delta S_i \cdot \cos \alpha_i$  leży na powierzchni pewnej kuli o promieniu  $r_i$ . Stożek nasz na powierzchni kuli o promieniu  $R$  odcina pewien płatek  $\Delta s_i$ , przy czym zachodzi



$$\frac{\Delta S_i \cdot \cos \alpha_i}{\Delta S_i} = \frac{r_i^2}{R^2} \Rightarrow \Delta S_i \cos \alpha_i = \frac{\Delta s_i}{R^2} r_i^2.$$

Strumień pola przez  $\Delta S_i$  wynosi

$$\Delta \Phi_i = \Delta S_i \cdot E_n(i) = \Delta S_i \cdot E(r_i) \cos \alpha_i = E(r_i) \cdot \frac{\Delta s_i}{R^2} r_i^2.$$

Z prawa Coulomba

$$E(r_i) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_i^2}, \quad \text{zatem}$$

$$\Delta \Phi_i = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \frac{\Delta s_i}{R^2} r_i^2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta s_i}{R^2}.$$

Strumień ten jest identyczny ze strumieniem pola przez fragment  $\Delta s_i$  kuli o promieniu  $R$ . Zatem po zsumowaniu istotnie dostajemy

$$\Phi_{\text{całkowite}} (\text{przez } S) = \sum_i \Delta \Phi_i = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Istotną rolę w tym wyprowadzeniu odgrywa zależność pola  $E$  od odwrotności kwadratu długości. Mówiąc poglądowo, wzrost powierzchni fragmentu na  $S$  kompensowany jest zmniejszeniem wartości pola o ten sam czynnik. Podobnie pochylenie fragmentu  $\Delta S_i$  w stosunku do  $R$  zwiększa jego powierzchnię przy danym kącie bryłowym, ale tyleż razy zmniejsza składową normalną  $E$ . W efekcie iloczyn powierzchni i składowej normalnej pola nie ulega zmianie przy ustalonym wąskim stożku (kącie bryłowym). W podobny sposób wykazuje się, że strumień

przez powierzchnię leżącą całkowicie na zewnątrz ładunku wynosi 0. Dzięki zasadzie superpozycji wynik słuszny jest też dla wielu ładunków

$$\Phi \left( \begin{array}{l} \text{przez dowolną zam-} \\ \text{kniętą powierzchnię} \end{array} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \text{Suma ładunków obejmowanych przez tę powierzchnię}$$

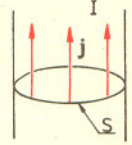
$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{całkowite}}$$

Dwa podane prawa ujęte w ramkę są równoważne prawu Coulomba i zasadzie superpozycji. W celu sformułowania praw magnetyzmu trzeba wprowadzić gęstość prądu. Jeśli prąd  $I$  płynie „równomiernie” wzdłuż przewodu o przekroju  $S$ , to wektorem gęstości prądu nazywamy

$$j = \frac{I}{S},$$

skąd

$$I = jS.$$



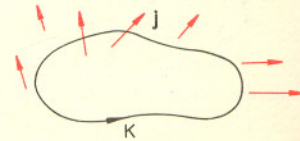
Jeśli rozkład jest nierównomierny, to gęstość prądu określamy dla małego fragmentu przewodu tak, by ładunek przepływający na sekundę przez ten fragment wynosił  $j_n \Delta S_n$ . W rezultacie całkowite natężenie prądu płynącego przez duży płat wynosi

$$I = \text{Strumień } j \text{ (przez ten płat)}$$

A oto podstawowe prawa magnetyzmu

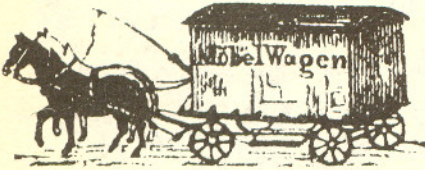
$$\text{Strumień } B \text{ (przez dowolną zamkniętą powierzchnię)} = 0$$

$$\text{Krążenie } B \text{ (wzdłuż konturu } K) = \mu_0 \times \text{Strumień } j \text{ (przez płat rozpięty na } K)$$



Pierwsze z powyższych praw nazywa się często prawem niewystępowania „ładunków” magnetycznych, drugie nazywa się prawem Ampere’a. Podstawą tych praw są oczywiście badania eksperymentalne. Analogiczne prawa elektrostatyki robią wrażenie udowodnionych, a to dlatego, że istnieje inne równoważne, wcześniej odkryte sformułowanie Coulomba, wzięte wprost z doświadczenia. Nie zmienia to jednak istoty rzeczy.

Cztery podane w ramach prawa są podsumowaniem badań doświadczalnych dotyczących niezależnych od czasu pól elektrycznych i magnetycznych. Polami zależnymi od czasu zajmiemy się w następnym artykule.



## Laboratorium w domu

### Do czego mogą służyć żyłki, czyli rzecz o interferencji

Mgr Andrzej GOŁĘBIEWSKI

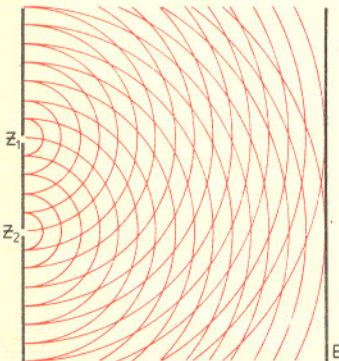
#### NIECO TEORII

Światło ma naturę falową. Takie kategoryczne stwierdzenie musi wywołać odruch niewiary w każdym wnikliwym umyśle.

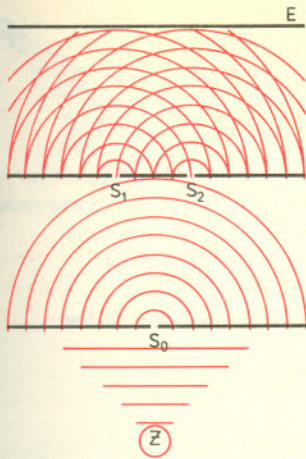
Bo jakie są dowody?

Żeby rozwiązać Wasze wątpliwości, proponuję powtórzyć doświadczenie, które w 1807 roku opisał Tomasz Young. Wykazał on wówczas, że światło wywołuje takie same efekty, jak fale mechaniczne obserwowane na przykład na wodzie. Chodzi mianowicie o zjawisko interferencji, której mechanizm krótko przypomnę.

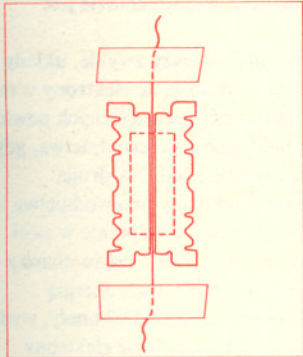
Jeżeli dwa ciągi fal pochodzące z dwóch różnych źródeł punktowych  $Z_1$  i  $Z_2$  na rys. 1 spotykają się, to w pewnych miejscach następuje wzmocnienie a w innych wygaszenie ich amplitud. Miejsca



Rys. 1



Rys. 2  
 Z — źródło rozciągłe  
 $S_0$  — szczelina oświetlająca  
 $S_1, S_2$  — przesłona z dwiema szczelinami  
 E — ekran



Rys. 3

te nazywamy odpowiednio maksimami, gdy spotykają się dwa grzbiety, i minimami, gdy spotyka się grzbiet z doliną. Regularny rozkład maksimów i minimów wzdłuż przesłony-ekranu (E) nosi nazwę obrazu interferencyjnego. Widzimy wówczas serię powtarzających się ciemnych i jasnych prążków.

Warunkiem powstania takiego obrazu jest spójność obu ciągów fal, to znaczy zgodność w każdej chwili czasu różnicy faz wynikającej z różnicy dróg. Innymi słowy, jeżeli chcemy, aby interferencje powtarzały się zawsze w tych samych miejscach, to odstęp czasu między nadejściami jednej i drugiej grupy fal muszą być zawsze takie same.

Stosując dwa źródła, nawet punktowe, nie spełnimy powyższego warunku, gdyż wysyłają one niezależne ciągi fal. Zresztą optyka nie dysponuje punktowymi źródłami światła. Źródła są zawsze rozciągłe, składają się z wielu mikroźródeł.

Dodatkowo sytuację komplikuje fakt, że w warunkach domowych nie możecie stosować światła monochromatycznego, czyli o jednej tylko długości fali, i zdani jesteście na światło białe zawierające fale o różnych długościach. W obrazie interferencyjnym prążki są wówczas barwne a liczba ich jest niewielka.

Czy w takim razie nie należy zrezygnować z doświadczenia?

## PORA NA ŻYLETKI

Aby spełnić warunek spójności można posłużyć się specjalną szczeliną oświetlającą. Popatrzcie na rys. 2. W przedstawionym układzie rolę źródła światła spójnego spełnia szczelina  $S_0$  wydzielająca wąską wiązkę światła. Szczeliny  $S_1$  i  $S_2$  są tym bardziej źródłami spójnymi. Właśnie do wykonania tych szczelin potrzebne Wam będą żyłetki przelamane wzdłuż dłuższej osi. W grubym kartonie lub tekturze o wymiarach  $150 \times 80$  mm wytnijcie w środku otwór  $20 \times 10$  mm. Połówkę żyłetki przyklejcie do kartonu używając taśmy samoklejącej tak, aby zakrywała otwór do połowy i ostrzem była zwrócona ku środkowi. Tak samo postąpcie z drugą połówką, pozostawiając między ostrzami szczelinę o szerokości około 0,1 mm. Dla ustalenia tego ostatniego wymiaru można posłużyć się inną żyłetką wsuwając ją między krawędzie przyklejanych połówek. Od tej chwili jesteście posiadaczami szczeliny oświetlającej.

