

h=6.63·10<sup>-34</sup> J·s  $\hbar=3,141593$

CENA 5 ZŁ

NR 6 (66) 1979

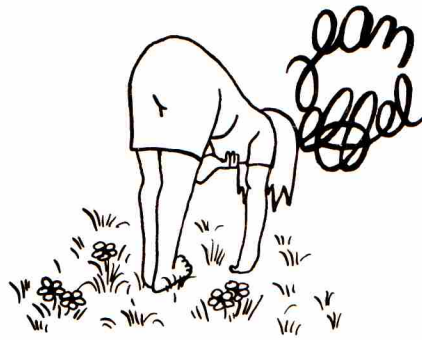
ISSN 0137-3005

POPULARNY MIESIĘCZNIK MATEMATYCZNO-FIZYCZNY

# o e i o







## SPIS TREŚCI

### NUMERU 6(66)

Obraz świata	str. 1
O liczbach nieosiągalnych <i>Mgr Andrzej Pelc</i>	str. 2
Powstanie teorii kwantowej <i>Prof. dr Grzegorz Białkowski</i>	str. 4
Probabilistyczne algorytmy sprawdzania, czy dana liczba jest pierwsza <i>Dr hab. Antoni Kreczmar</i>	str. 6
Od magnezu i bursztynu... <i>Doc. dr Michał Świącki</i>	str. 8
Drobiazgi	str. 11
Zadania	str. 11
Jabłko i Księżyc <i>Mgr Danuta Mazurek</i>	str. 12
Patrz w niebo	str. 15
Mała Delta	str. 16

### W następnym numerze: SERDECZNIE WITAMY ASTRONOMIĘ

Nasza okładka: kalejdoskopy,  
 foto: T. WOJSZCZ

Rys. techniczne: B. KRETKIEWICZ

### Uwaga akustyki!

Obliczana przez Was częstotliwość akustycznego sygnału telewizyjnego („Delta” 5/1979) wynosi 1000 Hz = 1 kHz

REDAKCJA

„Delta”  
 matematyczno-fizyczny miesięcznik popularny  
 Polskiego Towarzystwa Matematycznego i Polskiego Towarzystwa Fizycznego  
 wydawany przy poparciu Ministerstwa Oświaty i Wychowania  
 Komitet Redakcyjny

doc. dr J. Bartke  
 doc. dr A. Bączyński  
 doc. dr B. Gleichgewicht  
 prof. dr K. Goebel  
 doc. dr B. Iwaskiewicz  
 doc. dr T. Iwiński  
 doc. dr A. Januszajtis  
 prof. dr L. Jeśmanowicz  
 mgr H. Kaczorek  
 prof. dr M. Kuczma  
 mgr A. Mąkowski  
 prof. dr Z. Pawlak  
 prof. dr A. Piekara  
 prof. dr Z. Semadeni  
 prof. dr J. Stankowski  
 prof. dr M. Subotowicz  
 doc. dr S. Turnau

doc. dr J. Wdowczyk  
 prof. dr Janusz Zakrzewski —  
 wiceprzewodniczący  
 prof. dr Wojciech Żakowski —  
 przewodniczący

Redaguje Kolegium w składzie:  
 doc. dr T. Hofmokl — z-ca red. nac.  
 B. Jąworska-Kordos — ilustracje  
 dr M. Kordos — red. nac.  
 dr K. Prażmowski — red. techn. graf.  
 mgr K. Szypcio — sekr. red.  
 dr M. Szurek  
 doc. dr M. Świącki  
 Adres Redakcji  
 ul. Hoża 69 pok. 151,  
 00-681 Warszawa

Zakład Narodowy im.  
 Ossolińskich — Wydawnictwo  
 Wrocław, Oddział w Warszawie  
 Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.  
 wyd.; 2,50 ark. druk.;  
 papier offsetowy III kl. 80 g. 61 × 86  
 Wydrukowano w Drukarni im.  
 Rewolucji Październikowej  
 Warszawa ul. Mińska 65.  
 Nr zam. 324/79 C-36

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60, — cena prenumeraty półrocznej zł 30 —

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach:

— do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i cały rok następny  
 — do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego.  
 Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienie w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”.

Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW, oraz prenumeratory indywidualni zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej

### Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.  
 Sprzedż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.  
 Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Konto PKO I OM W-wa 1531-912

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław  
 w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa  
 w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7 00-068 Warszawa, Poland or with  
 — Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland.  
 — Earls Court Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain,  
 — Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia

Cena 1 egzemplarza zł 5 — nr indeksu 35723/35550



## Obraz świata



Powszechnie uważa się, że świat zbudowany jest w taki sposób, jak chcą tego współcześnie obowiązujące teorie fizyczne. Jako zaprzysiężeni fizycy nie będziemy z tym poglądem dyskutować. Wskażemy jedynie na kilka związanych z tym zagadnień.

Przekonanie o spójności obrazu świata i opisującej go teorii fizycznej jest równoważne z uznaniem pewnej teorii za prawdziwą. Uznanie to następuje automatycznie wtedy, gdy pewna niesprzeczna logicznie teoria opisująca szeroki krąg zjawisk daje przewidywania potwierdzone z dowolną dokładnością w dalszych doświadczeniach. Dowolnie szeroki krąg zjawisk można opisywać na wiele sposobów. Tak się jednak składa, że tylko teorie o względnie prostej strukturze formalnej i pojęciowej doczekały się pozytywnych testów doświadczalnych. Inne zostały szybko obalone. Nie znaczy to wcale, że istniejących prostych teorii nie można w dowolny sposób skomplikować zachowując ich zdolność przewidywania. Komplikacje takie, polegające na przykład na dopisywaniu do równań małych, praktycznie niewykrywalnych wyrazów, można wprowadzić dopiero po stworzeniu pierwotnej prostej teorii. Tylko wtedy bowiem wiemy co i jak mierzyć, a w związku z tym również, co jest praktycznie niemierzalne. Prostota uznanych teorii fizycznych jest ich bardzo ważną cechą. Zdajemy sobie przy tym sprawę z faktu, że opinia ta jest sprzeczna ze zdaniem autorów wielu artykułów i książek popularyzujących fizykę.

W historii każdej teorii fizycznej następuje moment, kiedy wyniki pewnych nowych doświadczeń przestają się zgadzać z przewidywaniami. Teoria przestaje być prawdziwa. Czy zmienia się przez to cały dotychczasowy obraz świata?! Na szczęście nie. Dobra teoria powstaje zawsze jako pewne przybliżenie teorii nowej, ogólniejszej i dokładniejszej. Jest to jednak własność tylko teorii naprawdę prostych i eleganckich. Mechanika Arystotelesa wiążąca przyczynę działania (siłę) z prędkością nie jest przybliżeniem żadnej współczesnej teorii, podczas gdy mechanika Newtona jest bardzo dobrym przybliżeniem (dla niezbyt dużych prędkości) obowiązującej obecnie teorii względności. W mechanice Arystotelesa każdy rodzaj spadku swobodnego (rzut pionowy, poziomy i ukośny z różnymi prędkościami początkowymi) musiałby mieć inną przyczynę (siłę). W mechanice newtonowskiej przyczyna jest jedna (siła grawitacji) i w odpowiednim układzie odniesienia każdy spadek wygląda tak samo. Prostota tego opisu jest uderzająca. Podobnie prosta i pełna wyjątkowo dokładnych przewidywań jest teoria fal elektromagnetycznych Maxwella-Faradaya. Nie bacząc więc na fakt, że nikt tych fal nie dotknął i że nie ma żadnego ośrodka sprężystego (eteru), który by je przynosił, nie wahamy się twierdzić, że falami elektromagnetycznymi wypełniona jest cała pozornie pusta przestrzeń. Przekonują nas o tym wszystkie doświadczenia z udziałem ładunków i prądów elektrycznych, ale przecież nie mamy całkowitej pewności, że doświadczeń tych nie da się opisać inaczej.

Teoria Maxwella-Faradaya też jest tylko przybliżona. Dokładna jest obecnie mechanika kwantowa, w której fale elektromagnetyczne „składają się” z pojedynczych cząstek — fotonów. To nawet łatwiej sobie wyobrazić. Cząstki mogą przecież poruszać się w próżni, ale jak próżnia może drgać! Wszystko więc składa się z mikroskopijnych cząstek: materia z protonów i elektronów (i innych), a promieniowanie z fotonów. Taki obraz świata obowiązywał na początku XX wieku i taki też pozostał do dzisiaj. Tyle tylko, że obecnie nie wyobrażamy sobie cząstek w postaci maleńkich kulek, ale zmuszeni jesteśmy przyjąć, że każda z nich zachowuje się statystycznie. Jak naczynie z nieznanym gazem.

Dlaczego fotony nie mogą być zbiorem kulek? To proste. Zbiór kulek nie może na przykład interferować i dlatego nie jest żadną falą. Falą więc musi być każdy foton z osobną. Falą kulistą, płaską, wreszcie jaką chcemy. Z analizy zjawiska fotoelektrycznego wiemy jednak, że fala elektromagnetyczna dowolnego kształtu zawsze przekazuje swą energię elektronom porcjami ( $E = h\nu$ ) w bardzo małym obszarze. Fotony muszą być bardzo małe, nawet wtedy, gdy są falą kulistą (pochodzącą z punktowego źródła światła) o rozmiarach 10 m. Doszliśmy do sprzeczności. Każda teoria fizyczna dochodziła w swym rozwoju do jakiegoś podobnego typu sprzeczności natury pojęciowej bądź formalnej i zawsze rozwiązanie ich okazywało się bardzo owocne. Mechanika w wersji newtonowskiej posługiwała się pojęciem natychmiastowego przenoszenia oddziaływań na dowolne odległości, co nie podobało się już samemu Newtonowi. Rozwiązanie tego problemu przez wprowadzenie pośredniczącego pola i jego fal doprowadziło do powstania szczególnej teorii względności. Ta teoria również miała brak, którym była niezadowolająca definicja inercjalnego układu odniesienia i związana z tym niemożność opisanego oddziaływań grawitacyjnych. Prawdziwy układ inercjalny to przecież układ spadający swobodnie w polu grawitacyjnym. A znów jedynie w układach inercjalnych obowiązują prawa szczególnej teorii względności. Pogodzenie tego wszystkiego dało einsteinowską ogólną teorię względności. Teoria fal elektromagnetycznych powstała w wyniku rozwiązania sprzeczności tkwiącej w teorii indukcji elektromagnetycznej Faradaya. Teoria ta prowadziła w niektórych wypadkach do naruszenia prawa zachowania ładunku. Maxwell usunął tę sprzeczność i w wyniku otrzymał, że nie tylko zmienne pole magnetyczne jest źródłem zmiennego pola elektrycznego, ale również zmienne pole elektryczne jest źródłem zmiennego pola magnetycznego. A to były już fale. Sprzeczność napotkaną poprzednio dla fotonu usunięto przez wprowadzenie opisu statystycznego.





Tak więc foton oddziałuje z materią w postaci niewielkiego obiektu, ale nie potrafimy przewidzieć, gdzie nastąpi to oddziaływanie. Możemy obliczyć jedynie prawdopodobieństwo dla każdego takiego miejsca i prawdopodobieństwo to rozchodzi się (?) jak fala. Fala fotonowa ma określoną długość i częstość ( $E = h\nu$ ,  $p = \frac{h}{\lambda}$ ), a równania, za pomocą których możemy obliczyć jej własności, to nic innego, jak stare równania Maxwella-Faradaya. I to właśnie nazywamy teorią kwantową (w wersji dla fotonów nazywamy ją elektrodynamiką kwantową). Bardzo dziwna to teoria. Przeszła ona jednak wszystkie testy doświadczalne. Dzięki niej zbudowano tranzystory i lasery. Czego jeszcze chcecie?! Że jakoś serce ściskają te prawdopodobieństwa... Jaki więc jest ten obraz świata dyktowany przez uznaną powszechnie teorię kwantową? Czy musimy raz na zawsze uwierzyć, że cała otaczająca nas materia składa się z obiektów nieprecyzyjnych o własnościach, które z natury rzeczy nie są jednoznaczne? Chyba nie. Zwróćmy bowiem uwagę na fakt, że rozmiary elektronu nie są większe niż  $10^{-17}$  m, a osiągalna dokładność pomiaru położenia wynosi nie więcej niż  $10^{-7}$  m. Dziesięć rzędów wielkości! Czy możemy więc twierdzić, że wszystko o tym elektronie wiemy? Czy butla z gazem umieszczona na Marsie ujawniłaby nam swój skład, rodzaje i pędy cząsteczek oraz siły działające między nimi? Nawet temperaturę trudno byłoby zmierzyć. Trzeba by było bowiem zbadać promieniowanie tej butli. Podobnie badamy cząstki przez ich oddziaływania elektromagnetyczne z przyrządami (ślady jonizacyjne w kliszach i komorach pęcherzykowych). Już z samej natury tych doświadczeń wynika konieczność posługiwania się opisem statystycznym. Ponieważ jednak nie wszystkim taki opis się podoba, tak jak nie podobało się newtonowskie oddziaływanie na odległość, to może warto szukać innego. Na to pytanie nie ma właściwie odpowiedzi. Mechanika kwantowa jest teorią prawdopodobnie niesprzeczną formalnie i świetnie zgadza się z doświadczeniem. Podobnie jak teoria Newtona 200 lat temu. Tylko te nieprecyzyjne fotony nie mieszczą się w głowie. Na zakończenie trzeba jednak zwrócić uwagę na fakt, że nie wszystko w teorii kwantowej jest zupełnie w porządku. Nie udało się dotąd opisać przy jej pomocy oddziaływań grawitacyjnych. Jako niesłychanie słabe wydają się one zupełnie bez znaczenia dla zachowania się cząstek. A jednak... Gdyby Wszechświat był tworem zamkniętym, co dopuszcza ogólna teoria względności, wtedy, zgodnie z prawami mechaniki kwantowej, czas i przestrzeń powinny być dyskretne, nieciągłe. Może więc mikrozasoprzestrzeń jest właśnie nieciągła. Wbrew pozorom można by to zmierzyć, wykorzystując relatywistyczny efekt spowolnienia czasu w układach poruszających się bardzo szybko. Doświadczeń takich nie da się jednak na razie wykonać. Wciąż więc nie ma, niestety, żadnych powodów, żeby cokolwiek zmieniać w istniejącej strukturze teorii.

Świat jest tak zbudowany,  
jak Bóg to sobie obliczył.  
Gottfried Wilhelm Leibniz

Czy jednak ludzie obliczają teraz tak, jak to robił Bóg? Czy matematyka naprawdę dobrze nadaje się do opisu rzeczywistości?



