

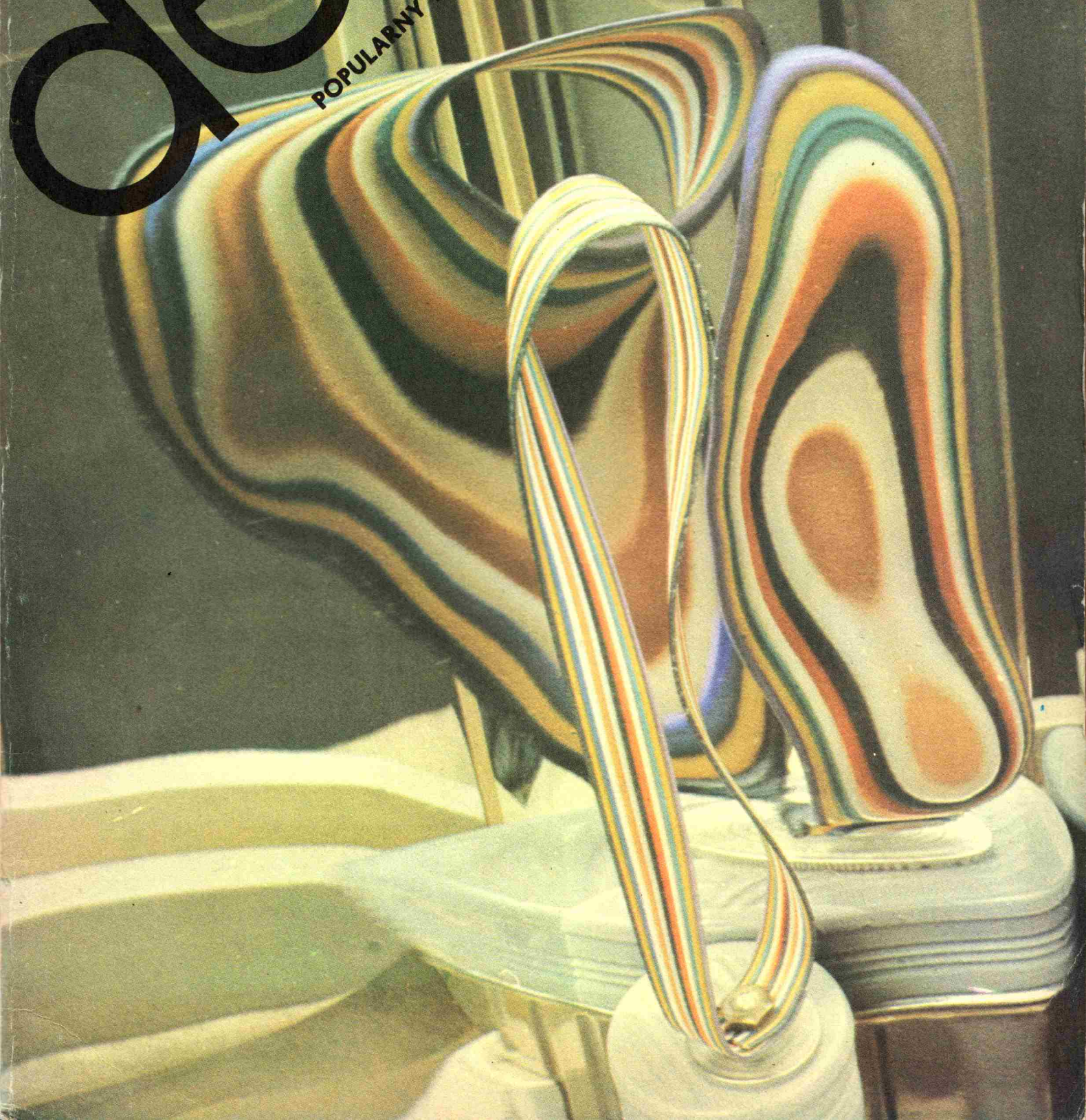
# opeld

h=6.63·10<sup>-34</sup> J·s  $\Pi=3.1415926$

CENA 5 ZŁ

NR 11 (59) 1978

POPULARNY MIESIĘCZNIK MATEMATYCZNO-FIZYCZNY





## SPIS TREŚCI

### NUMERU 11(59)

Pikosekundy <i>Mgr Wojciech Majewski</i>	str. 1
Czym zajmuje się reologia <i>Mgr Jacek Żebrowski</i>	str. 2
Jest tak, jak nam się wydaje: odcinek ma nieparzystą ilość punktów <i>Prof. dr Jerzy Mioduszewski</i>	str. 4
Zadania	str. 7
Laboratorium w domu — — sprawozdanie z doświadczenia	str. 8
Coś o sprawdzaniu	str. 10
Zmysły <i>Mgr Jacek Kaczyński</i>	str. 11
Niebezpieczne golenie <i>Dr Krzysztof Prażmowski</i>	str. 12
Drobiazgi	str. 14
Mała Delta	str. 15

### W następnym numerze:

Rozkłady  
prawdopodobieństwa

### Nasza okładka:

Wstęga Möbiusa  
w zwierniadle  
o zmiennej krzywiznie

(fot. T. Wojszcz)

„Delta”  
matematyczno-fizyczny miesięcznik  
popularny  
Polskiego Towarzystwa  
Matematycznego i Polskiego  
Towarzystwa Fizycznego  
wydawany przy poparciu  
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny  
doc. dr J. Bartke  
doc. dr A. Bączyński  
doc. dr B. Gleichgewicht  
prof. dr K. Goebel  
doc. dr B. Iwaskiewicz  
doc. dr T. Iwiński  
doc. dr A. Januszajtis  
prof. dr Leon Jeśmanowicz —  
wiceprzewodniczący  
mgr H. Kaczorek  
prof. dr B. Karczewski  
prof. dr M. Kuczma  
mgr A. Mąkowski  
prof. dr Z. Pawlak  
prof. dr A. Piekara  
prof. dr Z. Semadeni  
prof. dr J. Stankowski

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk  
WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60, — cena prenumeraty półrocznej zł 30, —

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach:  
— do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i cały rok następny  
— do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego.  