Potrzebna jest teraz przesłona z dwiema szczelinami. Jej wykonanie jest bardziej skomplikowane. Należy wyciąć jeszcze jeden kartonik i sporządzić jeszcze jedną szczelinę oświetlającą, taką jak opisana wyżej. Przez jej środek trzeba przeprowadzić równoległe do krawędzi żyłetek cienki drucik miedziany o grubości około 0,05 mm lub po prostu włos, który po naciągnięciu musi być przyklejony. Włos dzieli szczelinę wzdłuż na dwie części. Ta operacja wymaga pewnej zręczności i cierpliwości. Do kontroli równoległego ustawienia krawędzi żyłetek i włosa przydatna jest lupa. Przygotowanie szczelin przedstawia rys. 3.

## I WRESZCIE DOŚWIADCZENIE

Schemat rozmieszczenia części składowych układu doświadczalnego przedstawia rys. 4.

Jako źródła światła Z najlepiej użyć rzutnika do przezroczy lub innej odpowiednio silnej lampy naświetlającej. Jeżeli nie jest to możliwe, musi wystarczyć zwykła lampa biurowa z żarówką 100–150 W, na którą nakładamy stożek z nieprzezroczystego kartonu wierzchołkiem w kierunku szczelin. Wierzchołek obcinamy tak, aby powstał otwór o średnicy około 10 mm. Źródło światła, szczelina oświetlająca  $S_0$  i przesłona z dwiema szczelinami S powinny znajdować się na jednakowej wysokości mierząc od stołu, na którym je ustawiamy. Jako podstawek możecie użyć na przykład kostek styropianu z nacięciami zrobionymi piłką do metalu. Wiązka światła powinna biec od źródła przez szczeliny wzdłuż linii prostej. Odległość między częściami zestawu należy dobrać doświadczalnie.

Arkusze kartonu z bloku technicznego może stanowić ekran E. Jeżeli układ będzie dobrze ustawiony, zobaczycie na nim kilka jednakowej jasności prążków interferencyjnych. Znacznie lepiej jest zastosować jako ekran matową szybę. Obserwacje przeprowadza się wówczas patrząc w stronę źródła światła.

## UWAGI KOŃCOWE

Jestem pewien, że wszyscy, którzy podjęli trud przygotowania i przeprowadzenia eksperymentu, spokojnie spojrzą na pierwsze zdanie niniejszego artykułu.

Nie spoczywajcie jednak na laurach!

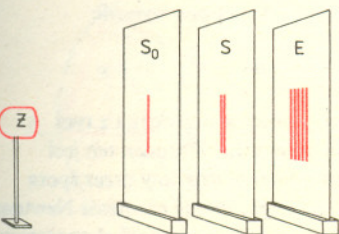
Proponuję rozszerzyć wiadomości z tego zakresu.

A oto problemy do rozgrzyzenia:

1. Ustawcie na drodze promieni biegnących w zestawie filtr barwny np. od aparatu fotograficznego lub powiększalnika. Jakie widzicie zmiany w widmie? Jak wyjaśnić to zjawisko!
2. Wykonajcie jeszcze jedną szczelinę oświetlającą. Ustawcie ją w miejscu przesłony z dwiema szczelinami. Zobaczycie na ekranie tzw. obraz dyfrakcyjny. Czym różni się on od obrazu interferencyjnego? Obserwacji można także dokonać patrząc przez szczelinę w kierunku źródła światła.
3. Dlaczego w doświadczeniu szerokość szczelin musi być taka mała?
4. Czy światło wywołuje zjawiska charakterystyczne tylko dla fal?

Sięgnijcie do literatury!

Życzę powodzenia.



Rys. 4



Dr Marek CIEPLAK



1. W poprzednim artykule (Delta 5/1979) zorientowaliśmy się, z jakim aparatem pojęciowym zabiera się fizyk-statystyk do kontemplowania wody w stawie. Dumać również można nad ruchem kawałków liści naparzonej herbaty. Działalność taką prowadził Einstein, co zaowocowało w postaci statystycznej teorii ruchów Browna, sformułowanej niezależnie także przez Smoluchowskiego.

2. Statystyczną analizę układów wielu cząstek dobrze jest rozpocząć od badania układów najprostszych, a więc takich, dla których

$$(1) \quad E_i = \sum_{\alpha=1}^N \varepsilon_{(\alpha)}.$$

Przypomnijmy, że rozpatrujemy wszelkie sytuacje, jakie mogą być realizowane w pewnym dużym podukładzie układu makroskopowego. Jeśli w podukładzie jest akurat  $N$  cząstek, a  $\alpha$ -ta cząstka ma jakąś energię  $\varepsilon_{(\alpha)}$ , to całkowita energia podukładu równa się w układach prostych sumie  $E_i$ . Jeżeli

$$(2) \quad \varepsilon_{(\alpha)} = \frac{p_{(\alpha)}^2}{2m},$$

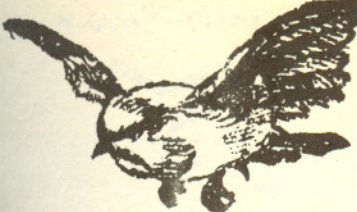
gdzie  $p_{(\alpha)}$  oznacza pęd  $\alpha$ -tej cząstki, a  $m$  jej masę, to wzór (1) definiuje model gazu doskonałego. Słowo „doskonały” w istocie rzeczy zaćmiewa ułomność modelu, polegającą na zaniedbaniu oddziaływań (zderzeń) cząstek ze swymi partnerami. W wypadku gazów takich, jak hel, tlen, wodór, para rtęci, zaniedbanie energii oddziaływań w porównaniu ze średnią energią kinetyczną cząstek jest bardzo dobrym przybliżeniem, gdy średnia gęstość cząstek w podukładzie jest niewielka, a temperatura dostatecznie wysoka.

3. Okazuje się, że pojęcie gazu doskonałego można uogólnić na inne, niż gazy zwykłe, układy fizyczne. Ważnym przykładem jest układ elektronów przewodnictwa. Wiemy, że elektrony w metalu można podzielić na dwie grupy. Pierwsza z nich złożona jest z elektronów zewnętrznych powłok atomów, tworzących metal. Elektrony z tej grupy noszą nazwę elektronów przewodnictwa, gdyż mogą się one przemieszczać prawie swobodnie i dzięki temu przewodzić prąd. Na drugą zaś grupę składają się elektrony silnie związane z jądrami atomów. Elektrony przewodnictwa poruszają się zatem w polu dodatnio naładowanych jonów, ustawionych periodycznie w sieci krystalicznej. Średnia odległość między dwoma elektronami przewodnictwa jest rzędu ułamka nanometra, toteż energia ich wzajemnego oddziaływania jest porównywalna z ich energią kinetyczną. Pogląd, iż układ elektronów przewodnictwa można uważać za gaz doskonały, wydaje się więc na pierwszy rzut oka zwariowany. W rzeczywistości jest on słuszny. Otóż elektrony przewodnictwa oddziałują ze sobą tak silnie, że w rezultacie pojedynczy elektron porusza się w wypadkowym polu elektrycznym wytwarzanym przez wszystkie pozostałe elektrony. Pole to jest w dodatku silnie kompensowane przez pole dodatnich jonów sieci. Każdy z elektronów zachowuje się więc jak cząstka prawie swobodna. Nie jest to jednak „prawdziwa” cząstka, choć działa jak ona. Za Landauem fizyk używa tu nazwy „quasicząstka”. Z uwagi na periodyczność pola elektrycznego sieci owa quasicząstka ma też inną masę niż elektron swobodny. W metalach masy te są jednak tego samego rzędu, toteż analiza gazu doskonałego zwykłych elektronów prowadzi do zrozumienia wielu właściwości metali.

4. Podzielmy w myśli obszar zajmowany przez gaz doskonały na prostopadłościany o krawędziach  $L_x, L_y, L_z$ . Niech  $L_x, L_y, L_z$  będą duże w porównaniu ze średnią odległością między cząstkami. Zgodnie z mechaniką kwantową każdej cząstce można przyporządkować falę, czy bardziej fachowo: funkcję falową, której kwadrat wartości bezwzględnej określa gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w punkcie  $(x, y, z)$ . Funkcja falowa dla cząstki z pędem  $(p_x, p_y, p_z)$  okazuje się być kombinacją wyrazów proporcjonalnych do cosinusa i sinusa liczby  $\frac{2\pi}{h}(p_x x + p_y y + p_z z)$ , gdzie  $h$  jest stałą Plancka, równą  $6,6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ . Skoro żaden z prostopadłościanów nie jest wyróżniony, nałożmy na funkcję falową warunek powtarzania się od prostopadłościanu do prostopadłościanu, co odpowiada zamianie  $x$  na  $x + L_x$  itd. Widzimy, że wartości pędu, które cząstka może przyjmować, nie są dowolne. Muszą one wynosić

$$(3) \quad p_x = \frac{h}{L_x} m_x, \quad p_y = \frac{h}{L_y} m_y, \quad p_z = \frac{h}{L_z} m_z,$$

gdzie  $m_x, m_y, m_z$  są dowolnymi liczbami całkowitymi. Mówimy, że pęd, a w związku z tym i energia, są skwantowane. Dwie sąsiadujące wartości  $p_x$  różnią się o  $h/L_x$ . Stosunek ten jest niezwykle mały z uwagi na znikomą wartość stałej Plancka, którą jeszcze dzielimy przez sporą długość  $L_x$ . Pęd przyjmuje więc wartości ze zbioru praktycznie ciągłego. Pisząc równanie Newtona nie kłopotujemy się zatem kwantowaniem pędu. Jednak w naszym wypadku własność skwantowania wykorzystamy do numerowania energii cząstki.