## O liczbach nieosiągalnych

Mgr Andrzej PELC

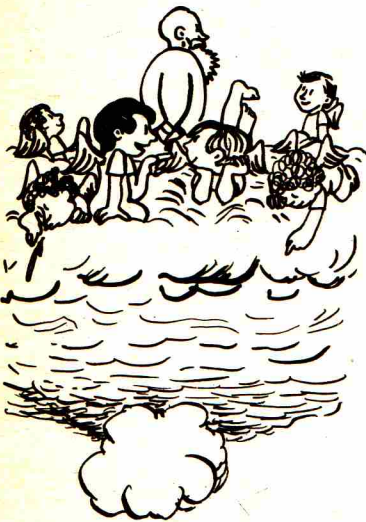


Zbiory skończone umiemy porównywać pod względem wielkości. Najprostszy sposób, to policzyć, ile elementów ma każdy z nich, i porównać otrzymane liczby naturalne. Większy będzie ten zbiór, którego liczba elementów okaże się większa.

Można jednak postąpić inaczej. Wyobraźmy sobie salę balową, w której jest wiele osób. Jak bez liczenia przekonać się, czy jest więcej kobiet, czy mężczyzn? Wystarczy, że orkiestra zagra dobrą muzykę taneczną; balowicze połączą się w pary (to jest bal, a nie dyskoteka) i każdy, kto tylko znajdzie partnera, ruszy w tany. Rzut oka na salę pozwoli stwierdzić, która płeć była liczniej reprezentowana: jeśli pozostali panowie bez tancerek — było ich więcej, jeśli panie bez partnerów one stały się liczniej. Jeśli zaś nikt nie podpira ścian, panowała idealna równowaga liczebna. Zwróćmy uwagę, że ten drugi sposób porównywania wielkości zbiorów ma pewną przewagę nad pierwszym. Obywa się on mianowicie bez pojęcia liczby i dzięki temu daje się łatwo uogólnić na zbiory nieskończone. Trzeba tylko odpowiednio sprecyzować pojęcie ustawiania w pary. Powiemy mianowicie, że zbiory  $A$  i  $B$  są równoliczne, jeśli istnieje funkcja, przekształcająca zbiór  $A$  na cały zbiór  $B$ , o tej własności, że różnym elementom przypisuje różne wartości. Podobnie, zbiór  $B$  jest liczniejszy od zbioru  $A$ , jeśli nie ma funkcji odwzorowującej  $A$  na cały zbiór  $B$ . W naszym przykładzie sali balowej pierwsza sytuacja odpowiada przypadkowi, gdy wszyscy mogli zatańczyć,



Zauważmy jednak, że jeżeli zbiory  $A$  i  $B$  są nieskończone, to czasem można ich elementy ustawić w pary tak, że np. tylko jeden element zbioru  $A$  zostanie bez pary, na przykład:  $A =$  = zbiór liczb naturalnych,  $B =$  zbiór liczb naturalnych,  $f(n) = n + 1$ , albo dwa (...  $f(n) = n + 2$ ), albo np. bez pary będzie nieskończenie wiele elementów z  $B$  (...  $f(n) = 100 \cdot n$ ).



a druga, gdy pewna ilość osób którejś płci została bez pary. Nasza definicja jest ogólna, nie ogranicza się bynajmniej do przypadku zbiorów skończonych. Możemy teraz zbiorom przyporządkować pewne obiekty zwane liczbami kardynalnymi w ten sposób, by ten sam obiekt przyporządkowany był zbiorom  $A$  i  $B$  wtedy i tylko wtedy, gdy są one równoliczne. Liczbę kardynalną zbioru  $A$  oznaczamy  $|A|$ . Liczba kardynalna danego zbioru informuje nas więc, ile ma on elementów w tym samym sensie, w jakim czyni to liczba naturalna określająca ilość elementów zbioru skończonego. Dla zbiorów skończonych liczba kardynalna zbioru jest to ta właśnie liczba naturalna. Z dwóch liczb kardynalnych  $m$  i  $n$  ta jest większa, która przyporządkowana została zbiorowi liczniejszemu. Piszemy  $m < n$ , gdy  $n$  jest większa od  $m$ .

Łatwo można podać przykład nieskończenie wielu liczb kardynalnych, mianowicie wszystkie liczby naturalne. Istnieje jednak również wiele różnych liczb kardynalnych przyporządkowanych zbiorom nieskończonym. Jako przykład niech posłużą tu:

liczba kardynalna zbioru liczb naturalnych,  
liczba kardynalna zbioru liczb rzeczywistych,  
liczba kardynalna zbioru funkcji o argumentach rzeczywistych przyjmujących wartości rzeczywiste.

Można udowodnić, że żadne z wymienionych zbiorów nieskończonych nie są równoliczne, a więc odpowiadające liczby kardynalne są różne (wypisane są w kolejności od najmniejszej do największej). Można również udowodnić, że zbiór podzbiorów danego zbioru  $X$  (oznaczany  $P(X)$ ) jest zawsze od niego liczniejszy, tak więc możemy wypisać ciąg zbiorów nieskończonych coraz liczniejszych:  $N, P(N), P(P(N)), \dots$ . Odpowiadający mu ciąg liczb kardynalnych będzie więc ściśle rosnący.

Zastanówmy się teraz, w jaki sposób można tworzyć zbiory coraz liczniejsze. Jedną metodą to tworzenie zbioru podzbiorów, o czym była mowa powyżej. Drugą zaś to tworzenie sum zbiorów. Zauważmy, jaką właściwość ma pierwsza liczba kardynalna odpowiadająca zbiorowi nieskończonemu (jest to liczba kardynalna zbioru liczb naturalnych oznaczana hebrajską literą  $\aleph_0$ ): obie wymienione operacje dokonywane na zbiorach o mocach mniejszych od tej liczby dają zbiory o mocy w dalszym ciągu od niej mniejszej. Dokładniej

1. Liczba kardynalna zbioru podzbiorów zbioru skończonego jest skończona (tj. mniejsza od  $\aleph_0$ ).
2. Liczba kardynalna sumy skończonej ilości zbiorów skończonych jest skończona.

Wprowadźmy teraz następującą definicję: liczbę kardynalną  $m$  nazywamy liczbą nieosiągalną wtedy i tylko wtedy, gdy:

1. Jeżeli  $|X| < m$ , to  $|P(X)| < m$ .
2. Jeżeli  $\mathcal{A}$  jest rodziną zbiorów taką, że  $|\mathcal{A}| < m$  i wszystkie zbiory  $A$  należące do rodziny  $\mathcal{A}$  mają liczbę kardynalną mniejszą od  $m$ , to suma zbiorów rodziny  $\mathcal{A}$  ma liczbę kardynalną mniejszą od  $m$ .

Można powiedzieć, że liczba nieosiągalna to taka, której nie można wyprodukować stosując na mniej licznych zbiorach wspomniane operacje.

Jakie są przykłady liczb nieosiągalnych? Wszyscy Czytelnicy zauważą z pewnością, że najmniejszą taką liczbą jest 0. Nie jest ona jednak specjalnie ciekawa, więc pominiemy ją w dalszych rozważaniach. Następną liczbą nieosiągalną jest — jak zostało wyżej zauważone —  $\aleph_0$ , pierwsza liczba kardynalna nieskończona. Dalsza liczba nieosiągalna byłaby więc w stosunku do mniejszych od niej liczb tym, czym  $\aleph_0$  jest w stosunku do liczb skończonych. Można więc traktować ją jako „hipernieskończoną”. Pytanie, czy istnieje liczba nieosiągalna większa od  $\aleph_0$ , wydaje się być interesujące. Wszyscy niemal matematycy zakładają istnienie zbiorów nieskończonych, jak więc jest z „hipernieskończonymi”?

Pytanie to jest jednym z najważniejszych nie rozwiązanych problemów współczesnej teorii mnogości. Jego pozycja w matematyce wydaje się dość osobliwa. Udowodniono, że pozytywna odpowiedź nie może zostać wykazana, nadal jednak otwarty pozostaje problem, czy można dać odpowiedź negatywną; tj. czy można udowodnić w matematyce, że nie ma liczb nieosiągalnych większych od  $\aleph_0$ .

Co pewien czas specjalistów od teorii mnogości elektryzuje wiadomość, że ktoś udowodnił nieistnienie tych liczb. Pewna grupa osób gorątkowo studiuje nowy dowód, aż wreszcie okazuje się ... że jest to kolejny fałszywy alarm: w dowodzie tkwi mniej lub bardziej widoczny błąd.

Jedni matematycy wierzą, że kiedyś uda się wykazać nieistnienie nieprzeliczalnych liczb nieosiągalnych. Są tacy, którzy strawili całe lata bezskutecznie próbując znaleźć dowód. Inni sceptycznie odnoszą się do tych wysiłków i skłonni są dodawać hipotezę istnienia dużych liczb nieosiągalnych do powszechnie przyjmowanych aksjomatów teorii mnogości. W uzyskanej w ten sposób silniejszej teorii dowodzą twierdzeń, których nie udałoby się wykazać bez tego założenia. Z ulgą witają oni wiadomość, że kolejna próba obalenia hipotezy liczb nieosiągalnych spełzła na niczym.

Plotki o nowym rewelacyjnym dowodzie nasilają się zwłaszcza w okresie primaaprilisowym. Na kawał o „dowodzie, który tym razem jest z pewnością bezbłędny”, mimo że często używany, zawsze nabierają się jacyś naiwni. Jeśli więc w którymś numerze Delty znajdziecie nadzwyczajny dodatek pt. „Nie ma nieprzeliczalnej liczby nieosiągalnej”, sprawdźcie, czy nie jest to numer kwietniowy.



#### Rozwiązanie zadania M 197

Prawdopodobieństwo przekazania wiadomości linią bezpośrednią jest oczywiście równe  $p$ . Aby znaleźć prawdopodobieństwo przekazania wiadomości siecią z drugiego wariantu, oznaczmy przez  $A_1$  zdanie mówiące, że na odcinku  $a_1$  nie ma uszkodzenia. Jeżeli linia  $a_1$  jest sprawna, to przekazanie wiadomości z  $A$  do  $B$  jest możliwe, gdy zachodzi

$$Z_1 = (A_2 \vee A_4) \wedge (A_3 \vee A_5).$$

Prawdopodobieństwo tego wynosi, jak nietrudno obliczyć,  $(1 - (1 - p)^2)^2$ . Jeżeli linia  $a_1$  jest niesprawna, to musi zajść

$$Z_2 = (A_2 \wedge A_3) \vee (A_4 \wedge A_5).$$

Prawdopodobieństwo tego zdarzenia wynosi  $1 - (1 - p)^2$ . Prawdopodobieństwo przekazania wiadomości siecią jest sumą  $p \cdot P(Z_1) + (1 - p) \cdot P(Z_2)$  i wynosi zatem  $p(2p^4 - 5p^3 + 2p^2 + 2p)$ . Drugi wariant połączenia będzie pewniejszy, gdy  $p(2p^4 - 5p^3 + 2p^2 + 2p) - p > 0$ , tj.

$$p(p-1) \left( p - \frac{1}{2} \right) (p^2 - p - 1) > 0, \text{ zatem gdy}$$

$$\frac{1}{2} < p < 1.$$



# Powstanie teorii kwantowej

Prof. dr Grzegorz BIAŁKOWSKI



W ostatnich latach XIX i pierwszych XX wieku fizyka przeżywała jedyny jak dotąd kryzys w swoich dziejach. Co to właściwie znaczy „kryzys” w odniesieniu do fizyki? Normalny, „niekryzysowy” bieg wydarzeń jest taki (niestety, jakże rzadko się to zdarza!), że napływają ciągle nowe dane doświadczalne i że wszystkie te dane znajdują swoje wyjaśnienie ilościowe w istniejącej już teorii. Jeśli nowe dane nie pojawiają się i brak też — częściowo zapewne z braku bodźców — nowych idei teoretycznych, to właściwym słowem jest raczej zastój, a nie kryzys. Załóżmy więc, że dane pojawiają się, ale teoria nie jest w stanie wyjaśnić ich ilościowo. Wprawdzie „na oko” wszystko się powinno zgadzać, ale są jakieś haczyki w teorii, nie powstała czy też nie rozwinęła się jakaś technika rachunkowa i oto możemy się pocieszyć tylko jakąś luźną zgodnością jakościową, mimo iż przecież fizyka jest nauką ilościową. Trudno to jeszcze nazwać kryzysem, choć sytuacja jest niepokojąca. Gorzej jest, jeśli nowe dane napływają, teoria jest w stanie przewidzieć wyniki doświadczalne, no i przewidywania te nie są zgodne z wynikami rzeczywistych pomiarów. To właśnie jest kryzys i w takiej sytuacji znalazła się fizyka na przełomie stuleci. Trudno tu byłoby opisywać całość skomplikowanego układu danych, obliczeń i idei teoretycznych, bo jest to raczej temat na całą dużą książkę. A więc tylko poprzestaniemy na kilku uwagach dotyczących historii powstania teorii kwantowej.

Pierwszą jaskółką nadchodzących przemian, choć pozostawała ona potem przez wiele lat na uboczu, jak dziwaczne zwierzę, które trudno jest w jakikolwiek sposób zaklasyfikować, było odkrycie skromnego nauczyciela gimnazjum w Bazylei, Balmera, dokonane w r. 1885, że kilka (cztery) linii promieniowania atomów wodoru, znajdujących się w widmie widzialnym, spełnia warunek

$$\lambda = B \frac{n^2}{n^2 - 4}$$

( $\lambda$  — długość fali,  $n = 3, 4, 5, 6$ ,  $B$  — stała). Wzór ten miał dwie zaskakujące własności: po pierwsze bardzo dokładnie opisywał dane doświadczalne, a po drugie był całkowicie niezrozumiały na gruncie teoretycznym.

Innym, jak się okazało, brzemieniem w konsekwencje przykładem zjawiska, którego rzeczywisty obraz nie zgadzał się z istniejącą teorią, był rozkład natężenia w promieniowaniu ciała doskonale czarnego. Oparte na ideach klasycznych rozumowanie, które doprowadziło do prawa znanego dziś jako prawo Rayleigha-Jeansa, nie tylko było niezgodne z danymi, ale w ogóle prowadziło do nonsensownych przewidywań teoretycznych. Prawo Rayleigha-Jeansa mówi bowiem, że w promieniowaniu ciała doskonale czarnego gęstość energii wypromieniowywanej rośnie z częstością fali jak jej kwadrat. Nonsensowność tego prawa dla bardzo dużych częstości  $\nu$  (a więc małych długości) fali jest oczywista. Z drugiej jednak strony istniało pod koniec ubiegłego stulecia półempirycznie wprowadzone prawo Wiena, obowiązujące właśnie dla bardzo wielkich częstości (i dobrze zgadzające się z doświadczeniem w tym obszarze), które przewiduje, że gęstość energii promieniowania maleje wykładniczo z częstością, a ściślej biorąc, maleje jak funkcja wykładnicza mnożona przez trzecią potęgę częstości. Zagadnieniem tym zainteresował się Max Planck, któremu udało się wpaść na poprawną formułę interpolacyjną między prawem Rayleigha-Jeansa (obowiązującym tylko dla małych częstości) i Wiena (dobrym tylko dla częstości dużych). Mówiąc krótko, Planck, bez żadnych głębszych podstaw teoretycznych, odgadł poprawny wzór na gęstość energii wypromieniowywanej przez ciało doskonale czarne. Oczywiście sukces był znaczny, ale jego niezrozumiała przypadkowość zbyt dręczyła Plancka, aby nie starał się on jakoś wzoru tego uzasadnić.

