

SPIS TREŚCI

NUMERU 5(65)

Ułamki łańcuchowe <i>Prof. dr Andrzej Schinzel</i>	str. 1
Układy wielu cząstek — opis statystyczny <i>Dr Marek Cieplak</i>	str. 6
Laboratorium w domu <i>Mgr Andrzej Gołębiowski</i>	str. 9
O pewnym paradoksie hydraulicznym <i>Mgr inż. Jacek Chlipalski</i>	str. 10
Drobiazgi	str. 11
Mechanika, komputer, człowiek (VIII) <i>Prof. dr Dominik Rogula</i>	str. 12
Zadania	str. 13
Patrz w niebo	str. 14
Mała Delta	str. 15

**W następnym numerze:
Sprawdzalność**

„Delta”
matematyczno-fizyczny miesięcznik
popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego i Polskiego
Towarzystwa Fizycznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny:
doc. dr J. Bartke
doc. dr A. Bączyński
doc. dr B. Gleichgewicht
prof. dr K. Goebel
doc. dr B. Iwaszkiewicz
doc. dr T. Iwiński
doc. dr A. Januszajtis
prof. dr L. Jeśmanowicz
mgr H. Kaczorek
prof. dr M. Kuczma
mgr A. Mąkowski
prof. dr Z. Pawlak
prof. dr A. Piekara
prof. dr Z. Semadeni
prof. dr J. Stankowski
prof. dr M. Subotowicz
doc. dr S. Turnau

prof. dr J. Wdowczyk
prof. dr Janusz Zakrzewski —
wiceprzewodniczący
prof. dr Wojciech Żakowski —
przewodniczący

Redaguje Kolegium w składzie:
doc. dr T. Hofmokl — z-ca red. nac.
B. Jaworska-Kordos — ilustracje
dr M. Kordos — red. nac.
dr M. Szurek
dr K. Prażmowski — red. techn. graf.
mgr K. Szypcio — sekr. red.
doc. dr M. Świącki
Adres Redakcji
ul. Hoża 69 pok. 151,
00-681 Warszawa

Zakład Narodowy im.
Ossolińskich — Wydawnictwo
Wrocław, Oddział w Warszawie
Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.
wyd.; 2,50 ark. druk.;
papier offsetowy III kl. 80 g. 61 × 86
Wydrukowano w Drukarni im.
Rewolucji Październikowej
Warszawa ul. Mińska 65.
Nr zam. 165/79 C-35

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60, — cena prenumeraty półrocznej
zł 30, —

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch” oraz urzędy pocztowe
i doręczyciele — w terminach:

— do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i cały rok następnny
— do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego.
Jednostki gospodarki uspołecznionej instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienia
w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”.

Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW, oraz prenumeratorzy
indywidualni zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej,
przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw,
ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 w terminach podanych dla
prenumeraty krajowej

Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać
„DELTA”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.
Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem
lub za zaliczeniem pocztowym.

Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Konto PKO I OM W-wa 1531-912

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście
00-068 Warszawa, Poland or with

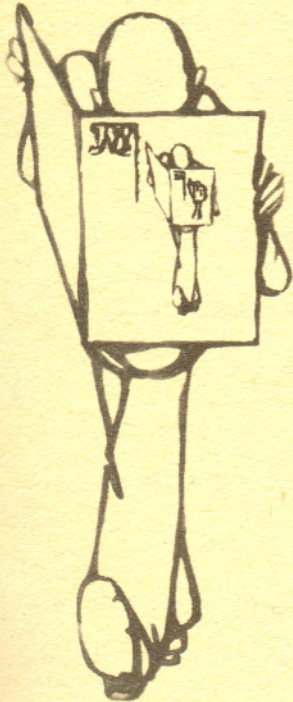
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68,
Bundesrepublik Deutschland.

— Earls Court Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain,
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia

Cena 1 egzemplarza zł 5, — nr indeksu 35723/35550

Ułamki łańcuchowe

Prof. dr Andrzej
SCHINZEL



Ułamkiem łańcuchowym skończonym lub nieskończonym nazywamy wyrażenie typu odpowiednio

$$(1) \quad b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} \quad \text{lub} \quad (2) \quad b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \dots + \frac{a_n}{b_n} + \dots$$

gdzie a_i, b_i są elementami dowolnego ciała. Ułamki takie zapisujemy prościej w postaci

$$b_0 + \left| \frac{a_1}{b_1} \right| + \left| \frac{a_2}{b_2} \right| + \dots + \left| \frac{a_n}{b_n} \right| \quad \text{lub} \quad b_0 + \left| \frac{a_1}{b_1} \right| + \dots + \left| \frac{a_n}{b_n} \right| + \dots$$

W niniejszym artykule ograniczymy się do omówienia ułamków łańcuchowych, których liczniki a_i i mianowniki b_i (obejmowane niekiedy wspólną nazwą wyrazów ułamka łańcuchowego) są liczbami rzeczywistymi. Takim ułamkiem skończonym można przypisać wartość liczbową, jeżeli wszystkie zaznaczone dzielenia są wykonalne, tzn. wszystkie wyrazy ciągu określonego rekurencyjnie wzorami

$$c_0 = b_n, \quad c_k = b_{n-k} + \frac{a_{n-k+1}}{c_{k-1}} \quad (1 \leq k < n)$$

są różne od zera. Liczbę $c_n = b_0 + \frac{a_1}{c_{n-1}}$ nazywamy wówczas wartością ułamka (1) i piszemy

$$b_0 + \left| \frac{a_1}{b_1} \right| + \dots + \left| \frac{a_n}{b_n} \right| = c_n.$$

Inny sposób obliczania wartości ułamka łańcuchowego podaje twierdzenie następujące.

Twierdzenie 1. *Polóżmy $P_{-1} = 1, Q_{-1} = 0, P_0 = b_0, Q_1 = 1$ oraz*

$$\begin{aligned} P_k &= P_{k-1} b_k + P_{k-2} a_k \\ Q_k &= Q_{k-1} b_k + Q_{k-2} a_k \end{aligned} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

Jeżeli ułamek łańcuchowy (1) ma oznaczoną wartość w , to

$$w = \frac{P_n}{Q_n}.$$

Liczbę $b_0 + \left| \frac{a_1}{b_1} \right| + \dots + \left| \frac{a_k}{b_k} \right|$, jeśli jest określona, nazywamy k -tym reduktem ułamka łańcuchowego (2), a dla $k \leq n$ również ułamka łańcuchowego (1). Jeśli dla ułamka łańcuchowego (2) redukty R_k są określone dla prawie wszystkich k i ciąg R_k jest zbieżny, to ułamek łańcuchowy nazywamy zbieżnym, a granicę $\lim_{k \rightarrow \infty} R_k = w$ nazywamy jego wartością i piszemy

$$b_0 + \left| \frac{a_1}{b_1} \right| + \dots + \left| \frac{a_n}{b_n} \right| + \dots = w.$$

Zapis ten nie jest całkiem konsekwentny (właściwie należałoby odróżniać ułamek łańcuchowy od jego wartości), ale jest uświęcony tradycją i nie doprowadza w praktyce do nieporozumień.

Podobnie symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oznacza zarazem szereg nieskończony i jego sumę.

Na temat ułamków łańcuchowych o wyrazach dodatnich mamy dwa następujące twierdzenia.

Twierdzenie 2. *Jeżeli liczby a_k, b_k są dodatnie dla $k \geq 1$, a ułamek (2) jest zbieżny, to redukty rzędu parzystego przybliżają jego wartość z niedomiarem, a redukty rzędu nieparzystego z nadmiarem.*

Twierdzenie 3. *Jeżeli $a_k = 1$ i $b_k > 0$ dla $k \geq 1$, to ułamek (2) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy,*

gdy szereg $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ jest rozbieżny.

Szczególnie ważne są tzw. ułamki łańcuchowe arytmetyczne, tj. takie, których liczniki a_k są wszystkie równe 1, a mianowniki b_k dla $k \geq 1$ są liczbami naturalnymi oraz b_0 jest liczbą całkowitą. Na mocy twierdzenia 3 ułamki łańcuchowe arytmetyczne nieskończone są zbieżne. Wartość każdego ułamka łańcuchowego arytmetycznego skończonego jest liczbą wymierną. Odwrotnie, łatwo dowieść, że każda liczba wymierna różna od 1 ma dokładnie jedno rozwinięcie na ułamek łańcuchowy arytmetyczny, *normalne*, tj. z ostatnim mianownikiem różnym od 1. Rozwinięcie to można otrzymać przy pomocy algorytmu Euklidesa. Na przykład celem rozwinięcia na ułamek łańcuchowy liczby $96/65$ znajdujemy kolejno

$$96 = 1 \cdot 65 + 31, \quad 65 = 2 \cdot 31 + 3, \quad 31 = 10 \cdot 3 + 1, \quad 3 = 3 \cdot 1,$$

skąd
$$\frac{96}{65} = 1 + \left| \frac{1}{2} \right| + \left| \frac{1}{10} \right| + \left| \frac{1}{3} \right|.$$

Mamy dalej

**Rozwiązanie zadania M 194.**

Nietrudno zauważyć, że n -1 mnożeń $a \cdot a = a^2$, $a \cdot a^2 = a^3$, ..., $a \cdot a^{n-1} = a^n$ jest rozwiązaniem bardzo nieekonomicznym. Jeżeli bowiem $2^k \leq n < 2^{k+1}$, to wystarczy znaleźć potęgi $a^2 = a \cdot a$, $a^4 = a^2 \cdot a^2$, ..., $a^{2^k} = a^k \cdot a^k$, a następnie pomnożyć te ze znalezionych potęg, którym odpowiadają jedynki w rozwinięciu dwójkowym $n = c_0 + 2c_1 + 2^2c_2 + \dots + 2^k c_k$. W ten sposób znajdziemy a^n po wykonaniu najwyżej $2k = 2 \lceil \log_2 n \rceil$ mnożeń.

Uwaga: W pewnych wypadkach (jakich — pozostawiamy Czytelnikom) i ta strategia nie jest optymalna.

Twierdzenie 4. Wartość każdego ułamka łańcuchowego arytmetycznego nieskończonego jest liczbą niewymierną. Każda liczba niewymierna ma dokładnie jedno rozwinięcie na ułamek łańcuchowy arytmetyczny nieskończony.

Rozwinięcie liczby niewymiernej w , o którym mowa w twierdzeniu, znajdujemy jak następuje. Kładziemy $x_0 = w$, $b_0 = [x_0]$ (całość z x_0) i dalej stosujemy wzory zwrotne

$$x_{k+1} = \frac{1}{x_k - b_k}, \quad b_{k+1} = [x_{k+1}].$$

Dla ułamków łańcuchowych arytmetycznych zachodzi ważny wzór

$$P_{k-1}Q_k - Q_{k-1}P_k = (-1)^k.$$

Ponieważ liczby P_k i Q_k są całkowite, wynika stąd, że ułamki P_k/Q_k są nieskracalne. Ułamki te przybliżają wartość ułamka łańcuchowego, którego są reduktami z dużą dokładnością. Mamy istotnie

Twierdzenie 5. Jeżeli w jest wartością, zaś P_k/Q_k ($k = 0, 1, \dots$) kolejnymi reduktami ułamka łańcuchowego arytmetycznego, to

$$\left| w - \frac{P_k}{Q_k} \right| < \frac{1}{Q_k^2} \quad \text{dla wszystkich } k \geq 1,$$

$$\left| w - \frac{P_k}{Q_k} \right| < \frac{1}{2Q_k^2} \quad \text{dla co najmniej jednego z dwóch kolejnych } k \geq 1,$$

$$\left| w - \frac{P_k}{Q_k} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}Q_k^2} \quad \text{dla co najmniej jednego z trzech kolejnych } k \geq 1.$$

Stałej $\sqrt{5}$ występującej w twierdzeniu nie można już poprawić. Istotnie dla rozwinięcia

$$(3) \quad \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \dots$$

liczby P_k, Q_k są odpowiednio równe $(k+2)$ -emu i $(k+1)$ -emu wyrazowi ciągu Fibonacciego

$$\text{a mamy} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{P_k}{Q_k} \right| Q_k^2 = \sqrt{5}.$$

Przybliżenie wartości ułamka łańcuchowego przez jego redukty jest nie tylko dobre, ale również najlepsze możliwe, w sensie sprecyzowanym przez następujące

Twierdzenie 6. Jeżeli liczba wymierna r/s o mianowniku naturalnym jest lepszym przybliżeniem liczby niż redukt R_n ($n \geq 1$) rozwinięcia w na ułamek łańcuchowy arytmetyczny, to mianownik s jest większy od mianownika reduktu R_n .

Ułamek łańcuchowy arytmetyczny $b_0 + \frac{1}{|b_1|} + \frac{1}{|b_2|} + \dots$ nazywamy okresowym, jeżeli ciąg b_n jest okresowy począwszy od pewnego miejsca.