Jednostki gospodarki uspołecznionej instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienie w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”.  
Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW, oraz prenumeratorzy indywidualni zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.  
Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej

#### Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.  
Sprzedaj gotówką i wysyłką, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.  
Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Konto PKO I O M W-wa 1531-912

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław  
w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa  
w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 00-068 Warszawa, Poland or with

— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland.

— Earls Court Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain,  
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia

Cena 1 egzemplarza zł 5, — nr indeksu 35723/35550

prof. dr M. Subotowicz  
doc. dr S. Turnau  
doc. dr J. Wdowczyk  
prof. dr Janusz Zakrzewski —  
przewodniczący

Redaguje Kolegium w składzie:  
doc. dr T. Hofmokl — z-ca red. nacz.  
dr T. B. Iwiński  
B. Jaworska-Kordos — ilustracje  
dr M. Kordos — red. nacz.  
dr K. Prażmowski — red. techn. graf.  
mgr K. Szypcio — sekr. red.  
doc. dr M. Świącki  
Adres Redakcji  
ul. Hoża 69 pok. 151,  
00-681 Warszawa

Zakład Narodowy im.  
Ossolińskich — Wydawnictwo  
Wrocław, Oddział w Warszawie  
Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.  
wyd.; 2,50 ark. druk.;  
papier offsetowy III kl. 80 g. 61 × 86  
Wydrukowano w Drukarni im.  
Rewolucji Październikowej  
Warszawa ul. Mińska 65.  
Nr zam. 1083/78 S-83

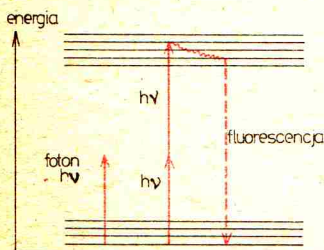
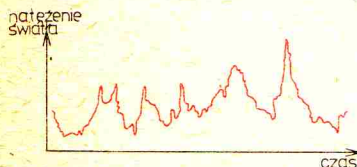
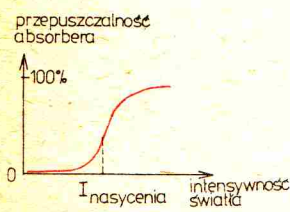
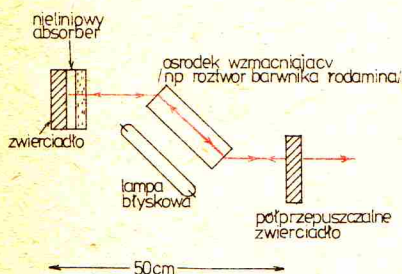


