delta

$h=6{,}63\cdot10^{-34}$ J·s $\pi=3{,}141593$

SPIS TREŚCI

NUMERU 1(61)

„Delta"
matematyczno-fizyczny miesięcznik
popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego i Polskiego
Towarzystwa Fizycznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Adres Redakcji
ul. Hoża 69 pok. 151.
00-681 Warszawa

Zakład Narodowy im.
Ossolińskich — Wydawnictwo
Wrocław, Oddział w Warszawie
Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.
wyd.; 2,50 ark. druk.;
papier offsetowy III kl. 80 g. 61 × 86
Wydrukowano w Drukarni im.
Rewolucji Październikowej
Warszawa, ul. Mińska 65
Nr zam. 1414/78 S-86

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60, — cena prenumeraty półrocznej zł 30, —

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch" oraz urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach
— do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i cały rok następny
— do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego.
Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienie w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch".
Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW oraz prenumeratorzy indywidualni, zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.
Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch", Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28,00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej

Sprzedaż numerów bieżących uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTĘ":

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.
Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.
Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, konto PKO I OM W-wa 1531-912

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona" Krakowskie Przedmieście 7 00-068 Warszawa, Poland or with
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland.
— Earlscourt Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre. London W 12. Great Britain,
— Licosa Commissionaria Sansoni. Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia.

Cena 1 egzemplarza zł 5.— nr indeksu 35723/35550

Specjalizacja
to znamię naszych czasów

Wierzymy, że uczony specjalista
poświęcający życie badaniu określonego problemu
rozwiąże go szybciej i lepiej
niżby to uczynił natchniony laik
czy przypadkowy przechodzień

Jeśli więc dręczy cię pytanie
masz wierzyć
że gdzieś istnieje fachowiec
co nie wiedząc nic
z tego co tobie bliskie i znajome
zna potrzebną ci odpowiedź

I zamiast odpowiadać sobie
poszukujemy go

A nie znajdując
powołujemy do życia
nowe specjalności
odrywając od istniejących dyscyplin
i usamodzielniając
coraz to inne ich części
dzieląc żywy organizm nauki
na poszczególne wyspecjalizowane
tkanki czy wręcz komórki

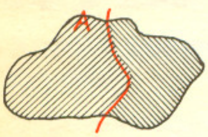
Bawiąc się tak od dawna
niepomni
że to podział obowiązków ledwie
i rzemieślniczych umiejętności
stawiamy coraz wyraźniej
mądrość
poza obrębem
nauki

Rozważania o topologii spójności

Prof. dr Andrzej GRZEGORCZYK

W rozważaniach tych chcę zwrócić uwagę na kilka łatwych spostrzeżeń z pogranicza topologii i logiki, które nie były do tej pory wykorzystane, chociaż trudności techniczne z nimi związane są tego rzędu, że można by je traktować jako ćwiczenia dla początkujących logików i topologów. Będą też postawione związane z tymi spostrzeżeniami trudniejsze problemy.

Spójność. Topologię można rozumieć jako najogólniejszą geometrię, która zajmuje się dowolnymi bryłami, nie muszącymi podlegać wymaganiom żadnego rodzaju regularności. Dla laika może wydawać się dziwne, że można jednak coś powiedzieć o tak ogólnie pojętych bryłach. To, że istnieją takie bardzo ogólne prawdy, najłatwiej zilustrować na pojęciu spójności. Pojęcie spójności, jak potwierdzają to niektórzy psychologowie, powstaje bardzo wcześnie w umyśle dziecka jako pojęcie „jednego kawałka". Określenie potoczne mogłoby więc brzmieć:



Rys. 1. Kawałek spójny. Jeśli podzielimy go na dwie części, to muszą się one stykać.

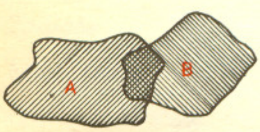
Twór geometryczny jest spójny, gdy składa się z jednego kawałka, czyli gdy nie można go podzielić na dwa kawałki, które nie stykałyby się bezpośrednio.

Ta intuicja znalazła swój wyraz w definicji pojęcia spójności na gruncie topologii startującej od pojęcia domknięcia:

$$X \text{ spójne} \Leftrightarrow \bigwedge_{A,B} (X = A \cup B \wedge A \neq 0 \neq B \rightarrow (A \cap \bar{B} \neq 0 \vee B \cap \bar{A} \neq 0)),$$

gdzie $^{-}$ oznacza domknięcie, a 0 — zbiór pusty.

Spostrzeżenie bezpośredniej intuicyjności pojęcia spójności i większej elementarności tego pojęcia w porównaniu z pojęciem domknięcia nasuwa myśl, że w aksjomatycznym traktowaniu tego działu matematyki powinniśmy się pokusić o zbudowanie aksjomatycznej teorii spójności, jako (być może) bardziej podstawowej aniżeli algebra domknięć. Teoria taka, jak się zdaje, nie była do tej pory przedmiotem publikowanych badań.
Od razu nasuwają się dwa aksjomaty:

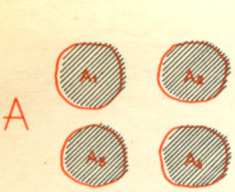


Rys. 2. Ilustracja do aksjomatu 1: dwa kawałki spójne mające część wspólną tworzą razem jeden spójny kawałek.

A1 A i B są spójne $\wedge$ $A \cap B \neq 0 \rightarrow A \cup B$ spójne
A2 X spójne $\wedge$ C jest składową Y $\wedge$ $X - C$ niespójne $\rightarrow$ $X - Y$ niespójne.

A1 mówi, że jeśli A i B są pojedynczymi kawałkami i mają one jakiś punkt wspólny, to ich suma też jest jednokawałkowa.
A2 trudniej jest wypowiedzieć i uzasadnić bez pewnych doświadczeń wyobraźni. Najpierw trzeba wprowadzić pojęcie składowej. Jeśli zajmujemy się dowolnymi tworami (również takimi, które składają się z wielu kawałków nie dotykających do siebie), to:

C jest składową Y, gdy C jest takim kawałkiem Y, który jest spójny, oraz pozostałe kawałki Y nie stykają się z C.

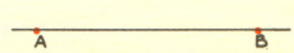


Rys. 3. Cztery składowe niespójnego A.

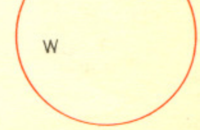
Intuicyjnie jest to zrozumiałe: cztery koła narysowane daleko jedno od drugiego są czterema osobnymi składowymi tworu geometrycznego złożonego z tych czterech kół.
Formalnie na gruncie algebry Boole'a składowe określamy jako największe części spójne zawarte w danym tworze geometrycznym:

$$C \text{ jest składową } Y \Leftrightarrow C \text{ spójne } \wedge\ C \subset Y \wedge \bigwedge_{D} (D \text{ spójne } \wedge C \subset D \subset Y \rightarrow C = D).$$

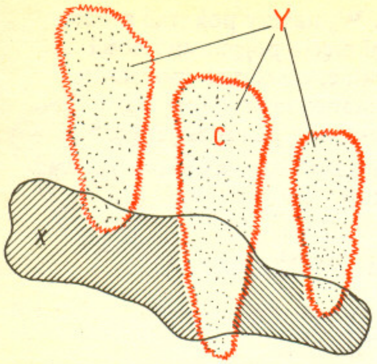
Domknięcie, *wnętrze* i *ograniczenie* zbioru, zbiory *otwarte* i *domknięte* — to pojęcia tradycyjnie przyjmowane w topologii jako podstawowe. Na prostej (rys. I) punkty A i B stanowią ograniczenie odcinka AB zarówno, jeżeli zaliczamy je do odcinka, jak i w przeciwnym przypadku. Na płaszczyźnie (rys. II) okrąg O jest ograniczeniem koła K, a wnętrze W tego koła — to koło bez ograniczającego je okręgu. Jeżeli rozważamy koło wraz z niektórymi tylko punktami na okręgu, to wnętrze i ograniczenie pozostaną bez zmian. Domknięcie zbioru składa się z niego samego i wszystkich punktów granicznych, tj. granic ciągów punktów zbioru, w szczególności każdy zbiór jest podzbiorem swojego domknięcia. Zbiór równy swojemu domknięciu jest domknięty. Zbiór równy swojemu wnętrzu jest otwarty. Są zbiory, które nie są ani otwarte, ani domknięte, np. wnętrze koła plus kilka punktów z ograniczającego je okręgu. Mamy zawsze: wnętrze = zbiór minus ograniczenie, domknięcie = zbiór plus ograniczenie.



Rys. I



Rys. II



Rys. 4. Ilustracja do aksjomatu 2: jedna ze składowych Y rozcina X, a więc całe Y rozcina X.

Po tych wyjaśnieniach sens **A2** można wypowiedzieć potocznie: jeśli X jest spójne, a Y składa się z kilku kawałków, to jeśli któryś z kawałków Y-ka (któraś ze składowych — nazwaliśmy ją C) rozcina X (czyli czyni różnicę $X-C$ niespójną), to wówczas całe Y też rozcina X. Np. jeśli mamy dziesięć odległych od siebie (np. równoległych) tarcz piłujących i zbliżymy do nich X spójne, i jeśli jedna z tarcz odpiłuje od X jakiś osobny kawałek, to w wyniku piłowania całym zespołem tarcz na pewno podzielimy X na jakieś kawałki. Gdyby, po potraktowaniu całym zespołem pił, przedmiot X pozostał spójny, znaczyłoby to, że żadna piła (żadna składowa) go nie przecięła. W tej wersji pozytywnej, brzmiącej formalnie:

T1 X spójne $\wedge$ C jest składową $Y \wedge X-Y$ spójne $\rightarrow X-C$ spójne

aksjomat **A2** można uważać za prawie identyczny z własnością 5 pojęcia spójności wymienioną przez K. Kuratowskiego w jego fundamentalnej Topologie II, s. 88.

Nie jest łatwo wskazać więcej równie ogólnych i intuicyjnych aksjomatów pojęcia spójności. Można oczywiście powiedzieć, że twór jednopunktowy jest spójny, a złożony z kilku osobnych punktów jest niespójny. Mielibyśmy wtedy cztery oczywiste aksjomaty. Warto może zaznaczyć, że przy boolowskim, a nie mnogościowym traktowaniu tworów geometrycznych, te dwa ostatnie aksjomaty nie przesądzają wcale punktowego charakteru przestrzeni, można je bowiem ująć jako zdania warunkowe:

A3 X jest atomem $\rightarrow$ X jest spójne
A4' X, Y są atomami $\wedge$ $X \neq Y \rightarrow X \cup Y$ niespójne.

Atomem nazywamy coś, czego podzielić się już nie da:

$$X \text{ jest atomem} \Leftrightarrow X \neq 0 \wedge \bigwedge_{Y} (Y \neq 0 \wedge Y \subset X) \rightarrow X = Y.$$

Przyjmując **A3** i **A4'** wcale nie zakładamy, że istnieją atomy. Natomiast jak się zdaje, z tego, że twór dwuatomowy jest niespójny, wcale nie wynika, że trójatomowy również musi być niespójny (formalny dowód niezależności może być trudny). Stąd być może istnieje potrzeba przyjęcia (zamiast **A4'**) aksjomatu nieelementarnego:

A4 X składa się ze skończonej ilości atomów, przy tym co najmniej z dwóch $\rightarrow$ $\rightarrow$ X nie jest spójne.

(A może jest prawdziwe jakieś zdanie, które mogłoby służyć za krok indukcyjny pozwalający dowodzić, że większe zbiory skończone są niespójne, jeśli niespójne są mniejsze?) Przy szukaniu aksjomatów uzupełniających warto pamiętać o istnieniu pewnych bardzo dziwnych zbiorów spójnych, jak np. tzw. miotełka Knastera-Kuratowskiego (Topologie II, s. 85), która jest zbiorem spójnym, ale po odjęciu jednego specjalnego punktu p rozpada się na poszczególne punkty, w tym sensie, że składowymi różnicy: miotełka — $\{p\}$ są poszczególne punkty.