Jak widać ze wzoru (3) rozwinięcie liczby $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ jest okresowe. Nie jest to przypadek. Mamy

Twierdzenie 7. Każdy ułamek łańcuchowy arytmetyczny okresowy przedstawia pewną niewymierność kwadratową, tzn. niewymierny pierwiastek równania kwadratowego o współczynnikach całkowitych. Każda niewymierność kwadratowa rozwija się na ułamek łańcuchowy arytmetyczny okresowy.

Pierwsza część tego twierdzenia pochodzi od Eulera, druga, znacznie trudniejsza, od Lagrange'a.

Mało wiadomo o rozwinięciach na ułamki łańcuchowe liczb algebraicznych niewymiernych różnych od niewymierności kwadratowych. W szczególności zagadką jest, czy mianowniki takich rozwinięć mogą tworzyć ciągi ograniczone. Że mianowniki te nie mogą rosnąć zbyt szybko, wynika z następującego twierdzenia K. F. Rotha.

Twierdzenie 8. Jeżeli P_k/Q_k jest k -tym reduktem rozwinięcia liczby algebraicznej niewymiernej na ułamek łańcuchowy arytmetyczny, to

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln Q_{k+1}}{\ln Q_k} = 1.$$

Znane są rozwinięcia na ułamki łańcuchowe niektórych ważnych liczb przestępnych, np. liczby e , podstawy logarytmów naturalnych. Zachodzi mianowicie wzór Eulera

$$e = 2 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{1} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{1} + \dots$$

Odpowiednie rozwinięcie liczby π nie jest znane, zachodzi natomiast wzór Brounckera

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} + \frac{1^2}{2} + \frac{3^2}{2} + \dots + \frac{(2k+1)^2}{2} + \dots$$

Na ostatnim Międzynarodowym Kongresie Matematyków, który odbył się w Helsinkach w sierpniu 1978 r., wielką sensacją wzbudziło znalezione przez R. Apéry'ego rozwinięcie liczby

Euler zauważył, że jeden z pierwiastków równania kwadratowego

$$x^2 - ax - b = 0 \text{ jest równy}$$

$$a + \frac{b}{|a|} + \frac{b}{|a|} + \frac{b}{|a|} + \dots$$

Suma szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ jest słynną funkcją ζ (dzeta) Riemanna, mającą duże znaczenie w teorii liczb i jeszcze kilku gałęziach matematyki

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ na ułamek łańcuchowy nierytmiczny:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \cfrac{6}{5} - \cfrac{1^6}{117} - \dots - \cfrac{(n-1)^6}{34n^3 - 51n^2 + 27n - 5} - \dots$$

Z rozwinięcia tego wyniku, że liczba $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ jest niewymierna. Dla liczby $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ fakt taki znany był już od 1770 r., na wynik Apery'ego czekano zatem ponad 200 lat. Dowody większości podanych tu twierdzeń Czytelnik znajdzie w książkach W. Sierpińskiego „Działania nieskończone”, rozdział XI i „Teoria liczb”, rozdział XII, a wiele innych ciekawych informacji w książeczce A. Хинчин, Цепные дроби.

Zastosowania ułamków łańcuchowych

Podamy tylko kilka przykładów tych zastosowań. Pełniejszą teorię może Czytelnik znaleźć w książkach: A.J. Banarski „Równania nieoznaczone”, A.O. Гельфонд „Решение уравнений в целых числах” i W. Sierpiński „Działania nieskończone”. Opisane przykłady pochodzą z tych książek.

1. Rozwiązywanie równań w liczbach całkowitych. Rozpatrzmy równanie $127x - 52y + 1 = 0$, które chcemy rozwiązać w liczbach całkowitych. Rozwijamy najpierw $\frac{127}{52}$ na ułamek łańcuchowy (np. metodą opisaną w artykule A. Schinzla):

$$\frac{127}{52} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}}}$$

W tak otrzymanym wyrażeniu skreślamy ostatni ułamek, tj. $\frac{1}{5}$, i obliczamy wartość otrzymanego nowego ułamka łańcuchowego (bezpośrednio lub korzystając z twierdzenia 1

artykułu A. Schinzla): $2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1}}} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4}} = 2 + \cfrac{1}{9} = \cfrac{22}{9}$.

Obliczamy następnie różnicę $\frac{127}{52} - \frac{22}{9} = -\frac{1}{52 \cdot 9}$.

Po sprowadzeniu do wspólnego mianownika otrzymujemy

$$127 \cdot 9 - 52 \cdot 22 = -1,$$

a zatem otrzymaliśmy rozwiązanie równania: $x = 9, y = 22$. Wiadomo, że gdy dane jest jedno całkowitoliczbowe (x_0, y_0) rozwiązanie równania $Ax + By + C = 0$, gdzie A i B są względnie pierwsze, to wszystkie pozostałe wyrażają się wzorami $x = x_0 - Bt, y = y_0 + At$, gdzie t jest dowolną liczbą całkowitą.

2. Rozpatrzmy równanie $25x + 18y = 970$. Jak poprzednio, zaczniemy od rozwinięcia $\frac{18}{25}$ na

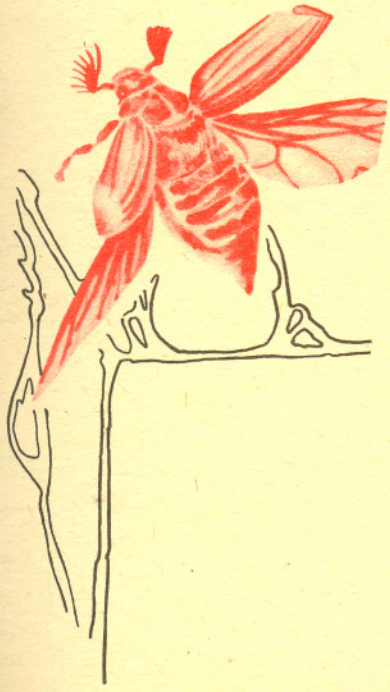
ułamek łańcuchowy:

$$\frac{18}{25} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}}}$$

Odrzucamy $\frac{1}{3}$ i obliczamy:

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}} = \cfrac{5}{7}$$

Ponieważ zaś $\frac{18}{25} - \frac{5}{7} = \frac{1}{25 \cdot 7}$, więc (mnożąc przez wspólny mianownik) otrzymujemy



$$18 \cdot 7 - 5 \cdot 25 = 1, \text{ a inaczej } 25 \cdot (-5) + 18 \cdot 7 = 1.$$

Pomnóżmy tę ostatnią równość przez 970:

$$25 \cdot (-5 \cdot 970) + 18 \cdot (7 \cdot 970) = 970.$$

Mamy zatem już jedno rozwiązanie $x_0 = -5 \cdot 970 = -4850$, $y_0 = 970 \cdot 7 = 6790$.
Rozwiązaniem ogólnym będzie wobec tego

$$x = -4850 + 18t$$

$$y = 6790 - 25t.$$

Możemy nieco uprościć te wzory, mianowicie podstawiając $t + 270$ zamiast t . Dostaniemy

$$x = -4850 + 18t + 4860 = 10 + 18t, \quad y = 6790 - 25t - 6750 = 40 - 25t.$$

3. Wyciąganie pierwiastka kwadratowego. Obliczymy $\sqrt[3]{23}$, znając jego wartość przybliżoną 4,8 (a w zasadzie wiedząc tylko, że $4,5 < \sqrt[3]{23} < 5,0$). Mamy najpierw $\sqrt[3]{23} = 4 + \frac{1}{x_1}$, gdzie $x_1 > 1$.

Aby obliczyć x_1 , napiszemy $\frac{1}{x_1} = \sqrt[3]{23} - 4$, stąd $x_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{23} - 4} = \frac{\sqrt[3]{23} + 4}{7} = 1 + \frac{1}{x_2}$, gdzie $x_2 > 1$. Obliczamy teraz x_2 metodą podobną do obliczania x_1 :

$$\frac{1}{x_2} = \frac{\sqrt[3]{23} + 4}{7} - 1 = \frac{\sqrt[3]{23} - 3}{7}; \quad x_2 = \frac{7}{\sqrt[3]{23} - 3} \approx 3,9, \text{ zatem } x_2 = 3 + \frac{1}{x_3},$$

gdzie jak i poprzednio $x_3 > 1$. Wyznaczamy następnie x_3 , otrzymując

$$x_3 = 1 + \frac{1}{x_4}.$$

Dalej mamy $\frac{1}{x_4} = \frac{\sqrt[3]{23} - 4}{7}$, a stąd $x_4 = \sqrt[3]{23} + 4 = 8 + \frac{1}{x_1}$ i widzimy, że dalsze x_i będą się powtarzać (por. twierdzenie 7 artykułu A. Schinzla). Otrzymujemy nieskończony okresowy ciąg równości

$$\sqrt[3]{23} = 4 + \frac{1}{x_1}, \quad x_1 = 1 + \frac{1}{x_2}, \quad x_2 = 3 + \frac{1}{x_3}, \quad x_3 = 1 + \frac{1}{x_4}, \quad x_4 = 8 + \frac{1}{x_1} \text{ itd.}$$

Po podstawieniach otrzymujemy

$$\sqrt[3]{23} = 4 + \frac{1}{|1|} + \frac{1}{|3|} + \frac{1}{|1|} + \frac{1}{|8|} + \frac{1}{|1|} + \frac{1}{|3|} + \frac{1}{|1|} + \frac{1}{|8|} + \dots$$

4. W podobny sposób można otrzymywać rozwinięcia innych liczb niewymiernych. Rzecz jasna, tylko dla niewymierności kwadratowych będą to ułamki okresowe. Przykładowo:

$$\log 5 = \frac{1}{|1|} + \frac{1}{|2|} + \frac{1}{|3|} + \frac{1}{|9|} + \dots,$$

$$\sqrt[3]{2} = 1 + \frac{1}{|3|} + \frac{1}{|1|} + \frac{1}{|5|} + \frac{1}{|1|} + \frac{1}{|1|} + \dots$$

5. Rozwijanie funkcji na ułamki łańcuchowe. Rozpatrzmy funkcję wymierną

$$f(x) = \frac{6x^4 + 12x^3 + 13x^2 + 10x + 1}{6x^3 + 12x^2 + 7x + 1}.$$

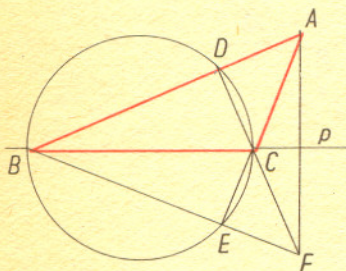
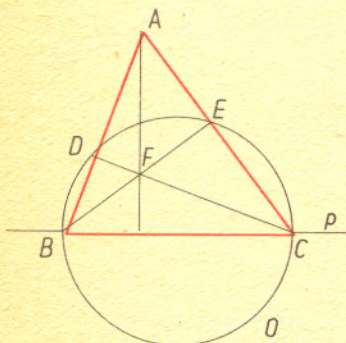
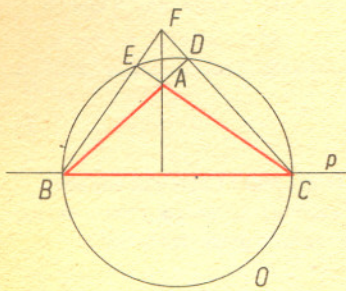
Jej rozwinięcie na ułamek łańcuchowy możemy otrzymać stosując algorytm Euklidesa (por. uwagi między twierdzeniem 3 a twierdzeniem 4 w artykule A. Schinzla):

dzielimy	przez	otrzymując	
		iloraz	i resztę
$6x^4 + 12x^3 + 13x^2 + 10x + 4$	$6x^3 + 12x^2 + 7x + 1$	x	$6x^2 + 9x + 4$
$6x^3 + 12x^2 + 7x + 1$	$6x^2 + 9x + 4$	x	$3x^2 + 3x + 1$
$6x^2 + 9x + 4$	$3x^2 + 3x + 1$	2	$3x + 2$
$3x^2 + 3x + 1$	$3x + 2$	x	$x + 1$
$3x + 2$	$x + 1$	2	x (*)
$x + 1$	x	1	1
x	1	x	



Rozwiązanie zadania M 195.

Kąty BDC i BEC są wpisane w okrąg o i oparte na jego średnicy BC , są więc kątami prostymi. Wynika stąd, że odcinki BE i CD są wysokościami trójkąta ABC . Prosta AF przechodzi przez trzeci wierzchołek tego trójkąta i punkt przecięcia dwóch jego wysokości, jest więc jego wysokością prostopadłą do boku BC , czyli do prostej p .