5. Pęd nie jest jedyną wielkością, która charakteryzuje stan cząstki. Wiele cząstek ma własny niezerowy wektor momentu pędu, zwany spinem, i proporcjonalny do niego własny moment magnetyczny. Takie cząstki zachowują się zatem jak wirujący bąk i jednocześnie jak pętelka z prądem. Zgodnie z mechaniką kwantową spin o wartości  $s$  może ustawiać się względem dowolnie wybranej osi tylko na  $2s+1$  sposobów, które nazywamy stanami spinowymi cząstki. Np. cząstki o spinie  $s = 1/2$ , jak elektron, neutron, proton, atomy izotopu  $^3\text{He}$  helu, mogą być tylko w dwóch stanach spinowych: „do góry” i „do dołu”. Pod nieobecność pola magnetycznego ustawienie spinu nie ma wpływu na energię cząstki.

6. Cząstki o spinie połówkowym ( $s = 1/2, 3/2, 5/2$  itd.) nazywa się fermionami. Okazuje się, że fermiony obowiązuje reguła Pauliego: w danym stanie jednocząstkowym może znajdować się co najwyżej jedna cząstka. W naszym wypadku  $l$ -ty stan jednocząstkowy określony jest przez podanie wartości pędu cząstki, tj. przez wybór liczb  $m_x, m_y, m_z$ , i numer stanu spinowego. Jeśli przez  $n_l$  oznaczyć liczbę cząstek obsadzających  $l$ -ty stan, to regułę Pauliego można zapisać w następujący sposób: .

$$(4) \quad n_l = 0 \text{ lub } 1.$$

Bozonów, czyli cząstek o spinie całkowitym ( $s = 0, 1, 2$  itd.) reguła Pauliego nie obowiązuje i wówczas

$$(5) \quad n_l = 0, \text{ lub } 1, \text{ lub } 2, \text{ lub } 3, \text{ lub } 4, \dots$$

Bozonami o zerowym spinie są np. atomy gazów szlachetnych, a o spinie 1 — cząsteczki wodoru  $^1\text{H}$ .

7. Przypuśćmy, że bozonowy lub fermionowy gaz doskonały wewnątrz prostopadłościanu jest w stanie o  $N$  cząstkach i o całkowitej energii  $E_l$ . Wielkości  $N$  i  $E_l$  dogodnie jest zapisać za pomocą liczb obsadzeń  $n_l$ :

$$(6) \quad N = \sum_l n_l,$$

$$(7) \quad E_l = \sum_l \varepsilon_l n_l,$$

gdzie  $\varepsilon_l$  oznacza energię, odpowiadającą  $l$ -temu stanowi pojedynczej cząstki, a  $\varepsilon_l n_l$  — wypadkową energię wszystkich cząstek, którym zdarzyło się być w  $l$ -tym stanie. Widzimy, że zbiór liczb obsadzeń  $\{n_l\}$  wyznacza stan układu. Dla zadanego  $N$  istnieje wiele zbiorów  $\{n_l\}$ , spełniających warunek (6), a stąd — wiele dopuszczalnych  $E_l$ . Średnie wartości  $\langle N \rangle$  i  $\langle E \rangle$  otrzymuje się, zastępując  $n_l$  średnimi liczbami obsadzeń  $\langle n_l \rangle$ .

8. Wykażemy teraz, że jeśli układ ma temperaturę  $T$  i potencjał chemiczny  $\mu$ , to

$$(8) \quad \langle n_l \rangle = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_l - \mu}{k_B T}} \pm 1}.$$

Górny znak dotyczy fermionów, a dolny — bozonów, przy czym  $\mu$  jest funkcją temperatury. Posłużymy się rozkładem wielkim kanonicznym, zdefiniowanym wzorem

$$(9) \quad P_{N, l} = \frac{e^{(\mu N - E_l)/k_B T}}{\Xi}.$$

Obliczmy najpierw stałą  $\Xi$ , normującą rozkład do jedności. Otóż

$$(10) \quad \Xi = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\frac{\mu N}{k_B T}} \sum_l e^{\frac{-E_l}{k_B T}} = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n_l\}} e^{\frac{\mu}{k_B T} \sum_l n_l} e^{-\frac{1}{k_B T} \sum_l \varepsilon_l n_l}$$

Symbol  $\sum'$  oznacza sumowanie po takich zbiorach liczb obsadzeń, które odpowiadają całkowitej liczbie cząstek równej  $N$ . Zsumowanie po wszystkich  $N$  pozwala pominąć warunek na  $\{n_l\}$ . Stąd

$$(11) \quad \Xi = \sum_{\{n_l\}} e^{\frac{1}{k_B T} \sum_l (\mu - \varepsilon_l) n_l} = \prod_l \sum_{n_l} e^{\frac{1}{k_B T} (\mu - \varepsilon_l) n_l}$$

Podstawmy (11) do (9) i zapiszmy występujące tam  $N$  i  $E_l$  zgodnie z (6) i (7). Stwierdzamy, że prawdopodobieństwo wystąpienia stanu o  $N$  cząstkach i o energii  $E_l$  jest następującym iloczynem:

$$(12) \quad P_{N, l} = \prod_l P_l,$$

gdzie

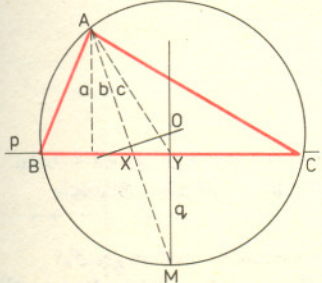
$$(13) \quad P_l = \frac{e^{\frac{1}{k_B T} (\mu - \varepsilon_l) n_l}}{\sum_{n_l} e^{\frac{1}{k_B T} (\mu - \varepsilon_l) n_l}}.$$

Czynnik  $P_l$  ma zatem interpretację prawdopodobieństwa realizacji  $l$ -tego stanu jednocząstkowego. Wnioskujemy stąd, że średnia liczba cząstek w tym stanie wynosi

$$(14) \quad \langle n_l \rangle = \sum_{n_l} n_l P_l.$$

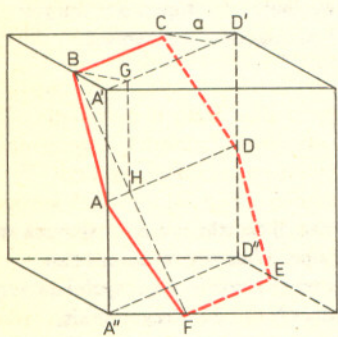


**Rozwiązanie zadania M 200**  
Wybieramy prostą  $p$  i znajdujemy na niej punkty  $X$  i  $Y$  odległe odpowiednio o  $d$  i  $m$  od punktu  $A$  położonego w odległości  $h$  od tej prostej. Ponadto punkty te winny leżeć po tej samej stronie rzutu prostopadłego  $A$  na  $p$ . Niech  $M$  będzie punktem przecięcia prostej  $AX$  z prostą  $q$  prostopadłą do  $p$  i przechodzącą przez  $Y$ . Z zadania M 199 wynika, że punkt  $M$  leży na okręgu opisanym na szukanym trójkącie  $ABC$ . Prowadząc symetralną odcinka  $AM$  znajdujemy w jej przecięciu z prostą  $q$  punkt  $O$ , będący środkiem wspomnianego okręgu. Wierzchołki  $B$  i  $C$  trójkąta znajdujemy w przecięciu okręgu o środku w  $O$  i promieniu  $OA$  z prostą  $p$ .





Rozwiązanie zadania M 201  
 Rozpatrzmy płaszczyznę  $ABCDEF$  przechodzącą przez środki przeciwległych krawędzi  $A'A''$  i  $D'D''$  sześcianu. Niech  $A'B = D'C = A''F = D''E = a$ . Mamy  $BC = EF = \sqrt{2}(1-a)$ . Niech  $G$  i  $H$  będą rzutami prostokątnymi punktu  $B$  na proste  $A'D'$  i  $AD$ . Z trójkąta prostokątnego  $BCH$  wyznaczmy  $CH = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}$  i wobec tego  $BE = 2 \cdot CH = \sqrt{1+2a^2}$ . W sześcioąt  $ABCDEF$  możemy więc wpisać kwadrat o boku  $b = \min(BC, CH) = \min(2(1-a), \sqrt{1+2a^2})$ . Funkcja  $f(a) = \sqrt{2}(1-a)$  jest funkcją malejącą parametru  $a$ ; zaś  $g(a) = \sqrt{1+2a^2}$  rosnącą. Wynika stąd, że wartość  $b$  będzie największa, gdy  $\sqrt{1+2a^2} = \sqrt{2}(1-a)$ , czyli gdy  $a = \frac{1}{4}$ . Długość boku kwadratu wyniesie wówczas  $\frac{3}{4}\sqrt{2} \approx 1,0607$ . Można udowodnić, że jest to największy kwadrat mieszczący się w naszym sześcianie.