Niedefiniowalność domknięcia. Proponując nową teorię trzeba przede wszystkim rozważyć, czy jest ona rzeczywiście nowa, czy też stanowić będzie tylko inną wersję teorii dawno znanej. W naszym przypadku teorią dawno znaną jest algebra domknięć, będąca systemem aksjomatycznym, najbardziej rozpowszechnionym w wersji pochodzącej od K. Kuratowskiego. Ma ona jako swoje terminy pierwotne pozalogiczne: 1" terminy algebry Boole'a (np. relację inkluzji boolowskiej $\subset$, którą można czytać jako „bycie kawałkiem" czegoś, aby uniknąć sugestii atomiczności, która na początku nie jest założona), 2" pojęcie domknięcia, spełniające aksjomaty: $\overline{X} \cup \overline{Y} = \overline{X \cup Y}$, $\overline{X} = \overline{\overline{X}}$, $X \subset \overline{X}$, $\overline{0} = 0$. Łatwo można wykazać, że zamiast pojęcia domknięcia terminem pierwotnym specyficznie topologicznym może być równie dobrze pojęcie wnętrza, albo pojęcie ograniczenia, pojęcie elementu otwartego, lub pojęcie elementu domkniętego. Powstaje więc przypuszczenie, że dla tej teorii, lub dla teorii nieco mocniejszej (przestrzeni topologicznych, dla których zakłada się atomiczność i domkniętość atomów), spójność jest po prostu jednym z możliwych terminów pierwotnych. Otóż tak nie jest, ponieważ prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Na gruncie twierdzeń algebry domknięć domknięcie nie jest definiowalne przy pomocy spójności.

Znaczy to, że nie można wyprowadzić w algebrze domknięć ani w algebrze przestrzeni topologicznych twierdzenia, które mogłoby być definicją domknięcia i w definiensie miałoby wyłącznie terminy algebry Boole'a i pojęcie spójności.

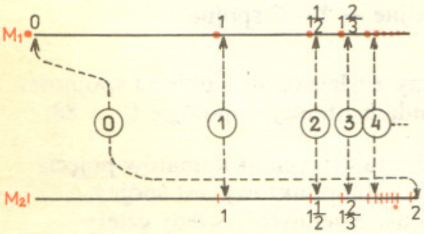
Algebra Boole'a — to teoria relacji zawierania rozumianego jako bycia częścią (nie zaś bycia elementem). Aksjomaty algebry Boole'a mówią o własnościach relacji $\subset$ oraz o istnieniu części wspólnej dla dwóch obiektów X i Y (oznaczanej przez $X \cap Y$), oraz sumy $X \cup Y$ i różnicy $X-Y$. Aksjomaty te są bardzo ogólne, tak że pasują do takiej sytuacji, w której wyobrażamy sobie, że istnieją najmniejsze przedmioty niepodzielne zwane w tej teorii atomami. Formalnie aksjomaty można zapisać następująco:
$A \subset A$; $A \subset B \wedge B \subset C \rightarrow A \subset C$;
$A \subset B \wedge B \subset A \rightarrow A = B$; $0 \subset A$; $A \subset 1$;
$A \subset A \cup B$; $B \subset A \cup B$;
$A \subset X \wedge B \subset X \rightarrow A \cup B \subset X$;
$A \cap B \subset A$; $A \cap B \subset B$;
$X \subset A \wedge X \subset B \rightarrow X \subset A \cap B$;
$A - B \subset A$; $(A-B) \cap B = 0$;
$(A-B) \cup B = A \cup B$;
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Dowód powyższego twierdzenia jest bardzo prosty. Wystarczy pokazać model, w którym przy dwóch różnych interpretacjach domknięcia pojęcie spójności byłoby takie samo. Modelem takim są liczby naturalne, o których można założyć zarówno, że każda jest izolowana (czyli że stanowią tzw. topologię dyskretną), jak i że liczba 0 jest granicą ciągu dyskretnego pozostałych liczb.

Dla kogoś, kto chce operować wyobraźnią geometryczną, musimy skonstruować dwa modele złożone z liczb rzeczywistych (rysunek 5):

$$M_1 = \{0\} \cup \left\{2 - \frac{1}{n} \quad (\text{dla } n \neq 0)\right\},$$

$$M_2 = \left\{2 - \frac{1}{n} \quad (\text{dla } n \neq 0)\right\} \cup \{2\}.$$



Rys. 5. Na gruncie algebry domknięć domknięcie nie jest definiowalne przy pomocy spójności.

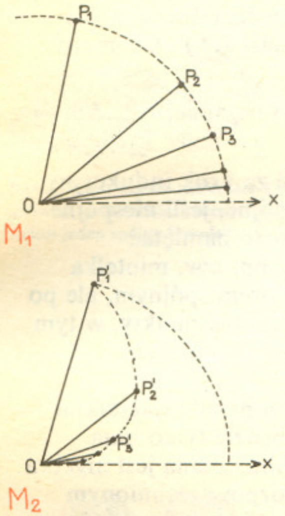
W modelu M_1 żaden punkt nie jest granicą ciągu pozostałych, w modelu M_2 punkt 2 jest granicą ciągu pozostałych. Punkty obu modeli można ponumerować przyjmując, że dla $n \neq 0$ liczba n jest numerem punktu $2 - \frac{1}{n}$. Numer 0 w modelu M_1 dajemy liczbie rzeczywistej 0, a w modelu M_2 liczbie rzeczywistej 2. W ten sposób zamiast o liczbach rzeczywistych możemy mówić o ich numerach. Otóż istota argumentacji jest ta, że mamy dwa różne pojęcia domknięcia, a zbiory spójne są w obu przypadkach takie same, bowiem w obu modelach zbiorami spójnymi są wyłącznie zbiory jednopunktowe. W takim przypadku ogólne twierdzenia logiki mówią, że to pojęcie, które można interpretować na dwa różne sposoby, nie jest definiowalne za pomocą pojęcia, które w obu interpretacjach zachowuje ten sam sens.

Tak więc startując od pojęcia spójności mamy do czynienia z teoriami zasadniczo innymi niż algebra domknięć. Stąd np. powstaje otwarte zagadnienie, czy zbiór twierdzeń zawierających wyłącznie pojęcie spójności oraz pojęcia boolowskie (czyli takich twierdzeń jak **A1—A4**), oraz wyprowadzalnych w algebrze domknięć jest skończenie aksjomatyzowalny, lub aksjomatyzowalny za pomocą pewnych ogólnych schematów, czy nie?

Rzeczą dość naturalną jest poszukiwanie definicji domknięcia za pomocą spójności w przestrzeniach, w których spójność gra jakąś istotną rolę — takimi są przestrzenie spójne i lokalnie spójne. Otóż można dowieść, że:

Na gruncie topologii przestrzeni spójnych i lokalnie spójnych domknięcie nie jest definiowalne przez spójność.

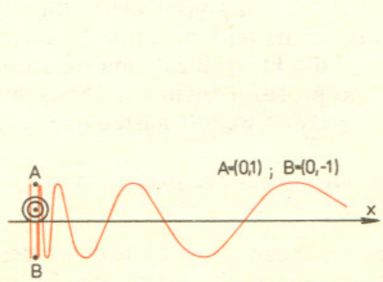
W dowodzie podaje się dwa modele, w których zbiory spójne są izomorficzne, ale izomorfizm, który dobrze przenosi spójność, nie przenosi domknięcia (rysunek 6). Oba modele składają się z ciągu odcinków promieniście wychodzących z tego samego punktu centralnego 0 w określonych kierunkach. Kierunki te niech mają np. kąty o mierze łukowej równej $1/n+1$ w stosunku do osi x-ów. Natomiast na osi x-ów nie ma odcinka ani w jednym modelu, ani w drugim. W modelu M_1 wszystkie te promienie mają tę samą długość. W modelu M_2 są coraz krótsze i dążą do zera. Izomorfizm polega na proporcjonalnym skracaniu promieni. W ten sposób zachowuje on spójność, a nie zachowuje domknięcia, bowiem w modelu M_2 punkt centralny jest granicą końców promieni, a w modelu M_1 oczywiście nie jest.



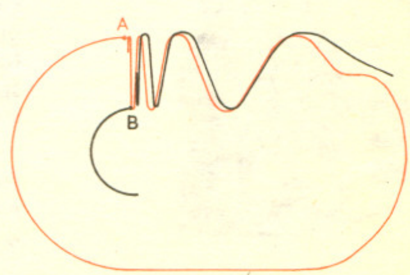
Rys. 6. Na gruncie topologii przestrzeni spójnych i lokalnie spójnych domknięcie nie jest definiowalne przez spójność.

Lokalna spójność. Zbiór (przestrzeń) jest *lokalnie spójny* (*–a*), gdy w każdym otoczeniu każdego punktu istnieje takie otoczenie tego punktu, które jest spójne. Otoczenie punktu p to każdy zbiór G, którego wnętrze zawiera punkt p. Tzw. sinusoida zagęszczona: $y = \sin 1/x$ wraz z odcinkiem $[A, B]$ jest zbiorem spójnym, lecz nie lokalnie spójnym, ponieważ „małe" otoczenia punktów odcinka $[A, B]$ nie są spójne (rys. III). Zbiory, które są spójne, ale nie lokalnie spójne, przeczą niektórym potocznym intuicjom spójności, mogą na przykład przechodzić przez siebie nie przecinając się (rys. IV).

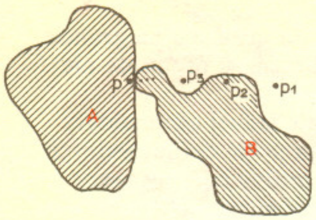
Zadanie: jak opisać „normalnie" fakt „przechodzenia jednej krzywej przez drugą", pokazany na rysunku IV?



Rys. III. Sinusoida zagęszczona.



Rys. IV. Te krzywe się nie przecinają.



Rys. 7. Ciąg $\{p_n\}$ dąży do p, suma $A \cup B$ musi być więc spójna.

Definicja domknięcia w przestrzeniach lokalnie skończenie podzielnych. Tą nazwą oznaczam przestrzenie, w których w każdym otoczeniu dowolnego punktu istnieje takie otoczenie G tegoż punktu, że składowych uzupełnienia otoczenia G jest skończenie wiele. Dla takich przestrzeni nasuwa się dość intuicyjna definicja domknięcia:

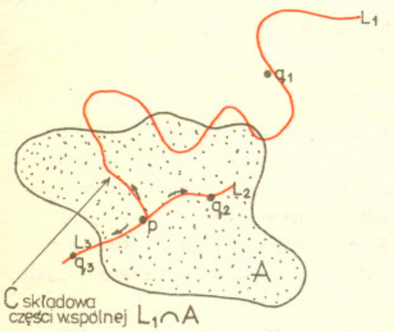
$$p \in \overline{X} \Leftrightarrow \text{istnieje taki ciąg } \{p_n\} \text{ punktów zbioru } X \text{, że } \bigwedge_{A,B} (A \text{ i } B \text{ są spójne } \wedge$$
$$\wedge\ p \in A \wedge \text{ nieskończenie wiele } p_n \text{ należy do } B \to A \cup B \text{ spójne}).$$

Takie określenie zgodne jest ze znaną do tej pory definicją domknięcia. Wynikanie $(\to)$ jest dość oczywiste. Dowodząc wynikania odwrotnego zakładamy, że $p \in X$ i rozważamy dowolny ciąg p_n punktów zbioru X. Wszystkie p_n od pewnego miejsca muszą leżeć poza pewnym otoczeniem (zbiorem otwartym) G. Skoro przestrzeń jest lokalnie skończenie podzielna, to dla $G' \subset G$ istnieje skończona ilość składowych uzupełnienia G'. A więc nieskończenie wiele p_n musi należeć do którejś składowej tego uzupełnienia. Składowa ta jest więc takim zbiorem B, a zbiór jednopunktowy $\{p\}$ zbiorem A, dla których prawa strona powyższej równoważności jest fałszywa.
Interesujące wydaje się poszukać takiej definicji domknięcia, która nie operowałaby ciągami i skończonością, ani nawet punktami, a więc którą można by przyjąć nie zakładając atomiczności przestrzeni. Podstawowe i pierwotne wyobrażenia geometryczne są bowiem makroskopowe, stąd interesujące wydaje się pytanie, jak wiele z topologicznych rozważań można przeprowadzić nie przyjmując, że istnieją jakieś takie niestwierdzalne najmniejsze twory „nieskończenie małe" zwane punktami. Otóż istotnie, na podstawie nieco innych intuicji można sformułować definicję nie odwołującą się do punktów. Natomiast w oparciu o intuicje związane z powyżej podaną definicją i dla tak ogólnej kategorii przestrzeni nie potrafię podać prostszej lub bardziej boolowskiej definicji domknięcia, która by nie operowała punktami lub pojęciem nieskończoności.