Ściśle rzecz biorąc w miejscu zaznaczonym (*) odeszliśmy od algorytmu Euklidesa, w którym reszta powinna mieć mniejszy stopień niż dzielnik. Znalezione rozwinięcie jest nieco „zgrabniejsze” od otrzymanego wtedy, gdy postępowalibyśmy konsekwentnie do końca. Mamy zatem

$$f(x) = x + \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|2|} + \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|2|} + \frac{1}{|1|} + \frac{1}{|x|}.$$

Dr Michał SZUREK

Czytelnicy proponują

Paweł PASZKO z Krakowa, student inżynierii chemicznej, pokazał, jak obliczać wartości logarytmów oraz wyrażeń postaci x^y na kalkulatorach, które tych funkcji nie mają.

Zaczynamy od tego, że, jak wiadomo, $e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Zatem, dla bardzo dużych N będzie

zachodzić przybliżona równość
$$e^x \simeq \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N.$$

Stąd, uwzględniając, że $x = e^{\ln x}$, obliczymy szybko, że

$$(1) \quad \ln x \simeq N(\sqrt[N]{x} - 1).$$

Przyjmijmy np. $N = 1024 = 2^{10}$. Zauważmy, że wyciągnięcie pierwiastka stopnia 1024 — to 10-krotne wyciągnięcie pierwiastka kwadratowego, a nawet najprostsze kalkulatory mają funkcję „pierwiastek kwadratowy”. Wzór (1) nadaje się do praktycznych obliczeń inżynierskich: na 8-cyfrowym kalkulatorze przy $N = 2^{10}$ możemy obliczyć logarytmy naturalne liczb mniejszych niż 10 z dokładnością do 3–4 miejsc znaczących, a przy $N = 2^{15}$ i 11-cyfrowym kalkulatorze dokładność wzrasta do 5–6 miejsc. Niestety maleje przy większych liczbach, choć np. przy $N = 2^{10}$, $\ln 100$ otrzymujemy jeszcze z dokładnością do ok. 1%.

Ze wzoru (1), pamiętając że $x^y = e^{y \cdot \ln x}$, prosto otrzymujemy

$$(2) \quad x^y \simeq [1 + (\sqrt[N]{x} - 1)]^N y$$

i wzór (2) w pełni nadaje się do obliczeń na kalkulatorach, mających operację „ x^{2^y} ” i „ \sqrt{x} ”; jak poprzednio, należy za N przyjąć potęgę 2.

Ciekawe, że oba wzory (1) i (2) dają dokładniejsze wyniki, niż można by się spodziewać, sądząc ze sposobu ich wyprowadzenia. Przykładowo przy $N = 2^{10}$ obliczamy z nich $2^3 \simeq 7,9987$, $(1,5)^{2,3} \simeq 2,5404$ (wobec dokładnego 2,54103 ...),

$\sqrt[10]{2} \simeq 1,07179$ (wobec dokładnego 1,0717735 ...), $e^\pi \simeq 23,07$ (a dokładnie jest $e^\pi = 23,14$...)

i szczególnie przy niewielkich wykładnikach wzór ten w pełni nadaje się do praktycznych obliczeń inżynierskich. Gdy $N = 2^{15}$, to na 11-cyfrowym kalkulatorze można otrzymywać bardzo dokładne wyniki (ale takie kalkulatory już przeważnie mają funkcję x^y).

Logarytmy można bardzo dokładnie obliczać, wykorzystując rozwinięcie

$$\ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n = \frac{2}{2n+1} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5} \frac{1}{(2n+1)^4} + \dots \right).$$

Na przykład przyjmując $n = 1$ otrzymujemy rozwinięcie liczby $\ln 2$

$$\ln 2 \simeq \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{9^2} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{9^3} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9^4} + \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{9^5} + \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{9^6} + \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{9^7} + \frac{1}{17} \cdot \frac{1}{9^8} + \dots \right)$$

i ograniczając się do wypisanych powyżej wyrazów można na kartce papieru obliczyć $\ln 2$ z dokładnością do 9 cyfr po przecinku: $\ln 2 = 0,693147180\dots$. Podstawiając $n = 4$, otrzymujemy

$$\ln 5 = 2 \ln 2 + \frac{2}{9} \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{81} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{81^2} + \dots \right),$$

potem możemy obliczyć np. $\ln 10 = \ln 2 + \ln 5$ i w podobny sposób logarytmy innych liczb.

Wyciąganie pierwiastków również możemy robić bardzo dokładnie korzystając z szeregu

$$\text{dwumiennego } (1+x)^m = 1 + mx + \binom{m}{2} x^2 + \binom{m}{3} x^3 + \dots, \quad |x| < 1.$$

Przypuśćmy mianowicie, że trzeba obliczyć $\sqrt[k]{A}$, przy czym znamy już jego wartość przybliżoną a .

Jeśli przyjmijmy $\frac{A}{a^k} = 1+x$, gdzie $|x|$ jest bardzo małe, to można pierwiastek przekształcić

w sposób następujący
$$\sqrt[k]{A} = a(1+x)^{1/k}$$

i skorzystać ze wzoru dwumiennego dla $m = 1/k$. Wyniki będą bardzo dokładne.

Układy wielu cząstek — — opis statystyczny

Dr Marek CIEPLAK

1. Spróbujmy opisać stan wody w stawie napotkanym w parku. Jeżeli w stawie tym zanurzymy kubek, to woda, która się doń wdarła, stanowi oczywiście część (podukład) wody w stawie. W kubku znajduje się kolosalna ilość cząstek wody. Średnio jest tam około 10^{25} cząstek. Jak opisać wodę w kubku? Ścisłego opisu z pewnością dostarczyłoby sprecyzowanie liczby cząstek wody, ich położeń, pędów i kierunków momentów dipolowych w zadanym przedziale czasu. Parametry te bowiem określają stan podukładu. Sporządzenie takiego mikroskopowego opisu jest jednak niemożliwe, nawet gdybyśmy połączyli moce wszystkich komputerów na Ziemi. W dodatku niewiele znaczącej treści z takiego opisu by wynikało. Różnorodny opis wody daje się jednak sformułować w kategoriach prawdopodobieństw. Opis statystyczny pozwala wyznaczyć średnie wartości pomiarów liczby cząstek w kubku, ich całkowitej energii, wypadkowego momentu dipolowego, oraz wnioskować o ciśnieniu, ciepłe właściwym czy też stałej dielektrycznej podukładu. Ważne jest przy tym, żeby wielokrotne realizowanie podukładu (zanurzanie kubka) nie wpływało na stan całego układu (wody w stawie).

2. Jak obliczyć średnią $\langle A \rangle$ pewnej makroskopowej wielkości A ? Najpierw trzeba znaleźć wartość A w każdym z mikroskopowych stanów podukładu, a więc np. znaleźć energię dla określonej liczby cząstek N , ich określonych położeń, pędów, kierunków momentów dipolowych itd. Jeśli dla zadanego N stany mikroskopowe podukładu numerowane są wskaźnikiem i , to odpowiadające im wartości wielkości A oznaczmy przez $A_{N,i}$. Następnie mnożymy każde $A_{N,i}$ przez prawdopodobieństwo $P_{N,i}$ znalezienia i -tego stanu N -cząsteczkowego (zbiór zdarzeń elementarnych konstruuje się nabierając wodę do kubka wielokrotnie). Obserwowana wartość $\langle A \rangle$ dana jest wzorem

$$(1) \quad \langle A \rangle = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_i P_{N,i} A_{N,i}.$$

W wypadku układów takich jak woda, których dynamika daje się w zadowalający sposób analizować w ramach mechaniki klasycznej, symbol \sum_i w równaniu (1) należy rozumieć jako

całkę po stanach mikroskopowych. Zgodnie z teorią kwantową zbiór dozwolonych stanów układu jest w rzeczywistości dyskretny (przynajmniej dla układów skończonych) i wtedy w równaniu (1) całki nie pojawiają się.

3. Jak znaleźć prawdopodobieństwo $P_{N,i}$? Problem ten jest prosty w sytuacji, gdy średnie wartości wszystkich mierzalnych wielkości nie zależą od czasu. Mówimy wówczas, że podukład znajduje się w stanie równowagi termodynamicznej (jeśli jest to stan trwały). W stanie równowagi prawdopodobieństwo $P_{N,i}$ może zależeć wyłącznie od niezależnych stałych ruchu dla płynu w kubku. Stałymi ruchu z pewnością nie są prędkości cząstek. Ulegają one bowiem zmianom w wyniku zderzeń. Z dobrym przybliżeniem stałymi ruchu są natomiast liczba cząstek N i energia E_i . Przybliżenie polega na zaniedbaniu energii oddziaływania wody w kubku z wodą w stawie oraz na pominięciu zmian liczb cząstek w kubku w porównaniu ze średnią ich liczbą. Przybliżenie to załamuje się, gdy w kubku jest średnio niewiele cząstek.

4. $P_{N,i}$ powinno zatem zależeć wyłącznie od N oraz E_i (N oraz E_i są zmiennymi niezależnymi — zadana wartość energii może być zrealizowana dla różnych N). Kształt tej zależności można ustalić na podstawie następującego rozumowania. Przypuśćmy, że w stawie zanurzamy drugi identyczny kubek. Niech $P_{N+N',ij}(E_i+E_j, N+N')$ oznacza prawdopodobieństwo wystąpienia stanu o $N+N'$ cząsteczkach i o energii E_i+E_j , przy czym N cząstek ma się znajdować w pierwszym kubku i być w stanie o energii E_i , a N' w drugim kubku i być w stanie o energii E_j . Z uwagi na olbrzymią liczbę cząstek wody w stawie, realizacja jakiegokolwiek stanu w jednym kubku nie wpływa na stan stawu i w rezultacie nie wpływa na stan wody w drugim kubku. A zatem

$$(2) \quad P_{N+N',ij}(E_i+E_j, N+N') = P_{N,i}(E_i, N) \cdot P_{N',j}(E_j, N')$$

lub

$$(3) \quad \ln P_{N+N',ij}(E_i+E_j, N+N') = \ln P_{N,i}(E_i, N) + \ln P_{N',j}(E_j, N').$$

Logarytm prawdopodobieństwa realizacji stanu jest więc wielkością addytywną. Powinien on zatem zależeć od E i N w następujący sposób:

$$(4) \quad \ln P_{N,i}(E_i, N) = \alpha - \beta E_i + \mu \cdot \beta \cdot N$$

gdyż zarówno energia jak i liczba cząstek są wielkościami addytywnymi. Parametry α , β i μ są pewnymi stałymi charakteryzującymi stan wody. Wzór (4) przepisujemy w konwencjonalnej postaci

$$(5) \quad P_{N,i} = \frac{e^{-\beta(E_i - \mu N)}}{\mathcal{E}}.$$

Rozkład prawdopodobieństwa dany wzorem (5) znany jest pod nazwą wielkiego rozkładu kanonicznego. Stałą \mathcal{E} , bądź stałą α , można wyznaczyć, gdyż musi być

$$(6) \quad \sum_{N=0}^{\infty} \sum_i P_{N,i} = 1.$$



Stąd

$$(7) \quad \Xi = e^{-\alpha} = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta\mu N} \sum_i e^{-\beta E_i}.$$

Warto zwrócić uwagę, że \sum_i oznacza sumowanie (ewentualnie całkowanie) po możliwych stanach, a nie tylko po różnych wartościach energii. Często się bowiem zdarza, że wiele stanów ma tę samą energię.

5. Jaką interpretację fizyczną mają stałe β i μ ? Przypuśćmy, że woda w kubku może wymieniać energię z otoczeniem, a nie może wymieniać cząsteczek. Taką sytuację otrzymujemy, przykrywając kubek cienką folią, która przewodzi ciepło (przekazuje energię zderzeń cząsteczek środka z folią do kubka i na odwrót). Wówczas w rozkładzie (5) oraz w sumie (7) występuje tylko jedna określona wartość $N = N_0$ i czynnik $e^{\beta\mu N_0}$ się redukuje. Otrzymujemy tzw. rozkład kanoniczny:

$$(8) \quad P_{N,i} = \begin{cases} \frac{e^{-\beta E_i}}{\sum_i e^{-\beta E_i}} & N = N_0 \\ 0 & N \neq N_0. \end{cases}$$

Zauważmy, że gdybyśmy powtórzyli doświadczenie nabierania w kubek tej samej ilości wody na środku stawu, to rozkład (8) byłby dokładnie taki sam (po ustaleniu się stanu równowagi) — byłby tam dokładnie ten sam parametr β . Parametr ten charakteryzuje więc całą wodę w stawie i jest jednakowy dla wszystkich jej podukładów. Jeśli folia jest w sztywny sposób zamocowana na kubku (nieruchomy tłok), to ciśnienia wody w kubku i wody w stawie mogłyby być różne, natomiast temperatury byłyby jednakowe. Wnioskujemy stąd, że β jest w jakiś sposób związane z temperaturą. W jaki? Zamiast rozpatrywać tak skomplikowany układ jak woda, dla której energia potencjalna oddziaływań cząsteczek jest istotna, rozważmy znacznie prostszy układ: rzadki jednoatomowy gaz o N cząsteczkach. Jeśli gaz jest rzadki, to jedyny ważny wkład do energii wnosi energia kinetyczna

$$(9) \quad E_i = \sum_{\alpha=1}^N \epsilon_{(\alpha)}, \quad \epsilon_{(\alpha)} = \frac{p_{\alpha}^2}{2m},$$

gdzie wskaźnik α oznacza numer cząsteczki.