# Pikosekundy

Mgr Wojciech MAJEWSKI



Ciąg impulsów świetlnych z lasera  
Góra — natężenie światła  
Dół — znaczniki czasu



Ponad cztery lata temu opisywaliśmy w numerze 10 „Dety” z 1974 roku, w jaki sposób w Zakładzie Optyki Instytutu Fizyki Doświadczalnej UW zmierzono za pomocą kilku lusterek, krawieckiej miarki i aparatu fotograficznego czas trwania impulsu laserowego. Nie była to oczywiście najlepsza metoda pomiaru czasu trwania błysku o długości kilku nanosekund (jedna nanosekunda =  $10^{-9}$ s, w tym czasie światło przebiega drogę 30 cm).

Zazwyczaj do tego celu służą specjalne „szybkie” oscyloskopy, w których czas własny narastania impulsu jest właśnie rzędu jednej ns. Problem polegał na tym, że wtedy w Zakładzie Optyki takiego oscyloskopu nie było. Teraz też go jeszcze nie ma, ale udało się pożyczyć taki przyrząd. Na zdjęciu przedstawiony jest obrazek z ekranu tego oscyloskopu. Przedstawia on ciąg impulsów świetlnych z lasera. Na osi y odłożone jest natężenie światła (prąd z szybkiej fotokomórki), na osi x — czas (znaczniki czasu co 10 ns).

Jak widać, impulsy następują co 3 ns! A każdy z nich narasta 1 ns. Zachodzi podejrzenie, że te impulsy trwają dużo, dużo krócej. Ponieważ ten egzemplarz oscyloskopu ma czas własny narastania właśnie rzędu jednej ns — nawet najkrótszy impuls na jego ekranie będzie narastał tę nieszczęsną nanosekundę. Należy wziąć lepszy oscyloskop — powiecie. Niewiele to zmieni, gdyż nawet najlepsze oscyloskopy nie są w stanie pokazać impulsów krótszych niż dziesiąte części nanosekundy. Nie tędy droga.

Rozwiązaniem mogłoby być użycie ultraszybkiej kamery smugowej. Zdobyć takiej kamery jest tak nierealne (koszt większy niż 50 000 dolarów), że nawet nie opiszemy Wam tutaj zasady jej działania.

Istnieje inne wyjście (zawsze należy wierzyć w możliwość jego znalezienia) — ale zanim o nim opowiemy, wyjaśnimy najpierw, jak wytwarza się takie najkrótsze impulsy świetlne.

Wytwarzać je można np. w impulsowym laserze barwnikowym. Jego uproszczony schemat przedstawia rysunek.

Najciekawsza dla nas będzie rola nieliniowego absorbera, którym jest cienka warstwa roztworu pewnego mądrego barwnika, podobnego zresztą do atramentu. Warstwa ta bardzo słabo przepuszcza światło, które generowane jest w osrodku wzmacniającym — ale do czasu! Gdy natężenie światła osiągnie pewną wartość — barwnik ten robi się przezroczysty. Tak wygląda wykres przepuszczalności nieliniowego absorbera w zależności od natężenia światła.

Wyobraźcie sobie, że światło wychodzące z osrodka wzmacniającego ma na początku charakterystykę szumową. (Każdy wzmacniacz szumi — czyście to już zauważyli?) Fluktuacje natężenia światła są bardzo szybkie. Światło to grzęźnie w absorberze. W końcu zdarzy się jednak tak silna fluktuacja światła, że „otworzy” absorber, przedrze się przez niego, odbije od zwierciadła i wróci do wzmacniacza. Wzmacniacz ją wzmocni, polecą dalej do półprzepuszczalnego zwierciadła. Połowa światła zawróci, wzmocni się jeszcze raz i teraz to na pewno „otworzy” absorber, który w międzyczasie już dawno się zamknął. Sytuacja zacznie się powtarzać i między zwierciadłami jak piłeczka zacznie latać taka wzmocniona fluktuacja światła. Za każdym przelotem część tego światła wybiegnie z lasera przez półprzepuszczalne zwierciadło. Zamieszczone zdjęcie zostało tak zaaranżowane, żeby pokazać, iż uformowanie się fluktuacji w dojrzały impuls wymaga wielu kolejnych wzmocnień i osłabień. Jeżeli w rezonatorze (między zwierciadłami) mamy tylko jeden impuls, wtedy z lasera powinny wybiegać