Przestrzeń euklidesowa to zbiór R^n $(n \geq 1)$, tj. produkt kartezjański skończonej liczby przestrzeni liczb eczywistych R.

Definicja domknięcia w przestrzeniach euklidesowych. Podstawowe wyobrażenia przestrzenne wiążą się z przestrzeniami euklidesowymi. Na gruncie tych przestrzeni mając intuicję spójności można określić domknięcie. Nadto prościej w tym przypadku przedstawia się definicja wnętrza. Podam najpierw definicję wnętrza operując punktami:

$$p \in \operatorname{Int} A \Leftrightarrow \bigwedge_{L,q} (L \text{ spójne } \wedge q \in L \wedge q \neq p \to$$
$$\to \bigwedge_{C} (p \in C \wedge C \text{ jest składową } L \cap A \wedge C \neq \{p\})).$$



Rys. 8. Idąc po dowolnej drodze spójnej idziemy zawsze jakiś czas po A, a zatem p leży wewnątrz A.

Intuicję tej definicji można opisać następująco (zob. rys. 8). Punkt p należy do wnętrza zbioru A, jeśli idąc od punktu p w dowolnym kierunku (wyznaczonym przez pewną dowolną drogę spójną L) ku pewnemu innemu dowolnemu punktowi q, będziemy zawsze szli przez pewien czas po punktach ze zbioru A. Wynikanie $\to$ jest mniej więcej oczywiste. Dowodząc odwrotnego, gdy $p \notin \operatorname{Int} A$, ale $p \in A$ bierzemy pewien ciąg $\{a_n\}$ punktów spoza A taki, że $p = \lim \{a_n\}$ i łączymy punkty tego ciągu czymś w rodzaju łamanej z punktem p na końcu. Taka łamana L falsyfikuje prawą stronę równoważności.
Przejście do definicji nie operującej punktami można zrobić następująco. Najpierw określamy, kiedy pewien element X jest „kawałkiem" wnętrza elementu A:

$$X \subset \operatorname{Int} A \Leftrightarrow \bigwedge_{Y} (Y \neq 0 \wedge Y \subset X \to \bigvee_{Z} Z \neq 0 \wedge Z \subset Y \wedge \bigwedge_{L} (L \text{ spójne } \wedge L \cap Z \neq \wedge$$
$$\wedge\ L \neq 0 \to \bigvee_{C} (C \text{ jest składową } L \cap A \wedge C \cap Z \neq 0 \wedge C - Z \neq 0))).$$

Wnętrze określamy teraz jako sumę boolowską wszystkich jego kawałków. Przyjmując, że $F(X, A)$ jest formułą zdaniową z prawej strony powyższej równoważności, element S będący sumą takich X, dla których $F(X, A)$, jest jedynym spełniającym warunki:

$$\bigwedge_{Y} (F(X, A) \to X \subset S)$$
$$\bigwedge_{Y} \Big(\bigwedge_{X} (F(X, A) \to X \subset Y) \to S \subset Y\Big).$$

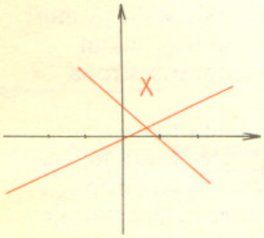
Usprawiedliwieniem tej definicji jest wykazanie jej prawdziwości w przestrzeniach euklidesowych rozumianych punktowo. Jeśli coś jest prawdziwe przy punktowym wyobrażeniu przestrzeni, to znaczy, że jest niesprzeczne, jak na to wskazuje kilkusetletnie doświadczenie matematyczne operujące punktami.

Można mieć jednak wątpliwości, czy punktowe wyobrażenie przestrzeni jest najwłaściwsze.

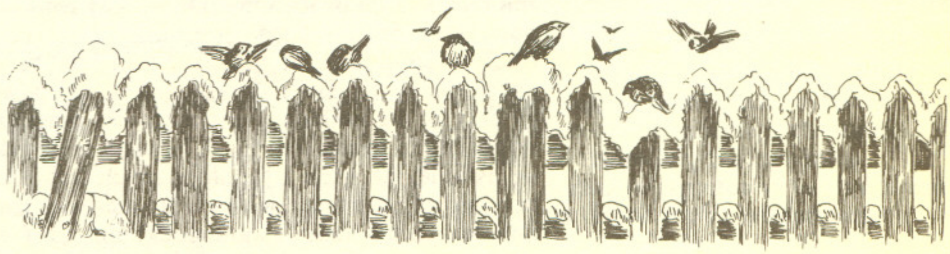
Zakończenie. Ogólny sens tych uwag polega na zachęcie do myślenia na gruncie topologii w sposób uruchomiający pewne elementy wyobraźni, które może nie były dość wykorzystane:

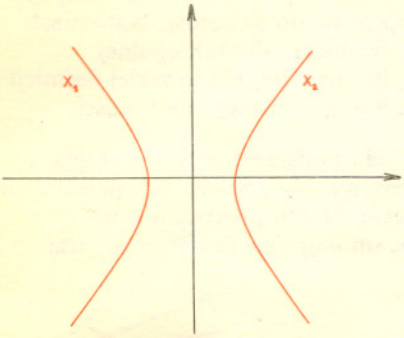
1. Rozpoczęcie rozważań od intuicji spójności. Znalezienie ładnej aksjomatyki minimalnej i stopniowych jej wzmocnień. Podanie szeregu pojęć definiowalnych za pomocą spójności, których rozważanie wydaje się naturalne jako pierwszy etap rozwoju teorii startującej od spójności, poprzedzający nawet definicję domknięcia, lub po prostu zmierzający w innym kierunku, nie korzystającym z pojęcia domknięcia.

2. Nie operowanie wyobrażeniem punktu, a więc rozwijanie teorii na gruncie algebry Boole'a bez założenia atomiczności.

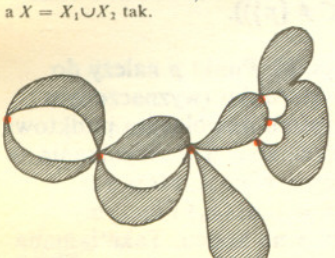


$X = \{(x, y) : (2y - x)(y - x - 1) = 0\} =$
$= \{(x, y) : 2y - x = 0\} \cup \{(x, y) : y - x - 1 = 0\}.$

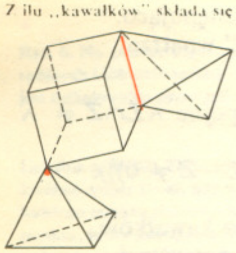




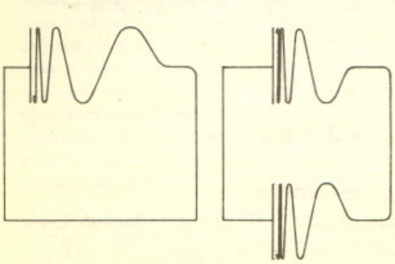
X_1 i X_2 nie są zbiorami algebraicznymi, a $X = X_1 \cup X_2$ tak.



Z ilu „kawałków" składa się ten zbiór?



A ten z ilu?



Zbiory: łukowo spójny i łukowo niespójny.

Jeden kawałek, czy nie?

W teoriach matematycznych spotyka się wiele realizacji idei „spójności", rozumianej jako „składanie się z jednego kawałka". Zacznijmy od jednego z prostszych przykładów. Czy dwie przecinające się proste stanowią (z intuicyjnego punktu widzenia) zbiór jednokawałkowy, czy nie? Pogląd, że ten zbiór składa się z dwu oddzielnych prostych, „luźno, niejako przypadkiem, o siebie zaczepionych" — jest chyba zupełnie do przyjęcia?

I rzeczywiście, w pewnych teoriach matematycznych taki zbiór jest wyraźnie „niespójny", ma dwie „składowe". Aby wyrazić to ściśle i bez cudzysłowów, ograniczmy się może do zbiorów algebraicznych na płaszczyźnie. Tak nazywamy zbiory, które można opisać układem równań $f_1(x, y) = 0, \ldots, f_n(x, y) = 0$, w którym n jest pewną liczbą, a $f_1 \ldots, f_n$ — wielomianami. Gdy rozpatrujemy płaszczyznę kartezjańską R^2, to zamiast układu jaki napisaliśmy można wziąć tylko jedno równanie: $f_1^2 + \ldots + f_n^2 = 0$. Albowiem suma kwadratów liczb rzeczywistych jest zerem wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie one są równe 0. Ale np. nad ciałem liczb zespolonych to już nie to samo.

Definicja. Zbiór algebraiczny X nazywamy *algebraicznie spójnym* (częściej używa się terminu: *nieprzywiedlny* lub *nieredukowalny*) jeżeli nie da się przedstawić jako suma $X_1 \cup X_2$, gdzie X_1, X_2 są niepuste, różne od X i też algebraiczne.

Twierdzenie (łatwe, ale nie dowiedziemy). *Każdy zbiór algebraiczny jest sumą skończonej liczby zbiorów nieprzywiedlnych* (*zwanych jego składowymi*).

Przykład. Suma dwu przecinających się prostych jest oczywiście algebraicznie niespójna (przywiedlna). Z drugiej strony, hiperbola jest nieprzywiedlna. Dlaczego?

Wiele innych spójności rozważanych w matematyce można ująć w taki schemat:
Dane są dwie klasy zbiorów, pierwszą nazwijmy zbiorami *Lepszymi*, drugą — *Gorszymi*, przy czym zbiór pusty jest *Gorszy* (**przykład 1**: L = zbiory nieskończone, G = zbiory skończone, **przykład 2**: L = wielościany, G = łamane w przestrzeni). Zbiór X nazywamy niespójnym, gdy da się przedstawić w postaci $X = X_1 \cup X_2$, gdzie X_1, X_2 są *Lepsze*, różne od X, a $X_1 \cap X_2$ jest zbiorem *Gorszym* (zob. rysunki).

Jeszcze inne spojrzenie na „spójność" można otrzymać rozumując jakoś tak. Obszar X uznamy za „spójny", jeżeli z każdego jego punktu można „dostać się" do dowolnego innego. Gdyby zniszczyć wszystkie mosty (oraz łódki itp.) w kraju pociętym kanałami, to dla osób umiejących pływać pozostałby on spójny, a dla niepływających — rozpadłby się na oddzielne „składowe" (wyspy, mówiąc po prostu). W topologii rozpatruje się często zbiory łukowo spójne, to jest takie, że od każdego punktu można dostać się do drugiego po łuku. Z pozoru banalne pojęcie „spójnego kawałka" okazuje się po bliższym spojrzeniu bardzo interesujące i z pewnością będziemy doń wracać.

M. Sz.

Konkurs prac maturalnych — i co dalej?

Jak informowaliśmy w 8(56) numerze Delty z sierpnia ub r, konkurs na najlepszą pracę maturalną z matematyki zakończył się w czerwcu 1978 r., w Poznaniu finałem oraz wręczeniem przyznanych medali, nagród i dyplomów.

Jaki był przebieg konkursu? Wzięło w nim udział 26 uczestników, którzy nadesłali 25 prac (jedna z prac miała dwu autorów). Był to zapewne dość nikły procent ogólnej ilości prac maturalnych z matematyki, jakie powstały w r. szk. 1977/78, co chyba po części wynikało z dość późnego ogłoszenia konkursu (pełny regulamin — w Delcie 2/1978, notatki w Trybunie Ludu i Sztandarze Młodych — w kwietniu 1978).