Jest to tzw. model gazu doskonałego. W następnym artykule pokażemy, że rozkład (8) prowadzi do następującego wyrażenia na ciśnienie gazu doskonałego zawartego w naczyniu o objętości V :

$$(10) \quad pV = N/\beta.$$

Wzór (10) pokrywa się z prawem gazu doskonałego, jeśli przyjmą, że $\beta = 1/kT$, gdzie k oznacza stałą Boltzmann, a T temperaturę absolutną. W następnym artykule spróbuję przekonać Czytelnika, że utożsamienie parametru β z odwrotnością temperatury jest zawsze zgodne z fenomenologiczną definicją temperatury.

6. Rozpatrzmy z kolei wielkość μ . Jest to również wielkość, która charakteryzuje wszystkie podukłady wody w stawie. Nosi ona nazwę potencjału chemicznego. Zauważmy, że μ ma wymiar energii i występuje we wzorze (5) w postaci $E_i - \mu N$. Skoro tak, to przeprowadzenie jednej cząsteczki ze stawu do kubka zwiększa średnią energię podukładu o μ . W odróżnieniu od β parametr μ może przyjmować dowolną (również ujemną) wartość rzeczywistą. Gdyby potencjały chemiczne wody w kubku i wody w stawie były różne, to w układzie pojawiłyby się przepływy, wyrównujące potencjały chemiczne i ustalające średnią liczbę cząsteczek w kubku na pewnej wartości $\langle N \rangle$. Owa średnia wartość $\langle N \rangle$, jeśli jest znana, pozwala obliczyć odpowiadające jej μ .

7. Przypuśćmy wreszcie, że zamiast kubka użyjemy termosu. Woda w termosie jest izolowana termicznie od otoczenia. Układ ma zadaną energię, która jest ściśle zachowywana. W rozkładzie (8) występuje tylko jedna energia $E = \langle E \rangle$. Prawdopodobieństwo wystąpienia stanu o tej właśnie energii jest stałą równą

$$(11) \quad P_{N,i} = \begin{cases} \frac{1}{W(E)} & E_i = E, \quad N = N_0 \\ 0 & E_i \neq E, \quad N \neq N_0, \end{cases}$$

gdzie $W(E) = \sum_i 1$ jest liczbą mikroskopowych stanów o energii E . Związek (11) oznacza, że wszystkie stany o zadanej energii i liczbie cząsteczek są jednakowo prawdopodobne. Rozkład (11) znany jest pod nazwą rozkładu mikrokanonicznego.

8. W fizyce statystycznej wprowadza się wielkość S , zwaną entropią. Definiuje się ją w następujący sposób:

$$(12) \quad S = -k \sum_{N=0}^{\infty} \sum_i P_{N,i} \ln P_{N,i}.$$

Dla rozkładu mikrokanonicznego (o ustalonej energii i liczbie cząsteczek) definicja (12) sprowadza



Rozwiązanie zadania M 193.

Załóżmy, że równanie $x^3 - 27x + c = 0$ ma trzy pierwiastki całkowite u, v, w . Będą wtedy zachodziły równości:

$$x^3 - 27x + c = (x-u)(x-v)(x-w) = x^3 - (u+v+w)x^2 + (uv+uw+vw)x - uvw,$$

skąd wynika, że $u+v+w = 0$,
 $uv+uw+vw = -27$. Jedną z liczb u, v, w musi być nieujemna. Możemy założyć, że $u \geq 0$. Podstawiając do drugiej z tych

równości $w = -(u+v)$ otrzymujemy

$$u^2 + uv + v^2 = 27, \text{ skąd po pomnożeniu obydwu stron przez 4 otrzymujemy}$$

$$3u^2 + (u+2v)^2 = 108.$$

Wprowadzimy nową niewiadomą $t = u+2v$.

Ma więc być $3u^2 + t^2 = 108$, czyli $t^2 = 108 - 3u^2$. Widzimy, że musi być $108 - 3u^2 \geq 0$,

czyli $u^2 \leq 36$, $0 \leq u \leq 6$. Ponadto t jest podzielne przez 3; $t = 3s$, skąd $9s^2 = 108 - 3u^2$,

czyli $3s^2 = 36 - u^2$, a więc u dzieli się przez 3: $u = 3r$. Zatem $9s^2 = 108 - 27r^2$, $0 \leq r \leq 2$, $s^2 = 12 - 3r^2$. Ale s musi być podzielne przez 3.

$s = 3p$, skąd $3p^2 = 4 - r^2$; zatem $r = |p| = 1$ lub $r = 2$, $p = 0$. Otrzymujemy więc

$|t| = 9$, $u = 3$ lub $t = 0$, $u = 6$, czyli $u+2v = \pm 9$, $u = 3$ lub $u+2v = 0$, $u = 6$.

W pierwszym przypadku otrzymujemy $(u, v) = (3, -6)$, $(3, 3)$, w drugim $(u, v) = (6, -3)$. Odpowiednimi trójkątami

(u, v, w) są $(3, -6, 3)$, $(3, 3, -6)$, $(6, -3, -3)$. Zawsze więc dwa pierwiastki całkowite danego równania są równe.

się do wyrażenia

$$(13) \quad S = k \ln W(E),$$

postulowanego przez Boltzmana. Im większe $W(E)$, tym większe S . Entropia stanowi więc miarę „nieporządku” w układzie. Statystyczne określenie entropii jest ważne, gdyż ustala ono związek pomiędzy prawdopodobieństwami wystąpienia stanów a makroskopowymi (termodynamicznymi) właściwościami układu, czy też podukładu.

Okazuje się, że entropia „statystyczna” ma wszystkie cechy entropii wprowadzanej w termodynamice. Rozważmy na początek pierwszą zasadę termodynamiki. Stwierdza ona, że jeśli przeprowadzić układ (quasistatycznie) od stanu równowagi odpowiadającego energii $\langle E \rangle$ do stanu równowagi o energii $\langle E \rangle + d\langle E \rangle$, to

$$(14) \quad d\langle E \rangle = T dS,$$

pod warunkiem, że objętość układu i liczba zawartych w nim cząsteczek nie ulega zmianie (patrz artykuł B. Cichońskiego w Delcie 8/1978).

Prawą stroną równania (14) interpretuje się jako ciepło pobrane przez układ. Jeśli rozważamy układ izolowany (z punktu widzenia możliwości praktycznego wykonania procesu jest to idealizacja), dla którego właściwy jest rozkład mikrokanoniczny, to omawiany proces odpowiada przejściu od $W(E)$ do $W(E+dE)$. Przyrost entropii

$$(15) \quad dS = k \frac{d \ln W(E)}{dE} dE$$

jest proporcjonalny do dE . Zgodność z pierwszą zasadą termodynamiki uzyskuje się, utożsamiając współczynnik proporcjonalności z odwrotnością temperatury.

$$(16) \quad \frac{dS}{dE} = k \frac{d \ln W(E)}{dE} = \frac{1}{T}.$$

Pojęcie temperatury można więc wprowadzić również dla układu izolowanego.

9. Dlaczego w definicji (12) występuje logarytm? Jeśli podzielić układ izolowany na dwa podukłady: jeden o energii E_1 , drugi o energii $E - E_1$, to liczba realizacji stanu o energii E jest iloczynem odpowiednich liczb dla podukładów.

$$(17) \quad W(E) = W(E_1)W(E - E_1).$$

Logarytm iloczynu jest zaś sumą logarytmów

$$(18) \quad S(E) = S(E_1) + S(E - E_1).$$

Logarytm w (12) prowadzi zatem do addytywności entropii.

10. Zauważmy wreszcie, że dla $E = \text{const}$ mamy $S = \text{const}$. A więc

$$(19) \quad 0 = \frac{dS(E)}{dE_1} = \frac{dS(E_1)}{dE_1} + \frac{dS(E - E_1)}{d(E - E_1)} \frac{d(E - E_1)}{dE_1} = \frac{dS(E_1)}{dE_1} - \frac{dS(E - E_1)}{d(E - E_1)}.$$

Związek ten wraz z równością (16) pozwalają stwierdzić, że warunkiem równowagi ($E = \text{const}$) jest równość temperatur podukładów. Obserwacja ta potwierdza wewnętrzną spójność statystycznych definicji entropii i temperatury.

11. Czym właściwie jest temperatura? Otóż stwierdziliśmy, że entropia jest wielkością addytywną. Stąd $\ln W(E)$ musi być proporcjonalny do liczby cząsteczek N_0 , a nie np. do N_0^2 . Współczynnik proporcjonalności jest wielkością bezwymiarową, którą oznaczymy przez ω . Współczynnik ω , odpowiadający stanowi układu o najniższej energii E_0 , tj. stanowi podstawowemu układowi, oznaczymy przez ω_0 . Rozważmy układy o różnych energiach, ale o określonej liczbie cząsteczek N_0 . Energia jest również proporcjonalna do N_0 : $E = \langle \epsilon \rangle N_0$,

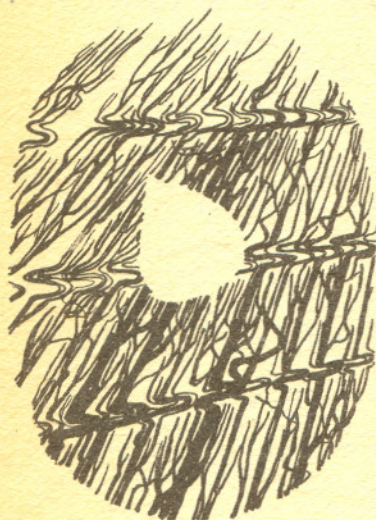
gdzie $\langle \epsilon \rangle = \frac{E}{N_0}$ jest średnią energią, przypadającą na jedną cząsteczkę. Jeśli pochodną w (16) przybliżymy ilorazem różnicowym, to

$$(20) \quad \frac{1}{T} = \frac{dS}{dE} \approx k \frac{N_0 \cdot (\omega - \omega_0)}{N_0 \cdot (\langle \epsilon \rangle - \langle \epsilon_0 \rangle)}.$$

Wielkość kT jest zatem miarą odchylenia średniej energii $\langle \epsilon \rangle$ pojedynczej cząsteczki od odpowiadającej średniej $\langle \epsilon_0 \rangle$ w stanie podstawowym.

12. Okazuje się, że dla układów o dużej liczbie cząsteczek wszystkie trzy rozkłady: mikrokanoniczny, kanoniczny i wielki kanoniczny prowadzą do równoważnych wyrażań na wielkości termodynamiczne. $\langle N \rangle$ obliczane przy pomocy rozkładu (5) należy tylko uznać za odpowiadające N_0 , a $\langle E \rangle$ obliczane dla rozkładów (5) i (8) — za odpowiadające E . Dzieje się tak dlatego, że wspomniane rozkłady są silnie skupione wokół średnich wartości $\langle N \rangle$ i $\langle E \rangle$, a oddziaływania z otoczeniem są przeważnie słabe. Wybór właściwego rozkładu w praktyce dyktowany jest więc dogodnością obliczeń.

W następnym artykule zbadamy właściwości najprostszych układów wielu cząstek, mianowicie gazów doskonałych. Teraz lepiej jest pójść do parku.



Laboratorium w domu

Mgr Andrzej
GOŁĘBIEWSKI

Akustyka —
— ależ to bardzo proste

O falach stojących

Jeżeli jeden koniec węża gumowego zostanie pobudzony do drgań, to wzdłuż niego będą biec fale ku drugiemu końcowi. Pobudzmy teraz drugi koniec do drgań z tą samą częstotliwością. Powstaną dwa ciągi fal: jeden biegnący w lewo, drugi — w prawo, które nakładają się na siebie. Zauważymy, że wąż podzieli się na odcinki drgające przedzielone punktami nieruchomymi. Tak powstają fale stojące. Punkty, które mają największe amplitudy, nazywamy strzałkami, zaś nieruchome — węzłami (rys. 1).

Spróbujcie sprawdzić to zjawisko doświadczalnie. Zamiast węża gumowego możecie użyć np. sznura od bielizny. Dwóch eksperymentatorów powinno pobudzać jego końce do drgań z tą samą częstotliwością.