błyski co  $\frac{2L}{c}$ , gdzie  $L$  to długość rezonatora, a  $c$  — prędkość światła. W naszym przypadku  $L = 50$  cm.

$$\frac{2L}{c} = \frac{10^2 \text{cm}}{3 \cdot 10^{10} \text{cm} \cdot \text{s}^{-1}} \approx 3 \cdot 10^{-9} \text{ s} \quad (3 \text{ ns}).$$

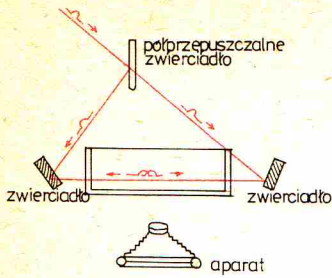
Na zdjęciach wyraźnie można zobaczyć, że impulsy pojawiają się co 3 nanosekundy. Zgodziło się! Jeden ciąg składa się z około tysiąca impulsów, ale to nie ma dla nas znaczenia.

Wytworzony impuls trzeba zmierzyć. Robi się to bardzo chytrze, korzystając ze zjawiska fluorescencji wzbudzonej dwufotonowo. Wyjaśnimy zjawisko na następnym rysunku.

Przedstawiony jest na nim schemat poziomów energetycznych molekuly barwnika (to już trzeci barwnik dzisiaj!).

Foton  $h\nu$  z lasera jest zbyt mało energetyczny (ma zbyt długą falę), aby wzbudzić molekułę tego barwnika. Natomiast dwa fotony jednocześnie są w stanie to uczynić. Wzbudzona cząsteczka barwnika zdolna jest do fluorescencji na fali krótszej od pobudzającej! Zjawisko to, oczywiście, jest niezwykle mało prawdopodobne i ma ciekawą własność, że jego natężenie jest proporcjonalne do drugiej potęgi natężenia światła padającego, czyli  $I_{\text{fluorescencji}} \sim I^2_{\text{lasera}}$ . Jeżeli przepuścimy nasz impuls przez kuetę z barwnikiem i sfotografujemy jego ślad, to na zdjęciu otrzymamy świetlistą smugę takiej fluorescencji.





A co się stanie, jeżeli zrobimy zdjęcie kuwety oświetlonej z obu stron, jak na schemacie na rysunku?

Gdzieś na środku kuwety impulsy się spotkają i dalej polecą w swoje strony. W miejscu spotkania się impulsów chwilowa intensywność światła będzie dwa razy większa niż w innych miejscach. Gdy intensywność będzie dwa razy większa, to dwufotonowo wzbudzona fluorescencja będzie cztery razy większa. Na tle świecącej smugi otrzymamy jaśniejszy obszar. Rozmiary tego jaśniejszego obszaru to z grubsza rozmiary naszego świetlnego impulsu.

Każdy następny impuls (ten po 3 ns) robi dokładnie to samo. Wszystko to na odpowiednio czulej kliszy aparat fotograficzny pięknie zarejestruje. Spójrzcie więc jeszcze raz na zdjęcie. Rozmiary impulsu (rozjasnienia) — półtora milimetra!

Obliczmy więc, ile czasu trwa błysk, który jest półtoramilimetrowym pociskiem świetlnym. Długość drogi, jaką przebywa światło w cieczy o współczynniku załamania  $n = 1,5$  wynosi 1,5 mm.