Średnia liczba wszystkich cząstek  $\langle N \rangle$  równa jest  $\sum \langle n_l \rangle$ , a średnia energia  $\langle E \rangle = \sum \varepsilon_l \langle n_l \rangle$ . W wypadku fermionów  $n_l$  spełnia warunek (4), toteż

$$(15) \quad \langle n_l \rangle = \frac{0 \cdot e^{\frac{1}{k_B T}(\mu - \varepsilon_l) \cdot 0} + 1 \cdot e^{\frac{1}{k_B T}(\mu - \varepsilon_l) \cdot 1}}{1 + e^{\frac{1}{k_B T}(\mu - \varepsilon_l)}} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_l - \mu}{k_B T}} + 1}$$

W wypadku bozonów

$$(16) \quad \langle n_l \rangle = \frac{\sum_{n_l=0}^{\infty} n_l e^{\frac{1}{k_B T}(\mu - \varepsilon_l)n_l}}{\sum_{n_l=0}^{\infty} e^{\frac{1}{k_B T}(\mu - \varepsilon_l)n_l}} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_l - \mu}{k_B T}} - 1}$$

gdyż mianownik w (16) jest sumą postępu geometrycznego  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$  o ilorazie  $q = e^{\frac{\mu - \varepsilon_l}{k_B T}}$  i pierwszym wyrazie równym 1, licznik zaś jest pochodną sumy postępu względem  $q$ . Szereg ten jest zbieżny, jeśli  $q < 1$ , tzn.  $\mu - \varepsilon_l < 0$ . Skoro minimalną wartością energii kinetycznej jest zero, potencjał chemiczny doskonałego gazu bozonów powinien być ujemny. [Przekonamy się jednak, że dla temperatur bliskich zera bezwzględnej  $\mu$  musi zniknąć. W wypadku stanów, odpowiadających energii  $\varepsilon_l = 0$ , wzór (16) będzie wymagał modyfikacji]. I dla fermionów i dla bozonów im wyższa energia stanu, tym słabiej jest on obsadzony.

9. Rozpatrzmy gaz Fermiego w obszarze temperatur bliskich zera bezwzględnej. Jaki znak ma  $\mu(T=0)$ ? Gdyby  $\mu(T=0)$  było ujemne, to  $\langle n_l \rangle$  dla każdego  $l$  dążyłoby do zera wraz z  $T$ . Prowadziłoby to do absurdalnego wniosku o nieistnieniu cząstek. Znikająca wartość  $\mu(T=0)$  dawałaby dla odmiany  $\langle n_l \rangle = 1/2$  dla  $\varepsilon_l = 0$  i  $\langle n_l \rangle = 0$  dla każdej innej energii, co nie wyczerpywałoby zbioru  $\langle N \rangle$  cząstek, jeśli  $\langle N \rangle > 1$ . Stwierdzamy, że  $\mu(T=0)$  musi być dodatnie. Wielkość tę oznacza się również symbolem  $\varepsilon_F$  i nazywa energią Fermiego. W  $T=0$  zatem

$$(17) \quad \langle n_l \rangle_{T=0} = \begin{cases} 1 & \varepsilon_l \leq \varepsilon_F \\ 0 & \varepsilon_l > \varepsilon_F \end{cases}$$

a więc wszystkie poziomy o energii mniejszej od  $\varepsilon_F$  są zajęte, a o większej są puste. Energia Fermiego to maksymalna dozwolona energia pojedynczej cząstki w stanie podstawowym gazu. Interpretacja fizyczna wzoru (17) jest jasna. Przypuśćmy bowiem, że w prostopadłościanie jest średnio  $\langle N \rangle$  cząstek. W temperaturze zera bezwzględnej układ musi być w stanie o najniższej energii (co wynika z samej definicji temperatury). W kategoriach stanów jednocząstkowych znaczy to, że pierwszych  $(2s+1)$  spośród  $\langle N \rangle$  cząstek musi mieć energię zerową. Zgodnie z regułą Pauliego następnych  $3(2s+1)$  cząstek obsadzi stany o energii, odpowiadającej liczbom  $(m_x, m_y, m_z) = (1, 0, 0), (0, 1, 0)$  i  $(0, 0, 1)$ . Kolejne cząstki „usadzamy” w stanach o coraz większych liczbach  $m_x, m_y, m_z$  aż do wyczerpania zbioru  $\langle N \rangle$  cząstek. Zauważmy, że dozwolone wartości pędów umieszczone są w punktach węzłowych sieci prostopadłościennej o stałych sieci  $\frac{h}{L_x}, \frac{h}{L_y}$  i  $\frac{h}{L_z}$ . Pędy odpowiadające energiom mniejszym od  $\varepsilon_F$  zawierają się w pewnym obszarze wykrojonym z tej sieci. Dla dużych  $\langle N \rangle$  obszar ten jest w przybliżeniu kulą, której promień wynosi  $p_F = \sqrt{2m\varepsilon_F}$ . Ponieważ a) objętość kuli równa jest  $\frac{4}{3}\pi p_F^3$ , b) objętość przypadająca na jeden dopuszczalny pęd wynosi  $\frac{h}{L_x} \cdot \frac{h}{L_y} \cdot \frac{h}{L_z}$  i c) każdy ze stanów pędowych może pomieścić  $(2s+1)$  cząstek, gdyż tyle jest stanów spinowych, więc wewnątrz kuli istnieje

$$(18) \quad \frac{4}{3} \pi (2m\varepsilon_F)^{3/2} \frac{L_x L_y L_z}{h^3} (2s+1)$$

dozwolonych stanów. Przyrównanie (18) do  $\langle N \rangle$  pozwala wyznaczyć  $\varepsilon_F$  jako funkcję gęstości, czyli wielkości bezpośrednio mierzonej doświadczalnie:

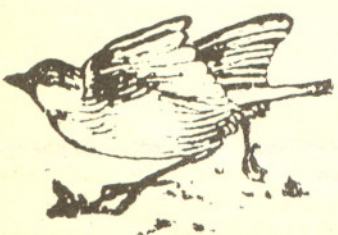
$$(19) \quad \varepsilon_F = \frac{h^2}{2m} \varrho^{2/3} \left( \frac{3}{4\pi(2s+1)} \right)^{2/3}$$

gdzie

$$(20) \quad \varrho = \frac{\langle N \rangle}{L_x L_y L_z} = \frac{\langle N \rangle}{V}$$

przy czym  $V$  oznacza objętość podkadłtu. Zwróćmy uwagę, że wynik ten nie zależy od wyboru długości krawędzi prostopadłościanu i że  $\varepsilon_F$ , jako związane z  $\langle N \rangle$ , jest w istocie wielkością średnią.

10. Zastosujmy wzór (19) do gazu elektronów przewodnictwa w metalach. Średnia gęstość elektronów przewodnictwa jest rzędu  $10^{23}$  na  $\text{cm}^3$  (cez:  $0,91 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ , beryl:  $2,4 \times 10^{23} \text{ cm}^{-3}$ ).





Masa elektronu przewodnictwa jest rzędu masy elektronu swobodnego:  $m = 9 \times 10^{-28}$  g, a spin  $s = 1/2$ . Wnioskujemy stąd, że energia Fermiego jest rzędu  $10^{-71}$  J. Jeśli mierzyć tę energię w jednostkach temperatury ( $\epsilon_F = k_B T_F$ ), to odpowiada ona temperaturze Fermiego  $T_F$  rzędu  $10^5$  (i prędkości rzędu 0,01 prędkości światła). Widzimy zatem, że w temperaturze pokojowej elektrony przewodnictwa zachowują się tak, jak w temperaturze 0 K, tzn. znajdują się w stanie podstawowym układu. Dostarczenie do układu energii, odpowiadającej temperaturze pokojowej, nie jest więc praktycznie w stanie „wybić” elektronu z kuli Fermiego, toteż ciepło właściwe gazu elektronowego jest zaniedbywalnie małe. W wypadku gwiazd zwanych białymi karłami, które zbudowane są z jąder helowych i ruchliwych elektronów (zasoby wodoru uległy wyczerpaniu w wyniku ewolucji gwiazdy), gęstość elektronów jest rzędu  $10^{30}$  na  $\text{cm}^3$ , co odpowiada temperaturze Fermiego równej  $10^{11}$  K. Temperatura wewnątrz białego karła jest dziesięć tysięcy razy niższa ( $10^7$  K). Z punktu widzenia gazu elektronowego wewnątrz gwiazdy panuje trzaskający mróz. Rozważmy dla odmiany gaz złożony z cząsteczek helu  $^3\text{He}$ . Przypuśćmy, że temperatura układu nieco przewyższa 3,35 K, a ciśnienie wynosi 1,18 atm. Obniżenie temperatury poniżej podanej wartości spowodowałoby przejście z fazy gazowej do ciekłej (uwzględnienie w teorii energii oddziaływań byłoby wówczas niezbędne). W takich warunkach  $\rho = 3 \times 10^{21}$  cząsteczek/ $\text{cm}^3$ ,  $\epsilon_F = 2,21 \times 10^{-23}$  J,  $T_F = 1,6$  K ( $m = 3 \times 1,67 \times 10^{-24}$  g). W porównaniu z hipotetycznym doskonałym gazem helowym, istniejącym w temperaturze 0 K, jego kula Fermiego opustoszała, ostry schodek funkcji  $\langle n_i \rangle$  wygładził się w zjeżdżalnię dla dzieci, a potencjał chemiczny  $\mu$  bardzo zmalał i stał się ujemny (rzędu  $-6 \times 10^{-23}$  J). Odwilż.

11. Jak się zachowuje gaz elektronów przewodnictwa w polu magnetycznym? Zauważmy, że energie  $\epsilon_i$ , oprócz energii kinetycznej cząstki, w obecności pola magnetycznego muszą uwzględniać energię oddziaływania własnego momentu magnetycznego elektronu z polem. Momenty magnetyczne mogą ustawiać się tylko na dwa sposoby, przy czym moment równoległy do pola jest faworyzowany energetycznie. Dla każdego stanu pędowego średnie liczby obsadzeń dla cząstek z momentem „do góry” są większe niż średnie liczby obsadzeń dla cząstek z momentem „do dołu”. W układzie pojawia się więc pewien wypadkowy moment magnetyczny, czyli namagnesowanie. Zjawisko to nosi nazwę paramagnetyzmu Pauliego. Nie jest to jednak jedyny wpływ pola magnetycznego na układ elektronów przewodnictwa. Pole magnetyczne wywiera na elektrony jeszcze siłę Lorentza, pod wpływem której elektrony poruszają się po spiralach. W układzie zostaje indukowany prąd wirowy. Zgodnie z regułą Lenza pole magnetyczne wytworzone przez indukowane prądy ma zwrot przeciwny do pola, które je wywołało. Zjawisko ma zatem charakter diamagnetyczny i nosi nazwę diamagnetyzmu Landaua. Zwrot wypadkowego namagnesowania próbki uzależniony jest od tego, które z dwóch zjawisk przeważa. Najczęściej jest on równoległy do pola.