Przełom nastąpił w ostatnich miesiącach roku 1900, na zamknięcie zatem XIX stulecia. Planck zauważył, że jego empiryczny wzór można „wyprowadzić”, jeśli się założy, że promieniowanie ciała doskonale czarnego emitowane jest przez oscylatory, których energia nie może być całkowicie dowolna, lecz musi spełniać warunek

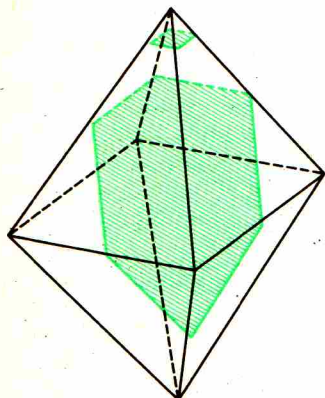
$$E = nh\nu,$$

gdzie  $n = 0, 1, 2, \dots$ , a  $h$  jest pewną stałą, która dziś, słusznie, nosi nazwę stałej Plancka i jest jedną z podstawowych stałych przyrody. Można wątpić, czy Planck przewidywał kolosalną karierę literki „h”, gdy wprowadził ją do swego wzoru na promieniowanie. Jak widać, energia może być przez oscylator pochłaniana i emitowana tylko pewnymi porcjami, które są pewnymi wielokrotnościami najmniejszej porcji, dla której Planck wprowadził nazwę „kwantu” (energii). Łaciński źródłosłów „kwantu” jest mało romantyczny: wszak „quantum” po łacinie znaczy po prostu „ilość”. Oczywiście założenie Plancka, choć prowadziło do poprawnego wzoru na promieniowanie, było od początku do końca niezrozumiałe z punktu widzenia fizyki klasycznej, a nawet z nią sprzeczne. Fizyka klasyczna bowiem zezwala na to, by oscylator miał dowolną



## Rozwiązanie zadania M 198

Ponieważ w każdym wierzchołku ośmiościanu zbiegają się cztery krawędzie, każdy przekrój musi mieć co najmniej cztery boki. Czworokąt foremny otrzymujemy przecinając ośmiościan płaszczyzną symetrii zawierającą cztery wierzchołki (lub do niej równoległą). Ponieważ ośmiościan foremny ma cztery pary ścian równoległych, więc każdy przekrój pięciokątny musi przecinać dwie ściany równoległe. Pewne boki pięciokąta są więc równoległe — a taki pięciokąt nie jest foremny. Sześciokąt foremny otrzymamy, przecinając ośmiościan płaszczyzną przechodzącą przez jego środek i równoległą do jednej ze ścian. Wreszcie dowolny przekrój siedmiokątny musiałby przecinać trzy pary ścian równoległych i jedną z pozostałych. Powstały wielokąt nie byłby foremny. Oczywiście nie ma również przekrojów o większej liczbie boków.







Siła odśrodkowa pojawia się oczywiście jedynie w układzie nieinercyjnym związanym z którymkolwiek poruszającym się ciałem.



wartość energii. Innymi słowy, hipotezę Plancka w r. 1900 trudno było nazwać inaczej, jak łataniem dziury.

I może pojęcie kwantu nie zrobiłoby żadnej kariery w fizyce, gdyby nie dalsze odkrycia. Jednym z nich było zjawisko fotoelektryczne, dobrze nam wszystkim znane, którego charakterystyczne cechy ilościowe znów są zupełnie niezgodne z klasyczną falową teorią światła. Mówią one bowiem, że (a) liczba wybijanych z metalu elektronów zależy od natężenia światła padającego na powierzchnię tego metalu, oraz (b) energia tych elektronów rośnie z częstotliwością fali świetlnej. Zjawisko to wyjaśnił, jak wiemy, Einstein w r. 1905, wprowadzając pojęcie fotonu. Foton, zgodnie z koncepcją Einsteina, miałoby to być cząstka promieniowania elektromagnetycznego, mająca określoną energię i pęd, rosnące z częstotliwością fali świetlnej liniowo, która padając na metal w akcie zderzenia wybija z niego elektrony. To przywrócenie — w pewnej mierze — do łask korpuskularnej teorii światła, wydawałoby się już całkowicie nieaktualnej po stwierdzeniu istnienia ugięcia i interferencji światła, zjawisk typowo falowych, raz jeszcze świadczyło o tym, że dziewiętnastowieczny gmach fizyki zaczyna się kruszyć.

Badania nad promieniotwórczością wprowadziły fizykę wkrótce w głąb atomu. W latach 1910-ych wykonano szereg doświadczeń nad rozpraszaniem cząstek  $\alpha$  na cienkich foliach metalowych (wykonanych ze złota). Okazało się, że mimo, iż przeważająca część cząstek  $\alpha$  po zderzeniu z atomami złota odchyliła się niewiele od kierunku pierwotnego, to jednak nieoczekiwanie dużo tych cząstek odchyliło się o bardzo duży kąt, czasem bliski  $180^\circ$ . Rozpraszanie to, jak wykazał Rutherford, wynika ze szczególnego rozkładu ładunku w atomie. Gdyby ładunek dodatni w atomie był rozmieszczony mniej więcej z jednakową gęstością w całej objętości atomu, na cząstkę  $\alpha$  nigdy nie mogłaby podziałać tak duża siła, która by tę cząstkę odrzuciła praktycznie biorąc wstecz. Wynika to stąd, że siła elektromagnetyczna działająca na ładunek zbliżający się do jednorodnie naładowanej kuli rośnie jak  $1/r^2$ , gdy  $r$  maleje; dzieje się tak jednak tylko do chwili, w której ów ładunek nie zanurzy się w kuli, gdyż wówczas siła maleje jak  $r$ . Tak więc maksymalna wartość siły, która może podziałać na ładunek zbliżający się do kuli, jest tym większa, im mniejszy jest promień owej kuli (przy założeniu, oczywiście, że całkowity ładunek pozostaje bez zmiany). Na podstawie tego rozumowania i odpowiednich obliczeń Rutherford mógł wykazać, że cały ładunek dodatni atomu musi być skupiony w niezwykle małym obszarze, którego promień jest jakieś 100 000 razy mniejszy od promienia atomu. Obszar ten to, jak wiemy, jądro atomowe. Nawiasem mówiąc, Rutherford w swoich obliczeniach używał teorii klasycznej, opartej jeszcze na mechanice newtonowskiej. Doszedł zaś do wniosku zasadniczo z tą teorią sprzecznego.

W teorii klasycznej jedyną możliwością utrzymania równowagi w układzie dwu przyciągających się ciał jest zrównoważenie tej siły przyciągania odpychającą siłą odśrodkową. Innymi słowy, ciała te muszą wokół siebie krążyć. Tak jest na przykład w układzie Słońce-Ziemia i tak mogłoby też być w atomie. Okazuje się jednak, że teoria elektromagnetyzmu przewiduje, że niejednostajnemu ruchowi ładunku musi zawsze towarzyszyć promieniowanie elektromagnetyczne, a więc, w efekcie, utrata energii przez układ. Taka zaś strata — to stopniowe zmniejszanie się prędkości ładunku, a więc też i stopniowy spadek na przyciągające centrum. Atomy zbudowane jak układ planetarny musiałyby więc być nietrwałe. I to jak! Ich czas życia byłby rzędu  $10^{-8}$  s, a więc i my sami, złożeni bądź co bądź z tych samych atomów (choć może nie tylko złota) żylibyśmy tak właśnie krótko. Co więcej, widmo promieniowania emitowanego przez atomy, stopniowo zmniejszające swoją energię, musiałyby mieć charakter ciągły, wbrew obserwacjom, częściowo ujętym ilościowo wzorem Balmera. Fizyka klasyczna znalazła się więc w ślepych zaułku. Stosując jej prawa dochodziło się do wniosków całkowicie z nią sprzecznych. Można powiedzieć, że popełniła ona samobójstwo. Wyjście z tej sytuacji, aczkolwiek częściowe i niedoskonałe, które właściwie każdy szanujący się fizyk w owych czasach powinien był odrzucić, zostało podane w r. 1913 przez Nielsa Bohra. Bohr w teorii swej przyjął (a) rutherfordowski (planetarny) model budowy atomu, w którym elektrony poruszają się wokół jądra po jakichś kolistych orbitach, (b) hipotezę wyróżnionych stanów kwantowych Plancka, zakładając, że atom może się znajdować w sposób trwały tylko w pewnych stanach o wyróżnionej energii, oraz (c) hipotezę fotonów Einsteina, zgodnie z którą emisja promieniowania elektromagnetycznego możliwa jest tylko w postaci fotonów i zachodzi wyłącznie, jak stąd widać, przy przejściu atomu od jednego wyróżnionego stanu energetycznego do innego.

Postulaty te nie tylko wyjaśniają trwałość atomu, w każdym razie w stanie o najniższej energii, ale tłumaczą też nieciągły charakter widma promieniowania atomowego. Są one jednak całkowicie sprzeczne z fizyką klasyczną. Cóż to jednak znaczy wobec tego, że dają one opis nie tylko jakościowy, ale i ilościowy promieniowania atomowego? Po 28 latach wzór Balmera znalazł swoje wyjaśnienie.

Po dalszych dwunastu latach okazało się, że postulaty Bohra były w gruncie rzeczy niepoprawne. Znalaziono, dzięki pracom Heisenberga, Schrödingera, Diraca, Pauliego, Borna i wielu innych wybitnych fizyków, nową, poprawną wersję mechaniki kwantowej. Nie jest i ona wolna od pewnych trudności, nie wiemy zatem, czy pewnego dnia nie zostanie ona zastąpiona teorią jeszcze doskonalszą. Oczywiście nie będzie nią dawna teoria klasyczna, tyle tylko jest pewne.





W tej tak zwanej historii pierwszych piętnastu lat teorii kwantowej uderzają pewne dziwne fakty. Przede wszystkim, wśród owych przełomowych prac prawie nie ma takich, które by były całkowicie poprawne. W każdym razie, nawet jeśli wniosek jest słuszny, to droga, która do niego doprowadziła, jest co najmniej w pewnym stopniu błędna. I nic w tym dziwnego. Odgadując nową teorię fizyki starają się przecież oprzeć na tym, co jest już znane, a więc na teorii, która w przyszłości ma zostać odrzucona. Z góry zaś trudno przewidzieć, który jej element przetrwa rewolucję. Po drugie, poszczególne odkrycia niesłuchanie się ze sobą zająbiają. Chciałoby się powiedzieć, że gdy nadchodzi właściwy czas, to nowa teoria narasta lawinowo: mała grudka śniegu popchnięta w grudniu 1900 roku przez Plancka urosła do potężnej lawiny, w której grzmocie nadal żyjemy. Po trzecie, w odkryciach niezwykłą rolę odgrywa element przypadku. Gdyby na przykład prawo Coulomba miało inną postać niż ma, wzór klasyczny i kwantowy na rozpraszanie w polu tej siły różniłyby się i Rutherford na podstawie znajomości wzoru klasycznego może by nie wydedukował istnienia jądra atomowego. Takich „gdyby” w historii kwantów było więcej. Po czwarte, nowa teoria nie powstała ot tak, „z głowy”. Konieczne były coraz to nowe doświadczenia i ścisła współpraca teoretyków i eksperymentatorów. Po piąte wreszcie — czego nie miałem okazji zademonstrować w tym artykule, ale do czego może warto będzie kiedyś powrócić — fizycy w poszukiwaniu nowej teorii po trosze „nawracają się” na filozofię, dziedzinę, którą często w dniach powodzenia nieco sobie lekceważą. Co jest jednak także dość charakterystyczne, filozofia, która poszczególnym fizykom służy jako latarnia morska kierująca ich do właściwego portu, bardzo często okazuje się nie tą, która ostatecznie pozwala na najgłębsze zrozumienie nowych odkryć, i która potem, przynajmniej przejściowo, triumfuje. Choć więc nauka, i to szczególnie taka jak fizyka, ma swoją logikę, to trudno to powiedzieć o jej historii.

Gdy jedziemy samochodem przez most, nie zastanawiamy się, czy wytrzyma. Inżynier to sprawdził.

Gdy inżynier oblicza wytrzymałość mostu, nie zastanawia się, czy wytrzymałość betonu jest taka, jak mu podano.

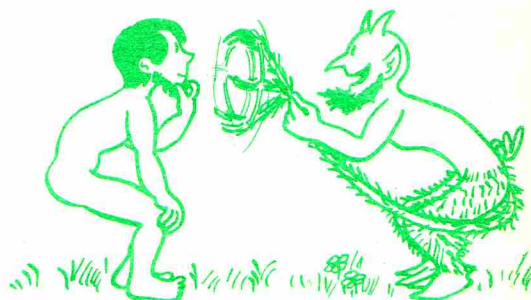
W laboratorium to sprawdzono.

Gdy laborant oblicza wytrzymałość materiału, nie zastanawia się, czy podane mu wzory teoretyczne są prawdziwe. Sprawdzono je w pracowni naukowej.

Gdy naukowiec wyprowadza wzory wytrzymałości materiałów, nie zastanawia się, czy matematyka, której używa do tego celu, jest bezbłędna. Matematycy to sprawdzili.

Gdy matematyk wyprowadza wzory na podstawie aksjomatów teorii, nie pyta „czy naprawdę w przyrodzie dzieje się tak, jak każe matematyka?”

A więc skąd wiemy, że most wytrzyma?



## Probabilistyczne algorytmy sprawdzania, czy dana liczba naturalna jest pierwsza

Dr hab. Antoni KRECZMAR

Zadanie polegające na sprawdzaniu, czy dana liczba naturalna nieparzysta  $n$  jest liczbą pierwszą, ma swoją długą historię. Zadanie na pozór proste, jednak ze względu na konieczność wykonania długich obliczeń staje się rachunkowo niewykonalne. Oczywiście, jeśli  $n$  jest małe, można próbować po kolei wszystkie liczby nieparzyste mniejsze od  $n$  i sprawdzać, czy są wśród nich ewentualne dzielniki  $n$ . Już w czasach poprzedzających wynalezienie komputera, matematycy widzieli nieskuteczność takiej metody dla dużych liczb. Karol Gauss podaje w swoim dziele „*Disquisitiones Arithmeticae*” kilka interesujących algorytmów działających znacznie szybciej od tego najprostszego, korzystającego bezpośrednio z definicji liczby pierwszej. Jednakże nawet obecnie, przy istniejących niesłuchanie szybkich komputerach, nie znamy dostatecznie szybkiego algorytmu rozwiązującego to zadanie. Wyjaśnijmy zatem na przykładzie tego zadania, co to znaczy, że algorytm jest dostatecznie szybki. Jeżeli liczba  $n$  ma długość przedstawienia binarnego  $b$ , tzn.  $b$  jest rzędu  $\log_2(n)$ , to wszystkie znane algorytmy działają w czasie proporcjonalnym do  $n^c = 2^{cb}$  ze stałą  $c > 1/4$ . Takie algorytmy nazywamy wykładniczymi, albowiem czas ich działania rośnie jak  $a^b$ ,  $a > 1$ , gdzie  $k$  jest rozmiarem danych (w naszym przypadku  $k = b$ ).