Ocena nadesłanych prac prowadzona była przez Komisję Konkursu na początku maja. Każdą pracę oceniało wstępnie dwóch członków Komisji — matematyków pracujących w uczelniach lub instytutach naukowych. Część opracowań została wyeliminowana już w tej fazie: były to prace-nieporozumienia, sprowadzające się do zreferowania pewnych partii podręcznika szkolnego lub do rozwiązania pewnej ilości zupełnie typowych zadań. Nad pozostałymi pracami przeprowadzono bardziej szczegółową dyskusję w pełnym składzie Komisji, której przewodniczącym był prof. dr Leon Jeśmanowicz.

W wyniku dyskusji Komisja zakwalifikowała do finału 6 prac, które zostały przekazane do szczegółowych recenzji, z zaleceniem przeanalizowania oryginalności ujęcia i poprawności uzyskanych wyników. Autorzy prac zakwalifikowanych do finału otrzymali zawiadomienia, zawierające zaproszenia do udziału w dorocznej Sesji Naukowej i Walnym Zgromadzeniu Polskiego Towarzystwa Matematycznego oraz prośbę o przygotowanie się do krótkiego (15 min.) referatu na temat pracy i udziału w dyskusji.

W wystąpieniu należało m.in. wyeksponować to, co Autor uważał za najciekawsze, najważniejsze lub najtrudniejsze w pracy, oraz wyjaśnić, na czym polegał wkład Autora w opracowanie tematu i czym praca różniła się od wykorzystanych źródeł. Zaproszenia do udziału otrzymali również nauczyciele — opiekunowie prac finałowych.

Finał odbył się 5 czerwca w czasie Sesji Naukowej PTM w Poznaniu. Po wystąpieniu każdego z finalistów odbywała się publiczna dyskusja, w której wzięli udział uczestnicy Sesji i Walnego Zgromadzenia PTM oraz goście. Szczególną uwagę w dyskusji zwracano na oryginalność wyników lub ujęcia.
Recenzje, referaty i przebieg dyskusji stały się podstawą do podjęcia ostatecznych decyzji przez Komisję Konkursu. Z protokołu posiedzenia Komisji:

„[...] Komisja na zamkniętym posiedzeniu postanowiła przyznać złoty medal Pawłowi Domańskiemu za pracę «Liczby Fibonacciego». Praca pana Pawła Domańskiego oraz wygłoszony przez niego referat wyróżniały się dojrzałością matematyczną, główne przedstawione wyniki były własnymi wynikami autora pracy.
Srebrny medal postanowiono przyznać pani Urszuli Łach za pracę «Równania różniczkowe i ich niektóre zastosowania w fizyce». Praca była referatowa, ale opracowanie własne, dokładnie i metodycznie przedstawiona, ciekawe ujęcie.
Brązowy medal Komisja postanowiła przyznać pani Bogusławie Grzywacz za pracę «Przekształcenie afiniczne płaszczyzny na płaszczyznę w ujęciu analitycznym». Ta praca w zasadzie referatowa miała pewne cechy oryginalności w ujęciu tematu. Autorka bardzo ładnie broniła swojego punktu widzenia i wykazała duże zrozumienie i sporą ilość wiedzy.
Komisja postanowiła przyznać jedną pierwszą nagrodę Ministerstwa Oświaty i Wychowania panu Pawłowi Domańskiemu, dwie drugie nagrody MOiW paniom Urszuli Łach i Bogusławie Grzywacz.
Komisja postanowiła nie przyznawać trzeciej nagrody, natomiast przyznać wyróżnienie pani Irenie Kranc za pracę «Rachunek zdań i niektóre jego zastosowania w dowodzeniu». Praca ta — przy wielu mankamentach — była własną próbą opracowania tematu. Po referacie i dyskusji, niektóre usterki pracy zostały wyjaśnione na korzyść autorki.
[...] Biorąc to wszystko pod uwagę postanowiono przyznanym wyróżnieniem podkreślić duży wkład pracy i inwencję pani Ireny Kranc.
Pozostałe dwie prace [...] nie zasługują zdaniem Komisji na żadne wyróżnienie. Obie te prace zbyt mocno oparte są o popularne opracowania i nie posiadają w ujęciu tematu cienia oryginalności.
Ponadto Komisja postanowiła przyznać nagrody Ministerstwa Oświaty i Wychowania nauczycielom — opiekunom prac medalistów.
Są to: pani mgr D. Wiśniewska, pan mgr Alfons Hajok, pani mgr Cecylia Terlikowska. [...]"

Specjalnie wybite medale oraz dyplomy zostały uroczyście wręczone — obok tzw. Wielkich Nagród PTM i Nagród dla młodych matematyków — na otwarciu Walnego Zgromadzenia PTM przez Prezesa Towarzystwa, prof. dr Władysława Orlicza. Nagrody i wyróżnienie wręczył uczestniczący w pracach Komisji Konkursu przedstawiciel Ministerstwa Oświaty i Wychowania, dr Wacław Wierzbicki.

Przebieg konkursu 1978 nasunął szereg wniosków i refleksji. Po pierwsze — na temat samych prac. Charakter ich był bardzo zróżnicowany.
Autorzy części prac podjęli za zadanie zebranie i usystematyzowanie wiadomości, nie wykraczających w zasadzie poza program szkolny, ale pojawiających się w różnych kontekstach i w różnych klasach lub na różnych przedmiotach (do tej kategorii należą prace, które uzyskały medale srebrny i brązowy).

Rozwiązanie zadania M 181.
Tylko dwa razy: w południe i o północy. Duża wskazówka pokrywa się z małą 11 razy na dobę: pierwszy raz 5 5/11 minuty po pierwszej. Wtedy sekundnik dochodzi do 6, następnie 10 minut i 10/11 po drugiej, ale wtedy sekundnik dochodzi do 12. Po sprawdzeniu wszystkich położeń dojdziemy do sformułowanego na wstępie wniosku.

Część autorów poszła dalej — zaproponowane przez nich przeglądy wybranych informacji z jakiejś dziedziny wymagały operowania wiadomościami znacznie wykraczającymi poza program szkolny (co na ogół okazywało się zadaniem przekraczającym siły i możliwości autorów).
W niektórych — stosunkowo nielicznych — opracowaniach autorzy pokusili się o uzyskanie samodzielnego wkładu w matematykę, rozstrzygnięcie pewnych problemów, których rozwiązania nie były im znane (do tej kategorii należała zarówno praca nagrodzona złotym medalem, jak i prace, którym nie udało się zakwalifikować do finału).
Nie jest chyba przypadkiem, że wszystkie nagrodzone prace podejmowały problemy, do omówienia których wystarczała w zasadzie pogłębiona znajomość programu szkolnego. Wynikałoby stąd, że warto inwestować czas i wysiłek w oryginalność ujęcia znanego materiału lub rozwiązywanie problemów dających się na tym gruncie sformułować, a nie w uczenie się teorii bardzo zaawansowanych, wchodzących w zakres nauczania na wyższych uczelniach.
W trakcie swych prac Komisja odniosła również wrażenie, że w wielu przypadkach opieka nauczyciela była zbyt wątła: autorzy podejmowali zadania albo zbyt ambitne, albo zbyt uproszczone — w obu przypadkach praca była skazana na niepowodzenie.

Druga grupa refleksji dotyczyła samego konkursu. Został on zgodnie oceniony jako udany i Walne Zgromadzenie PTM zaleciło organizowanie go w latach następnych. Konkurs ubiegłoroczny przyniósł wiele doświadczeń, które wykorzystane zostaną w tegorocznym. Zostanie zapewne nieznacznie zmodyfikowany regulamin Konkursu i jego organizacja, jednak podstawowe założenia zostaną zachowane. Regulamin Konkursu 1979 opublikujemy w lutowym numerze Delty, ale już teraz zapraszamy tegorocznych maturzystów i ich nauczycieli do wzięcia w nim udziału.

Tadeusz B. IWIŃSKI
Z-ca Przewodniczącego Komisji Konkursu 1978

Uogólnione ciągi Fibonacciego

Paweł DOMAŃSKI

Skrót pracy nagrodzonej złotym medalem w konkursie Polskiego Towarzystwa Matematycznego i redakcji Delty na najlepszą pracę maturalną z matematyki w roku 1978.

Przypomnijmy sobie definicję zwykłego ciągu Fibonacciego; jest to taki ciąg $\{U_n\}$, że

$$U_0 = 0,\ U_1 = 1 \text{ oraz } U_{n+2} = U_{n+1} + U_n.$$

Jak można uogólnić to pojęcie? Oczywiście ciąg Fibonacciego jest przedstawicielem zbioru ciągów $\{B_n\}$ spełniających warunki:

$$B_1 = a, \quad B_2 = b, \quad B_{n+2} = sB_{n+1} + tB_n,$$

gdzie $a,\ b,\ s,\ t \in C; \quad s,\ t \neq 0.$

Pokażemy później, że dla badania podzielności wygodniejsze będzie inne, nieco węższe uogólnienie. Umówmy się mianowicie, że *uogólnionym ciągiem Fibonacciego nazwiemy każdy taki ciąg* $\{A_n\}$, *w którym*

$$A_0 = 0; \quad A_1 = 1 \quad \text{oraz} \quad A_{n+2} = kA_{n+1} + cA_n,$$

gdzie $(k, c) = 1;\ k, c \in C - \{0\}.$

(m, n) — największy wspólny dzielnik liczb m i n.

Istnieje także wzór, który daje wartość A_n jako funkcje numeru wyrazu. Dla zwykłego ciągu Fibonacciego nosi on nazwę wzoru Bineta od nazwiska Francuza, który go po raz pierwszy dowiódł w 1843 roku.
Indukcyjnie dowodzi się, że jeżeli x_1, x_2 są pierwiastkami równania

$$x^2 - kx - c = 0,$$

$$\text{to: } \begin{cases} \text{gdy} \quad x_1 \neq x_2, \quad A_n = \dfrac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2}; \\ \text{gdy} \quad x_1 = x_2 = x, \quad A_n = nx^{n-1}. \end{cases}$$

Przy dowodzie tych wzorów nie odgrywa żadnej roli warunek $(k, c) = 1$. Dość trudne jest znalezienie powyższych wzorów i ciekawe byłoby przedstawienie ogólnych metod znajdowania takich wzorów.

Rozwiązanie zadania M 182.
Niech $N = a_0 + a_1 10 + \ldots + a_n 10^n$.
Modulo 45 mamy
$a_0 + a_1 \cdot 10 \equiv a_0 + a_1 \cdot 10$
$a_2 \cdot 10^2 \equiv a_2 \cdot 10$, bo $100 \equiv 10 (\mathrm{mod}\ 45)$
$a_3 \cdot 10^3 \equiv a_3 \cdot 10$, bo $1000 \equiv 10 (\mathrm{mod}\ 45)$
$a_n \cdot 10^n \equiv a_n \cdot 10$.
Dodając, mamy $N \equiv a_0 + 10(a_1 + \ldots + a_n)$.

A. I. Markuszewicz, *Ciągi rekurencyjne*, Warszawa 1955

Indukcyjny dowód znalezionych wzorów jak również dowody przedstawionych niżej interesujących oszacowań dotyczących zwykłego ciągu Fibonacciego nie przedstawiają już większych trudności.

Dla zwykłego ciągu Fibonacciego prawdziwe są ponadto następujące oszacowania:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \alpha, \quad \text{gdzie} \quad \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

oraz

Porównaj zadanie M 156 w Delcie 4/1978

$$\left| U_n - \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} \right| < \frac{1}{2},$$

które pozwalają łatwo znaleźć wyrazy ciągu $\{U_n\}$. Wiążą one też w ciekawy sposób ciąg $\{U_n\}$ z liczbą α, która jest stosunkiem tzw. złotego podziału.