Czas  $t = \frac{s}{v}$ , gdzie  $s$  oznacza drogę, a  $v$  prędkość światła w ośrodku

$$v = \frac{c}{n}, \text{ więc } t = \frac{s \cdot n}{c} \quad t = \frac{1,5 \cdot 10^{-3} \cdot 1,5}{3 \cdot 10^{10}} \approx 0,7 \cdot 10^{-11} = 7 \cdot 10^{-12} \text{ s.}$$

Nasz impuls trwa 7 pikosekund!

Żaden oscyloskop nie miał szans, żeby to uczciwie pokazać!

## Czym zajmuje się reologia?

*Mgr Jacek ŻEBROWSKI*

### Modele reologiczne

Zanim wyjaśnimy pojęcie zawarte w tytule, zastanówmy się nad modelami mechanicznymi takich ciał, jak guma do żucia, czekolada, ciasto pszenne, farba olejna.

Na pytanie, czy guma do żucia jest ciałem sprężystym, odpowiemy bez wahania nie — rozciągana przecież płynie. Czy zatem jest typową cieczą lepką o bardzo dużym współczynniku lepkości? Nie, wykazuje własność szczałkowej sprężystości, po odjęciu siły rozciągającej w pewnym, choć niewielkim stopniu kurczy się. Z kolei umieszczona w polu sił o wielkości rzędu siły grawitacji zachowuje się jak ciało Hooke'a. Ciało w rodzaju gumy do żucia łączy zatem w sobie różne cechy mechaniczne (sprężystość, lepkość, plastyczność) i trudno byłoby właściwie je zaszeregować według znanych ze szkoły kategorii. W naturze, a także w technologii produkcyjnej (polimery, ich roztwory) spotykamy olbrzymią ilość takich „wątliwych” ciał wymagających klasyfikacji, a przede wszystkim specyficznej metodyki badań ich złożonych właściwości. Funkcję tę spełnia reologia (reo — płynąć, logos — nauka), dyscyplina nauki wyodrębniona z mechaniki w latach trzydziestych XX wieku, stawiająca sobie za cel ustalenie korelacji między własnościami mechanicznymi ciał (podatnością na odkształcania) a ich strukturą wewnętrzną.

Podstawowymi pojęciami, jakimi posługuje się reologia, są odkształcenie, płynięcie i naprężenie. Odkształceniem, jak wiadomo, nazywamy zmianę stanu ciała związaną ze zmianą wzajemnych odległości jego cząstek, przy czym pojęciu *cząstka* przypisujemy w naszych rozważaniach osobliwe znaczenie. Traktujemy ją jako element ciała o objętości  $dV$  znikomy wobec rozmiarów ciała a jednocześnie wielki wobec rozmiarów cząsteczki chemicznej. Założenie to pozwala traktować dowolny materiał jako tzw. ośrodek ciągły, lokalnie jednorodny i pomijać w rozważaniach ziarnistość struktury wewnętrznej. Dodajmy dla ścisłości, że płynięciem nazywamy nieodwracalną deformację narastającą w czasie w sposób ciągły. Zdefiniujmy jeszcze potrzebną nam wielkość dynamiczną — naprężenie. Na cząstkę ciała o objętości  $dV$  i masie  $dm$  mogą działać siły masowe (np. siły grawitacji) oraz siły powierzchniowe (krótkozasięgowe siły oddziaływania cząsteczek otaczających). Jeżeli  $\Delta F$  jest wypadkową sił powierzchniowych

działających na element  $\Delta A$  powierzchni otaczającej cząstkę  $dV$ , to  $\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = p$  nazywamy

naprężeniem w danym punkcie. Naprężenie w ciele jest jego dynamiczną reakcją na odkształcenie, a związek tych dwóch wielkości ujęty jest w tzw. równaniu reologicznym.

Współczynniki występujące w równaniu reologicznym będące jednocześnie wielkościami, które można wyznaczyć eksperymentalnie, nazywamy parametrami reologicznymi. Dowolnemu równaniu reologicznemu można przyporządkować odpowiednie wyabstrahowane ciało, które nazwiemy modelem.



#### Rozwiązanie zadania M 176

Działania takie określimy tabelkami

○	a b	□	a b
a	a a	a	a a
b	b b	b	b a

co oznacza np., że  $a \circ b = a$ ,  $b \square a = b$ .