Zwrot „czas działania jest równy  $2^{25}$ ” znaczy, że obliczenia wymagają  $2^{25}$  operacji elementarnych. Faktyczny czas działania (np. w sekundach) zależy od sprawności konkretnej maszyny.



Jeżeli taki algorytm zastosujemy dla  $b = 100$ , tzn. dla liczby  $n$  rzędu  $2^{100}$ , to czas jego działania będzie rzędu co najmniej  $2^{25}$ . I może to, że ta liczba jest rzędu około 34 milionów, nie jest takie niepokojące, jak to, że dla  $b = 200$  mamy już rząd  $2^{50}$ , czyli, że czas wzrósł kwadratowo. Dla liczb naturalnych  $n$  rzędu  $2^{200}$ , nawet na najszybszym komputerze wykonanie takiego algorytmu jest niemożliwe. Zakładając na przykład, że komputer wykonuje  $2^{20}$  (ponad 1 milion) operacji na sekundę, musiałby on liczyć  $2^{30}$  sekund, czyli więcej niż  $2^{18}$  godzin, czyli więcej niż  $2^{13}$  dni, czyli więcej niż  $2^8$  miesięcy, czyli więcej niż  $2^4$  (czyli 16) lat. Algorytmy, których czas działania jest wielomianowy, tzn. rzędu  $p(k)$  dla pewnego wielomianu  $p(x)$ , działają szybciej niż algorytmy wykładnicze, dla dostatecznie dużych  $k$ . W szczególności poszukuje się algorytmów liniowych, tzn. takich, których czas działania jest rzędu  $k$ . Są one w sensie czasu działania optymalne, albowiem szybciej niż rozmiar danych algorytm nie może działać, gdyż co najmniej tyle czasu zajmuje „przeczytanie” danych przez algorytm.

Ponieważ nie znamy algorytmu wielomianowego sprawdzającego, czy dana liczba naturalna nieparzysta  $n$  jest liczbą pierwszą, najpierw R. Solovay i V. Strassen, a następnie M. Rabin skonstruowali algorytmy rozwiązujące to zadanie w sposób niepełny, ale, jak zaraz zobaczymy, w pewnym sensie całkiem zadowalający.

Rozważmy liczbę naturalną nieparzystą  $n$ . Algorytm Solovaya i Strassena jest następujący. Losujemy liczbę  $m$  ze zbioru  $\{1, 2, \dots, n-1\}$ . Obliczamy NWD( $n, m$ ) (największy wspólny dzielnik liczb  $n$  i  $m$ ). Jeżeli  $\text{NWD}(n, m) \neq 1$ , znaczy to, że  $n$  nie jest liczbą pierwszą. Jeżeli

$\text{NWD}(n, m) = 1$ , to obliczamy wówczas wartość symbolu Jacobiego  $\left(\frac{m}{n}\right)$  oraz resztę z dzielenia

$m^{(n-1)/2}$  przez  $n$ , przyjmując, że jest ona z przedziału  $[-1, n-2]$ . Oznaczmy  $x_{n,m} = \left(\frac{m}{n}\right)$ ,  $y_{n,m} =$

$= m^{(n-1)/2} \bmod n$ . Jeżeli  $x_{n,m} = y_{n,m}$ , to przyjmujemy, że  $n$  jest liczbą pierwszą, w przeciwnym przypadku przyjmujemy, że jest liczbą złożoną. Solovay i Strassen dowodzą, że jeżeli  $n$  jest liczbą pierwszą, to algorytm zawsze odpowie pozytywnie, natomiast gdy  $n$  jest liczbą złożoną, to algorytm odpowie pozytywnie (tzn. da błędną odpowiedź) z prawdopodobieństwem  $\leq 1/2$ .

Dokładniej, wykazują oni, że dla liczb złożonych  $n$  zbiór  $\{m: \text{NWD}(m, n) = 1 \text{ i } 1 \leq m \leq n-1, x_{n,m} = y_{n,m}\}$  ma liczebność co najwyżej  $(n-1)/2$ . Można wykazać, że dla danego  $n$ ,  $b = \log_2(n)$ , wykonanie takiej próby zużywa czasu co najwyżej rzędu  $b$ . Zatem koszt jednej próby jest liniowy względem rozmiaru zadania. Wykonując  $t$  takich prób, w czasie rzędu  $tb$ , otrzymamy dla liczby

złożonej wynik pozytywny z prawdopodobieństwem  $\leq \frac{1}{2^t}$ . Wykonując na przykład 60 takich prób,

otrzymamy w czasie rzędu  $60b$  odpowiedź pozytywną z prawdopodobieństwem błędu  $2^{-60}$  — czyli średnio 1 błąd na  $10^{18}$  testów. Takie prawdopodobieństwo błędu jest znacznie mniejsze niż prawdopodobieństwo „pzekłamania” komputera.

Podobne rozumowanie doprowadziło M. Rabina do skonstruowania algorytmu probabilistycznego,

który po wykonaniu  $t$  prób daje odpowiedź pozytywną z błędem nie przekraczającym  $\frac{1}{2^{2t}}$ ,

również w czasie rzędu  $tb$ . Algorytm Rabina został zaprogramowany i uruchomiony na komputerze. Wykonano najpierw test na liczbach postaci  $n = 2^p - 1$ , gdzie  $p$  jest pierwsza,  $500 \geq p$ . Takie liczby przez wiele lat były przedmiotem rywalizacji firm komputerowych reklamujących swój sprzęt. Znalazienie kolejnej największej liczby pierwszej tej postaci budziło podziw przede wszystkim ze względu na doskonałość sprzętu, na którym takie obliczenia wykonywano. Przecież komputer musiał liczyć niezwykle szybko i bezawaryjnie przez wiele godzin.

Algorytm Rabina w czasie 10 minut sprawdził wszystkie takie liczby i wykrył bez błędu wszystkie liczby pierwsze. Jako ciekawostkę podamy jeszcze, że algorytm został zastosowany do znalezienia dużych liczb pierwszych bliźniaczych, tzn. postaci  $p, p+2$ , obie pierwsze. Po pół godzinie liczenia algorytm wskazał, że dwie liczby,  $338(p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot \dots \cdot p_{299}) + 821$  oraz większa od niej o 2, są liczbami bliźniaczymi, ale po następnych 5 godzinach liczenia algorytm nie znalazł już większej takiej pary.

Na zakończenie podamy jeszcze, w jaki sposób można wykonywać algorytm Solovaya i Strassena. Największy wspólny dzielnik  $\text{NWD}(n, m)$  można znaleźć stosując algorytm Euklidesa. Resztę z dzielenia  $m^{(n-1)/2}$  przez  $n$  obliczamy korzystając z rozwinięcia dwójkowego liczby  $(n-1)/2$ , a następnie podnosząc  $m$  do potęgi 1, 2, 4, 8 itd., mnożąc jednocześnie tak te potęgi, aby otrzymać  $m^{(n-1)/2}$  (wszystkie kroki zawsze modulo  $n$ ). Mnożymy zatem te potęgi, gdzie w rozwinięciu dwójkowym  $(n-1)/2$  występuje 1. Wreszcie wartość symbolu Jacobiego można obliczyć stosując wzór rekurencyjny:

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } m = 1 \\ \left(\frac{k}{n}\right) \cdot (-1)^{(n^2-1)/8} & \text{jeżeli } m = 2k \\ \left(\frac{n}{m}\right) \cdot (-1)^{(m-1)(n-1)/4} & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Zwracamy uwagę, że (jest to napisane kilka wierszy niżej) największy wspólny dzielnik obliczamy za pomocą algorytmu Euklidesa. Nie musimy zatem znać rozkładu liczb  $m$  i  $n$  na czynniki.

Największą znaną liczbą pierwszą jest w tej chwili  $2^{21701} - 1$ .

Aby określić symbol Jacobiego, przypomnijmy najpierw, że gdy dwie liczby całkowite  $a$  i  $b$  dają z dzielenia przez  $m$  tę samą resztę, to nazywamy je przystającymi modulo  $m$  i piszemy  $a \equiv b \pmod{m}$ . Zależność tego typu nazywamy kongruencją.

Niech  $p$  będzie liczbą pierwszą, różną od 2, zaś  $a$  — liczbą niepodzielną przez  $p$ . Symbol

Legendre'a  $\left(\frac{a}{p}\right)$  określamy jako równy  $+1$  lub

$-1$  w zależności od tego, czy istnieje liczba  $x$  taka, że  $x^2 \equiv a \pmod{p}$ , czy nie. Na przykład

$$\left(\frac{3}{11}\right) = +1, \text{ bo } 5^2 = 25 \equiv 3 \pmod{11},$$

$$\left(\frac{2}{5}\right) = -1, \text{ bo nie ma liczby } x, \text{ której}$$

kwadrat kończyłby się na 2 lub 7.

Jeżeli teraz  $m$  jest dowolną liczbą nieparzystą i  $m = p_1 \dots p_s$ , gdzie  $p_i$  są liczbami pierwszymi i  $\text{NWD}(a, m) = 1$ , to symbol

Jacobiego  $\left(\frac{a}{m}\right)$  określamy jako iloczyn symboli

$$\text{Legendre'a: } \left(\frac{a}{m}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{a}{p_s}\right).$$

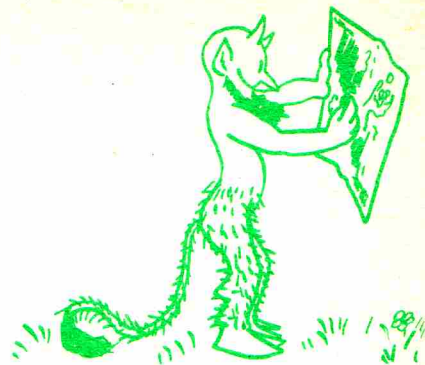
W końcowej części artykułu podany jest wzór

rekurencyjny służący do obliczania  $\left(\frac{a}{m}\right)$ .

Symbole Legendre'a i Jacobiego znajdują zastosowania w teorii liczb, ale wprowadzone zostały w związku z badaniami w dziedzinie tzw. całek eliptycznych. Jedną z takich całek jest  $\int \sqrt{1-a^2 \sin^2 x} dx$ , pojawiająca się np. przy obliczaniu długości łuku elipsy.



Gdy na wycieczce górskiej stwierdzimy, że teren nie zgadza się z mapą, myślimy od razu „Źle jest, zablądziliśmy” i szukamy powrotu do ostatniego miejsca, w którym się zgadzało. Nie przychodzi nam nigdy do głowy, że mapa — nasza nieodzowna pomocniczka — może być na przykład błędnie wydrukowana. Gdy w badaniach przyrodniczych stwierdzamy, że doświadczenie nie zgadza się z teorią matematyczną, szukamy najpierw błędów rachunkowych, a gdy ich nie znajdujemy, mówimy: „teoria jest zła”. Nie przychodzi nam do głowy, że matematyka — nasza nieodzowna pomocniczka — może w gruncie rzeczy kiepsko nadaje się do opisu rzeczywistości? Wszystkie znane fakty przeczą temu, ale jak jest naprawdę?



## Od magnesu i bursztynu...

*Doc. dr Michał ŚWIĘCKI*

Na czym polega tworzenie jakiegokolwiek teorii fizycznej? Wbrew sugestiom, które nasuwa podział fizyki na doświadczalną i teoretyczną, trzeba wyraźnie stwierdzić, że praca ta nosi przede wszystkim charakter działalności umysłowej. Cała historia zaczyna się z reguły od zauważenia pewnego mniej lub bardziej powszechnego zjawiska. Po wybraniu, założymy, że udatnym, przedmiotu badań, należy uruchomić wyobraźnię i przyjąć jakieś założenia dotyczące przyczyn i wspólnych cech interesującego zjawiska. Cechy wspólne noszą zawsze charakter czysto jakościowy i dlatego poszukiwanie ich mniej lub bardziej ilościowych przyczyn wymaga wprowadzenia różnych nowych koncepcji (np. siły, masy, ładunku, neutronu), których próżno szukać w przedmiocie badanym. Pojęcia te i przyczyny można w zasadzie tworzyć w dowolny sposób. Jedynym fundamentalnym ograniczeniem jest konieczność wyobrażenia sobie takich sztucznie wytworzonych warunków, przy których można badać każdą przyczynę oddzielnie. Dopiero wtedy czas na przeprowadzanie doświadczeń, które polegają na możliwie dokładnym stworzeniu takich właśnie, nietypowych dla danego zjawiska, warunków i zbadaniu ilościowych praw rządzących wprowadzonym pojęciem. Jeżeli prawa te nie mają prostej matematycznej struktury, cały opis jest do luftu. W przeciwnym razie mówimy, że odkryliśmy prawo fizyczne. Wykorzystując je możemy teraz budować maszyny, co jest jednak domeną fizyki stosowanej i inżynierii. Odkryte prawo sprawdza się następnie w różnych sztucznie wytworzonych warunkach doświadczalnych, aż wreszcie wykrywa się jakieś odstępstwo. Czas na wprowadzenie nowych uogólnionych przyczyn i pojęć. Jest zadziwiającą cechą geniuszu ludzkiego, że liczba praw maleje z upływem czasu, a liczba zjawisk, które umiemy opisać, rośnie. Jako przykład tworzenia koncepcji fizycznych wybraliśmy historię rozwoju nauki o elektryczności i magnetyzmie. Będzie to oczywiście historia współczesnej fizyki widziana naszymi oczami.