12. Właściwości doskonałych gazów — bozonowego i fermionowego — są zupełnie odmienne. Stan podstawowy układu bozonów nie jest wyznaczony przez kulę Fermiego. W temperaturze zera stopni nie stosuje się reguła Pauliego i wszystkie bozony znajdują się w stanie o najniższej, czyli zerowej, energii kinetycznej. Gaz bozonów, w odróżnieniu od gazu fermionów, w stanie podstawowym nie wywiera ciśnienia. W  $T = 0$  potencjał chemiczny gazu bozonów musi zniknąć, gdyż dodanie do układu dowolnej liczby cząstek nie jest w stanie zmienić całkowitej energii gazu. Stosowanie wzoru (16) nie jest wówczas poprawne. Prawidłowe średnie liczby obsadzeń dane są przez

$$(21) \quad \langle n_i \rangle = \begin{cases} \frac{1}{2s+1} \langle N \rangle, & \text{dla } (2s+1) \text{ stanów o } \epsilon_i = 0 \\ 0 & \text{dla } \epsilon_i \neq 0. \end{cases}$$

[Wzór (16) prowadziłby do niefizycznego zastąpienia  $\langle N \rangle$  przez nieskończoność.] Zwiększenie temperatury powoduje stopniowe malenie gigantycznego obsadzenia stanu o zerowej energii i wzbudzenie coraz większej liczby cząstek do stanów o energiach wyższych. Obsadzenie stanu najniższego pozostaje makroskopowo duże do pewnej temperatury krytycznej, która jest rzędu kilku kelwinów. Powyżej tej temperatury wzór (16) może być stosowany do wszystkich stanów. Małe energie pozostają faworyzowane, ale w stanie o zerowej energii jest niewielka liczba cząstek. Potencjał chemiczny staje się wtedy ujemny. Ochłodzenie gazu poniżej temperatury krytycznej prowadzi do przemiany fazowej, zwanej kondensacją Bosego-Einsteina. Sądzi się, że przejście fazowe ciekłego helu  $^4\text{He}$  w stan nadciekły ma związek z kondensacją Bosego-Einsteina. Związek ten nie może być prosty, gdyż w sensownej analizie nie sposób jest pominąć energii wzajemnych oddziaływań atomów ciekłego helu. W tak niskich temperaturach (2,19 K) z pewnością nie jest to gaz doskonały.

13. Jeśli temperatura gazu fermionowego lub bozonowego jest dostatecznie wysoka, to  $\langle N \rangle$  cząstek rozciągnie się po wszystkich stanach jednocząstkowych. Średnie obsadzenie każdego jednocząstkowego stanu będzie wtedy niewielkie. Wnioskujemy stąd, że w takiej sytuacji  $e^{-\mu/k_B T}$ , występujące we wzorze (8), musi mieć tak dużą wartość, a więc  $\mu/k_B T$  ma tak dużą wartość bezwzględną, że dodanie lub odjęcie jedynki w mianowniku wyrażenia (8) staje się bez znaczenia.



**Rozwiązanie zadania F 67**

Ponieważ promień nasadki jest mały w porównaniu z rozmiarami trawnika, możemy zaniedbać rozmiary nasadki i założyć, że zasięg strugi wylatującej pod kątem  $\alpha$  do pionu jest w przybliżeniu równy odległości  $R$  od środka nasadki. Zaniedbamy również różnicę poziomów między elementem nasadki a trawnikiem. Wtedy ruch strugi wody opisany jest przez rzut ukośny, w którym zasięg wynosi

$$(1) \quad R = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g},$$

gdzie  $v$  jest prędkością wypływu. Ilość wody padająca na obszar trawnika zawarty między  $R$  i  $R+dR$  powinna, zgodnie z treścią zadania, wynosić  $C \cdot 2\pi R dR$ , gdzie  $C$  jest pewną stałą gęstością powierzchniową wody (ilość wody nie zależy od położenia  $R$  na trawniku). Z drugiej strony, jeśli gęstość otworów na nasadce wynosi  $\rho(\alpha)$ , to ilość wody polewającej obszar trawnika znajdujący się w odległości  $R(\alpha)$  (patrz wzór (1)) wynosi  $\rho(\alpha)d\Omega = 2\pi \sin \alpha \rho(\alpha) d\alpha$ , gdzie  $d\Omega = 2\pi \sin \alpha d\alpha$  jest elementem kąta brylowego zawartym między kątami  $\alpha$  i  $\alpha+d\alpha$ . Musi być zatem spełniony warunek

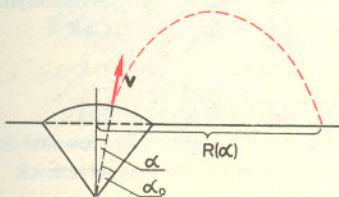
$$2\pi \sin \alpha \rho(\alpha) d\alpha = C \cdot 2\pi R dR.$$

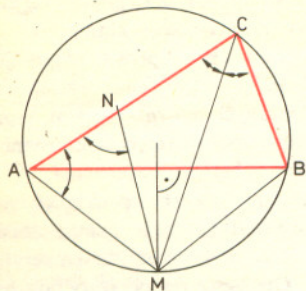
Stąd, wykorzystując wzór (1), dostajemy

$$\rho(\alpha) = \frac{CR}{\sin \alpha} \frac{dR}{d\alpha} = \frac{C}{\sin \alpha} \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g} \times \frac{2v^2 \cos 2\alpha}{g} = \frac{Cv^4 \sin 4\alpha}{g \sin \alpha},$$

czyli

$$\rho(\alpha) \sim \frac{\sin 4\alpha}{\sin \alpha}.$$





Niech  $M$  będzie punktem przecięcia dwusiecznej kąta  $ACB$  z okręgiem opisanym na trójkącie  $ABC$ . Ponieważ kąty  $ACN$  i  $NCB$  są równe, równe są więc i łuki  $AN$  oraz  $NB$ , a zatem i długości cięciw  $AN$  i  $NB$ . Punkt  $N$  leży więc na symetralnej boku  $AB$ , jest on zatem punktem wspólnym dwusiecznej kąta  $ACB$  i symetralnej boku  $AB$  oraz leży na okręgu opisanym na trójkącie  $ABC$ .

$$(22) \quad \langle n_i \rangle = e^{\frac{\mu - \epsilon_i}{k_B T}} = \frac{e^{-\epsilon_i / k_B T}}{Z},$$

gdzie  $Z = e^{-\mu / k_B T}$ . [Wzór (22) uzyskuje się także w granicy małych gęstości: zanik efektów kwantowych.] Mówimy wówczas o klasycznym gazie doskonałym. Znajdźmy  $Z$  z warunku  $\langle N \rangle = \sum_i \langle n_i \rangle$ :

$$(23) \quad Z = \frac{1}{\langle N \rangle} \sum_i e^{-\epsilon_i / k_B T} = \frac{2s+1}{\langle N \rangle} \sum_{m_x} e^{-\frac{h^2 m_x^2}{2m L_x k_B T}} \sum_{m_y} e^{-\frac{h^2 m_y^2}{2m L_y k_B T}} \sum_{m_z} e^{-\frac{h^2 m_z^2}{2m L_z k_B T}}.$$

Dla dużych  $L_x$  sumę po  $m_x$  pomnożoną przez  $h/L_x$ , czyli przez szerokość odstępu między sąsiadującymi wartościami  $x$ -owej składowej pędu, świetnie daje się przybliżyć przez całkę względem  $p_x$ :

$$(24) \quad \sum_{m_x} e^{-\frac{h^2 m_x^2}{2m L_x k_B T}} = \frac{L_x}{h} \sum_{m_x} \frac{h}{L_x} e^{-\frac{h^2 m_x^2}{2m L_x k_B T}} \approx \frac{L_x}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{p_x^2}{2m k_B T}} dp_x = \frac{L_x}{h} \sqrt{2m k_B T} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Całka względem  $t$  okazuje się mieć wartość  $\sqrt{\pi}$ . Stąd

$$(25) \quad Z = \frac{L_x L_y L_z}{\langle N \rangle} \frac{2s+1}{h^3} (2\pi m k_B T)^{3/2} = \rho \frac{2s+1}{h^3} (2\pi m k_B T)^{3/2}.$$

W wypadku tlenu w  $0^\circ\text{C}$  pod ciśnieniem 1 atm  $Z$  jest rzędu  $10^6$ . Jest to więc wtedy wspaniały gaz klasyczny. Natomiast dla elektronów przewodnictwa  $Z$  jest rzędu  $10^{-4}$  w temperaturze pokojowej. Wyrażenie (22) traci wówczas stosowność.