Działanie  $\square$  jest nieprzemienne, gdyż

$a = a \square b \neq b \square a = b$ .

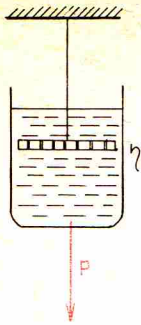
Mamy również, przy dowolnych  $x, y, z \in X$

$x \square (y \circ z) = x \square y = (x \square y) \circ (x \square z)$ ,

$(y \circ z) \square x = y \square x = (y \square x) \circ (z \square x)$ ,

gdź wynikiem działania  $\circ$  jest pierwszy argument.

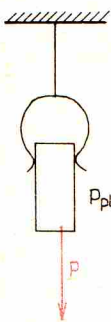




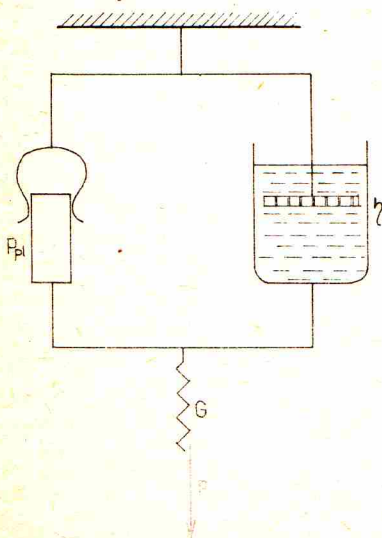
Rys. 1. Tłumik — model reologiczny cieczy doskonale lepkiej



Rys. 2. Sprężyna — model reologiczny ciała doskonale sprężystego



Rys. 3. Suwak — model reologiczny ciała doskonale plastycznego



Rys. 4. Model reologiczny ciała sprężysto-lepko-plastycznego

Poznajmy trzy podstawowe modele reologiczne opisywane najprostszymi równaniami. Dobrą ich ilustracją mogą być schematy (rys. 1, 2, 3) podkreślające w sposób poglądowy podstawowe cechy mechaniczne. Interpretacja pierwszego z nich, tzw. tłumika, w języku reologii nakazuje przesunięcie podziurawionego tłoczka traktować jako odkształcenie  $e$ , prędkość jego

przesuwania jako prędkość odkształcania  $\frac{de}{dt}$ , a opór towarzyszący ruchowi jako naprężenie  $p$

w ciele. Cechą charakterystyczną tego modelu jest liniowa zależność naprężenia od prędkości odkształcania, co odpowiada następującemu równaniu reologicznemu  $p = 2\eta \frac{de}{dt}$ , gdzie parametr

reologiczny  $\eta$  nazywamy współczynnikiem lepkości. Rysunek 2 ilustruje model ciała doskonale sprężystego opisywanego znanym Wam prawem Hooke'a  $p = 2Ge$  (gdzie  $G$  jest modułem sztywności). Ostatni schemat (rys. 3) przedstawia ciało doskonale plastyczne, którego cechą jest to, że ulega odkształceniu dopiero przy naprężeniach większych od ustalonego naprężenia granicznego  $p_{pl}$ .

Modele ciał o złożonych właściwościach można traktować jako kombinacje tych trzech prostych modeli. Jakie więc cechy mechaniczne może posiadać ciało reprezentowane przez model składający się z szeregowo połączonego elementu sprężystego  $G$  z równolegle połączonymi elementami ciała plastycznego i cieczy lepkiej jak na rysunku 4.

Analizując rysunek w konwencji przedstawionej powyżej zauważymy, że dla małych sił odkształcających (a tym samym dla małych naprężeń w ciele) ciało to wykazuje własności sprężyste (tłumik zablokowany przez suwak). Dla naprężeń przekraczających pewną wartość graniczną  $p_{pl}$  ciało zaczyna płynąć. Po odjęciu siły zewnętrznej ciało to na pewno nie powróci do pierwotnego stanu, zaobserwujemy jednak częściową redukcję odkształcenia spowodowaną udziałem elementu sprężystego  $G$ .