Nie ulega wątpliwości, że dziwne własności potartego bursztynu oraz skał magnetycznych znane były już w starożytności. Historię naszą zaczniemy jednak dopiero gdzieś w XVI wieku. O magnesach wiedziano już wtedy stosunkowo dużo. Nic dziwnego. Ich własności były bardzo trwałe i mogły być przekazywane przez potarcie (namagnesowanie) przedmiotom żelaznym, a więc tym samym, których przyciąganie przednio odkryto. Znana była igła magnetyczna oraz jej dwa bieguny wraz z własnością ich wzajemnego przyciągania i odpychania, a także fakt ustawiania się igły w kierunku północ-południe. O elektryczności nie wiedziano prawie nic. Nie posunięto się prawie wcale poza fakt zaobserwowany już przez Talesa z Miletu, że potarty bursztyn przyciąga skrawki różnych materiałów, że szybko traci tę własność i nie przekazuje jej przyciąganym skrawkom. Pierwsza znana koncepcja teoretyczna wprowadzona przez Williama Gilberta w 1600 roku dotyczyła więc magnetyzmu. Polegała ona na założeniu, że Ziemia jest magnesem. Z teorii tej wynikało, że igła magnetyczna w różnych miejscach kuli ziemskiej inaczej nachyla się do poziomu. Można było też ocenić zależność tzw. kąta inklinacji od szerokości geograficznej i porównać te wyniki z doświadczeniem. Poważne badania elektryczności zaczęto prowadzić dopiero w XVII wieku. Stwierdzono wtedy, że nie tylko bursztyn nabiera przez potarcie własności przyciągania, i zbudowano pierwsze maszyny elektrostatyczne (Otto von Guericke w 1651 roku) oparte na tym zjawisku. Przy okazji stwierdzono, że zjawisku elektryzowania przez tarcie towarzyszy pojawianie się iskieł, co nasunęło myśl o elektrycznym pochodzeniu piorunów. Hipoteza ta została udokumentowana doświadczalnie dopiero w połowie XVIII wieku przez Beniamina Franklina.







Rozwiązanie zadania M 196  
Przez  $\pi M$  będziemy oznaczać iloczyn wszystkich liczb skończonego zbioru  $M$  złożonego z liczb naturalnych. Niepustemu podzbiorni  $D$  zbioru  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  przyporządkujemy zbiór tych liczb pierwszych  $p_{11}, \dots, p_{1n}$ , które w rozkładzie liczby  $\pi D$  na czynniki pierwsze występują w potęgach nieparzystych. Otrzymamy w ten sposób odwzorowanie  $(2^n - 1)$ -elementowego zbioru  $2^A \setminus \{\emptyset\}$  w zbiór  $2^n - 1$ -elementowy. Musi ono przyjmować równe wartości na dwóch różnych podzbiornach, które oznaczymy przez  $B$  i  $C$ . Zauważmy, że w rozkładzie iloczynu  $\pi B \cdot \pi C$  na czynniki pierwsze wszystkie liczby pierwsze występują w potęgach parzystych i wobec tego  $\pi B \cdot \pi C$  jest kwadratem pewnej liczby naturalnej. Równocześnie  $\pi B \cdot \pi C = \pi(B \setminus C) \cdot \pi(B \cap C) \cdot \pi(C \setminus B) \cdot \pi(B \cap C) = \pi((B \setminus C) \cup (C \setminus B)) \cdot (\pi(B \cap C))^2$  i wobec tego iloczyn  $\pi((B \setminus C) \cup (C \setminus B))$  jest również kwadratem liczby naturalnej. Szukanymi liczbami są liczby należące do zbioru  $(B \setminus C) \cup (C \setminus B)$  tj. do różnicy symetrycznej zbiorów  $B$  i  $C$ .



Tak więc już w XVII wieku obserwowano zjawiska towarzyszące przepływowi prądu elektrycznego, chociaż nie wiadano nic o dwóch rodzajach elektryczności. Nie rozróżniano też przewodników i izolatorów. Wiek XVIII przyniósł wiele nowych odkryć. Przede wszystkim po raz pierwszy stwierdzono, że ciała naelektryzowane przez tarcie mogą udzielać swej własności innym ciałom przez dotknięcie oraz przez indukcję w wyniku zbliżenia (Stephen Gray). Oczekiwano tego od dawna, szukając związku między elektrycznością i magnetyzmem. Próbuąc elektryzować różne ciała stwierdzono, że metale (przewodniki) nie elektryzują się przez tarcie, natomiast łatwo elektryzują się przez zbliżenie i dotknięcie ręką (ręką zapewne po prostu przytrzymywano ciała przy elektryzacji). Zupełnie na odwrót zachowywały się niemetały (izolatory). Szukano też, obserwowanych od dawna dla magnesów i igieł magnetycznych, specyficznych własności oddziaływania między ciałami już naelektryzowanymi. I znaleziono. Stwierdzono, że niektóre z nich przyciągają się, inne odpychają. Nadszedł czas na pierwsze poważne koncepcje teoretyczne.

Pojawiły się one w połowie XVIII wieku i polegały na założeniu istnienia dwóch tylko rodzajów elektryczności (Charles Dufay w 1733 roku), podobnie do dwóch biegunów magnesu. Najbardziej płodna okazała się teoria wiążąca własności elektryczne ciał z pewnego rodzaju materią. Materią tą były dwa rodzaje płynów (lub jeden rodzaj oraz jego brak), które mogły w odpowiednich warunkach przepływać z jednego ciała do drugiego elektryzując je różnoimiennie. Od tego czasu wszystkie zjawiska elektryczne zaczęto opisywać, posługując się jakościowymi na razie pojęciami ilości elektryczności (ładunku) dodatniej bądź ujemnej, pojemności elektrycznej ciał oraz przepływu elektryczności (prądu elektrycznego) wraz z jego cechami: różnicą poziomów (napięciem), szybkością (natężeniem) i oporem. Teoria płynu elektrycznego utrzymała się do końca XIX wieku. Dopiero doświadczenia Millikana wykazały, że płyn ten przelewa się porcjami i wygodniejsze stało się pojęcie elektronowej struktury elektryczności.

Teoria płynu elektrycznego łatwo mogła być zastosowana do jakościowego opisu znanych zjawisk. Wraz z nią pojawiła się jednak możliwość wykonywania doświadczeń ilościowych, których wyniki można było zbierać w postaci praw. Pionierską pracę wykonał w 1784 roku Charles Coulomb. Umiał on przenosić własności elektryczne z jednych ciał na drugie, a zgodnie z teorią płynu dwukrotnie „takie samo” przeniesienie odpowiadało naładowaniu ładunkiem dwa razy większym. W ten sposób Coulomb zmierzył zależność siły oddziaływania ładunków od ich ilości oraz wzajemnej odległości. Powstało pierwsze prawo elektryczności, którego postać okazała się zadziwiająco podobna do prawa powszechnego ciężenia Newtona. Warto wiedzieć, że w tym samym doświadczeniu Coulomb odkrył występowanie identycznego prawa sił dla oddziaływań końców (biegunów) długich wąskich magnesów. Zapomnieliśmy trochę o magnetyzmie, w którym oczywiście również zapanowała teoria płynów magnetycznych. Niestety płyny te nie dawały się zupełnie rozdzielić i zawsze biegunowi północnemu towarzyszył biegun południowy. Nic dziwnego, że teoria płynu okazała się tu bezpłodna. Zwróćmy uwagę, że od czasów Newtona usiłowano wszystkie rodzaje oddziaływań sprowadzić do centralnych sił elementarnych działających między elementami ciał wzdłuż łączących je prostych. Oddziaływanie magnesów nie miało tej własności i obserwowana nierozdzielność biegunów stawiała całą koncepcję pod znakiem zapytania.

W każdym razie dopiero pod koniec XVIII wieku wiedza dotycząca elektryczności zrównała się z informacjami o magnetyzmie, przy czym płyny magnetyczne nie chciały płynąć, w przeciwieństwie do łatwo przenoszonych wzdłuż przewodników ładunków elektrycznych. Przyszedł czas na znalezienie źródła prądu elektrycznego bardziej trwałego od kondensatorów (od niedawna znana już była butelka lejdejska). Zaczęło się od dwóch przypadków lekarza Luigiego Galvaniego. Najpierw stwierdził (przypadkiem), że rozładowanie maszyny elektrostatycznej przez udka żabie (przysmak w krajach romańskich) wywołuje ich skurcze. Następnie badając to zjawisko odkrył (przypadkiem), że takie same skurcze pojawiają się bez żadnego źródła ładunków, o ile oba końce udka stykają się z różnymi metalami połączonymi ze sobą przy pomocy przewodnika. Galvani nie miał żadnej koncepcji odkrytego zjawiska. Miał je za to Alessandro Volta, który przyjął, że źródłem ładunków są reakcje chemiczne zachodzące między metalem a udkami żabim. Różne metale, więc i różne reakcje. Może więc i różne ładunki. Tak powstało ogniwo elektryczne (1799 rok) umożliwiające utrzymywanie prądu w przewodnikach przez dłuższy czas. A na marginesie powstała nowa gałąź wiedzy — elektrochemia.

Wraz z powstaniem trwałego źródła ładunków elektrycznych można było zacząć badania praw rządzących przepływem prądu. Nie jest to zbyt pasjonująca historia. Teoria płynów okazała się bardzo przydatna i odpowiednie prawa są podobne do najprostszych praw hydrodynamiki. Stwierdzono przy okazji, że płynący prąd może wywoływać zjawiska cieplne — przewodniki z prądem rozgrzewają się. Można było zbudować pierwsze mierniki szybkości przepływu (natężenia prądu) o działaniu opartym na rozszerzalności cieplnej przewodników. Równocześnie kontynuowano prace doświadczalne mające na celu znalezienie jakiegokolwiek związku między magnetyzmem i elektrycznością. Najwybitniejsi fizycy tych czasów wieszali ogniwa Volty na sznurku i przystawiali do nich magnes bez żadnego rezultatu. Wprawdzie ciała naładowane elektrycznie przyciągały igłę magnetyczną, ale fakt ten był w teorii płynu wyjaśniany jako elektryzacja końca igły przez indukcję i nie miał związku z namagnesowaniem samej igły.





Próbowano również umieszczać igłę magnetyczną w pobliżu przewodnika z prądem. Jednak fizycy ówczesni byli na tyle przesiąknięci ideami Newtona, że nie byli w stanie wyobrazić sobie innego rodzaju oddziaływania niż przyciąganie czy odpychanie. Umieszczano więc igłę tak, że mogła obracać się swobodnie jedynie w płaszczyźnie zawierającej przewodnik. Od lub do przewodnika. I nie stwierdzano niczego. Dopiero fizyk samouk Hans Christian Oersted umieścił igłę zupełnie bez sensu — nad przewodnikiem — i odkrył prawo oddziaływania, które nie było ani przyciąganiem, ani odpychaniem, ale oddziaływaniem w kierunku określonym przez regułę prawej ręki. A przecież wiadano od dawna, że podobnie oddziałują magnesy. Tam jednak, pomijając ważną, choć w teorii płynów techniczną, trudność nierozdzielności biegunów, można było wyjaśnić wszystko przez czysto newtonowskie (coulombowskie) centralne siły działające między biegunami małych składowych magnesików. Koncepcja ta runęła wraz z odkryciem Oersteda. Było to ani odpychanie, ani przyciąganie, ale działanie w kierunku mającym niewiele wspólnego z linią łączącą elementy ciał. Widać to wyraźnie, jeżeli zamiast przewodnika prostoliniowego użyje się zwojnicy. Całe zjawisko oddziaływania magnesów z prądami oraz prądów z prądami (to badanie samo się narzucało) szybko zbadano i opisano ilościowo (Ampère oraz Biot i Savart). Już wtedy pojawiło się pojęcie pola fizycznego wraz z jego natężeniem. Jeżeli bowiem nie oddziaływanie między ciałami, to może między ciałem i polem wytworzonym przez drugie ciało. Ta koncepcja nie miała już nic wspólnego z ideami Newtona. Wydaje się jednak, że pierwszym, który w istotny sposób związał swe badania z pojęciem pola elektrycznego i magnetycznego był inny fizyk samouk, Michael Faraday. Dotychczas badano ruchy ciał. Zajmijmy się więc ruchem pól. Zmiany pola magnetycznego można wywołać poruszając magnes, ale również przerywając obwód z prądem elektrycznym. I Faraday rozpoczął swą fantastyczną serię doświadczeń odkrywając prawa indukcji elektromagnetycznej (1831 rok), budując silnik elektryczny, transformator oraz pierwszą prądnicę. Następnie James Clerk Maxwell (1864 rok) zapisał całą dotychczasową wiedzę o polach w zwartej postaci matematycznej. Odtąd źródłem powstania pola elektrycznego mogła być zarówno obecność ładunków elektrycznych, jak i zmienne pole magnetyczne. Otrzymane równania nie mają jednak rozwiązań. To drobiazg. Brak przecież jeszcze jednego nie odkrytego prawa. Dopisujemy je — źródłem pola magnetycznego mogą być nie tylko prądy elektryczne, ale także zmienne pole elektryczne — i teoria nie ma żadnych luk. Rozwiązujemy otrzymane równania i co się okazuje. Otrzymujemy fale elektromagnetyczne rozchodzące się z prędkością równą, w granicach błędów doświadczalnych, prędkości światła. Przypadek?! Oczywiście Maxwell założył, że światło to też fala elektromagnetyczna.

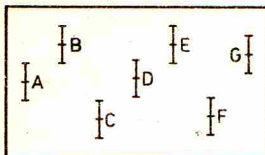
Skąd tu fala, powiecie. Płyną sobie jakieś nieważkie płyny elektryczne i one, a nie między nimi, może coś falować. Ano, falowość wynika z założonej koncepcji pola, jako rzeczywistego (równie rzeczywistego, jak pojęcie siły u Newtona) obiektu. W mechanice ośrodków sprężystych źródłem fali jest przekazywanie energii drgań z jednego elementu na drugi. W koncepcji polowej same drgania pola mogą być źródłem nowego pola. Żaden eter drgający nie jest tu potrzebny. I nic dziwnego, że z trzaskiem go z fizyki wyrzucono (Albert Einstein w 1905 roku).

Na zakończenie tej historii nasuwa się następująca refleksja. Przynajmniej dwa podstawowe odkrycia zostały uczynione bądź przypadkiem (Galvani), bądź niezgodnie z regułami gry (Oersted). Sytuacje takie miały miejsce również w historii innych dziedzin fizyki. Najlepszym dla nas przykładem będzie odkrycie zjawiska fotoelektrycznego. Mało kto wie, że dokonał tego Heinrich Hertz w tym samym doświadczeniu, w którym potwierdził falową naturę zjawiska indukcji elektromagnetycznej (1886 rok). Przerwę w przewodniku, odbiorniku fal po prostu czasem oświetlał. Obserwował wtedy wyraźne nasilenie intensywności iskier. Dopiero jego uczeń, Philipp Lenard, zajął się tym zakłóceniem, za co wiele lat później otrzymał Nagrodę Nobla. Obecnie stosowane techniki doświadczalne pozostawiają bardzo mało miejsca na tego typu odkrycia przypadkowe. Nie mamy zaś prawie wcale możliwości czynienia odkryć niezgodnych z regułami gry. Kto bowiem da milion dolarów na budowę akceleratora, który prawie na pewno nie będzie nic wart?!