14. Obliczmy teraz ciśnienie wywierane przez klasyczny gaz doskonały. Niech  $f_i$  oznacza wartość siły wywieranej przez cząstkę w  $i$ -tym stanie na ścianę  $x = L_x$  prostopadłościanu. Powierzchnia tej ściany wynosi  $L_y \cdot L_z$ . Przypuśćmy, że ściana uległa powolnemu przesunięciu o odcinek  $dL_x$ , przy czym  $\langle N \rangle$  pozostało nie zmienione. Praca  $f_i dL_x$ , którą wykonuje cząstka na tej ścianie, musi być równa ubytkowi energii —  $d\epsilon_i$  cząstki. Stąd

$$(26) \quad f_i = - \frac{d\epsilon_i}{dL_x}.$$

Średnia siła wywierana przez wszystkie cząstki dana jest więc wzorem

$$(27) \quad \langle F \rangle = \sum_i \langle n_i \rangle f_i = \frac{1}{Z} \sum_i e^{-\epsilon_i / k_B T} \left( - \frac{d\epsilon_i}{dL_x} \right) = \frac{k_B T}{Z} \frac{d}{dL_x} \sum_i e^{-\epsilon_i / k_B T} = \frac{\langle N \rangle k_B T}{Z} \frac{dZ}{dL_x} = \frac{\langle N \rangle k_B T}{L_x}.$$

Ciśnienie  $P$  jest stosunkiem  $\langle F \rangle$  do powierzchni ściany. Uzyskujemy znajomy i często stosowany wynik

$$(28) \quad P = \frac{\langle N \rangle}{V} k_B T.$$

Jest to prawo klasycznego gazu doskonałego. Dokładniejsze obliczenia, oparte o pełny wzór (8), prowadziłyby do wniosku, że w wysokich temperaturach doskonały gaz fermionowy wywierałoby nieco większe, a bozonowy nieco mniejsze ciśnienie.

Gdybyśmy w tym artykule zamiast  $1/k_B T$  używali symbolu  $\beta$ , wprowadzonego poprzednio (Delta 5/1979) wzór (28) identyfikowałby  $\beta k_B$  z odwrotnością temperatury. Gdybyśmy wreszcie rozpatrywali układ o ściśle określonej liczbie cząstek  $N$  i posługiwali się zespołem kanonicznym, uzyskalibyśmy wynik (28) z tym, że  $\langle N \rangle$  zostałyby zastąpione przez  $N$ . Jest to przykład termodynamicznej równoważności zespołów statystycznych.

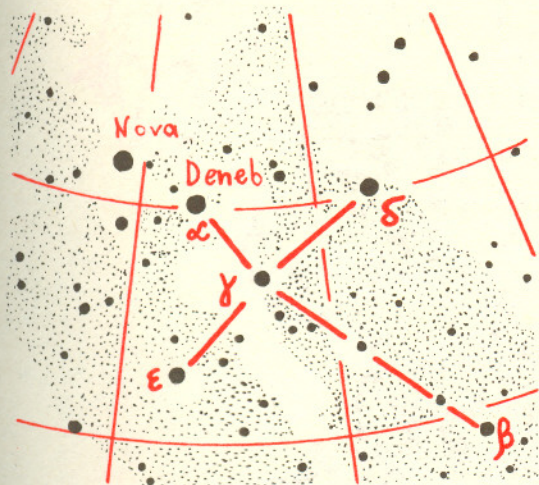
Niech Czytelnik nie obawia się, że zaproponuje mu się teraz badanie układów bardziej skomplikowanych niż gazy doskonałe. Wystarczy stwierdzić, że teoria statystyczna prowadzi do zrozumienia właściwości np. tak intrygujących układów, jak zbiór momentów magnetycznych ferromagnetyka.

Cztery lata temu, w ostatnim dniu sierpnia 1975 roku, gwiazdozbiór Łabędzia zupełnie nie przypominał szybującego ptaka. Było to spowodowane tym, że 29 sierpnia w nocy pojawiła się w tej konstelacji „nowa gwiazda”. Została ona dostrzeżona najwcześniej w Japonii, ponieważ stała się widoczna wtedy, gdy na Dalekim Wschodzie zapadał właśnie zmierzch. Powiadomieni telegraficznie astronomowie rozpoczęli jej intensywne badania optyczne, radiowe i rentgenowskie jeszcze przed osiągnięciem maksymalnej jasności.

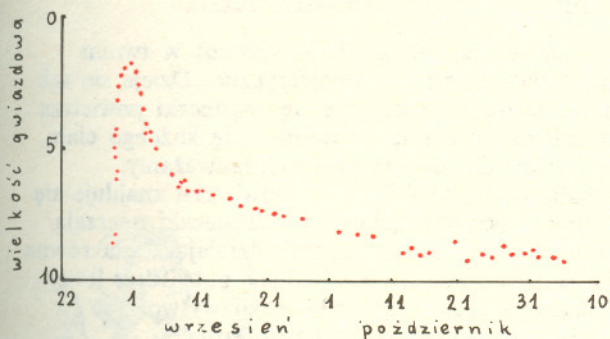
Nowa Łabędzia 1975 należy do klasy gwiazd znanych nam już od starożytności. Wtedy to nagle pojawiającym się gwiazdom nadawano nazwę gwiazd nowych. Dzisiaj wiemy, że wybuch gwiazdy nowej jest jakby jej „ostatnim tchnieniem” w końcowych etapach ewolucji. Wszystkie znane nam gwiazdy nowe są składnikami układów podwójnych. Wybuch wyobrażamy sobie w sposób następujący: bogata w wodór materia przepływa z sąsiedniej, względnie zimnej gwiazdy i opadając na powierzchnię białego karła gromadzi się tam i ogrzewa się do tak wysokiej temperatury, że w pewnym momencie następuje zapłon reakcji termojądrowych i wybuch.

W zależności od szybkości przepływu materii, geometrii układu, warunków w okolicy powierzchni białego karła próbujemy dzielić takie układy na podklasy. Niektóre z nich charakteryzują się tym, że wybuchy powtarzają się mniej lub bardziej regularnie. Istnieje taki układ, o nazwie WZ Sge, który wybuchu mniej więcej co 33 lata, ostatni jego wybuch obserwowany był pod koniec zeszłego roku przez warszawskich studentów astronomii. Z tego, co dotychczas zostało napisane, wynika, że dysponując dostatecznie silnym teleskopem można by dostrzec przed wybuchem gwiazdę, która potem stała się nową. I rzeczywiście, po wybuchu przegląda się archiwalne zdjęcia danej okolicy nieba, zrobione wcześniej, i przeważnie w miejscu eksplozji znajduje się gwiazdę kilkadziesiąt tysięcy razy słabszą niż w momencie największej jasności. W przypadku Nowej Łabędzia nie znaleziono żadnego obiektu w miejscu wybuchu. Najbardziej czułe kamery zarejestrowałyby gwiazdę nawet sto milionów razy słabszą. A więc musiała to być wyjątkowo silna eksplozja, jednak nie można jeszcze zaliczyć jej do wybuchów supernowych, kiedy to jasność gwiazdy wzrasta ponad miliard razy w wyniku działania zupełnie innego mechanizmu, po czym maleje wielokrotnie wolniej i spokojniej.

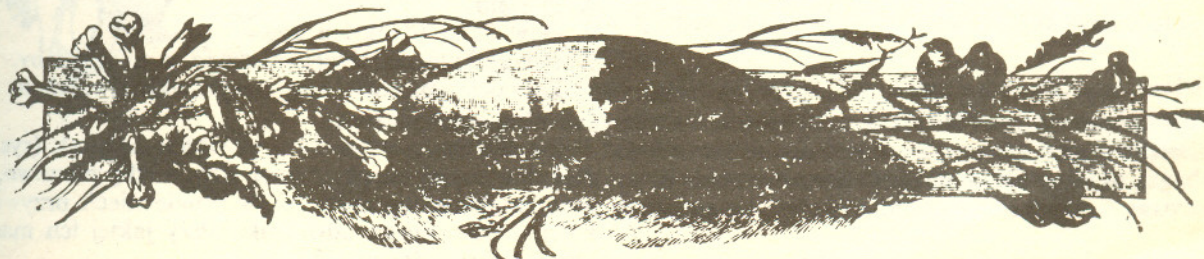
*mgr Tomasz CHLEBOWSKI*



Wygląd gwiazdozbioru Łabędzia 1 września 1975 r.

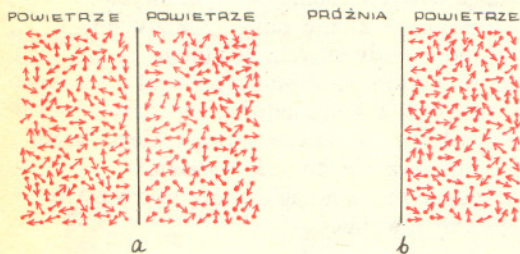


Krzywa zmian blasku Nowej Łabędzia 1975

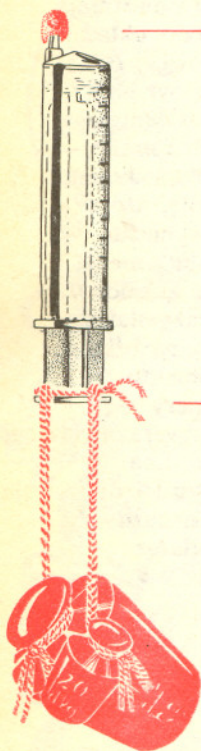




# mała delta



Rys. 1



Rys. 2

a: zalepiamy plasteliną

b: przywiązujemy sznurki

c: zawieszamy odważniki

## Mierzmy ciśnienie atmosferyczne

Wiesz na pewno, że na każdy przedmiot w twoim otoczeniu działa ciśnienie atmosferyczne. Dzieje się tak dlatego, że szybko poruszające się cząsteczki powietrza bezustannie „bombardują” powierzchnię każdego ciała. A jednak ciśnienia tego prawie nie zauważamy. Jeżeli wyobraziliśmy sobie, że w powietrzu znajduje się na przykład blaszka metalowa, to cząsteczki uderzają w nią z obu stron, a więc średnia działająca siła równa jest zeru (rys. 1a). Gdybyśmy jednak potrafili z lewej strony blaszki usunąć cząsteczki, czyli wytworzyć próżnię (rys. 1b), wtedy „bombardowanie” zachodziłoby tylko z prawej strony i powinniśmy móc zaobserwować i zmierzyć działanie siły. Aby zrobić doświadczenie, które to wykaże, potrzebne są:

1. Strzykawka, najlepiej zużyta plastikowa do jednorazowego użycia (inną łatwo stłuc).
2. Sznurek.
3. Plastelina.
4. Odważniki (do kilku kg).