Równość ta była kluczem do rozwiązania jednego z zadań ostatniej Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej. Zadanie brzmiało: dane są funkcje rosnące $f(n)$, $g(n)$ takie, że $\{f(1); f(2); f(3); \ldots\}$ i $\{g(1); g(2); g(3); \ldots\}$ są rozłącznymi zbiorami, które w sumie dają cały zbiór liczb całkowitych dodatnich oraz zachodzi $g(n) = f(f(n))+1$. Obliczyć $f(240)$. Można było zauważyć, że coraz lepszymi przybliżeniami funkcji f były funkcje $\left[\frac{5}{3}n\right]$, $\left[\frac{8}{5}n\right]$, $\left[\frac{13}{8}n\right]$, a zatem funkcje postaci $\left[\frac{U_{m+1}}{U_m}n\right]$. Stąd na podstawie omawianej równości można było postawić hipotezę $f(n) = [\alpha n]$, co okazywało się prawdą. Analogicznie $g(n) = [\alpha^2 n]$. Dowód obu równości był stosunkowo prosty.

Wróćmy jednak do podzielności. Wypiszmy kilka (możliwie wolno rosnących) ciągów, aby przekonać się o pewnych prawidłowościach:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
U_n $(k = 1,\ c = 1)$	1	1	2	3	5	8	13	21	34
A_n $(k = 3,\ c = -2)$	1	3	7	15	31	63	127	255	511
A_n $(k = 1,\ c = 6)$	1	1	7	13	55	133	463	1261	4039

Najpierw zajmijmy się pytaniem, jakie liczby naturalne są dzielnikami wyrazów uogólnionych ciągów Fibonacciego. Możemy przypuszczać, że będzie to w jakiś sposób zależeć od k i od c. Spróbujmy uchwycić te zależności na podanych przykładach. Dość łatwo dostrzegamy, że w drugim z podanych ciągów są same liczby nieparzyste, ale są liczby podzielne przez 3, zaś w trzecim ciągu wszystkie wyrazy są nieparzyste, niepodzielne przez 3. Nie jest to przypadkiem, gdyż prawdziwe jest **twierdzenie**:

Każdy wyraz ciągu $\{A_n\}$ (oprócz A_0) jest względnie pierwszy z c.

Gdyby np. A_n nie był względnie pierwszy z c, to ze wzoru $A_n = kA_{n-1} + cA_{n-2}$ oraz $(k, c) = 1$ wynika, że A_{n-1} nie jest względnie pierwszy z c.
Powtarzając powyższe rozumowanie dochodzimy do wniosku, że A_1 i c mają wspólny dzielnik większy od 1, czyli uzyskujemy sprzeczność z założeniem $A_1 = 1$.
Obserwując pierwszy z wypisanych ciągów można dostrzec jeszcze jedną własność. Zachodzi następujące **twierdzenie**:

Н. Н. Воробьев, *Числа Фибоначчи*. Москва 1964

dla każdej liczby naturalnej względnie pierwszej z c można znaleźć w ciągu $\{A_n\}$ wyraz o numerze niezerowym, niewiększym od kwadratu rozpatrywanej liczby naturalnej, podzielny przez tę liczbę.

W celu wykazania tego przyporządkujmy każdej liczbie naturalnej n uporządkowaną parę liczb naturalnych $f(n) = \langle r_1, r_2 \rangle$ taką, że r_1 jest resztą z dzielenia A_{n+1}, a r_2 resztą z dzielenia A_n przez p. Różnych par może być najwyżej p^2, a zatem wśród par $f(0), f(1), f(2), \ldots, f(p^2)$ istnieją dwie identyczne. Łatwo zauważyć, że jeżeli $f(x)$ i $f(y)$ $(x \neq y)$ są identyczne, to także $f(x-1)$ i $f(y-1)$ są identyczne. Powtarzając to rozumowanie dojdziemy do wniosku, że któraś z par $f(1), f(2), \ldots, f(p^2)$ jest identyczna z $f(0)$, a więc reszta z dzielenia którejś z liczb $A_1, A_2, \ldots, A_{p^2}$ przez p jest zerem.

W nieco bardziej skomplikowany sposób dowodzi się, że gdy p jest pierwsze, to dla zwykłego ciągu Fibonacciego można w powyższym twierdzeniu liczbę p^2 zastąpić przez $p+1$. Pozostaje otwartym problemem, czy zachodzi to też dla uogólnionych ciągów Fibonacciego.

Proponujemy teraz Czytelnikom, aby przyjrzeli się wypisanym ciągom i spróbowali postawić jeszcze jakieś inne hipotezy dotyczące podzielności, a może także je udowodnić lub obalić.

Okazuje się, że uogólnione ciągi Fibonacciego zachowują największy wspólny dzielnik, tzn. zachodzi:

$$(A_n, A_m) = |A_{(m,\,n)}|.$$

Inaczej mówiąc *największy wspólny dzielnik wyrazów o numerach n i m jest równy wartości bezwzględnej z wyrazu o numerze będącym największym wspólnym dzielnikiem liczb n i m.*

Przeprowadzenie dokładnego dowodu pozostawiamy zainteresowanym Czytelnikom, ograniczając się tylko do naszkicowania jego głównych etapów:

a) Prawdziwy jest wzór: $A_{n+m} = A_{n+1}A_m + cA_nA_{m-1}$.

b) A_m dzieli wyrazy o numerach będących wielokrotnościami m. Wynika to z zastosowania poprzedniego wzoru do A_{mq+m}.

c) Dwa kolejne wyrazy ciągu $\{A_n\}$ są względnie pierwsze.

d) Gdy zastosujemy algorytm Euklidesa do liczb n i m i uzyskamy poniższe równości

$$\begin{aligned} m &= nq_1 + r_1, \\ n &= r_1q_2 + r_2, \\ &\dots\dots\dots\dots . \\ r_t &= r_{t-1}q_t \end{aligned}$$

to zachodzi $(A_m, A_n) = (A_n, A_{r_1}) = \ldots = (A_{r_{t-1}}, A_{r_t})$.

Wynika to z równości $A_m = A_{nq_1+r_1}$ i wzoru a).

Ostatnie stwierdzenie kończy dowód.

Na wstępie obiecaliśmy wyjaśnić, dlaczego przyjęliśmy akurat takie uogólnienie pojęcia ciągu Fibonacciego. Uczyniliśmy to z dwóch względów. Po pierwsze, jak widać z przedstawionego wyżej szkicu dowodu, kluczowe znaczenie ma wzór oznaczony literą a). Okazuje się, że

(*pomijając mało interesujące ze względu na podzielność ciągi zawierające nieskończoną liczbę zer, jedynek lub minus jedynek oraz ciągi geometryczne*) *warunkiem koniecznym na to, aby ciąg liczb całkowitych* $\{a_n\}$ *spełniał wzór* a) *jest, by był on uogólnionym ciągiem Fibonacciego.*

A zatem można powiedzieć, że wzór a) w jakiś sposób definiuje uogólnione ciągi Fibonacciego. Jest jeszcze jedna racja skłaniająca do przyjęcia takiej, a nie innej definicji ciągu uogólnionego. Weźmy pod uwagę ciągi $\{B_n\}$ zdefiniowane na początku niniejszego artykułu. Okazuje się, że

ciąg $\{B_n\}$ *zachowuje największy wspólny podzielnik wtedy i tylko wtedy gdy spełnia następujący warunek:* $B_n = zA_n$, *gdzie* z *jest liczbą całkowitą różną od zera jednakową dla wszystkich* n.

Możemy więc powiedzieć, że w pewnym sensie zbiór uogólnionych ciągów Fibonacciego, według przyjętej przez nas definicji, jest „najszerszym" zbiorem ciągów mających ze względu na podzielność te same własności co zwykły ciąg Fibonacciego i to właśnie zadecydowało o przyjęciu odpowiedniej definicji, chociaż oczywiście stanowi to samo w sobie bardzo interesujący fakt. Spróbujmy jeszcze naszkicować dowód drugiego z zacytowanych twierdzeń.

Załóżmy, że B_n zachowuje NWD, a wtedy B_1 dzieli wszystkie wyrazy ciągu $\{B_n\}$.

Możemy zastąpić ciąg $\{B_n\}$ ciągiem $\{b_n\}$ takim, że $b_nB_1 = B_n$. Ciąg $\{b_n\}$ również zachowuje największy wspólny dzielnik oraz spełnia warunki $b_1 = 1$, $b_2 = d$, $b_{n+2} = sb_{n+1} + tb_n$, gdzie $d, s, t \in C - \{0\}$.

Zauważmy, że gdyby s i t miały wspólny dzielnik większy od jedności, to wchodziłby on w coraz wyższej potędze do rozkładu liczb $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ i przeczyłoby to warunkowi $(b_n, b_{n+1}) = b_1 = 1$.

Wykazaliśmy, że $(s, t) = 1$, a podobnie jak dla ciągów $\{A_n\}$ możemy wykazać, że $(b_n, t) = 1$, oraz że $b_{n+m} = A_mb_{n+1} + cA_{m-1}b_n$, gdy $s = k$ i $t = c$.

Przepisując ostatni wzór w postaci $b_{2m} = A_{m+1}b_m + cA_mb_{m-1}$ widzimy, że b_m dzieli lewą stronę, jak również pierwszy składnik prawej strony, czyli dzieli też drugi składnik prawej strony powyższego wzoru. Wobec tego b_m dzieli A_m, a w szczególności $b_{2n} = k$. Zajmijmy się teraz liczbami nieparzystymi p. Przedstawiając za pomocą wzorów $A_p = A_2A_{p-1} + cA_1A_{p-2}$ oraz $b_p = b_2A_{p-1} + cb_1A_{p-2}$ wyrażenie $A_p - nb_p$, uzyskujemy równość:

$$A_p - nb_p = cA_{p-2}(1-n).$$

Z drugiej strony b_p dzieli $A_p - nb_p$, więc b_p dzieli $1-n$ dla dowolnego nieparzystego p.

Udowodniliśmy, że $1-n$ jest zerem, co kończy dowód naszego twierdzenia.

Bardzo ciekawe są zastosowania poznanych twierdzeń. Proponujemy Czytelnikom zapoznanie się z tymi zastosowaniami przez rozwiązanie kilku poniższych zadań.

Zadanie 1. Dowieść z zastosowaniem podanych wiadomości twierdzenia o nieskończoności zbioru liczb pierwszych.

Zadanie 2. Udowodnić, że w przynajmniej jednym z uogólnionych ciągów Fibonacciego istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Zadanie 3. Udowodnić, że następujące ciągi zachowują największy wspólny dzielnik:

a) $$S_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots,$$

b) $$P_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} aq^i \quad \text{gdzie } a, q \in C - \{0\}.$$

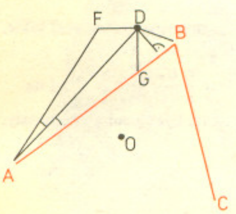
Zadanie 4. Dowieść, że $(a-b) \cdot \mathrm{NWW}(1, 2, 3, 4, \ldots, n)$ dzieli liczbę $a^k - b^k$, gdzie $k = \mathrm{NWW}(1, 2, 3, 4, \ldots, n^2)$, $a, b \in C - \{0\}$, $(a, b) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy a, b nie są podzielne przez żadną z liczb $1, 2, 3, 4, \ldots, n$.

Rozwiązanie zadania M 183.

Dla ustalenia uwagi niech AB będzie dłuższą z cięciw. Oznaczmy przez D środek łuku ABC i przez F punkt symetryczny do B względem prostej DO. Wówczas kąty $\sphericalangle FAD$ i $\sphericalangle DAB$ są równe jako oparte na równych łukach. Z punktu D zakreślamy okrąg o promieniu DB przecinający AB w punkcie G. Ponieważ $DF = DG$, więc $\Delta FAD \equiv \Delta DAG$, a zatem

$$AG = AF = CB.$$

Pozostaje do wykazania, że prostopadła do AB z punktu D dzieli GB na połowy, ale to wynika z $DG = DB$.



(Opracowane na podstawie listu *Jarosława CELA* z Końskich.)