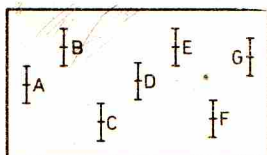




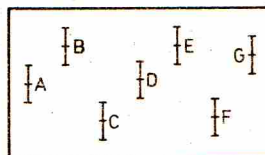
# „Maluj sam” — wydawnictwo dla początkujących fizyków



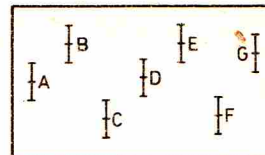
1. Dane doświadczalne. Teoria przewiduje pik w punkcie  $E$ . Zamaluj  $E$  na czerwono.



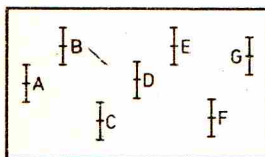
2. Dane doświadczalne. Teoria nie przewiduje pik w punkcie  $E$ . Zamaluj  $E$  na szaro.



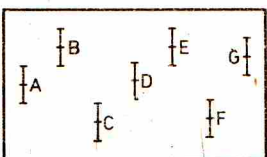
3. Dane doświadczalne. Teoria nie ma z nimi nic wspólnego. Zamaluj błędy na czarno GRUBYM... GRUBYM... GRUBYM... mazakiem.



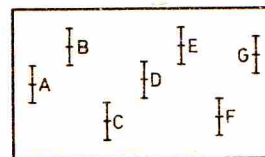
4. Dowód istnienia nowego, Spin-U-niezmienniczego dodekpletu. Nie ma czasu na malowanie. Natychmiast wysłać do *Phys. Rev. Letters*. (Kopia do *Expressu Wieczornego*.)



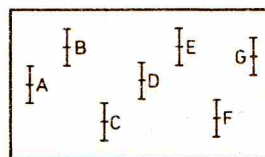
5. Diagram Feynmana. Połączyć  $A, B, C, D, E, F, G$  wszystkimi możliwymi grubymi, cienkimi, przerywanymi i falistymi liniami i pomalować całość niezmienniczo ze względu na skalowanie.



6. Diagram Dalitza. Po nałożeniu na mapę świata punkty wskażą, gdzie go można zastać.



7. Punkty w niefizycznym obszarze argumentu zespolonego. Jeden tylko Chew wie, co to takiego. Jeżeli zgadzasz się z jego teorią, pomaluj całość na złoto. Jeśli nie, przeprowadź rozcięcie od  $A$  do  $\infty$ , następnie od  $B, C, D, E, F, G$  — do  $\infty$ . Strzępki wyrzucić.



8. Punkty eksperymentalne na IDJ-gramie. Jeżeli jesteś idiotą, pomaluj obrazek na wszystkie barwy tęczy. Jeśli nie — weź tabletkę antyhistogaminy i idź spać.

(za *Journal of Irreproducible Results*)



## Zadania



Redaguje mgr Krzysztof NOWIŃSKI

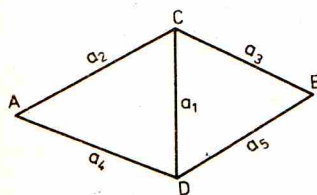
M 196. Wykazać, że jeżeli w rozkładach  $n$  liczb naturalnych  $a_1, \dots, a_n$  na czynniki pierwsze występuje co najwyżej  $n-1$  różnych liczb pierwszych, to można znaleźć iloczyn  $k$  tych liczb (tj.  $k$  spośród  $a_1, \dots, a_n$ ) będący kwadratem liczby naturalnej.

Rozwiązanie na str. 9

M 197. Z  $A$  do  $B$  możemy przesłać wiadomość albo bezpośrednią linią komunikacyjną, albo korzystając z przedstawionej na rysunku sieci połączeń pośrednich. Wszystkie linie są jednakowo zawodne, to znaczy prawdopodobieństwo przesłania wiadomości na każdym z odcinków wynosi  $p$ , przy czym możliwe uszkodzenia są zdarzeniami niezależnymi. Która z dróg łączności pomiędzy  $A$  i  $B$  jest pewniejsza?

Rozwiązanie na str. 3

M 198. Jakie wielokąty foremne możemy otrzymać przecinając płaszczyznę ośmiościan foremny? Rozwiązanie na str. 4



Redaguje dr Halina ABRAMOWICZ

F 66. Na zdjęciach fotograficznych przedmioty znajdujące się w pewnym zakresie odległości od obiektywu są przedstawione z zadowalającą ostrością. Jeżeli obiektyw ustawiony jest na odległość  $x$  (wtedy obrazem punktu znajdującego się w odległości  $x$  jest też punkt), to punkty znajdujące się w innej odległości będą na kliszy przedstawione jako rozmyte plamki. Zakładając, że plamki o średnicy mniejszej lub równej  $d$  widzimy jako punkty (jest to związane ze zdolnością rozdzielczą oka), znaleźć minimalną i maksymalną odległość od obiektywu przedmiotów przedstawionych ostro na zdjęciu. Obiektyw można w przybliżeniu uważać za ciekłą soczewkę o średnicy  $2r$  i ogniskowej  $f$ . Obliczyć, jaki maksymalny czas naświetlania trzeba przyjąć przy fotografowaniu przedmiotów poruszających się z daną prędkością.

Rozwiązanie na str. 14



Jak to się stało, że matematyka, produkt myśli ludzkiej niezależny od doświadczenia, tak wspaniale pasuje do świata realnego?

Albert Einstein



## Jabłko i Księżyc

Mgr Danuta MAZUREK

Isaac Newton po sformułowaniu praw dynamiki stworzył słynną teorię grawitacji, a raczej prawo powszechnego ciężenia, na którym cała ta teoria jest oparta. Stwierdzenie faktu, że Księżyc spada na Ziemię podobnie jak ciała swobodnie puszczane przy jej powierzchni, wydaje się przy ówczesnym stanie wiedzy wręcz niemożliwe.

W artykule tym wprowadzimy prawo powszechnego ciężenia tak, jak prawdopodobnie zrobił to Newton 300 lat temu.

Widzimy i wiemy z obserwacji astronomicznych, że Księżyc porusza się wokół Ziemi po torze zbliżonym do okręgu. Dla uproszczenia przyjmijmy, że ruch Księżyca jest ruchem jednostajnym po okręgu. Jeżeli ciało porusza się po torze zakrzywionym, to musi działać na nie jakaś siła.

Na ciała znajdujące się na powierzchni Ziemi działa siła przyciągania zwana siłą ciężkości, skierowana ku środkowi kuli ziemskiej. Pojęcie takiej siły wprowadził już Galileusz. W roku 1665 Newton w swoich notatkach umieścił następującą uwagę: „Podczas tego roku zacząłem rozmyślać nad siłą ciężenia rozciągającą się po orbicie Księżyca i porównywałem siłę potrzebną do utrzymania Księżyca na orbicie z siłami ciężkości na powierzchni Ziemi”. Czy siła działająca na Księżyc i siła działająca na swobodnie spadające ciała może być tego samego pochodzenia? Nasze rozważania będą teraz bardzo nieprecyzyjne, ale za to bardzo podobne do rozważań Newtona. Najważniejsze, że zaprowadzą nas do celu, tak jak i jego zaprowadziły.

Badaniem spadających ciał zajmował się Galileusz, który stwierdził, że wszystkie ciała spadają ruchem jednostajnie przyspieszonym z jednakowym przyspieszeniem. Stwierdził też, że poziomo rzucony z wieży kamień będzie spadać po paraboli i im większa będzie jego prędkość początkowa, tym dalej upadnie. Widzimy to na rysunku 1, który pochodzi z Principiów Newtona. Rysunek sugeruje nam, że być może przy bardzo dużej prędkości początkowej kamień mógłby okrążyć Ziemię dookoła i stałby się jej sztucznym satelitą. Rozważmy rzut poziomy na kuli (patrz rysunek 2). Każda powierzchnia kulista jest powierzchnią lokalnie płaską. Oznacza to, że wycinek powierzchni kuli o bardzo małej powierzchni w stosunku do powierzchni kuli możemy traktować jako obszar płaski, tym bardziej, im mniejsza jest długość łuku  $s$  w porównaniu z obwodem koła wielkiego.

Z wieży rzucamy jabłko z prędkością  $v$ . (Powinniśmy się wytłumaczyć z tytułu artykułu. Otóż legenda mówi, że Newton zauważył analogię między ruchem Księżyca i ruchem swobodnie spadających ciał, siedząc pod jabłonią i obserwując Księżyc na niebie i spadające jabłka z jabłoni. Tłumaczy to, dlaczego i my rzucac będziemy z wieży jabłka a nie „ciała”.) Ruch cienia jabłka na osi  $X$  będzie ruchem jednostajnie opóźnionym, a na osi  $Y$  ruchem jednostajnym. W naszym układzie współrzędnych równania ruchu mają postać:

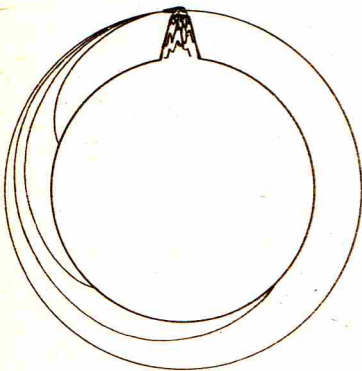
$$(1) \quad x = -\frac{1}{2}at^2, \quad y = v \cdot t,$$

gdzie  $a$  jest przyspieszeniem,  $v$  prędkością początkową jabłka, zaś  $t$  czasem ruchu. Chcemy, aby jabłko poruszało się po łuku paraboli, który w przybliżeniu ma się pokrywać z łukiem okręgu o promieniu  $R$ . Będzie to spełnione tylko dla bardzo małych łuków  $s$ , czyli dla bardzo małych czasów  $t$ . Współrzędne  $x$  i  $y$  mają spełniać równanie okręgu  $(x+R)^2 + y^2 = R^2$ . Wstawmy związki (1) do tego równania:

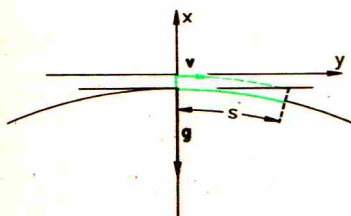
$$\frac{1}{4}a^2t^4 - Rat^2 + R^2 + v^2t^2 = R^2.$$

Dla bardzo małych czasów  $t$  wyrażenie pierwsze możemy pominąć, jako dużo mniejsze od pozostałych. Otrzymamy wtedy

$$(2) \quad a = \frac{v^2}{R}.$$



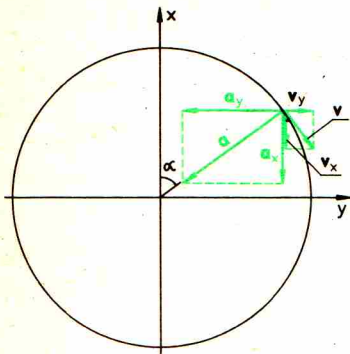
Rys. 1



Rys. 2



A oto ściśle wyprowadzenie wzoru na przyspieszenie dośrodkowe w ruchu jednostajnym po okręgu.



Oznaczenia:  $r$  — promień okręgu,  $v$  — stała prędkość liniowa,  $\omega = \frac{v}{r}$  — stała prędkość kątowa,  $a$  — przyspieszenie,  $t$  — czas.

$$\begin{aligned} v_x &= -v \sin \alpha = -v \frac{y}{r} = -\omega y \\ \text{(i)} \quad v_y &= v \cos \alpha = v \frac{x}{r} = \omega x, \\ a_x &= \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = -\omega \frac{\Delta y}{\Delta t} = -\omega v_y \\ \text{(ii)} \quad a_y &= \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \omega \frac{\Delta x}{\Delta t} = \omega v_x. \end{aligned}$$

Wstawiamy (i) do (ii):

$$\text{(iii)} \quad a_x = -\omega v \cos \alpha, \quad a_y = -\omega v \sin \alpha.$$

Z (iii) widać, że przyspieszenie wypadkowe  $a = a_x + a_y$  skierowane jest wzdłuż promienia do środka okręgu. Wartość przyspieszenia

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \omega \cdot v = \frac{v^2}{r}.$$

Z rysunku 2 widzimy też, że przyspieszenie to skierowane jest do środka okręgu (przyspieszenie dośrodkowe). A zatem, aby jabłko rzucone z wieży z prędkością  $v$  mogło poruszać się po okręgu o promieniu  $R$ , musi działać siła nadająca jabłku przyspieszenie dośrodkowe równe  $\frac{v^2}{R}$ .

Zachodzi też twierdzenie odwrotne: gdy pewna siła nadaje jabłku przyspieszenie skierowane stale do jednego punktu, to jabłko będzie poruszało się po okręgu, jeżeli nadamy mu prędkość  $v = \sqrt{aR}$ .

Przyspieszenie  $a$  dla rzuconego jabłka równa się przyspieszeniu ziemskiemu  $g$ . Przyspieszenie ziemskie jest zawsze skierowane do środka Ziemi. Siła ciężkości działająca na jabłko jest więc siłą dośrodkową (centralną). Księżyc porusza się po okręgu naokoło Ziemi. Musi więc działać nań siła skierowana zawsze do środka Ziemi. Oznacza to, że Księżyc też spada na Ziemię, choć nigdy się z nią nie zderzy. Znając okres obrotu Księżyca dookoła Ziemi ( $T = 27,3$  dnia) i promień jego orbity ( $r \approx 384\,400$  km) możemy obliczyć przyspieszenie spadania

Księżyca. Po przekształceniu wzoru (2) za pomocą związku  $v = \frac{2\pi r}{T}$  otrzymamy

$$a_K = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r \approx 0,0027 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Obliczmy stosunek przyspieszenia swobodnego spadania ciał przy powierzchni Ziemi do przyspieszenia spadania Księżyca oraz stosunek promienia orbity Księżyca do promienia Ziemi ( $R = 6370$  km)

$$\frac{g}{a_K} = 3633, \quad \frac{r}{R} = 60,3.$$

Zauważmy, że kwadrat liczby 60,3 jest bliski liczbie 3633. Jeżeli więc założymy, że oba spadki są wywołane przez tę samą siłę (siłę ciężkości), to najprostsze prawo dla tej siły dostaniemy zakładając odwrotną jej proporcjonalność do kwadratu odległości. Jednocześnie z trzeciego prawa dynamiki Newtona (prawa „akcji i reakcji”) wynika, że jeżeli Ziemia przyciąga ciała z siłą  $F = ma$  ( $m$  — masa ciała), to te ciała przyciągają Ziemię z siłą o tej samej wartości  $F = Ma_z$  ( $M$  — masa Ziemi,  $a_z$  — przyspieszenie Ziemi) i przeciwnym zwrocie. Ponieważ przyspieszenie grawitacyjne ciał nie zależy od ich mas, więc siła przyciągania powinna być proporcjonalna do iloczynu mas Ziemi i jabłka (lub Księżyca). Zakładamy więc, że Ziemia przyciąga wszystkie ciała z siłą wprost proporcjonalną do iloczynu masy ciała i Ziemi i odwrotnie proporcjonalną do kwadratu ich odległości. I podobnie działają te ciała na Ziemię. Wtedy Słońce przyciąga Ziemię, a Ziemia Słońce. Słońce przyciąga też wszystkie inne planety Układu Słonecznego. A zatem wszystkie ruchy planet, ich księżyców oraz spadających na nie ciał powinny być opisywane przez prawo powszechnego ciążenia

$$(3) \quad F = k \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

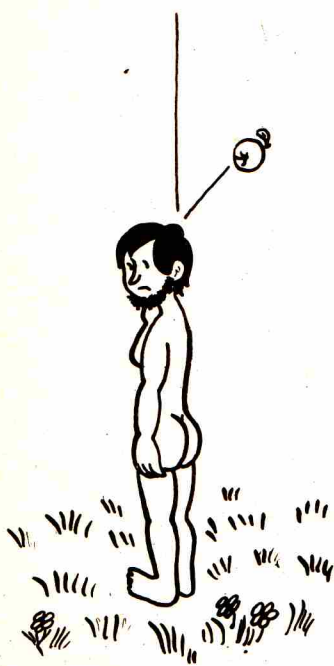
gdzie  $m_1$  i  $m_2$  są masami przyciągających się ciał, a  $k$  jest stałą proporcjonalności. Jest to prawda, jeżeli trafnie opisaliśmy analogię między ruchem jabłka i księżyca.