Doświadczenie najłatwiej wykonać w dwie osoby.

1. Zatkajcie szczelnie wlot strzykawki kawałkiem plasteliny (rys. 2a).
2. Do tłoczka strzykawki przywiążcie sznurek (rys. 2b).
3. Jedno z was niech trzyma strzykawkę pionowo, wylotem ku górze (rys. 2c), a drugie niech przywiązuje kolejno do sznurka odważniki. Przy jakiej ich masie uda się tłok odciągnąć?



## Rozkłady liczb na czynniki

Mam trzy córki. Iloczyn liczb wyrażających ich wiek jest równy 90. Najstarsza jest o cztery lata starsza od średniej. Czy możecie obliczyć, ile lat ma każda z moich córek?

Szansa na jednoznaczne rozwiązanie tak postawionego problemu mamy tylko, jeżeli przypuścimy, że lata moich dzieci wyrażają się liczbami całkowitymi (choć przecież  $7/12$  to też liczba!). Wtedy rozwiązanie jest proste: przedstawmy liczbę 90 w postaci iloczynu trzech czynników. W zakresie liczb naturalnych można to zrobić tylko na dziesięć sposobów:  $90 = 1 \cdot 2 \cdot 45 = 1 \cdot 3 \cdot 30 = 1 \cdot 5 \cdot 18 = 1 \cdot 6 \cdot 15 = 1 \cdot 9 \cdot 10 = 1 \cdot 1 \cdot 90 = 2 \cdot 5 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 15 = 3 \cdot 5 \cdot 6 = 3 \cdot 3 \cdot 10$ . Tylko rozkład  $90 = 2 \cdot 5 \cdot 9$  ma tę własność, że różnica dwu największych czynników wynosi 4. A zatem moje córki mają 2, 5 i 9 lat.

Gdybyśmy nie zakładali, że szukane wielkości są liczbami naturalnymi, moglibyśmy otrzymać jeszcze inne rozwiązania. Oto najprostsze z nich: Beata ma półtora roczku, Karolina 6 lat, a Agnieszka 10.

Jakie własności liczb naturalnych decydują o tym, że zadanie nasze jest jednoznaczne i łatwo rozwiązalne? Zastanówmy się najpierw, w jaki sposób można najłatwiej stwierdzić, że liczbę 90 można tylko dziesięcioma sposobami rozłożyć na iloczyn trzech czynników naturalnych. Najprościej to będzie tak: rozłożyć ją na czynniki pierwsze. To się robi tak. Dzielimy 90 przez ... cokolwiek, przez co można. Na przykład przez 2. Dostajemy 45. Dzielimy 45 przez co się da. Niech będzie 3. Wynik jest równy 15. A 15 to  $5 \cdot 3$ . Stąd  $90 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3$ , po uporządkowaniu mamy  $90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ . Kombinując liczby 2, 3, 5 (przy czym trójkę możemy brać dwukrotnie), otrzymujemy wymienione rozkłady. A więc korzystamy z możliwości rozłożenia każdej liczby naturalnej na iloczyn liczb, których już ... dalej rozłożyć nie można, chyba że jednym z czynników będzie jedynka. Takie liczby nazywamy pierwszymi. Co więcej, dla każdej liczby naturalnej taki rozkład jest tylko jeden, jeżeli nie będziemy zwracać uwagi na uporządkowanie czynników. Jeżeli dopuścimy do rozważań i liczby ujemne (to znaczy weźmiemy pod uwagę zbiór liczb całkowitych), to będzie podobnie: każdą liczbę całkowitą można rozłożyć na iloczyn liczb, których już dalej rozłożyć nie można i każde dwa rozkłady tej samej liczby różnią się co najwyżej порядkiem i znakami czynników.

Suma liczb całkowitych jest liczbą całkowitą, ich iloczyn też. Matematycy nazywają pierścieniami liczbowymi te zbiory liczb, dla których i suma, i różnica i iloczyn liczb z danego zbioru znów do tego zbioru należy. Pierścieniem jest zbiór wszystkich liczb całkowitych, a nie jest nim zbiór liczb naturalnych.

Możemy powiedzieć: w pierścieniu złożonym z wszystkich liczb całkowitych zachodzi prawo jednoznaczności rozkładu i dlatego mogliśmy łatwo i stosunkowo szybko rozwiązać zadanie o moich córkach. Wydawać by się mogło, że takie prawo winno obowiązywać w każdym pierścieniu liczbowym — przecież działania arytmetyczne na wszystkich liczbach polegają na tym samym. Są jednak proste przykłady pierścieni, w których to prawo nie obowiązuje. W pierścieniu złożonym z liczb postaci  $m + n\sqrt{7}$  (gdzie  $m, n$  — całkowite) mamy  $6 = (1 + \sqrt{7}) \cdot (1 - \sqrt{7}) = 2 \cdot 3 = (2 + 0\sqrt{7}) \cdot (3 + 0\sqrt{7})$ , a liczb 2, 3,  $1 + \sqrt{7}$ ,  $1 - \sqrt{7}$  już dalej rozłożyć nie można w tym pierścieniu.

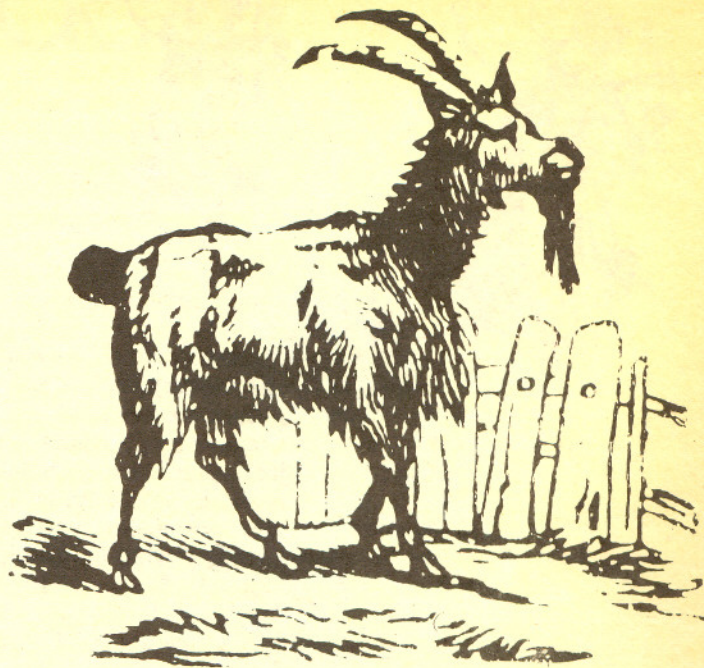
Interesujące, że gdybyśmy zamiast 7 wzięli 2 (to znaczy rozpatrywali pierścień liczbowy złożony z liczb postaci  $m + n\sqrt{2}$ ), to własność jednoznaczności rozkładu znów miałyby miejsce. Nie dla wszystkich pierścieni umiemy odpowiedzieć, czy obowiązuje w nich prawo jednoznaczności rozkładu. Niekiedy to zagadnienie jest tak trudne, że rozstrzygnięcie go przyniosłoby autorowi znaczne zaszczyty.





## Bajka o trójkącie

Czyż zawsze o lwie, wilku i liszce hultajce?  
Nie, nic o nich nie powiem w mojej pierwszej bajce.  
Choć się w pierwszym mym kroku nowością zalecę:  
Powiem bajkę o zacytnym trójkącie ABC.  
Raz wielki matematyk, nad ludzi wzniesiony,  
Mierząc gwiazdy, planety, licząc miliony,  
Trójkąt rozwartokątny na świstku nakryślił,  
Spojrzał w niebo — i nie wiem o czym się zamyślił.  
Wtem hałas i krzyk wielki. Co znaczą te wrzaski?  
W trójkącie zakreślonym wszczęły się niesnaski:  
Kąt C był szeroki i wielce rozwartany,  
Więc jak magnat, zwyczajnie dumny i uparty,  
Z pogardą na dwa inne kąciki spoglądał.  
Koszttem ich jeszcze więcej rozszerzyć się żądał.  
Fuknął: „Po co te chude i liche stworzenia  
Wyglądają tam nędznie spod mego ramienia?”  
Wtem kąt ostry: „Naszą nam nie wyrzucaj małość,  
Na niej się to opiera twoja okazałość:  
Im my mniejsi, tymes ty większy, Mości Kącie;  
Lecz nikt się nie obejdzie i bez nas w trójkącie.  
Niech kto jak chce podobnych wam kątów namnoży,  
Z samych kątów rozwartych trójkąt się nie złoży,  
A my się bez was, wielkich, łatwo obejdziemy —  
— Sami go sobie zrobimy”.



(Wiktor LENKIEWICZ, 1816, r.

cytat wg „Cicer cum caule czyli groch z kapustą” Juliana TUWIMA)

## Rozstrzygnięcie konkursu o trójkącie

W numerze 12/78 ogłosiliśmy konkurs pod hasłem „Znaleźć nowe twierdzenie o trójkącie”. Otrzymaliśmy prace 24 Czytelników, wiele osób nadesłało po kilka twierdzeń. Oto lista uczestników konkursu: Grzegorz Banaszak z Gostynia, Grzegorz Dziewecki ze Świecia nad Wisłą, Ewa Florko z Małomic, Tadeusz Gawski z Tarnowa, Maciej Józefczuk z Wrocławia, Jacek Kulik z Nowego Sącza, Tomasz Kwinta ze Szczawna Zdroju, Tomasz Maszczyk z Olsztyna, Adam i Mirosław Matłęgowie ze Skoczowa, Bogusław Miszczyk z Kielc, Waldemar Lewandowski z Bełchatowa, Stefan Pietrzak z Przemyśla, Sławomir Prochocki z Ełku, Krzysztof Przewlocki z Opola, Grażyna Rewińska z Limanowej, Jerzy Siwek z Różana, Romuald Szoka z Łodzi, Małgorzata Toper z Lubienia, Ryszard Wojtkiewicz z Sieradza, Andrzej Zadrozny z Wrocławia, Krzysztof Zawadzki z Gdańska. Dwa listy nie zawierały nazwiska nadawcy.