Rozwiązanie zadania F 61

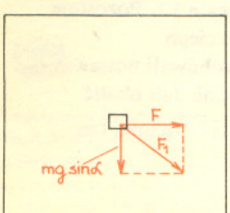
Oprócz siły F na ciało działa siła ciężkości. Składowa siły ciężkości w kierunku prostopadłym do powierzchni (nacisk N) wynosi $mg\cos\alpha$. Natomiast składowa w kierunku stycznym do płaszczyzny i prostopadłym do F jest równa $mg\sin\alpha$. Aby ciało poruszyć, należy przyłożyć siłę F o wartości co najmniej takiej, aby wypadkowa F_1 tej siły i składowej siły ciężkości była równa fN (zob. rys.). Mamy więc

$$\sqrt{F^2 + m^2g^2\sin^2\alpha} \geqslant fmg\cos\alpha.$$

Stąd

$$F \geqslant mg\sqrt{f^2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}.$$

Warto zwrócić uwagę, że najmniejsza siła F niezbędna do poruszenia ciała jest mniejsza niż fN.



Dlaczego rubin jest czerwony, siarka żółta, a diament przezroczysty, czyli kolorowy świat kryształów

Dr Andrzej HENNEL

1. Wprowadzenie

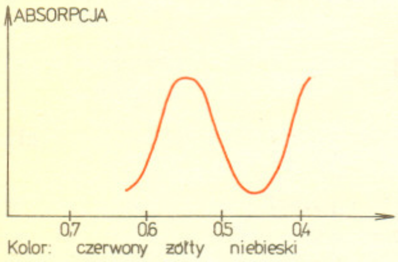
Wszyscy doskonale wiedzą, że w przyrodzie istnieje wiele barwnych kryształów. Wystarczy wspomnieć tylko niebieski siarczan miedzi czy pomarańczowy dwuchromian potasu spośród znanych związków chemicznych, żółtą siarkę i czerwony selen spośród kryształów atomowych oraz wiele kamieni szlachetnych, np. czerwony rubin, niebieski szafir i zielony szmaragd.

Kolorowe są również mniej znane na co dzień związki półprzewodnikowe, takie jak żółty siarczek kadmu, zielony selenek kadmu czy pomarańczowy fosforek galu. Wiele spośród wymienionych kryształów można obejrzeć na okładce czytanego właśnie numeru Delty.

Warto zastanowić się nad problemem, jakie własności kryształów odpowiedzialne są za ich kolor oraz czy na podstawie koloru kryształu można przewidywać jego własności. Okazuje się, że rozstrzygnięcie tak postawionego problemu nie jest łatwe, gdyż istnieje kilka niezależnych źródeł zabarwienia kryształów.

Ogólnie rzecz biorąc, barwa kryształu wywołana jest przez absorpcję promieniowania widzialnego o pewnych długościach fal przez atomy kryształu. Charakter tej absorpcji może być jednak całkiem odmienny w różnych typach kryształów. W dalszej części artykułu omówimy dokładnie trzy podstawowe rodzaje absorpcji światła w kryształach.

2. Absorpcja światła przez pojedyncze atomy kryształu



Rys. 1

Najłatwiejszym do zrozumienia rodzajem absorpcji promieniowania w kryształach jest absorpcja wewnątrzatomowa. Polega ona na wzbudzaniu elektronów znajdujących się na atomowych poziomach energetycznych bez odrywania elektronów od atomu macierzystego. Elektronami tymi nie mogą być elektrony walencyjne, które tworzą wiązania w ciele stałym, ani też elektrony z powłok całkowicie zapełnionych. W związku z tym najpopularniejszymi pierwiastkami, które wchodząc w skład kryształu mogą w taki sposób absorbować promieniowanie, są metale przejściowe takie jak żelazo, miedź, chrom czy nikiel. Wszystkie te pierwiastki mają niezapełnioną powłokę ($n = 3$) poniżej powłoki elektronów walencyjnych ($n = 4$). Warto zwrócić uwagę, że spośród znanych związków chemicznych z reguły sole metali przejściowych są kolorowe. Wywołane jest to właśnie przez absorpcję promieniowania wewnątrz powłoki atomowej. Klasycznym przykładem takiej absorpcji jest kryształ rubinu. Rubin jest to tlenek glinu Al_2O_3 z domieszkami kilku procent chromu. Czyste kryształy Al_2O_3 są bezbarwne. Po dodaniu chromu pojawia się ich charakterystyczne rubinowe zabarwienie. Widmo absorpcyjne rubinu jest przedstawione na rys. 1. Widać, że maksimum absorpcji przypada w obszarze światła żółtego. Kryształ przepuszcza natomiast promieniowanie czerwone i część niebieskiego. Mieszanina tych barw daje specyficzny kolor rubinu. Dalsze pasma absorpcji występują w nadfiolecie. Obserwowana na rys. 1 struktura absorpcji nie przypomina oczywiście wąskich linii z widm swobodnych atomów. Wywołane jest to oddziaływaniem otoczenia w krysztale na absorbujący atom. Warto dodać, że zabarwienie innych znanych kamieni szlachetnych takich jak szafir, topaz czy szmaragd wywołane jest również przez domieszki z grupy metali przejściowych.

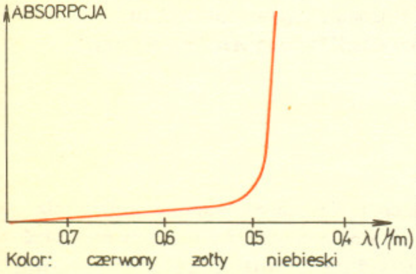
3. Absorpcja międzypasmowa

W kryształach wykazujących własności półprzewodnikowe występuje tzw. przerwa energetyczna oddzielająca zapełnione pasmo walencyjne od praktycznie pustego pasma przewodnictwa. (Bardziej szczegółowe informacje na ten temat można znaleźć w Delcie z września 1978 roku w artykule poświęconym przewodnictwu ciał stałych.)

Podstawowym rodzajem absorpcji w takich kryształach są w związku z tym przejścia optyczne elektronów z pasma walencyjnego do pasma przewodnictwa. Przejścia te zaczynają się bardzo gwałtownie od energii fotonów równej wartości przerwy energetycznej

$$h\nu = \Delta E$$

i tworzą tzw. krawędź absorpcji.



Rys. 2

Przykładowy przebieg absorpcji światła jako funkcji długości fali dla kryształów CdS przedstawiony jest na rys. 2. Jak widać na rysunku promieniowanie czerwone, żółte i zielone przechodzi swobodnie przez kryształ, natomiast barwy niebieska i fioletowa są silnie absorbowane. Dlatego też kryształy CdS są pomarańczowo-żółte.

Typowe półprzewodniki, takie jak german i krzem, mają przerwy energetyczne ponad dwukrotnie mniejsze niż CdS. Ich krawędź absorpcji przypada w związku z tym w bliskiej podczerwieni, natomiast w świetle widzialnym są one nieprzezroczyste. Odwrotnie, diament ma bardzo dużą przerwę energetyczną, która daje krawędź absorpcji dopiero w nadfiolecie ($\lambda \approx 0{,}2\ \mu m$). Dlatego właśnie diamenty są przezroczyste (ich ewentualne słabe zabarwienie wywołane jest przez domieszki).

Warto zwrócić uwagę na fakt, że jednocześnie z występowaniem krawędzi absorpcji w półprzewodnikach, dla energii fotonów $h\nu \geqslant \Delta E$ pojawia się bardzo silnie fotoprzewodnictwo. Przeniesione do pasma przewodnictwa elektrony jak i dziury z pasma walencyjnego mogą bowiem poruszać się swobodnie przez pewien czas po krysztale. Powoduje to bardzo silną zmianę przewodnictwa kryształu (czasami o wiele rzędów wielkości), która znika po zaprzestaniu oświetlania. Pojawianie się i znikanie fotoprzewodnictwa w obszarze, w którym dany kryształ silnie absorbuje promieniowanie, dowodzi tego, że mamy do czynienia z półprzewodnikiem.

4. Absorpcja światła przez cząsteczki w krysztale

W niektórych kryształach zaobserwowano istnienie krawędzi absorpcji podobnie jak w półprzewodnikach, jednakże w kryształach tych nie pojawiało się fotoprzewodnictwo, tzn. ich opór nie zmieniał się pod wpływem oświetlenia. Do kryształów takich zaliczamy m.in. siarkę, biały fosfor i jod. Krawędź absorpcji żółtych kryształów siarki wygląda niemal identycznie jak krawędź absorpcji CdS przedstawiona na rys. 2. Jednakże okazuje się, że zaabsorbowane światło nie powoduje pojawienia się swobodnych nośników prądu elektrycznego. Siarka tworzy bowiem zamknięte pierścienie S_8, które mają własną strukturę energetyczną. Przejście cząsteczki S_8 na poziom wzbudzony następuje po absorpcji światła z niebieskiej części widma. Analogiczna sytuacja występuje w innych nieprzewodzących kolorowych kryształach, np. biały fosfor zbudowany jest z cząsteczek P_8 a jod z cząsteczek J_2.

5. Zakończenie

Jak widać z tego krótkiego przeglądu, kolorowy świat kryształów kryje w sobie wiele różnych, bardzo nieraz złożonych zjawisk. Ich zrozumienie umożliwiło konstrukcję przyrządów i elementów optycznych, takich jak różnego rodzaju fotokomórki i fotooporniki, lasery krystaliczne, diody świecące i wiele innych.

Jeżeli po przeczytaniu tego artykułu Czytelnik inaczej będzie patrzył na kolorowe związki chemiczne i kamienie szlachetne, to zadanie, które postawił sobie autor, będzie wykonane.

Zadania

Redaguje dr Michał SZUREK

M 181. Mamy zegarek z dwiema wskazówkami i centralnym sekundnikiem. Ile razy w ciągu doby te wszystkie trzy wskazówki pokryją się?

Rozwiązanie na str. 8

M 182. Udowodnić następującą cechę podzielności przez 45: do ostatniej cyfry danej liczby dodajemy sumę cyfr pozostałych pomnożoną przez 10. Jeżeli ta liczba dzieli się przez 45, to i wyjściowa dzieli się przez 45.

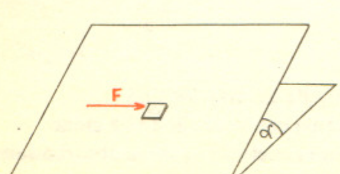
Ponadto, gdy po kilkakrotnym powtórzeniu takiego procesu dojdziemy do liczby mniejszej niż 45, to będzie ona resztą z dzielenia wyjściowej liczby przez 45.

Rozwiązanie na str. 8

M 183. Jeżeli w łuk ABC okręgu wpiszemy linię łamaną złożoną z cięciw AB i BC, to prostopadła opuszczona na dłuższą cięciwę ze środka łuku dzieli łamaną ABC na połowy. (to twierdzenie znał już podobno Archimedes)

Rozwiązanie na str. 10

Redaguje dr Waldemar GORZKOWSKI

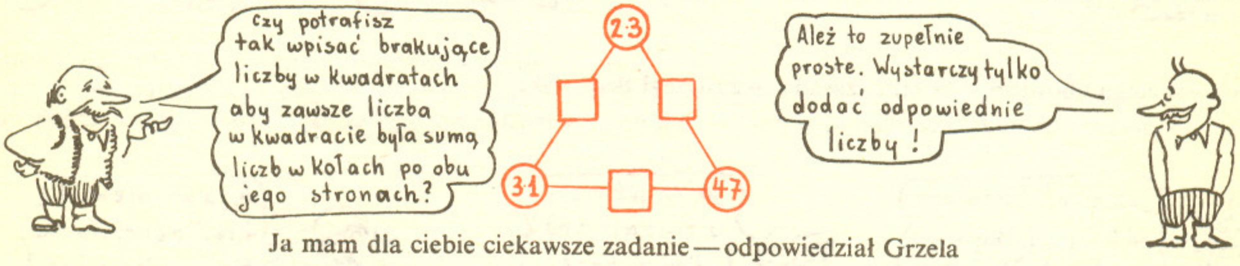


F 61. Na płaszczyźnie nachylonej pod kątem α spoczywa ciało o masie m. Współczynnik tarcia statycznego ciała o tę płaszczyznę jest równy f ($f > \mathrm{tg}\alpha$). Jaką najmniejszą siłę F należy przyłożyć do ciała w kierunku pokazanym na rysunku, aby je poruszyć?