Po odkryciu Mikołaja Kopernika wiadomo było, że planety w Układzie Słonecznym krążą naokoło Słońca. Charakterystyczne cechy tego ruchu zostały zebrane w postaci tzw. praw Keplera. Newton wyprowadził ściśle te prawa posługując się sformułowanym prawem powszechnego ciążenia. W ten sposób dynamika Układu Słonecznego została sprowadzona do wzoru (3).

Warto dodać, że prawo powszechnego ciążenia przewiduje przyciąganie się dwóch dowolnych mas. Wynika z tego, że np. jabłko przyciągane jest przez każdy element Ziemi. Dlaczego więc wypadkowa tych wszystkich sił skierowana jest do środka Ziemi? Aby pokazać, że tak być musi, Newton przez dwadzieścia lat tworzył rachunek całkowity (równie nieporządny, choć skuteczny, jak i newtonowski rachunek różniczkowy, którego fragment przytoczyliśmy) i o tyle też opóźnił ogłoszenie swych wyników. Stałą  $k$  zwaną inaczej stałą grawitacji wyznaczył Henry Cavendish w siedemdziesiąt lat po śmierci Newtona (dziś przyjmuje się  $k = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$ ).

Pomiary Cavendisha były jednocześnie potwierdzeniem prawa grawitacji nie tylko dla ciał niebieskich.

Fakty pozornie nie mające ze sobą nic wspólnego, jak ruch Księżyca na niebie i swobodne spadanie ciał na Ziemi, doprowadziły Newtona do teorii, która dziś nie tylko opisuje ruch planet. Także tory satelitów startujących z Ziemi są obliczane na podstawie prawa powszechnego ciążenia. A najpiękniejszym jego potwierdzeniem było wylądowanie ludzi na Księżycu.





Szanowna Redakcjo

Po przeczytaniu w „Dziele” 2/1979 artykułu kol. Kraińskiego nasunęły mi się wątpliwości odnośnie wyników doświadczeń przeprowadzonych przez autora. Maksymalna rozpuszczalność NaCl w wodzie wynosi 35 g w temperaturze 30°C. W szklance mieści się ok. 250 g wody. Jedna łyżeczka to ok. 11 g NaCl. Z obliczeń wynika, że w szklance może rozpuścić się najwyżej ok. 88 g soli, natomiast kol. Kraiński donosi o rozpuszczeniu 121 g NaCl w jednej szklance. Jest to oczywiście niemożliwe. Zasadniczą sprawą jest jednak funkcja czasu oscylacji w zależności od stężenia roztworu. Dla porównania podaję niżej otrzymane przeze mnie wyniki. Z wyników można wyciągnąć wniosek, że czas oscylacji jest tym większy im mniejsze jest stężenie roztworu i im mniejsza jest średnica poziomów. Z wyników kol. Kraińskiego można wyciągnąć przeciwny wniosek. Chciałbym jeszcze parę słów powiedzieć na temat wyjaśnienia teoretycznego, proponowanego przez autora. Wbrew założeniu kol. Kraińskiego czas, jaki jest potrzebny do dyfuzji całkowitej wody i roztworu solnego w słoiku jest rzędu kilkunastu godzin. Nie może więc mieć wpływu na przebieg doświadczenia dyfuzja. Z własnych obserwacji zjawiska mogą tylko dorzucić wiadomość, że oscylacje urywają się na stałe, kiedy ciśnienie hydrostatyczne wody jest równe ciśnieniu hydrostatycznemu roztworu na poziomie otwórka.

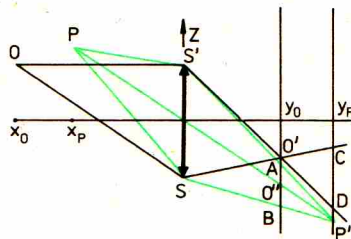
Slawomir PROCHOCKI  
ul. Ogrodowa 29  
19-300 ELK

Czas sr.	Czas oscylacji				Ø otwórka	Stężenie roztworu
	53,4s.	39,0s.	29,8s.	20,7s.		
48s.	40s.	28s.	20s.		0,5 mm	10%
51s.	38s.	30s.	20s.		0,5 mm	20%
60s.	38s.	29s.	24s.		1,0 mm	10%
65s.	40s.	35s.	23s.		1,5 mm	10%
55s.	35s.	30s.	18s.			
45s.	40s.	30s.	20s.			
50s.	42s.	27s.	20s.			



Rozwiązanie zadania F 66

a. Niech płaszczyzna ostrości znajduje się w odległości  $x$  od obiektywu. Równanie soczewki daje nam związek między  $x_0$  i  $y_0$  (patrz rysunek).



$$(1) \quad \frac{1}{x_0} + \frac{1}{y_0} = \frac{1}{f}$$

Szukamy odległości  $x_p$  od obiektywu, przy której rozmycie obrazu punktu  $P$  (odcinek  $AB$ ) nie przekracza wartości  $d$ . Z równania soczewki mamy związek (dla  $AB = d$ )

$$(2) \quad \frac{1}{x_p} + \frac{1}{y_p} = \frac{1}{f}$$

Korzystamy z podobieństwa trójkątów  $SS'P'$  i  $ABP'$  i otrzymujemy związek

$$(3) \quad \frac{d}{2r} = \frac{y_p - y_0}{y_p}$$

Szukamy zależności  $x_p$  od  $x_0$ . Korzystając ze związków (1), (2) i (3), otrzymujemy

$$x_p = \frac{f^2 x_0}{f^2 + d \cdot k(x_0 - f)}, \text{ gdzie } k = \frac{f}{2r} \text{ jest wielkością przestony.}$$

Obliczone  $x_p$  stanowi minimalną odległość od obiektywu, przy której obraz przedmiotów jest nadal ostry. Aby znaleźć maksymalną odległość, przy której obraz pozostaje ostry, wystarczy odwrócić sytuację. Niech  $x_p$  będzie płaszczyzną ostrości. Szukamy teraz  $x_0$  jako funkcji  $x_p$ . Korzystając z podobieństwa trójkątów  $SS'O$  i  $O'CD$  i z równania soczewki otrzymamy związek

$$x_0 = \frac{f^2 x_p}{f^2 - d \cdot k(x_p - f)}$$

Granice głębi ostrości (jeśli płaszczyzna ostrości jest w odległości  $x$ ) wynoszą więc

$$x_{\min} = \frac{f^2 x}{f^2 + d \cdot k(x - f)}, \quad x_{\max} = \frac{f^2 x}{f^2 - d \cdot k(x - f)}$$

Wartości  $x_{\min}$  i  $x_{\max}$  można oszacować zakładając  $k = 1,8 - 2$  (typowe dla dobrych obiektywów),  $f = 50 - 55$  mm

$$\text{ i } d = \frac{1}{1500} f.$$

b. Jeżeli  $f^2 - d \cdot k(x - f) = 0$ , to  $x_{\max} = \infty$ . Wtedy  $x_{\infty} = \frac{f^2}{d \cdot k} + f$  i wszystkie punkty leżące dalej niż  $x_{\min} = \frac{1}{2} x_{\infty}$

będą ostre na kliszy.

c. Niech teraz obiekt porusza się z punktu  $O$  do punktu  $P$  z prędkością  $v$ . Ostrość obrazu nastawiamy w momencie, gdy obiekt znajduje się w punkcie  $O$  (obraz w  $O'$ ). Rozmycie obrazu wynika z przesunięcia  $OP$  jest równe odcinkowi  $O'B$ . Ponieważ w ogólności obraz  $O'$  punktu  $O$  może wypaść wewnątrz odcinka  $AB$ , warunek na ostrość wygląda następująco

$$d \geq \max(|z_{O'} - z_{O'}|, \frac{AB}{2}) + \frac{AB}{2}$$

Z poprzednich rozważań wynika, że  $\frac{AB}{2r} = \frac{y_p - y_0}{y_p}$

Wykorzystując związki  $x_p = v_x \Delta t + x_0$  i  $x_p = v_x \Delta t + x_0$  oraz równanie soczewki otrzymujemy

$$\frac{AB}{2f} = \frac{r v_x \Delta t}{x_0 (v_x \Delta t + x_0 - f)}$$

Można oszacować tę wielkość, zakładając normalne warunki fotografowania, np.  $x_0 = 10$  m,  $\Delta t = \frac{1}{30}$  s (granica dla zdjęć z ręki),  $v_x = 10$  m/s oraz  $r = 2 \cdot 10^{-2}$  m,  $f = 5 \cdot 10^{-2}$  m. Wtedy

$$\frac{AB}{2f} \approx 7 \cdot 10^{-3}$$

Ponieważ w praktyce amatorskiej, aby otrzymać ostry obraz wystarczy  $d \approx \frac{1}{1500} f$ , widać, że rozmycie związane z przesuwaniami się w kierunku obiektywu nie wpływa w istotny sposób na ostrość obrazu. Decyduje odległość  $|z_{O'} - z_{O'}|$ . Łatwo sprawdzić na rysunku, że zachodzą związki

$$\frac{x_p}{x_0} = \frac{z_{O'}}{y_0} \text{ oraz } \frac{z_{O'}}{y_0} = \frac{z_0}{x_0}$$

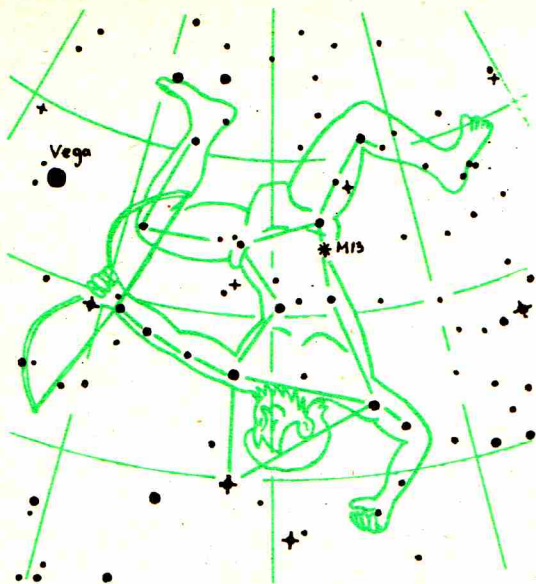
Pomijając nieistotny wkład wyrazu  $\frac{AB}{2}$  mamy

$$d \geq |z_{O'} - z_{O'}| = \frac{|v_x \Delta t x_0 - z_0 v_x \Delta t| f}{(v_x \Delta t + x_0)(x_0 - f)}$$

skąd

$$\Delta t \leq \frac{x_0 d (x_0 - f)}{|v_x z_0 - z_0 v_x| \cdot f - d (x_0 - f) v_x}$$





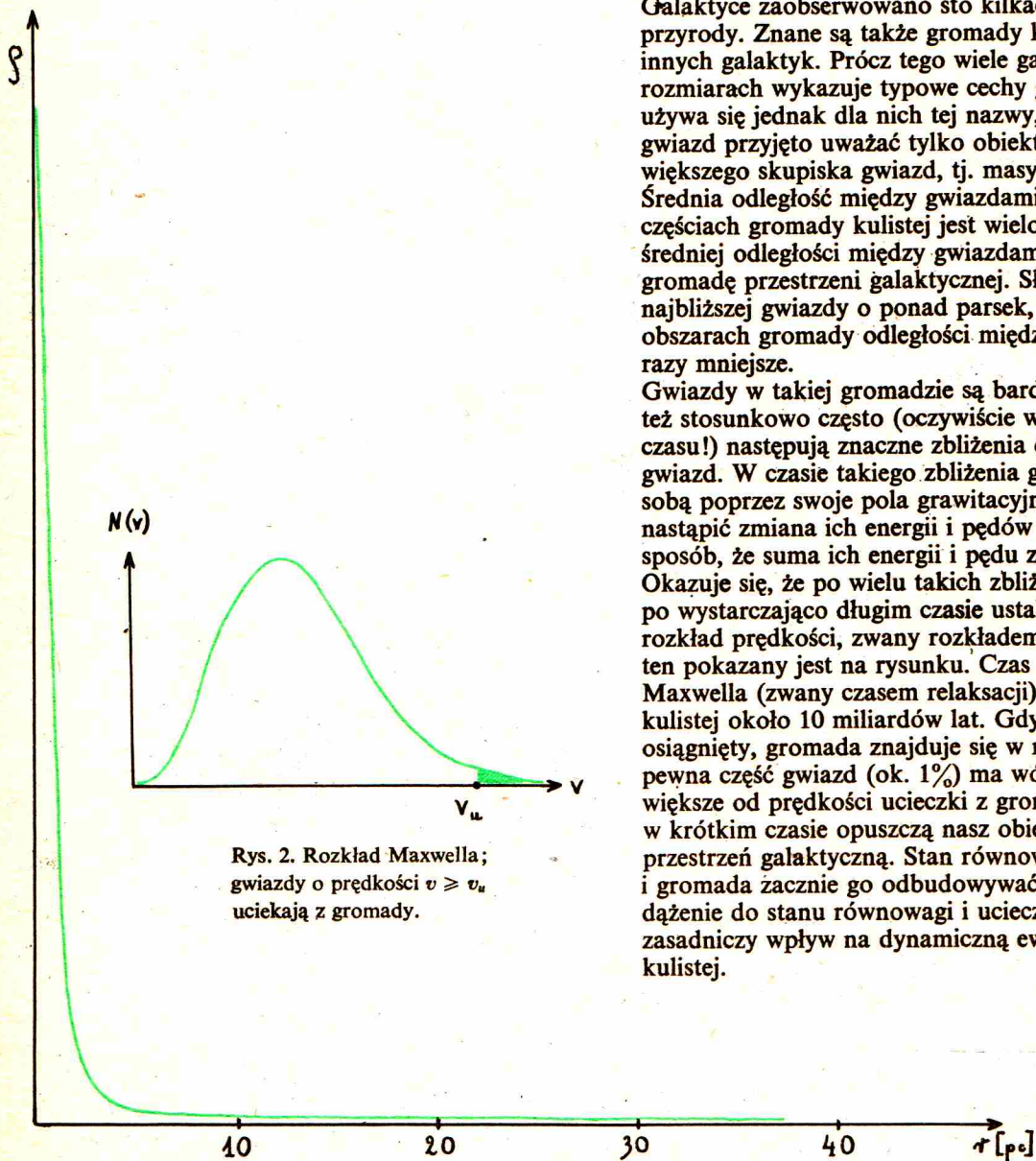
### Patrz w niebo

Najbardziej charakterystycznym czerwcowym gwiazdozbiorem jest Herkules (*Her*), znajdujący się między znaną nam już Koroną Północną i konstelacją Lutni, w której jest najjaśniejsza gwiazda letniego nieba — Vega. Wyteżając mocno wzrok można dostrzec na linii łączącej dwie gwiazdy  $\eta Her$  i  $\zeta Her$  — bardzo słabą plamkę. Przez lornetkę widać już wyraźnie, że nie jest to gwiazda. Jest to gromada kulista gwiazd o prozaicznej nazwie M13. Gromady kuliste są jednymi z najpiękniejszych obiektów na sferze niebieskiej. Są to skupiska setek tysięcy gwiazd wyraźnie zagęszczających się w środku (patrz rysunek). Wykazują one niemal idealną symetrię kulistą — stąd ich nazwa. Promień typowej gromady wynosi kilkadziesiąt parseków, a masa  $10^5 - 10^6$  mas Słońca.