Za najciekawsze z nadesłanych uznaliśmy następujące.

**Twierdzenie.** Jeżeli w trójkącie równoramiennym długość boku ma się do długości podstawy w stosunku „złotym” (tj.  $1 : \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ), to dwusieczne kątów przy podstawie też dzielą się w „złotym” stosunku (rys. 1).

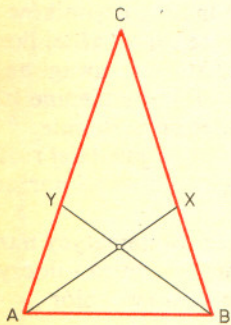
Autorem tego twierdzenia jest Mirosław MATŁĘGA ze Skoczowa.

Jest to w zasadzie „twierdzenie o jednym trójkącie”, (bo wszystkie trójkąty spełniające powyższe założenia są podobne), ale własność, którą dostrzegł i udowodnił autor, jest oryginalna i bardzo ciekawa (dlaczego akurat dwusieczne?). Dowód autora opiera się na obliczeniu długości wszystkich potrzebnych odcinków i jest żmudny. Po obliczeniu, że kąt przy podstawie danego trójkąta wynosi  $72^\circ$ , można było skorzystać z podobieństwa odpowiednich trójkątów ( $AXB$ ,  $ABC$ , i  $BOX$  na rysunku 1). Można było także sprowadzić dowód twierdzenia do wniosku z niego: przekątne pięciokąta foremnego dzielą się w stosunku złotym (rys. 2). Takie twierdzenie jest spotykane w literaturze dość często. Na drugim miejscu postawiliśmy twierdzenie brzmiące jak następuje:

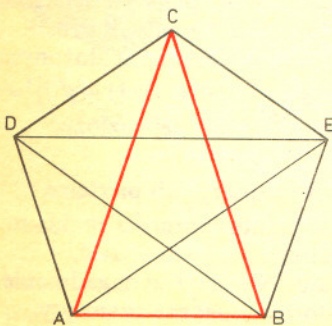
Na przedłużeniach boków dowolnego trójkąta  $ABC$  odkładamy odcinki  $AX$ ,  $AY$ ,  $CZ$ ,  $CT$ ,  $BU$ ,  $BW$  tak, by ich długości były proporcjonalne do długości boków, na których przedłużeniach leżą:

$$\frac{|AX|}{|AC|} = \frac{|AY|}{|AB|} = \frac{|CZ|}{|BC|} = \frac{|CT|}{|AC|} = \frac{|BU|}{|AB|} = \frac{|BW|}{|BC|}.$$

Wówczas punkty  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ,  $T$ ,  $U$ ,  $W$  leżą na jednym okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt jest równoboczny.



Rys. 1. Jeżeli  $AC$  i  $AB$  mają się do siebie w stosunku złotym, to  $AX$  i  $AY$  też.



Rys. 2. Przekątne pięciokąta foremnego dzielą się w stosunku złotym.

Autorem tego twierdzenia jest *Grzegorz BANASZAK* z Gostynia. Uznaliśmy, że pewną skazą na elegancji tego interesującego twierdzenia jest jego „oczywistość” („jeśli się dobrze przyjrzeć, to musi tak być”). Przesłany przez autora dowód jest także zbyt zawiły. Wykorzystując fakt, że każdy trójkąt można otrzymać z trójkąta równobocznego przez rzutowanie, dowód mógłby być napisany w kilku liniijkach.

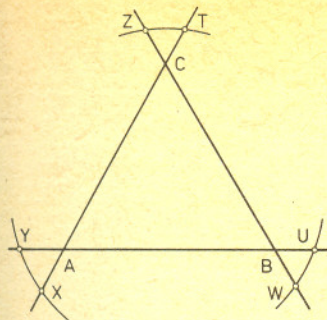
Na „brązowy medal” zasłużyło naszym zdaniem

**Twierdzenie.** *Trójkąt można na co najwyżej jeden sposób podzielić na trzy trójkąty o równych obwodach* (rys. 4) nadesłane przez *Waldemara LEWANDOWSKIEGO* z Bełchatowa. Dokładniej istnieje co najwyżej jeden punkt  $X$  taki, że trójkąty  $ABX$ ,  $ACX$ ,  $BCX$  mają równe obwody.

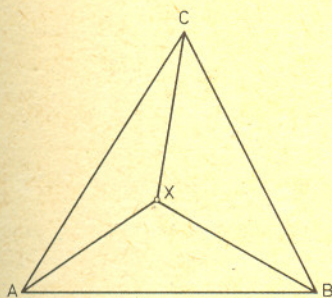
To twierdzenie zdobyłoby wyższą lokatę, gdyby autor zadbał o precyzyjne uzasadnienie, dlaczego (i czy w ogóle) punkt o żądanych własnościach istnieje. Jest to bowiem nieco trudniejsze zadanie. Przyznaliśmy też dwa „wyróżnienia” dla młodszych uczniów *Adama MATŁĘGI* ze Skoczowa i *Ewy FLORKO* z Małomic. Przesłane przez nich prace zawierały twierdzenia znane (i spotykane nawet w niektórych podręcznikach), jednak przesłane przez autorów sformułowania, dowody i wnioski świadczą o samodzielności i pewnych „zdolnościach badawczych” autorów. Dziękujemy wszystkim uczestnikom, a zwycięzcom wysyłamy nagrody.

A oto kilka spostrzeżeń dotyczących konkursu

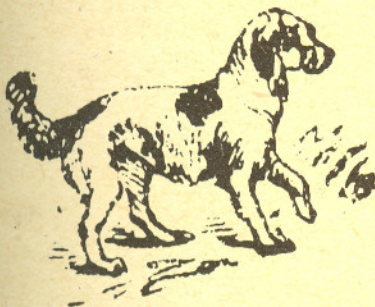
1. Nie nadeszła żadna praca z Warszawy (gdyby konkurs dotyczył filozofii matematyki, to z samego XIV Liceum im. Klementa Gottwalda otrzymalibyśmy pewnie kilkanaście listów).
  2. Autorzy popełniali dużo błędów logicznych, polegających przeważnie na tym samym: zakładali, że ich twierdzenie jest prawdziwe, i opierając się na tym dochodzili do jakiegoś znanego twierdzenia i konkludowali „doszliśmy do zdania prawdziwego, więc i wyjściowe twierdzenie jest prawdziwe, c.b.d.o.” (nic dziwnego, skoro na początku przyjęło się, że tak jest!). Błędów tego typu było zbyt wiele.
  3. Sporo dowodów można było uprościć i zdecydowanie leżało to w zasięgu możliwości autorów.
  4. Kilka twierdzeń stanowiło inną wersję dobrze znanych podręcznikowych własności. Kto z Czytelników dostrzeże od razu związek twierdzenia *Jeżeli boki dowolnego trójkąta stanowią średnice okręgów, to odcinki łączące punkty przecięcia boków lub ich przedłużeń tymi okręgami z przeciwległymi wierzchołkami tego trójkąta przecinają się w jednym punkcie,*  
z  
*Wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie?*
5. Otrzymałymi 3 uogólnienia twierdzenia Pitagorasa, wszystkie sprowadzające się do następującego  
*Jeżeli na bokach trójkąta prostokątnego zbudujemy figury podobne, to pole figury zbudowanej na przeciwprostokątnej jest sumą pól dwu pozostałych figur,* zamieszczonego np. w książce „Czy umiecie się dziwić” (Ossolineum 1978). Takiego twierdzenia Pitagorasa uczyli się m.in. Kościuszko i Mickiewicz.



Rys. 3



Rys. 4



## Zadania

Redaguje mgr Krzysztof NOWINSKI

**M 199.** Niech w trójkącie  $ABC$  będzie  $CA \neq CB$ . Wykazać, że punkt przecięcia symetralnej odcinka  $\overline{AB}$  z dwusieczną kąta  $ACB$  leży na okręgu opisanym na trójkącie  $ABC$ .

Rozwiązanie na str. 12

**M 200.** Zbudować trójkąt mając dane długości  $h, d, m$  odpowiednio: wysokości poprowadzonej z wierzchołka  $A$ , dwusiecznej kąta  $CAB$  i środkowej odcinka  $BC$ . Zakładamy, że  $h < d < m$ .

Rozwiązanie na str. 9

**M 201.** Czy w sześciacie o krawędzi długości 1 można zmieścić kwadrat o boku dłuższym niż 1?

Rozwiązanie na str. 10

Redaguje dr Halina ABRAMOWICZ

**F 67.** Rozpryskiwacz do polewania trawnika ma nasadkę sferyczną (kąąt rozwarcia  $2\alpha_0 = 90^\circ$ , patrz rysunek) z dużą liczbą jednakowych otworów. Jeśli otwory są rozmieszczone równomiernie, to trawnik nie będzie polewany równomiernie. Jaki powinien być rozkład liczby otworów na powierzchni nasadki, aby trawnik był polewany równomiernie. Zakładamy, że promień nasadki jest mały w porównaniu z rozmiarami trawnika i że nasadka jest położona na jednym poziomie z powierzchnią trawnika.

Rozwiązanie na str. 11