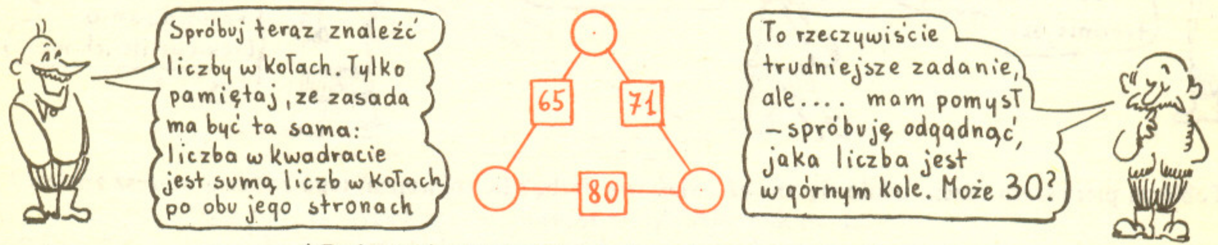
Rozwiązanie na str. 10

mała delta

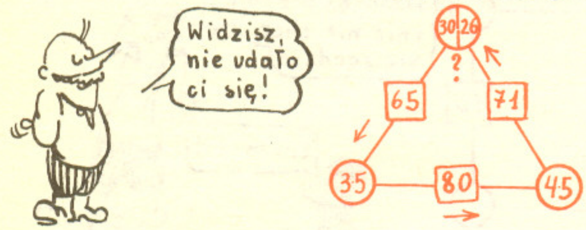
Pewnego mroźnego popołudnia Bednarski powiedział do Grzeli, pokazując na rysunek



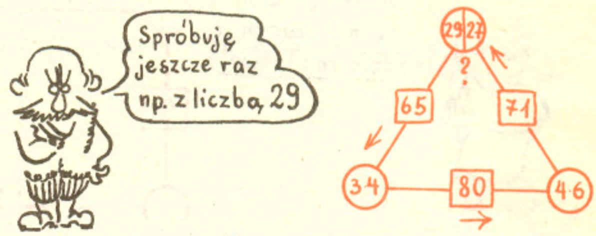
Ja mam dla ciebie ciekawsze zadanie — odpowiedział Grzela



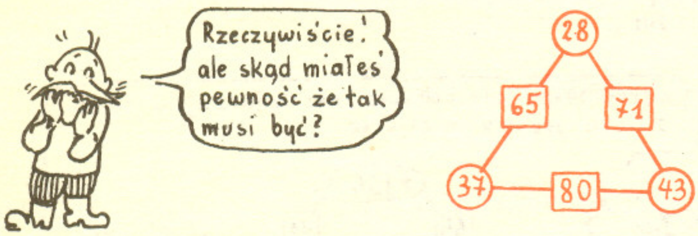
i Bednarski zaczął sprawdzać swoje przypuszczenie...



Ha, ha, ha. I teraz nie miałeś szczęścia!



Ale teraz już wiem, że to musi być 28.

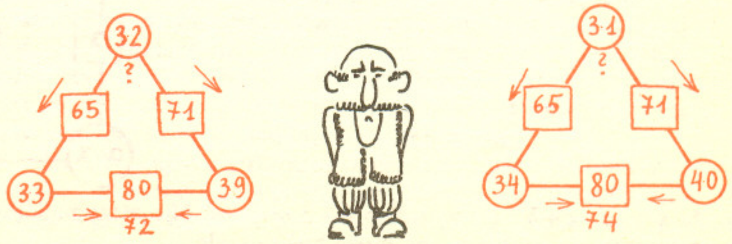


ze zdziwieniem zapytał Grzela

A czy Ty potrafisz wyjaśnić, skąd Bednarski wiedział, że to ma być liczba 28?

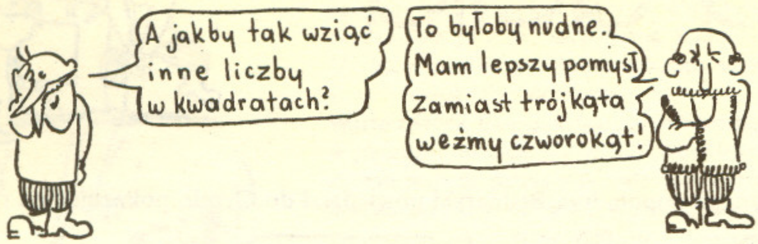
Bednarski zwierzył się Bednarskiej: wychodząc od liczby 30 w górnym kółku „obszedłem trójkąt" wkoło tak, jak wskazują strzałki, stosując oczywiście zasadę. Wówczas wróciłem do punktu startu z liczbą 26. Gdy zacząłem od 29, otrzymałem 27. Spostrzegłem, że zmniejszenie o 1 liczby wyjściowej powoduje zwiększenie o 1 liczby otrzymanej na końcu. Wystarczyło więc wziąć średnią arytmetyczną liczby wyjściowej i otrzymanej.

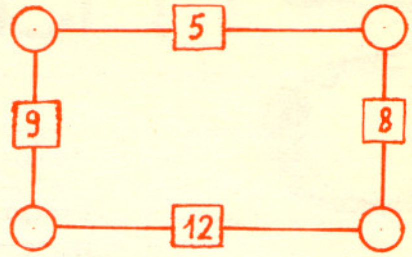
Rolnicy postanowili sprawdzić, jak Sołtys poradzi sobie z takim zadaniem. A oto jak próbował



Spróbuj wyjaśnić rozumowanie Sołtysa.

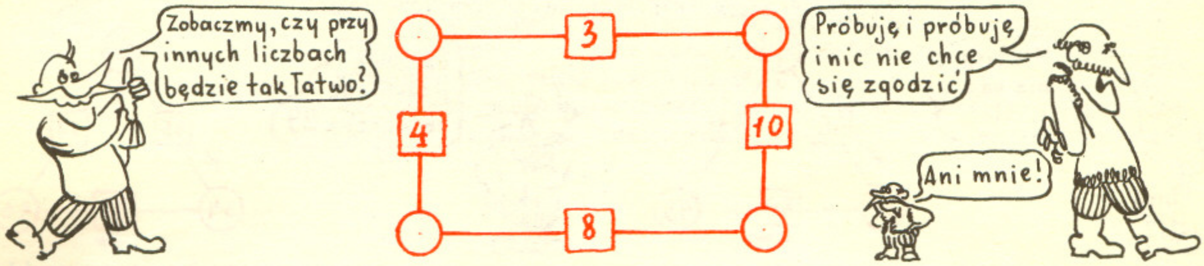
Grzela pomilczał chwilę i rzekł





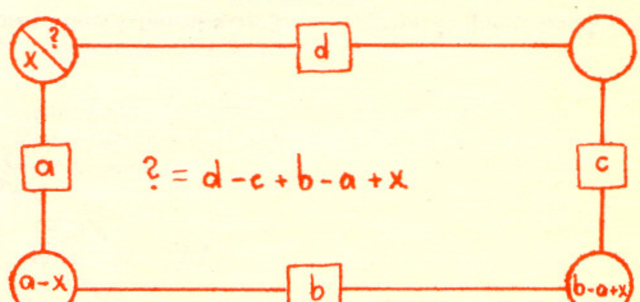
I w dalszym ciągu obowiązuje ta sama zasada — zastrzegł Bednarski

Czy i Tobie za pierwszym razem udało się znaleźć właściwą liczbę? Ile rozwiązań tego zadania możesz znaleźć?

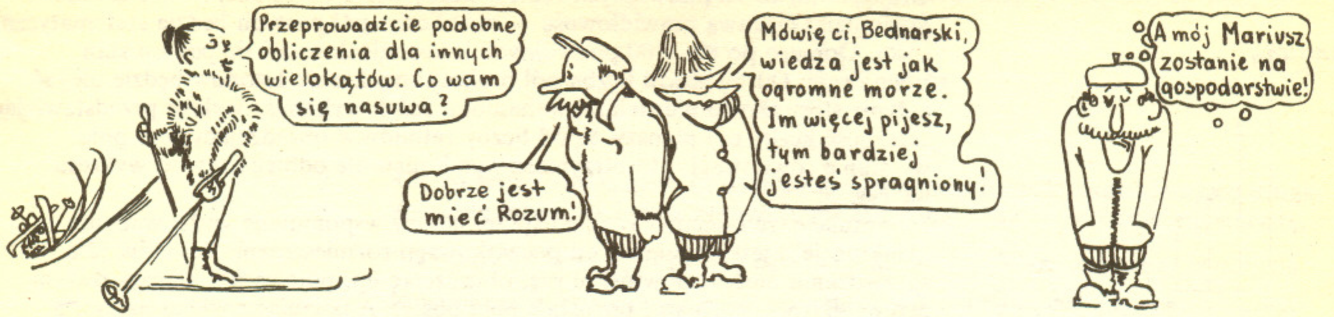


A może takich liczb wcale nie ma? A co będzie z pięciokątem, sześciokątem? Bednarski, Grzela i Sołtys postanowili zwrócić się z tym do Magistra, który spędzał tu urlop z żoną.

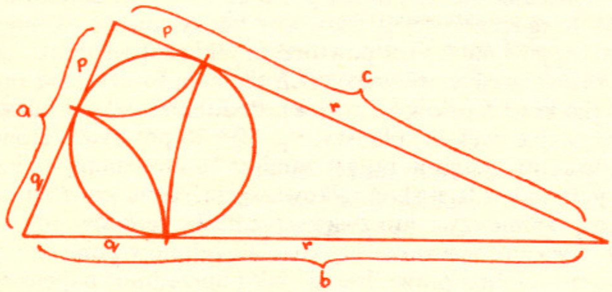
Weźcie teraz czworokąt, taki jak narysuję.



Widzicie, że $x = d-c+b-a+x$, zatem $a+c = b+d$. Nie otrzymaliśmy rozwiązania, lecz warunek jego istnienia. Jeśli jest spełniony, wyjściowa liczba może być dowolna.



Gdy gospodarze wracali do domu, Bednarski krzyknął:
— A to ci heca. Odkryliśmy nowy sposób wpisywania okręgu w trójkąt!
Grzela i Sołtys już, już unosili rękę ze zgiętym palcem w kierunku czoła, gdy Bednarski szybko zrobił rysunek



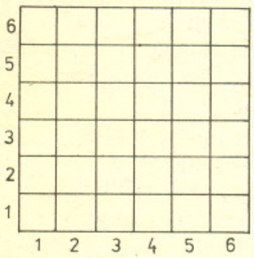
$$p = \frac{c-b+a}{2}$$

— No, to tylko wyznaczysz punkty styczności — zauważył Sołtys. Ale i tak to ciekawe!
Czy Ty też zrozumiałeś myśl Bednarskiego? Opisz konstrukcję. A jakie konstrukcje geometryczne odpowiadają pięciokątom, sześciokątom i innym wielokątom liczbowym? Czyżby też coś z wpisywaniem?