Gromady kuliste są obiektami dość licznymi. W naszej Galaktyce zaobserwowano sto kilkadziesiąt takich tworów przyrody. Znane są także gromady kuliste należące do innych galaktyk. Prócz tego wiele galaktyk o małych rozmiarach wykazuje typowe cechy gromad kulistych. Nie używa się jednak dla nich tej nazwy, gdyż za gromady gwiazd przyjęto uważać tylko obiekty leżące w obrębie większego skupiska gwiazd, tj. masywnej galaktyki. Średnia odległość między gwiazdami w centralnych częściach gromady kulistej jest wielokrotnie mniejsza od średniej odległości między gwiazdami w otaczającej gromadę przestrzeni galaktycznej. Słońce jest oddalone od najbliższej gwiazdy o ponad parsek, w centralnych obszarach gromady odległości między gwiazdami są sto razy mniejsze.

Gwiazdy w takiej gromadzie są bardzo ruchliwe; dlatego też stosunkowo często (oczywiście w astronomicznej skali czasu!) następują znaczne zbliżenia dwóch sąsiednich gwiazd. W czasie takiego zbliżenia gwiazdy oddziałują ze sobą poprzez swoje pola grawitacyjne. Może wówczas nastąpić zmiana ich energii i pędów (ale tylko w ten sposób, że suma ich energii i pędu zostanie nie zmieniona!). Okazuje się, że po wielu takich zbliżeniach, a tym samym po wystarczająco długim czasie ustali się w gromadzie rozkład prędkości, zwany rozkładem Maxwella. Rozkład ten pokazany jest na rysunku. Czas ustalania się rozkładu Maxwella (zwany czasem relaksacji) wynosi dla gromady kulistej około 10 miliardów lat. Gdy taki rozkład jest już osiągnięty, gromada znajduje się w równowadze. Jednak pewna część gwiazd (ok. 1%) ma wówczas prędkości większe od prędkości ucieczki z gromady; gwiazdy takie w krótkim czasie opuszczą nasz obiekt i poszybują w przestrzeń galaktyczną. Stan równowagi zostanie zaburzony i gromada zacznie go odbudowywać. Te dwa czynniki — dążenie do stanu równowagi i ucieczka gwiazd — mają zasadniczy wpływ na dynamiczną ewolucję gromady kulistej.

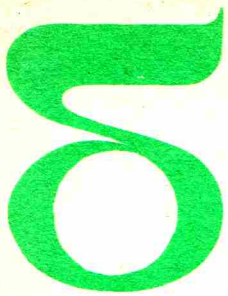
Mgr Michał CZERNY



Rys. 2. Rozkład Maxwella; gwiazdy o prędkości  $v \geq v_u$  uciekają z gromady.

Rys. 1. Rozkład gęstości w gromadzie kulistej.



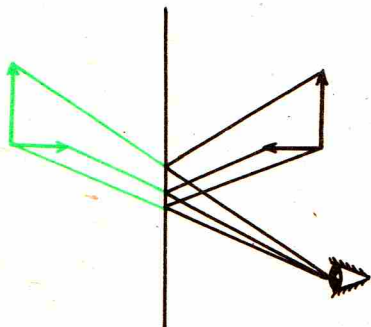
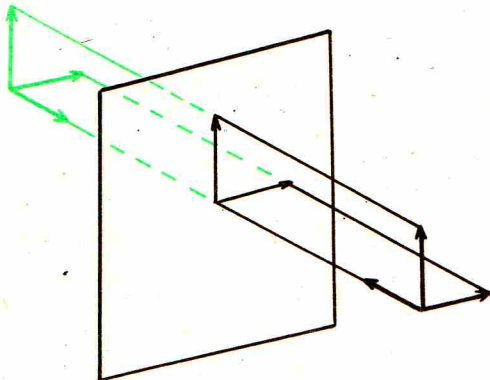


# mata delta



## Dlaczego lustro odwraca „lewo i prawo”, a nie odwraca „góry i dołu”?

Może się wydawać, że lustro — zwykłe płaskie lustro, jakie każdy ma w domu — jest rzeczą tak dobrze znaną, że trudno by było wymyślić jakikolwiek ciekawy problem z nim związany. Czy jednak każdy z Was — drodzy Czytelnicy — potrafiłby bez namysłu odpowiedzieć na pytanie, dlaczego lustro odwraca prawą i lewą stronę, a nie odwraca góry i dołu? A że tak jest, wystarczy sprawdzić — stańmy przed lustrem i poruszajmy prawą ręką. Zobaczmy, że nasze odbicie porusza lewą ręką. Jeżeli jesteśmy w marynarce (uszytej w zwykły sposób, a więc mającej jedną górną kieszonkę po lewej stronie), to nasze odbicie będzie miało górną kieszonkę po stronie przeciwnej do tej, po której miałby ją człowiek, stojący naprzeciwko nas zamiast naszego odbicia. Jednak głowa zawsze będzie na górze, a nogi na dole. Skąd więc lustro „wie”, co ma odwracać? Ciekawe jest to, że gdy się położymy na boku, wtedy lustro znów będzie odwracać naszą prawą i lewą stronę, a nie odwracać naszej góry i dołu (tzn. kierunku głowa—nogi). Jednak kierunki odwracane i nie odwracane będą teraz inne niż wtedy, gdy staliśmy przed lustrem — poprzednio odwrócenie następowało w poziomie, teraz następuje w pionie. To nasuwa przypuszczenie, że sposób odwracania obrazu nie wynika z „natury” lustra, tylko powstaje w umyśle człowieka. Tylko w jaki sposób?



Otóż, w rzeczywistości lustro nie odwraca ani góry i dołu, ani strony lewej i prawej, tylko przód i tył. Na początku to się może wydawać dziwne, jednak po krótkim zastanowieniu łatwo zauważyć, że tak jest naprawdę: to, co jest bardziej z przodu z punktu widzenia człowieka, stojącego przed lustrem i zwróconego w jego stronę, a więc to, co jest bliżej powierzchni lustra, na obrazie pozornym też jest bliżej jego powierzchni, a to, co jest bardziej z tyłu, w odbiciu też jest dalej powierzchni lustra. Ale te odległości mierzymy z drugiej strony lustra, więc wektor prostopadły do jego powierzchni będzie miał w odbiciu odwrócony zwrot. Natomiast odcinki równoległe do jego powierzchni będą miały zwrot zachowany. Widać to na zamieszczonych rysunkach.

Po przeczytaniu do tego miejsca na pewno wszyscy powiecie: „Przecież to jest oczywiste! Obraz pozorny w lustrze powstaje przez symetrię w przestrzeni trójwymiarowej względem płaszczyzny, odpowiadającej powierzchni lustra”. Tak, ale dla rozwiązania naszego problemu najistotniejsza jest nasza uwaga o odwracaniu przodu i tyłu. To, co widzimy w lustrze, różni się tylko tym odwróceniem od tego, co naprawdę istnieje.

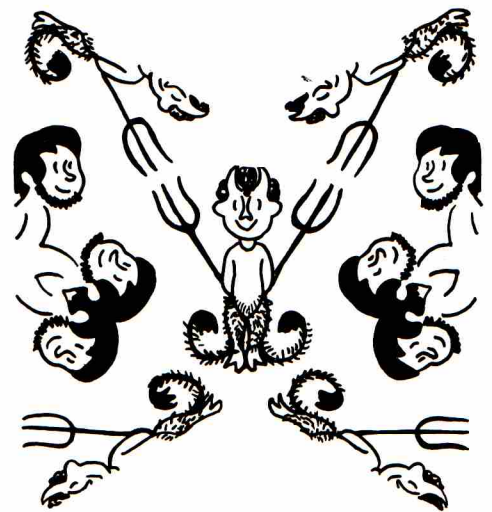
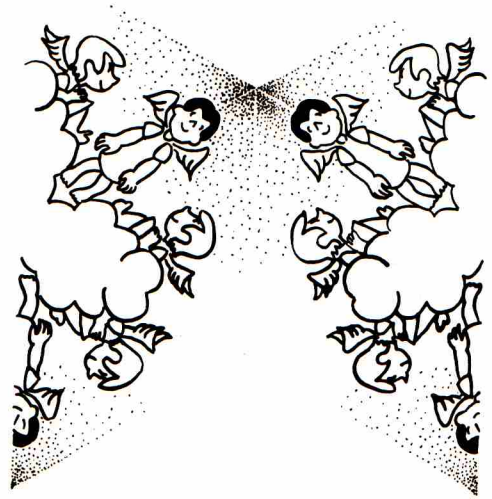


Dlaczego więc nam się wydaje, że lustro odwraca lewo i prawo, a nie przód i tył? Żeby na to odpowiedzieć, na początku zdajmy sobie jasno sprawę z tego, że nasze odbicie będziemy traktować jak żywego człowieka, tzn. tak, jakby lustro nie było — inaczej do niczego byśmy nie doszli (odpowiedź na pytanie, co odwraca lustro, polega właśnie na porównaniu tego, co w nim widzimy z tym, co widzimy, nie patrząc w nie). Za punkt wyjścia do porównań będziemy zatem traktować człowieka, stojącego przed lustrem i patrzącego w nie.

Załóżmy, że przed lustrem stoi człowiek w marynarce. Wyobraźmy sobie, że ktoś zrobił „mapę plastyczną” zwróconej do lustra powierzchni tego człowieka. Następnie wywinął ją „na lewą stronę”, tzn. zrobił z nią to, co z obrazem robi lustro. Gdyby lustro nie odwracało przodu i tyłu, wtedy człowiek widziałby w nim to, co by widział, oglądając swoją „mapę plastyczną” od wewnątrz, a więc widziałby obraz wklęsły. Żeby zobaczyć prawdziwy obraz człowieka, a więc obraz wypukły, musiałby popatrzeć na tę „mapę” z drugiej strony, musiałby się zatem odwrócić. Ale człowiek się odwraca tylko w jeden sposób: dokonuje obrotu względem pionowej osi, czyli zostawia nie zmieniony kierunek góra—dół, a zmienia kierunek lewo—prawy. Ponieważ jednak lustro odwraca przód i tył, więc człowiek w rzeczywistości widzi obraz wypukły, więc go traktuje jako obraz naturalny. Widzi zatem obraz odwrócony w taki sposób, w jaki by się sam odwrócił w poprzednio opisanej sytuacji. Gdyby się wtedy odwracał względem osi poziomej, a nie pionowej (tzn. do góry nogami), wtedy by powiedział, że odwróceniu uległy góra i dół. Ale wiadomo, że człowiek zawsze ma nogi na dole, a głowę na górze, a lewa i prawa ręka mogą być skierowane w różne strony. W przyjęciu ewentualności o odwracaniu lewej i prawej strony, a nie góry i dołu, bardzo pomaga również symetria człowieka. Jeżeli człowiek jest symetrycznie ubrany i uczesany, to nie widać, że się zamieniły miejscami lewa i prawa strona. (Dlatego właśnie założyliśmy, że człowiek jest w marynarce. Chodziło o wprowadzenie małej choćby asymetrii). Gdyby człowiek nie był symetryczny, np. miał tylko prawą rękę, wtedy jednak też by następowało odwrócenie lewej i prawej strony (czy, jak by można było wtedy powiedzieć, strony „ręcznej” i „beZRęcznej”), ponieważ nadal człowiek by się odwracał względem pionowej osi, zostawiając nie zmieniony kierunek góra—dół. Ale gdyby człowiek był asymetryczny i poruszał się w stanie nieważkości (więc nogi nie zawsze by były na dole i nie zawsze człowiek by się odwracał względem pionowej osi, tylko np. stając na głowie, żeby zobaczyć, co jest z tyłu), wtedy nie można by było powiedzieć, że lustro odwraca kierunek lewo—prawy lub kierunek góra—dół, bo oba odwrócenia  $l_r$  byłyby jednakowo prawdopodobne.

Jednak obraz w lustrze oczywiście nadal by był odwrócony. Widzimy więc, że nasz problem ma naturę czysto geometryczną. Sposób odwracania obrazu przez lustro jest spowodowany sposobem odwracania się człowieka, który z kolei wynika z istnienia grawitacji i budowy każdego z nas. Symetria człowieka ma wprawdzie pewne znaczenie — ułatwia pomyłkę w zauważeniu odwracania, jednak — jak widzieliśmy — nie symetria jest najważniejsza w rozwiązywaniu zagadnienia.

Czy jednak zawsze lustro „odwraca lewo i prawo, a nie górę i dół”? Przecież, kiedy staniemy na lustrze, wtedy zobaczymy, że są zamienione właśnie góra i dół, a nie lewa i prawa strona! Po krótkim namyśle na pewno każdy z Was pogodzi to z tym, co było poprzednio powiedziane.



Od Redakcji. Zamieszczamy powyższy artykuł, chociaż wywody autora nie przekonują nas i nadal nie wiemy, co lustro odwraca i dlaczego? A może w ogóle niczego nie odwraca? Zapraszamy Czytelników do dyskusji. Czekamy na listy.

O tym, co widać w lustrze, pisaliśmy już w numerze 6/1977

Małą Deltę opracował Krzysztof DĄBROWSKI.