Falę określa okres T i długość λ . Położenia miejsc odpowiadających strzałkom fali stojącej muszą spełniać warunek:

$$\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm 1, \text{ skąd } 2\pi \frac{x}{\lambda} = n\pi, \text{ czyli } x = n \frac{\lambda}{2}.$$

Odległość sąsiednich strzałek równa jest więc połowie długości fali. Również odstęp pomiędzy dwoma węzłami wynosi $\lambda/2$.

W wężu gumowym obserwujemy fale poprzeczne, to jest takie, w których drgania cząsteczek są prostopadłe do kierunku rozchodzenia się fali.

Fale akustyczne odbierane przez nas w postaci wrażeń słuchowych rozchodzą się w powietrzu w postaci zgęszczeń i rozrzedzeń cząsteczek, czyli zmian ciśnienia. Jest to charakterystyczne dla fal podłużnych. Warto dodać, że w fali stojącej w powietrzu węzłom drgań cząsteczek odpowiadają strzałki fali zmian ciśnienia i odwrotnie.

A teraz eksperyment

Wykorzystując wiadomości o falach stojących można doświadczalnie wyznaczyć częstotliwość drgań źródła dźwięku. I to chciałem Wam właśnie zaproponować.

Zakładamy, że prędkość v fali akustycznej jest stała, wtedy $\lambda = vT$.

Pomiędzy okresem a częstotliwością f zachodzi zależność $T = \frac{1}{f}$, więc $f = \frac{v}{\lambda}$.

Prędkość fali akustycznej w powietrzu możemy przyjąć równą 340 m/s.

Ale jak znaleźć długość fali? Oczywiście eksperymentalnie.

Schemat ideowy doświadczenia przedstawia rys. 2. Rolę dwóch źródeł dźwięku spełniają odbiorniki radiowy i połączony z nim głośnik dodatkowy, ustawione w odległości 1,5–2 m. Czy jednak taki układ może generować wyraźny sygnał o stałej częstotliwości? Okazuje się, że tak. Rozpoczęcie programu telewizyjnego jest poprzedzone przez okres 10–15 minut emisją nieprzyjemnego dla ucha sygnału, potrzebnego do strojenia odbiorników w punktach serwisowych. Będzie to właśnie nasz generator akustyczny.

Wystarczy ustalić czas rozpoczęcia emisji programu, włączyć nieco wcześniej odbiornik na zakresie fal UKF, ustawić dodatkowy głośnik i przeprowadzić doświadczenie.

Jako detektora-odbiornika sygnału użyjemy mikrofonu połączony z magnetofonem, który włączamy na „zapis”; taśma nie jest potrzebna. Przesuwając mikrofon wzdłuż linii łączącej głośniki i obserwując wskaźnikysterowania zapisu znajdujemy strzałki i węzły fali stojącej. Należy zmierzyć, używając linijki z podziałką, odległość między dwoma węzłami lub strzałkami. Odległość ta równa jest połowie długości fali.

I na tym można by zakończyć opis doświadczenia. Ale ...

Uwagi praktyczne

W magnetofonach szpulowych podczas pomiarów przełącznik powinien być ustawiony w pozycji „zapis ustawiony”, zaś w magnetofonach kasetowych należy wyłączyć automatyczne wysterowanie poziomu zapisu. Dopiero wówczas wskaźnik będzie wyraźnie reagował na zmiany amplitudy fali stojącej.

Potencjometr regulujący głośność należy ustawić tak, aby przy maksymalnym sygnale wskaźnik nie wykazywał przestrojenia.

Przymiar powinien być dość długi, około 1 m, i ustawiony na osi łączącej głośniki.

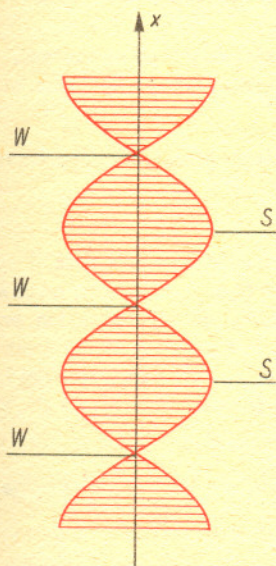
Podczas obliczania częstotliwości sygnału akustycznego telewizyjnego nie zapomnijcie właściwie ustalić jednostki wielkości danych i mierzonych. Zastanówcie się, od czego zależy błąd pomiaru i spróbujcie go oszacować. Dla ułatwienia dodam, że wynik pomiaru powinien być „okrągłą liczbą”.

Czy można zobaczyć dźwięk?

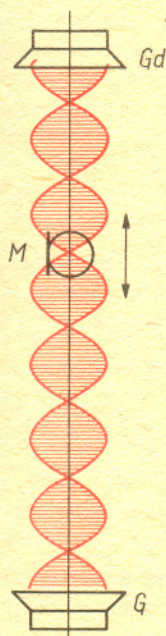
W fizyce doświadczalnej stosowane są przyrządy do optycznego „zapisu” drgań dźwiękowych. Noszą one nazwę fonografów optycznych.

Zapoznajcie się z odpowiednią literaturą, np. Tadeusza Dryńskiego *Doświadczenia pokazowe z fizyki*, i spróbujcie zaprojektować fonograf optyczny. Dowcip polega na tym, aby przyrząd mógł zrobić każdy w przeciętnych warunkach domowych.

Przyślijcie swoje pomysły. Nie zapomnijcie sprawdzić ich praktycznie. Jeżeli okażą się rewelacyjne, to opublikujemy, a Redakcja pomyśli o nagrodach. Zachęcam do eksperymentowania!



Rys. 1



Rys. 2 G — głośnik odbiornika
Gd — głośnik dodatkowy
M — mikrofon

O pewnym paradoksie hydraulicznym

Przypomnijmy na wstępie, że hydraulika zajmuje się przepływem cieczy odbywającym się na skutek działania siły ciężkości lub różnych urządzeń (zwykle pomp). Przepływy mogą dotyczyć przewodów otwartych (rzeki, kanały, rowy), jak też i zamkniętych (rury). W 1775 roku de Chézy odkrył, że szybkość przepływu cieczy jest w przybliżeniu proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego tzw. promienia hydraulicznego. W końcu XIX wieku okazało się, że zależność ta jest bardziej skomplikowana i dokładniej jest

$$v = k \sqrt{J} \cdot \sqrt[3]{R_h^2}, \quad \text{gdzie}$$

v — średnia szybkość cieczy w danym przewodzie,
 k — współczynnik proporcjonalności, zależny od rodzaju przewodu, jego chropowatości, stopnia zabrudzenia a także kształtu itp.,
 J — spadek hydrauliczny; gdy przepływ odbywa się wyłącznie pod działaniem siły ciężkości, można go określić jako nachylenie przewodu do poziomu;

R_h — promień hydrauliczny, równy $\frac{F}{Ob}$, gdzie F jest polem przekroju poprzecznego, przez który płynie ciecz, a Ob jest długością tej części przekroju poprzecznego, która styka się z cieczą. Wielkość Ob nazywana jest obwodem zwilżonym.

Ten zmodyfikowany wzór de Chézy stosowany jest powszechnie w hydraulice zarówno do obliczeń przepływów w przewodach otwartych jak i zamkniętych.

Nasze rozważania dotyczyć będą jednego przewodu, zatem wielkości k i J będą niezmiennie, przyjmijmy zatem, że są równe 1. Założenie to usprawiedliwia zresztą praktyka hydrauliczna.

Wzór de Chézy przyjmuje zatem postać $v = R_h^{\frac{2}{3}}$.

Jeżeli v jest średnią szybkością cieczy w przewodzie, to objętość cieczy przepływającej przez ten przewód w jednostce czasu jest równa

$$q = v \cdot F,$$

gdzie F jest polem przekroju poprzecznego tej części przewodu, przez którą płynie ciecz.

Wyobraźmy sobie teraz, że ciecz płynie rurą o przekroju kołowym (rys. 1). Oznaczmy przez h wysokość warstwy wody w rurze. Zapytajmy, przy jakim h wielkość q jest największa, tzn. przy jakim napełnieniu rury odpływowej basen opróżnia się najszybciej? Wydaje się, że aby przez rurę w jednostce czasu płynęło jak najwięcej wody, rura powinna być całkowicie napełniona (bo i po co marnować kawałek rury?). A właśnie to nieprawda! Obliczmy bowiem wielkości F i Ob , za pomocą których wyraża się promień hydrauliczny (rys. 1):

$$F = \text{pole wycinka } \mathcal{W} + \text{pole trójkąta } \mathcal{T} = r^2 \cdot \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin(360^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} r^2 (\alpha - \sin \alpha);$$

$$Ob = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{2\pi} = r\alpha, \quad \text{zatem promień hydrauliczny jest równy}$$

$$R_h = \frac{1}{2} r \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right).$$

Widzimy, że średnia szybkość liniowa przepływu i szybkość „objętościowa” wyrażają się wzorami

$$v = \left[\frac{1}{2} r \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) \right]^{2/3};$$

$$q = v \cdot F = \frac{1}{2 \sqrt[3]{4}} \cdot r^{8/3} \cdot \alpha \cdot \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^{5/3}$$

Aby obliczyć np. maksimum funkcji v , możemy ją zróżniczkować i przyrównać pierwszą pochodną do zera (zwracamy uwagę, że α jest kątem większym niż π , a więc funkcja $v(\alpha)$ jest różniczkowalna). Funkcja v ma oczywiście maksimum w tym samym punkcie, w którym ma maksimum funkcja $g(\alpha) = 1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha}$. Zwykłą metodą (przyrównanie pierwszej pochodnej do

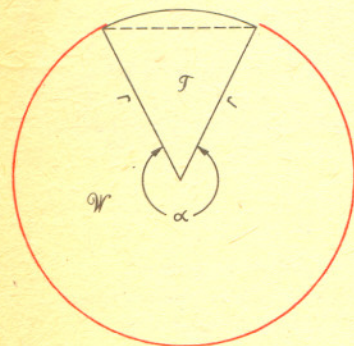
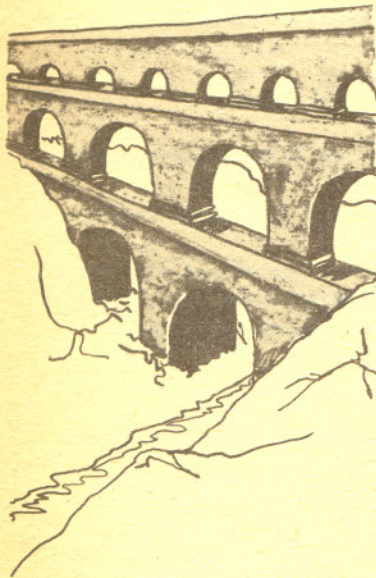
zera + ew. dyskusja) można się przekonać, że w przedziale $(\pi, 2\pi)$ maksimum będzie w punkcie α takim, że $\alpha = \text{tg } \alpha$. Równanie $\alpha = \text{tg } \alpha$ możemy rozwiązać tylko w sposób przybliżony (rys. 2), otrzymamy $\alpha = 257^\circ 27' 15''$. Odpowiada to wartości $h = 0,81 d$. Znacznie gorzej jest z maksimum funkcji q . Przyrównanie do zera pochodnej prowadzi do równania

$$2 \sin \alpha - 5\alpha \cos \alpha + 3\alpha = 0,$$

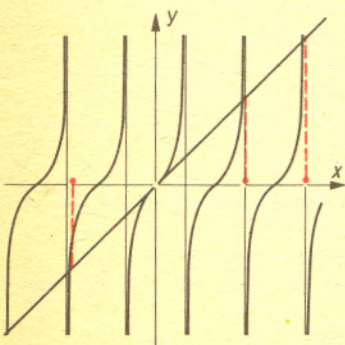
które trudno rozwiązać nawet w przybliżeniu. Możemy jednak łatwo przekonać się, że maksimum znajduje się gdzieś pomiędzy π i 2π (czyli gdy przewód nie jest całkowicie napełniony).