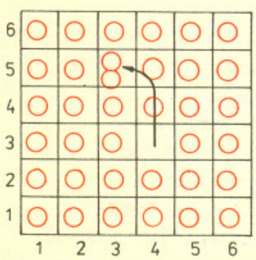
Małą Deltę opracowali Marianna KLAKLA i Michał SZUREK

Gra w ciało stałe

Dr Stanisław DYMUS



Rys. 1

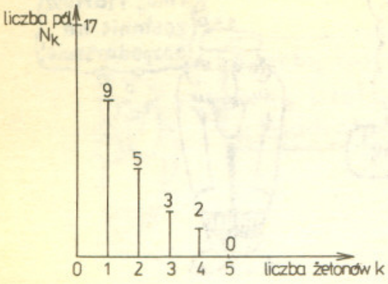


Rys. 2

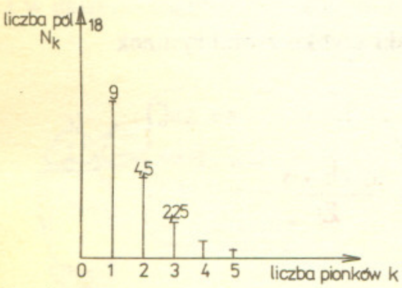
Proponujemy Ci przeprowadzenie ciekawej gry. Choć nie będziesz miał tu przeciwnika, możesz ją „wygrać”. Wygrasz zaś wtedy, gdy potrafisz dobrze zrozumieć wypływające z tej gry wnioski. Odpowiednio zinterpretowana gra pozwoli Ci wniknąć w mikroskopowe procesy wymiany energii pomiędzy atomami ciała stałego i stwierdzić, jak rozkłada się energia drgań cieplnych pomiędzy te atomy.

Na początku opiszemy, na czym polega sama gra, i postaramy się wspólnie zrozumieć jej rezultaty. Do przeprowadzenia gry potrzebna jest „szachownica” 6×6 (rys. 1). Współrzędne każdego z pól „szachownicy” wyznaczają odpowiednie pary liczb (np. (2, 6), (4, 1) itp.). Dodatkowo musisz postarać się o 36 jednakowych żetonów (mogą być pionki od warcabów), które w sytuacji początkowej możesz rozmieścić w dowolny sposób na polach planszy, oraz dwie kostki. Oczka jednej z kostek powinieneś pokolorować, by móc odróżnić, która z nich wskaże Ci rzędną, a która odciętą wylosowanego pola planszy. Radzimy Ci rozpocząć grę w sytuacji, gdy na każdym polu znajduje się jeden żeton.

Grę przeprowadzasz rzucając dwukrotnie dwiema kostkami. Pierwszy rzut losuje współrzędne pola, które traci jeden żeton, drugi rzut — współrzędne pola, które ten żeton zyskuje (rys. 2). Jeśli losując trafisz w pierwszym rzucie na pole puste, to ponawiasz rzut dotąd, aż wylosujesz pole, które może „wyemitować” żeton.



Rys. 3



Rys. 4

Grając notuj co 10 podwójnych rzutów liczby pól o określonej liczbie żetonów. Stwierdzisz ciekawą prawidłowość — otóż liczba pół pustych będzie systematycznie rosła. Dopiero po 80—100 podwójnych losowaniach ustali się pewien stan równowagi. Od tej chwili liczba pól o określonej liczbie żetonów będzie ulegać jedynie stosunkowo niewielkim wahaniom. Jeżeli wykonasz wykres przedstawiający zależność liczby pól planszy N_k od liczby żetonów k obsadzających te pola w „stanie równowagi", to otrzymasz wynik niewiele odbiegający od wykresu na rys. 3.

Interesujące, że końcowy rozkład (pominąwszy wspomniane wyżej wahania — „fluktuacje") jest niezależny od początkowego rozmieszczenia żetonów (dla sprawdzenia możesz powtórzyć grę, obsadzając np. połowę pól planszy dwoma żetonami i pozostawiając pozostałe pola puste). Analizując rozkład na rys. 3 stwierdzamy, że stosunek liczby pól planszy mających o 1 żeton więcej do liczby pól o danej liczbie żetonów waha się wokół liczby 2. W idealnym przypadku stosunek ten powinien mieć dokładnie wartość 2, zaś idealny rozkład — postać przedstawioną na rys. 4. Rozkład taki mógłbyś uzyskać powtarzając grę wielokrotnie i obliczając średnią liczbę pól o danej liczbie żetonów (jeżeli rzucisz 1 raz 10 monet, to możesz otrzymać znaczne odchylenia od idealnego rozkładu 5 orłów i 5 reszek, jeśli natomiast powtórzysz taki rzut wielokrotnie i obliczysz średnią liczbę orłów i reszek we wszystkich rzutach, to uzyskasz rezultat bliski „idealnemu" wynikowi 5 orłów i 5 reszek). Podobnie rozkład bliższy idealnego otrzymałbyś używając większej planszy, np. 30 × 30 pól i 900 żetonów (analogicznie do rzutu tysiącem monet zamiast 10 monetami) — losowanie byłoby wtedy jednak bardziej skomplikowane, zaś sama gra zbyt czasochłonna.

Co stanie się, gdy zmniejszysz lub zwiększysz liczbę żetonów nie zmieniając planszy? Otóż uzyskany w wyniku gry rozkład żetonów pomiędzy polami planszy będzie cechowała podobna prawidłowość jak poprzednio: najwięcej pól będzie pustych, liczba pól z jednym żetonem będzie większa od liczby pól z dwoma żetonami itd. Można wykazać, że dla planszy o N polach obsadzonych q żetonami idealny rozkład opisany jest przez następującą zależność: stosunek liczby N_k pól o k żetonach do liczby N_{k+1} pól o $k+1$ żetonach nie zależy od k:

$$(*) \qquad \frac{N_k}{N_{k+1}} = 1 + \frac{N}{q}.$$

Dla przeprowadzonej przez Ciebie gry $N = 36$ i $q = 36$, zatem stosunek (*) równy jest dokładnie 2. Przy $N > q$ stosunek $N_k/N_{k+1} > 2$ i rozkład jest bardziej stromy od rozkładu na rys. 4. Jeśli $N < q$, wtedy $N_k/N_{k+1} < 2$ i rozkład staje się bardziej „łagodny" w porównaniu z rozkładem na rys. 4.

Spróbujmy teraz nadać naszej grze interpretację fizyczną. Otóż pola planszy można traktować jako atomy ciała stałego zlokalizowane w węzłach sieci krystalicznej. Każdy taki atom może mieć pewną liczbę porcji energii — „kwantów", która charakteryzuje intensywność jego drgań cieplnych. Porcje te reprezentują żetony. W ten sposób liczba żetonów na danym polu określa energię drgań odpowiedniego atomu. Losowanie modeluje przypadkowy charakter wymiany energii pomiędzy atomami. W rezultacie tej wymiany kwantów energii ustala się, jak to wynika z przeprowadzonej gry, określony rozkład energii pomiędzy atomami ciała stałego. Rozkład ten ma, z grubsza biorąc, charakter rozkładu przedstawionego na rys. 4. W każdym układzie N atomów ciała stałego o ustalonej liczbie q porcji („kwantów") energii zawsze najwięcej jest atomów o energii najniższej, zaś liczba atomów o coraz to wyższych energiach systematycznie maleje. Zwróć uwagę, że liczba q oznacza liczbę porcji energii całego układu, określa więc jego energię wewnętrzną. Jeśli dane ciało stałe ogrzejemy, to wzrośnie jego temperatura i jego energia wewnętrzna (czyli liczba „kwantów" q). Stosunek N/q stanie się wtedy mniejszy i jak to wynika ze wzoru (1) rozkład energii będzie bardziej „równomierny". Oziębienie ciała i zmniejszenie jego energii wewnętrznej powoduje wzrost stosunku N/q i rozkład energii staje się bardziej „stromy".

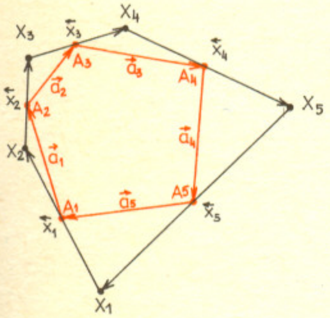
Należy zwrócić uwagę, że statystyczna tendencja — „chęć" atomów czy molekuł do posiadania najmniejszej możliwie energii odnosi się nie tylko do ciał stałych, lecz do dowolnych układów ciał makroskopowych nie oddziałujących z otoczeniem. Znanym zjawiskiem jest np. zmniejszanie się gęstości powietrza wraz z wysokością nad powierzchnią Ziemi. Cząsteczki powietrza „wolą" przebywać najniżej, tak by ich energia potencjalna była jak najmniejsza. Zmniejszanie się gęstości powietrza ze wzrostem energii potencjalnej (wysokości) ma taki sam charakter, jak zmniejszanie się liczby atomów przy wzroście energii w omówionym powyżej modelu ciała stałego.

Zadania z „Małej Delty” są szczególnymi przypadkami następującego problemu: Dany jest n-wyrazowy ciąg $(a_1, a_2, ..., a_n)$. Znaleźć ciąg $(x_1, x_2, ..., x_n)$ taki, że

$$\begin{aligned} x_1+x_2 &= a_1 \\ x_2+x_3 &= a_2 \\ &\dots\dots\dots \\ x_n+x_1 &= a_n \end{aligned}$$

Aby rozwiązać to zadanie (a więc powyższy układ równań), pomnóżmy co drugie równanie przez -1 i dodajmy wszystkie stronami. Gdy n jest liczbą nieparzystą, otrzymujemy $x_1 = \frac{1}{2}(a_1-a_2+a_3- \dots -a_{n-1}+a_n)$. Wyznaczenie x_1 wystarcza do jednoznacznego wyznaczenia wszystkich pozostałych wyrazów. Mamy zatem ogólne rozwiązanie.

Jeżeli jednak n jest parzyste, sytuacja zmienia się. Opisana procedura daje $a_1-a_2+a_3- \dots +a_{n-1}-a_n = 0$ i nie mamy już rozwiązania, ale warunek jego istnienia. W tym przypadku jeżeli jakieś rozwiązanie istnieje, to istnieje ich nieskończenie wiele (jeżeli tylko nasze liczby pochodzą z ciała nieskończonego). Analogiczne rozumowanie pozwala rozstrzygnąć problem znalezienia wielokąta o danych środkach jego boków:



Niech będzie dany układ punktów $A_1, A_2, ..., A_n$. Wyznaczyć punkty $X_1, X_2, ..., X_n$ takie, aby $A_1, A_2, ..., A_n$ były odpowiednio środkami odcinków $\overline{X_1X_2}, \overline{X_2X_3}, \dots, \overline{X_nX_1}$.

Zadanie to można bowiem interpretować następująco:

Dany jest ciąg wektorów $(a_1, a_2, ..., a_n)$ takich, że $a_1+a_2+ \dots +a_n = 0$. Znaleźć ciąg wektorów $(x_1, x_2, ..., x_n)$ takich, że

$$\begin{aligned} x_1+x_2 &= 2a_1 \\ x_2+x_3 &= 2a_2 \\ &\dots\dots\dots \\ x_n+x_1 &= 2a_n. \end{aligned}$$

Rozwiązując ten układ jak i przedtem, otrzymujemy analogiczne rezultaty, które teraz mają już przejrzystą treść geometryczną. W szczególności możemy wnioskować że wielokąt o nieparzystej liczbie wierzchołków jest jednoznacznie wyznaczony przez środki swoich boków (przy okazji dowiadujemy się, jak go znaleźć). Jeżeli liczba boków jest parzysta, to środki boków wielokąta nie określają go jednoznacznie.

Marianna KLAKLA

Kącik filatelistyczny (9)

Blaise Pascal (1623—1662) był sławnym francuskim matematykiem, fizykiem, filozofem i pisarzem. Już od dzieciństwa interesował się naukami ścisłymi i mając lat osiemnaście zbudował jedną z pierwszych maszyn do liczenia. Pascalowi zawdzięczamy podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa, kryteria podzielności liczb, oraz sposób obliczania współczynników w rozwinięciu dwumianu (tzw. trójkąt Pascala), a w fizyce podstawowe prawo hydrostatyki oraz pierwsze badania zjawisk ciśnienia atmosferycznego (dokonane wraz z Torricellim). Wszystkie te osiągnięcia są plonem niedługiego okresu pracy, bowiem w wieku zaledwie 30 lat Pascal zajął się filozofią i religią, którym poświęcił resztę swego życia. Reprodukujemy znaczek z podobizną Pascala wydany przez pocztę Francji w roku 1962, w trzechsetną rocznicę jego śmierci. Portret uczonego znaleźliśmy także na znaczkach: Francji z roku 1944 i Monaco z roku 1973.

Jerzy BARTKE