Mamy bowiem (opuszczając nieistotny współczynnik)

$$q(\pi) = \pi \cdot \left(1 - \frac{\sin \pi}{\pi} \right)^{5/3} = \pi, \quad q(2\pi) = 2\pi,$$



Rys. 1



Rys. 2

z drugiej strony, z uwagi na oszacowanie $21\sqrt{3} > 10\pi$ i $\frac{5}{3} > \frac{3}{2}$ otrzymujemy przy $\alpha = \frac{10}{6}\pi$,

tj. 300° :

$$q\left(\frac{10}{6}\pi\right) = \frac{10}{6}\pi \left(1 - \frac{\sin\frac{10}{6}\pi}{\frac{10}{6}\pi}\right)^{5/3} = \frac{10}{6}\pi \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{\pi}\right)^{5/3} =$$

$$= \frac{10}{6}\pi \left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{10\pi}\right)^{5/3} > \frac{10}{6}\pi \left(1 + \frac{1}{7}\right)^{5/3} > \frac{10}{6}\pi \left(1 + \frac{1}{7}\right)^{3/2} > 2\pi,$$

a zatem maksimum funkcji znajduje się rzeczywiście gdzieś we wnętrzu przedziału $(\pi, 2\pi)$.
W praktyce hydraulicznej korzysta się z tablic funkcji v i q i z nich można się dowiedzieć, że q_{\max} otrzymujemy dla $\alpha \approx 302^\circ$ czyli $h = 0,94 d$ (gdzie d jest średnicą przewodu).
Warto zauważyć, że dla przewodów o przekroju prostokątnym (o dwóch ścianach poziomych) największy przepływ będzie osiągnięty przy całkowitym napełnieniu. Można to łatwo obliczyć.



Rozwiązanie zadania F 65.

(a) Przyjmując uproszczony model, w którym średnio $\frac{1}{\alpha}$ cząstek gazu porusza się równolegle do v z tym samym zwrotem i $\frac{1}{\alpha}$ ze zwrotem przeciwnym, stwierdzamy, że ich pędy zmieniają się o

$$\Delta p_P = 2m(w+v)$$

dla cząsteczki padającej z przodu poruszającego się przedmiotu i o

$$\Delta p_T = -2m(w-v)$$

dla padającej z tyłu (m — masa cząsteczki gazu).

Liczba cząsteczek uderzających z przodu i z tyłu w przedziale czasu Δt wyniesie odpowiednio

$$N_P = \frac{q}{\alpha m} \cdot S \cdot (w+v) \cdot \Delta t, \quad N_T = \frac{q}{\alpha m} \cdot S \cdot (w-v) \cdot \Delta t,$$

gdzie q — gęstość gazu, S — powierzchnia przedmiotu.

Zmiana pędu przedmiotu (suma pędów przekazanych przez uderzające cząsteczki) wyniesie

$$\Delta p = -\Delta p_P N_P - \Delta p_T N_T,$$

a ponieważ siła oporu F to stosunek zmiany pędu do czasu, więc

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = -2m \cdot \frac{q}{\alpha m} \cdot S \cdot ((w+v)^2 - (w-v)^2) = -\frac{8}{\alpha} q \cdot S \cdot w \cdot v.$$

(b) Przyjmując zgodnie z (a), że siła oporu F jest proporcjonalna do prędkości v

$$F = -kv$$

otrzymujemy równanie ruchu (zakładamy, że spadek jest pionowy)

$$(1) \quad m \cdot \frac{dv}{dt} = -m \cdot g - k \cdot v,$$

gdzie m — masa przedmiotu, g — przyspieszenie grawitacyjne.

Osiągnąwszy prędkość $v_s = -\frac{mg}{k}$ ciało poruszać się będzie ruchem jednostajnym, bo w myśl (1) będzie $\frac{dv}{dt} = 0$.

Dla swobodnego spadku ($v(0) = 0$) prędkość taka jest jednak nie do uzyskania. Całkując bowiem równanie (1) otrzymujemy

$$-\frac{m}{k} \int_0^v \frac{dv}{v + \frac{m}{k}g} = \int_0^t dt, \quad \text{czyli} \quad -\frac{m}{k} \ln \left(\frac{v + \frac{m}{k}g}{\frac{m}{k}g} \right) = t, \quad \text{skąd}$$

$$v = \frac{mg}{k} \left(e^{-\frac{k}{m}t} - 1 \right).$$

(c) Załóżmy, że orbita statku jest w przybliżeniu kołowa o promieniu r . Wówczas energia całkowita statku wyniesie

$$E = -G \frac{m \cdot M}{2r},$$

gdzie m — masa statku, M — masa Ziemi, G — stała grawitacji.

Straty energii są proporcjonalne do oporu i do prędkości, a więc, posługując się wynikiem (a), mamy

$$\frac{dE}{dt} = -kv^2.$$

Stąd

$$(2) \quad -kv^2 = \frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = G \frac{m \cdot M}{2r^2} \cdot \frac{dr}{dt}.$$

Obliczając siłę odśrodkową otrzymujemy $\frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{M}{r^2}$, co wraz z (2) daje $-k \frac{GM}{r} = \frac{GMm}{2r^2} \cdot \frac{dr}{dt}$,

$$\text{czyli} \quad \frac{dr}{dt} = -\frac{2k}{m} \cdot r.$$

Siły oporu proporcjonalne do prędkości mogą mieć inne przyczyny (np. lepkość) niż oddziaływanie szybkich w stosunku do rozpatrywanego ruchu cząstekek bardzo rozrzedzonego gazu. W gazie natomiast nie spełniającym takich założeń (np. powietrze blisko powierzchni Ziemi) opór nie jest proporcjonalny do prędkości (już raczej do jej kwadratu) i aby go wyznaczyć, należy uciec się do równań hydrodynamiki, w których uwzględnia się również kształt poruszającego się przedmiotu.

Nie do wiary

Liczba

1234567891234567891234567891234567891234567891

jest pierwsza, podobnie resztą jak 23456789 i 1234567891.

To są przykłady liczb pierwszych, w których cyfry występują w tzw. rosnącym porządku cyklicznym (tzn. po kolei, tyle że po 9 może być 0 albo 1). Takich liczb znamy tylko 19, nie licząc jednocyfrowych.

Nie wiadomo dlaczego, ale trudniej trafić na liczby pierwsze z malejącym porządkiem cyklicznym. Znamy ich tylko 4: 43, 109, 10987, i 76543; jeżeli uznamy, że 0 jest gorszą cyfrą niż inne (choć właściwie dlaczego? czyżby dlatego, że wynaleźli je Arabowie?), to mamy jeszcze 1987.

13 dzień miesiąca przypada w piątek częściej niż w jakikolwiek inny dzień tygodnia i tak będzie aż do końca przyszłego stulecia!

*

Fibonacci na drodze: 8 km = 5 mil angielskich (w przybliżeniu, niestety), 13 km = 8 mil, 21 km = 13 mil, itd. Dopiero 89 mil jest znacznie bliższe 143 km niż 144 km.

Prof. dr Dominik ROGULA

Użycie języka naturalnego w komunikacji człowiek-komputer wymaga całkowicie odmiennego podejścia niż języki formalne. Wynika to z istotnych różnic między językiem naturalnym i formalnymi systemami komunikacji. Najważniejsze z tych różnic to

- (1) W językach formalnych mamy ściśle określoną składnię i tylko poprzez składnię języki te interpretujemy. W języku naturalnym rola składni jest stosunkowo mała — komunikacja w języku naturalnym jest raczej znaczeniowo-pragmatyczna.
- (2) Znaczenia elementów leksykalnych i struktur języka naturalnego nie są ostro zdefiniowane.
- (3) Interpretacja języka naturalnego bardzo istotnie zależy od kontekstu i sytuacji.

Na przeszkodzie w zastosowaniu języka naturalnego w komunikacji z maszyną stoi głównie ogromna jego złożoność, której łatwiej nie docenić niż przecenić. Dlatego też należy od razu zdać sobie sprawę, że realizowane obecnie i w najbliższej przyszłości maszynowe implementacje nie mogą obejmować „całego” języka naturalnego.

W dotychczasowych podejściach można wyróżnić następujące sposoby wykorzystywania elementów języka naturalnego.

(a) Użycie pewnych słów języka naturalnego jako cegiełek języka formalnego. Przykładem mogą być wyrażenia ALGOLu „go to”, „if ... then”, „begin”, „end” itp. Wyrażenia takie interpretowane w języku programowania czy w jakimś systemie mają specjalne i ściśle określone znaczenie. Ich skojarzenie ze znaczeniem w języku naturalnym jest czysto mnemotechniczne. Oczywiście w żadnym sensie nie mamy tutaj do czynienia z komunikacją w języku naturalnym.

(b) Symulacja języka naturalnego, w której wyróżnia się słowa kluczowe i słowa puste. Użytkownik ma znaczną swobodę wyrażania się, lecz maszyna interpretuje tylko słowa kluczowe, ignorując słowa puste. Przykładami takich programów mogą być ELIZA Weizenbauma, konwersująca w języku naturalnym i STUDENT Bobrova, rozwiązujący „zadania z treścią”.

W tym przypadku mamy już rzeczywiście do czynienia z językiem naturalnym, ale w sposób bardzo powierzchowny, oparty na formalizacji stosunkowo niewielkiego zbioru słów kluczowych. Sposób ten pozwala czasem osiągnąć efektowne tricki, lecz nie można go uznać za rozwiązanie problemu: maszyna „rozumie” język w zupełnie inny sposób niż jej użytkownik, co może prowadzić do gigantycznych nieporozumień.

(c) Wykorzystanie podzbioru wyrażen i struktur języka naturalnego, z pełnym „rozumieniem” tego ograniczonego zbioru przez maszynę. W razie użycia wyrażenia czy struktury spoza tego zbioru, maszyna przyznaje, że nie rozumie.

W celu skutecznego porozumiewania się z maszyną, człowiek musi znać te ograniczenia. Jest to utrudnienie bardzo uciążliwe w prostszych systemach, ale tym mniej odczuwalne im szerszy jest zakres dopuszczalnych wyrażen i struktur.

W podejściu tym można wyróżnić dwa warianty:

(c 1) Taki dobór wyrażen i struktur, by w wyniku skonstruować język formalny. Wówczas znaczenie komunikatu jest jednoznacznie określone przez znaczenie elementów leksykalnych i składnię.

(c 2) Dopuszczenie wieloznaczności i niejasności wyrażen i struktur. Interpretacja komunikatów oparta na aspektach semantycznych i pragmatycznych.

Wariant (c 1), aczkolwiek wygodą może przewyższać całkowicie sztuczne języki, nie jest jeszcze „wystarczająco naturalny”, mimo że możliwe są zaskakująco dobre rozwiązania, takie jak FASE (Fundamentally Analyzable Simplified English). Człowiek musi umieć selekcionować wyrażenia pod groźbą nieporozumienia, a im pełniejszy i bardziej naturalny jest podzbiór, tym subtelniejsze i trudniejsze mogą okazać się reguły selekcji.

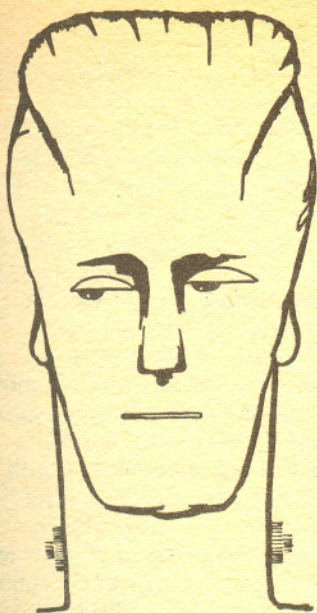
Zastrzeżenia te odnoszą się tylko do komunikatów sformułowanych przez człowieka dla maszyny. Jeśli chodzi o komunikację w kierunku odwrotnym, gdy syntezy komunikatu dokonuje maszyna, a odbiorcą jest człowiek, wariant (c 1) może okazać się zupełnie dobrym rozwiązaniem.

W najbardziej zbliżonym do naturalnego wariantcie (c 2) maszyna musi działać dość inteligentnie. Musi stawiać hipotezy znaczeniowe i oceniać ich wiarygodność w danych warunkach. Z zasady, informacja wprowadzana jest niejasna i niepełna i maszyna musi się „domyślać” o co chodzi, a w razie potrzeby pytać i wyjaśniać.

Pamiętać też należy, że komunikacja w języku naturalnym ma nie tylko zalety. Do jej zasadniczych wad należą: (i) możliwość nieporozumień, której można zapobiegać, ale nie można całkowicie uniknąć. Wydaje się, że tkwi ona inherentnie w samym języku; (ii) nadmierna rozwlekłość w pewnych sytuacjach. Zagadnienia naukowe i techniczne najlepiej jednak formułuje się przy użyciu specjalnych systemów skrótowych symboli.

Do najważniejszych czynników zapobiegających nieporozumieniom należy konwersacyjny sposób współpracy z maszyną. Natomiast co do kwestii unikania nadmiernej rozwlekłości wydaje się, że





w systemach języka naturalnego należy zapewnić możliwość definiowania nowych wyrażeń, skrótów, specjalnej symboliki czy nawet języków formalnych i pełnego honorowania tych definicji przez maszynę w trakcie konwersacji. Powinno być możliwe swobodne przechodzenie od języka naturalnego do sztucznej symboliki i vice versa.

Dotychczasowe doświadczenia z programami „sztucznej inteligencji” pokazały jednak, że programy te z reguły są niezmiernie czasochłonne.

W części wynika to z niedoskonałości stosowanych metod, która z kolei jest odbiciem słabego rozwoju podstaw teoretycznych.

Ogólnie widoczna jest mała sprawność procesów dedukcyjnych, które w sformalizowanym wydaniu są bardzo długie, nawet gdy chodzi o sprawy dla człowieka proste. Mimo postępów w maszynowej realizacji procesów dedukcyjnych wydaje się, że dużo sprawniejsze może okazać się wnioskowanie oparte nie na teorii dedukcji lecz na teorii modeli. Wnioskowanie „modelowe” jest dużo krótsze, a w niektórych sytuacjach daje wyniki tak samo pewne jak dedukcja. Sytuacja taka występuje np. w arytmetyce, która jest teorią kategoryczną, co oznacza, że wszystkie jej modele są izomorficzne. Wnioski arytmetyczne wyciągnięte (np. na palcach) z jakiegoś jednego modelu mają wobec tego moc powszechnie obowiązującą.

Inną, chyba ważniejszą przyczyną małej sprawności „inteligentnych” programów jest nieodpowiednia konstrukcja dzisiejszego komputera. Zasadą działania tego urządzenia jest bowiem sekwencyjne wykonywanie operacji za operacją, odpowiadające klasycznemu wyobrażeniu algorytmu. Tymczasem myślenie inteligentne to myślenie skojarzeniowe, w którym jeden obiekt myślowy jest równocześnie badany pod wieloma względami. Tego typu procesy przetwarzania nie mogą być sekwencyjne, lecz wieloprocesorowe, i to o wysokim stopniu współbieżności. Chyba właśnie wskutek takiego wysokiego stopnia współbieżności przetwarzania „powolny” mózg sprawniej wnioskuje niż dzisiejszy „szybki” komputer.

Maszyny nowej generacji są już niekoniecznie ściśle sekwencyjne: często mają one 2 lub więcej procesorów. Jednakże dopóki liczba procesorów jest niewielka, cała sprawa sprowadza się właściwie do technicznego usprawnienia maszyny sekwencyjnej. Interesujące możliwości daje już ILLIAC IV, wyposażony w 64 procesory. Dalsze znaczne podwyższenie stopnia współbieżności może przynieść rewolucję w dziedzinie budowy maszyn inteligentnych.



Zadania

Redaguje mgr Krzysztof NOWIŃSKI

M 193. Wykazać, że wielomian $p(x) = x^3 - 27x + c$ nie może mieć trzech różnych pierwiastków całkowitych.

Rozwiązanie na str. 7

M 194. Ile mnożeń wystarczy dla znalezienia n -tej potęgi danej liczby a ?

Rozwiązanie na str. 2

M 195. Uzasadnić następującą konstrukcję prostej prostopadłej do danej prostej p i przechodzącej przez punkt A nie leżącej na p i nie leżącej na danym okręgu o o środku położonym na prostej p :

Przez punkt A i punkty B i C przecięcia okręgu o z prostą p prowadzimy proste AB i AC przecinające okrąg o w punktach D i E . Proste BE i CD przecinają się w punkcie F . Szukaną prostą jest prosta AF .

Rozwiązanie na str. 4

Redaguje dr Halina ABRAMOWICZ

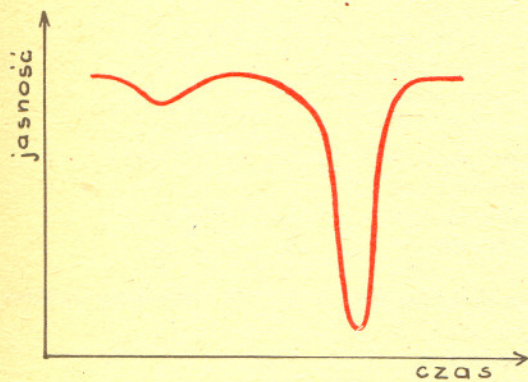
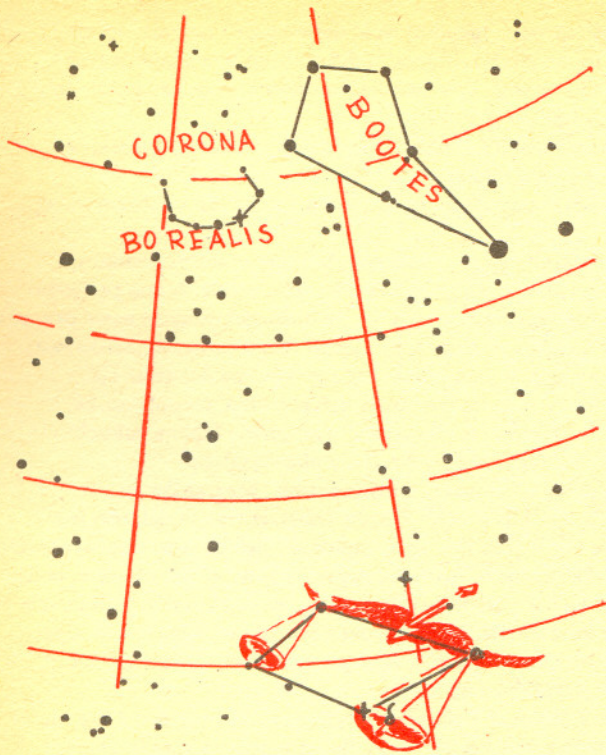
F 65. Na ciała poruszające się w ośrodku gazowym działają siły oporu skierowane przeciwnie do kierunku ruchu. Siła ta jest wynikiem zderzeń powierzchni ciała z cząsteczkami gazu.

(a) Zakładając, że prędkość cząsteczek ma rozkład izotropowy (żaden kierunek nie jest wyróżniony) o średnim module w , oraz że ciało poruszające się nie zaburza tego rozkładu w sposób istotny (model gazu bardzo rozrzedzonego — średnia droga swobodna duża w porównaniu z rozmiarami ciała), określić w przybliżeniu siłę oporu działającą na płaski przedmiot (deskę) poruszający się z prędkością v prostopadłą do jego powierzchni.

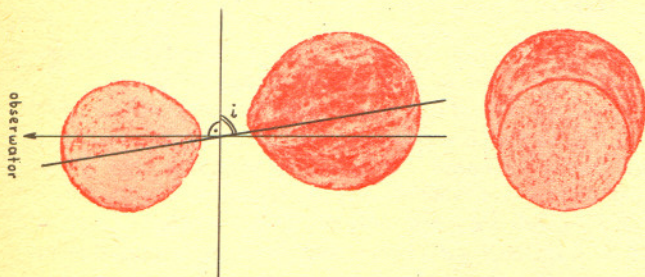
(b) Określić zależność prędkości od czasu dla spadającego w polu grawitacyjnym przedmiotu podlegającego sile oporu powietrza.

(c) Określić zmniejszanie się orbity statku kosmicznego krążącego w zewnętrznych warstwach atmosfery przy założeniu, że straty energii są małe w porównaniu z jego energią kinetyczną.

Rozwiązanie na str. 11



Krzywa zmian jasności układu δ Lib.



Ponieważ nachylenie orbity ($i = 81,5^\circ$) jest duże, to możliwe są zaćmienia.

W maju, wieczorami górują prawie w zenicie dwie typowo wiosenne konstelacje: Korony Północnej (*Corona Borealis, CrB*) i Wolarza (*Boötes, Boo*). Na południowej części nieba wygląda zza horyzontu gwiazdozbiór Wagi (*Libra, Lib*). Spróbujmy odnaleźć gołym okiem gwiazdę δ Lib (delta *Librae*) według zamieszczonej obok, dla ułatwienia identyfikacji, mapki tej części nieba. δ Lib jest gwiazdą zmienną — co 2 dni 7 godzin i 50 minut staje się ledwo widoczna. Dzieje się tak dlatego, że jest to układ podwójny, w którym oba składniki zaćmiewają się. W 1909 roku astronom amerykański Schlesinger tak opisywał ten układ: „Jasna gwiazda ma średnicę 4,5 mln km, ciemna 4 mln km, czyli 3,2 i 2,9 razy więcej niż nasze własne Słońce. Ich objętości są odpowiednio 33 i 24, suma ich mas — 1,5 razy większa niż masa Słońca. Jeśli ich gęstości są równe, to stanowią tylko 0,026 gęstości Słońca, a obie masy wynoszą 0,87 i 0,63 masy Słońca. Jasna gwiazda obiega środek ciężkości układu po prawie kołowej orbicie w średniej odległości 2,5 mln km. Ciemna gwiazda opisuje podobną orbitę w średniej odległości 3,4 mln km od środka masy układu. Płaszczyzny orbit są nachylone do kierunku widzenia pod kątem $81,5^\circ$. W czasie jednej czwartej okresu obiegu jasna gwiazda jest bardziej lub mniej zaćmiewana przez towarzyszkę, jednak w minimum jasności ciągle jedna trzecia jej tarczy pozostaje nie zakryta. Odległość między powierzchniami gwiazd jest zadziwiająco mała w porównaniu z ich średnicami i zmienia się od 1,3 mln km w periastronie do 2 mln km w apoastronie.”

Dzisiaj wiemy dużo więcej o układzie δ Lib niż 70 lat temu, jednak nasze ogólne wyobrażenie o nim nie zmieniło się. Masy są większe (5 i 1,7 masy Słońca), a ponadto ciemny składnik okazał się większy od jasnego, co pozwala wyciągnąć wniosek, że jego jasność powierzchniowa (a więc i temperatura) jest znacznie mniejsza niż składnika jasnego.

Nie jest to układ nietypowy, znamy setki podobnych, najbardziej słynnym jest *Algol* (β Per). Późną jesienią, przy okazji omawiania gwiazdozbioru Perseusza, wrócimy do zmiennych zaćmieniowych typu Algola.

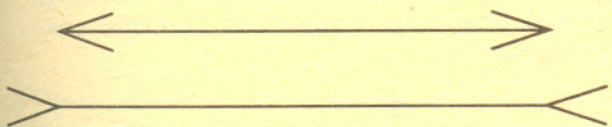
Mgr Tomasz CHLEBOWSKI

Centrum Astronomiczne im. M. Kopernika, Obserwatorium Astronomiczne Uniwersytetu Warszawskiego oraz Polskie Towarzystwo Miłośników Astronomii zapraszają na cykl odczytów popularnonaukowych. Oto najbliższe z nich:
 17.V.1979, Gromady kuliste, doc. dr J. Stodółkiewicz
 21.V.1979, Krzywe blasku gwiazd zmiennych zaćmieniowych, doc. dr W. Krzemiński
 24.V.1979, Gromady otwarte i asocjacje, dr J. Juchniewicz
 28.V.1979, Jak promieniowanie oddziałuje z materią, mgr B. Rudak

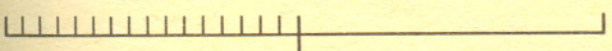
W poniedziałki odczyty odbywają się w Centrum Astronomicznym im. M. Kopernika, Warszawa, ul. Bartycka 18 o godz. 17.

W czwartki — w Obserwatorium Astronomicznym UW, Warszawa, Al. Ujazdowskie 4 o godz. 17. Wstęp wolny.

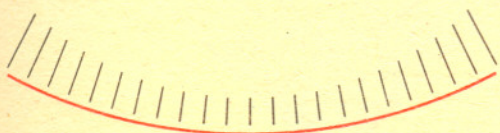
delta mata delta



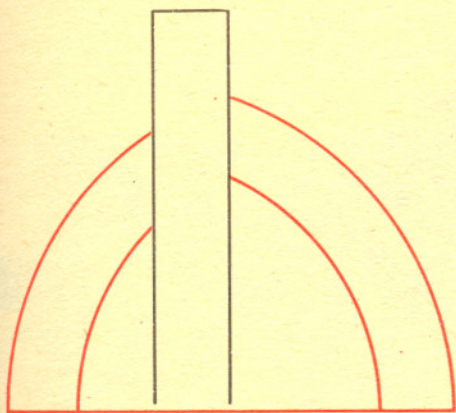
Rys. 1



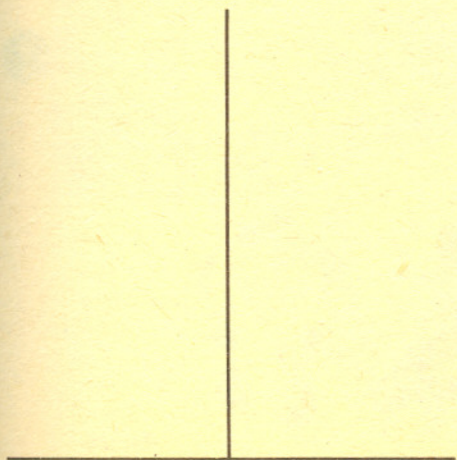
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

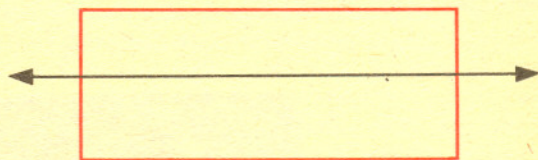
Złudzenia wzrokowe

Kilkanaście lat temu jechałem autobusem 116 ulicą Miodową w Warszawie. W dole po prawej stronie, ulicą Świerczewskiego jechała ciężarówka, chyba Star 20. Ulica Świerczewskiego chowa się pod Miodową do tunelu i na Miodowej jest kamienna balustradka. Zobaczyłem, że koła ciężarówki, które widziałem między kolumnienkami balustradki, nie poruszają się wcale. Mogłem to dobrze widzieć, bo koła te miały coś jakby szprychy. Potem zaczęły się powolutku obracać — w przeciwną stronę. Całe zjawisko trwało kilka sekund i już nigdy potem nie zobaczyłem „w naturze” tego zjawiska, które znane jest każdemu, kto choć raz ... był w kinie. Nieruchome obrazki na klatkach filmowych zlewają się dla naszego oka w jeden ruchomy obraz. Nasze oczy i umysł mają skłonność do dopatrywania się ruchu tam, gdzie go nie ma. A jeszcze bardziej niż kino „nabiera nas” telewizja.

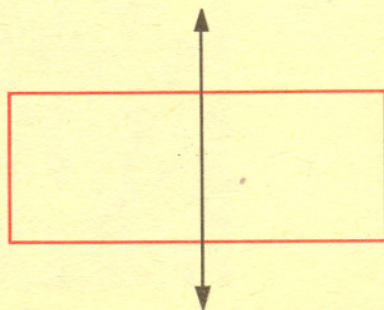
Gdy przez dłuższy czas wyglądamy przez okno jadącego pociągu, to po zatrzymaniu odnosimy wrażenie, że pociąg powolutku jedzie do tyłu. To zjawisko nazywamy „powidokiem wstecznym”.

Precyzyjne urządzenie, jakim jest nasze oko, nietrudno oszukać i za pomocą sprytnie dobranych rysunków. Na rysunku 1 i 2 widzimy odcinki różnej długości, choć w rzeczywistości są równe. Na rysunku 3 łuk dolny wydaje się bardziej zakrzywiony, a na rysunku 4 bardzo trudno jest uwierzyć, że łuki po lewej stronie pionowego słupa spotkają się z łukami po prawej dokładnie na brzegu słupka.

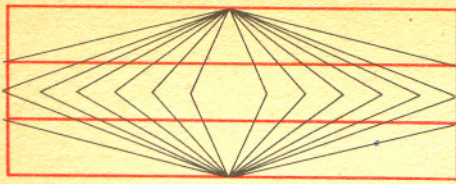
Rysunki 5, 6 i 7 pokazują, dlaczego ludzie, którzy chcą się wydać mniej otyli niż są, powinni nosić ubrania w pionowe pasy.



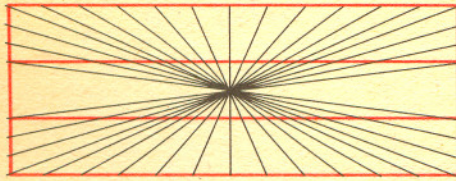
Rys. 6



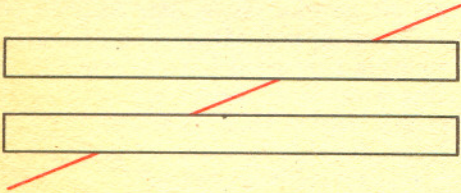
Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9



Rys. 11

Widzenie — to nie tylko fotograficzne rejestrowanie obrazu na siatkówce oka. Zawsze w proces widzenia zaangażowany jest mózg, który przetwarza świadomie lub nieświadomie napływające informacje. Rys. 12 może być widziany albo jako schody — wtedy białe dolny obszar wydaje się być bliżej niż biała górna ściana, albo jako nisza pod schodami. Co zobaczymy zależy od przypadku albo od naszej świadomości: co chcemy zobaczyć.

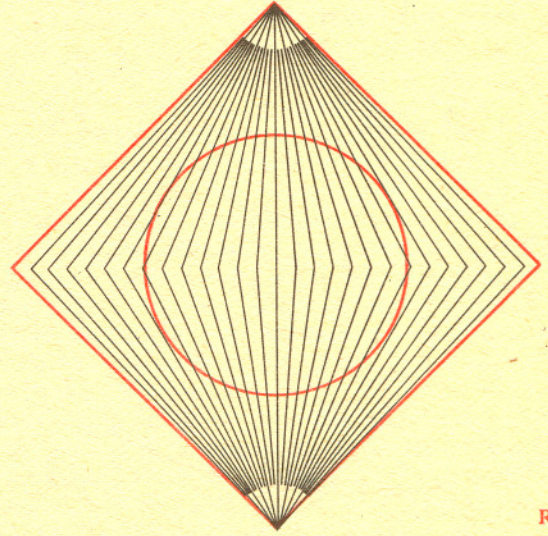
Bardzo ciekawym zjawiskiem jest widzenie konturów na rysunku. W najprostszym przypadku widzimy kontur, jeżeli istnieje na rysunku różnica jasności lub różnica koloru. Okazuje się jednak, że można widzieć kontur tam, gdzie go w ogóle nie ma. Na pokazanej serii rysunków możemy prześledzić naszą zdolność postrzegania tego zjawiska. Rys. 13 pokazuje biały trójkąt. Bliższe przyjrzenie się konturom tego trójkąta wykazuje, że po prostu on nie istnieje. Ten sam efekt można uzyskać na czarnym tle, jak to pokazuje rys. 14. Kontury mogą być nie tylko liniami prostymi, jak ma to miejsce w przypadku trójkąta. Rys. 15 pokazuje dwie białe figury utworzone przez łuki wklęsłe i wypukłe. Rys. 16 wykazuje, że możemy uzyskać omawiany efekt również w przypadku figur nieregularnych.

Ciekawe złudzenia dają tzw. figury gwiazdziste Heringa (rys. 8 i 9). Proste równoległe wydają się wygięte. Wystarczy jednak spojrzeć na te figury przez mocno zmrużone oczy, a efekt zniknie.

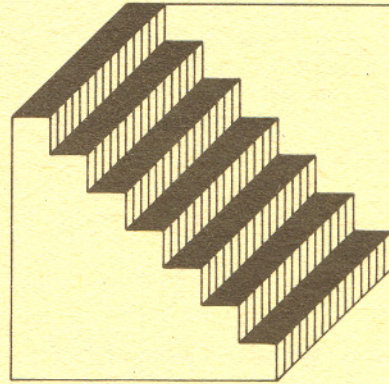
Wiele złudzeń powstaje przy oglądaniu przedmiotów różnokolorowych — przedmioty zmieniają kolory w zależności od tła i oświetlenia.

Na rysunku 11 widzimy prostą przecinającą dwa prostokąty i dopiero przyłożenie linijki (albo spojrzenie z boku) wykazuje, że prosta została „złamana”.

Odwrotnie, jedną prostą zobaczylibyśmy jako „połamaną”. Dlatego dla uzyskania efektu estetycznego trzeba niekiedy odejść od kanonów geometrii. Wiele greckich budowli (na przykład świątynia Ateny na Akropolu) jest zbudowanych według ścisłych prawideł geometrycznych z poprawką na „wywołanie efektu”.



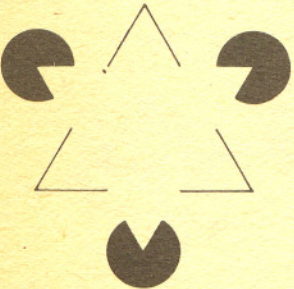
Rys. 10



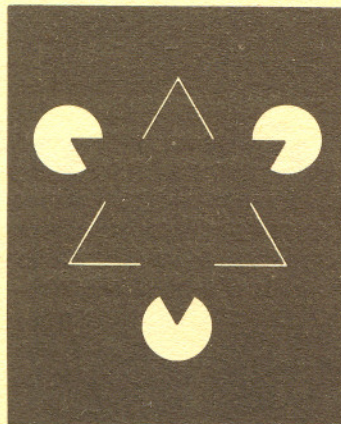
Rys. 12



Rys. 15



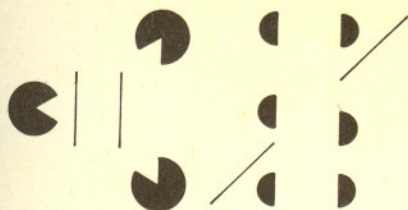
Rys. 13



Rys. 14



Rys. 16



Rys. 17

Rysunki na podstawie И. Д. Артаинов, *Иллюзии зрения*; *Scientific American*, kwiecień 1976; W. Lietzmann „Gdzie tkwi błąd?”

Te nie istniejące kontury istnieją w naszym mózgu na tyle realnie, że możemy je wykorzystywać do innych złudzeń optycznych. Dwie pionowe kreski na lewej części rys. 17 są w rzeczywistości równe wbrew temu, co nam się wydaje. Odcinki na prawej części rysunku leżą na jednej prostej.

Na pytanie, jak to się dzieje, że widzimy kontury tam, gdzie ich nie ma, nie umiemy dać dokładnej odpowiedzi. Tym bardziej nie umiemy modelować tego procesu matematycznie. W wielu urządzeniach próbujemy rozwiązać zagadnienie rozpoznawania obrazu, ale jest to tylko nieudolne naśladownictwo naszego organu widzenia.

Umiemy oglądać obrazy składające się z kropek, kótek, krzyżyków, linii prostych i falistych; umiemy składać najsubtelniejsze odcienie z różnych mieszanek trzech podstawowych barw, widzieć wklęsłości i wypukłości na płaskiej kartce papieru i obserwować ruch na nieruchomych obrazkach; umiemy dostosowywać nasze oczy do różnego natężenia światła i różnych jego zabarwień i jedynie światło zdecydowanie jednobarwne uniemożliwia nam rzeczywiście rozróżnianie kolorów oglądanych przedmiotów.

Spróbuj zasłonić oczy ciemną, jedwabną chustką, ażurowym, lecz grubym szalem, spróbuj oglądać przedmioty w świetle dziennym, „zmiernym”, elektrycznym, czy w świetle księżyca — fakt, że widzimy mniej więcej normalnie we wszystkich wymienionych warunkach zdaje się uzasadniać łatwość, z jaką dajemy się „oszukać” widząc nie to, co widzimy naprawdę, lecz to, co spodziewamy się zobaczyć.

Oko jest bowiem sygnalizatorem, który, dokładnie czy niedokładnie, ma nas informować przede wszystkim o niebezpieczeństwie, a jego historyczną funkcją jest — „uciekaj (ew. atakuj) — potem będziesz się zastanawiał”.

Wiele z tego, co widzimy jest po prostu rezultatem nauki, choć nauka przyszła do nas z mniej lub bardziej zamierzchłej przeszłości.

Konie umieją w sylwetkowym rysunku rozpoznać swoich pobratymców (rzecz jasna, jeśli zachowane zostaną prawdziwe rozmiary). Ptaki rozróżniają na obrazku nie tylko siebie, „zbierają” z kartek książki namalowane tam owady czy jagody, pod warunkiem, że kolory na rysunku czy zdjęciu są mniej więcej naturalne.

Pewna małpa zaprzyjaźniona z kotem umiała odróżniać w książeczkach dziecięcych przeróżne stylizowane kotki. Tak, że w rezultacie najtrudniejsze i najbardziej „nienaturalne” jest chyba to, co uważamy za rzecz zwykłą — umiejętność zobaczenia przedmiotu w rysunku konturowym. Posługiwanie się kreską dla wyrażenia rzeczy, w której tak naprawdę żadna kreska nie istnieje, jest istotnie naszym, na wskroś ludzkim wynalazkiem. Są ludzie pozbawieni możliwości rozróżniania pewnych kolorów i są tacy, którzy dysponują swego rodzaju „wzrokiem absolutnym”, czyli umiejętnością zapamiętania danej barwy niezależnie od otoczenia, w jakim ją oglądali, choć wiadomo, że barwa otoczenia ma tu znaczenie decydujące itd. To, co widzimy ma bowiem głęboki związek z tym, co rozumiemy.

Przykład: Szary prążek na żółtym tle może zostać zakwalifikowany jako niebieski przez człowieka niezainteresowanego profesjonalnie tym zagadnieniem. Malarz zakwalifikuje go jako czarny prążek, którego względne niebieskawe zabarwienie bierze się z żółtego otoczenia, na jakim go obserwuje.

I ptak, i małpa mogą czerpać wzruszenia estetyczne z oglądania kolorowych obrazków, choć nie wiemy dokładnie, co z tego rozumieją. Grafika — w szczególności jednobarwna, jest zamkniętą dla nich, zupełnie niepojętą dziedziną.