Zauważmy, że cechy, jakie wymieniliśmy w odniesieniu do tego teoretycznego modelu, dostrzegamy właśnie w gumie do żucia. Podobne właściwości jednak możemy wymienić w odniesieniu do wielu innych ciał, dla których mamy już nazwę: sprężysto-lepko-plastyczne. Gumę do żucia spośród innych przedstawicieli tej klasy wyróżnia specyficzna proporcja w udziale elementów sprężystości, plastyczności i lepkości w modelu, co jest określone w wartościach parametrów reologicznych ( $p_{pl}$ ,  $\eta$ ,  $G$ ).

Posługując się modelem (rys. 4) łatwo można ułożyć równanie reologiczne, którego rozwiązanie przy odpowiednio zadanych warunkach początkowych daje jeszcze więcej informacji, niż sugeruje sam rysunek.

Pełne odkształcenie  $e$  ciała jest sumą odkształcenia elementu sprężystego  $e_1$  i odkształcenia tłumika  $e_2$

$$(1) \quad e = e_1 + e_2.$$

Równanie reologiczne dla tłumika połączonego z suwakiem ma postać

$$(2) \quad p = p_{pl} + 2\eta \frac{de_2}{dt},$$

zaś dla elementu sprężystego

$$(3) \quad p = 2Ge_1.$$

Po zróżniczkowaniu (1) względem czasu i wykorzystaniu (2) i (3) otrzymujemy równanie reologiczne

$$(4) \quad \frac{de}{dt} = \frac{1}{2G} \frac{dp}{dt} + \frac{p - p_{pl}}{2\eta} \text{ słuszne dla } p \geq p_{pl}.$$

Dla naprężeń  $p < p_{pl}$ , jak powiedzieliśmy wcześniej, wyeliminowany jest element płynięcia i ciało wykazuje własności sprężyste określone równaniem  $p = 2Ge$ .

Zapytajmy, jak zmienia się w czasie stan naprężeń w ciele zdeformowanym do wartości  $e_0$  i pozostawionym w tym stanie. Dodajmy, że naprężenie w chwili przzerwania odkształcania wynosi  $p_0$ . Rozwiązanie równania (4) przy warunku początkowym  $p(t=0) = p_0$  oraz  $e(t=0) = e_0$  wygląda następująco

$$p(t) = p_{pl} + (p_0 - p_{pl})e^{-\frac{G}{\eta}t}$$

Widzimy więc, że naprężenie nie znika natychmiast, ale maleje wykładniczo w czasie, i własność tę, którą trudno wyczytać z rysunku, nazywamy relaksacją naprężeń.

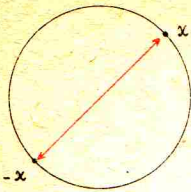
Pamiętajmy, że każdy model eksponuje tylko najważniejsze cechy, a nasz jako szczególnie prosty pomija na pewno wiele innych rzeczywistych cech gumy do żucia.

Zaskakującym może wydać się jeden z podstawowych postulatów reologii, mówiący, że każde ciało rzeczywiste posiada wszystkie właściwości reologiczne. Czy zatem woda (łatwo przelewająca się z naczynia do naczynia) wykazuje sprężystość postaci? Owszem, tak, ale własność ta zaznacza się tak słabo, że trudno jest ją stwierdzić eksperymentalnie, a zupełnie jest nieistotna w praktyce. Woda nie jest jednak tak interesującym dla reologów obiektem, jak czekolada, lava wulkaniczna, gleba czy guma do żucia, które wymagają wieloelementowych, niekiedy nieskończenie wieloelementowych modeli.

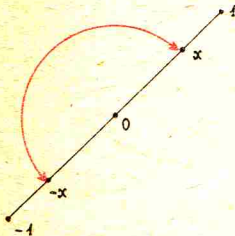


# Jest tak, jak się nam wydaje: odcinek ma nieparzystą ilość punktów

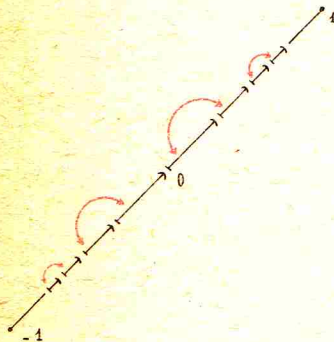
Prof. dr Jerzy MIODUSZEWSKI



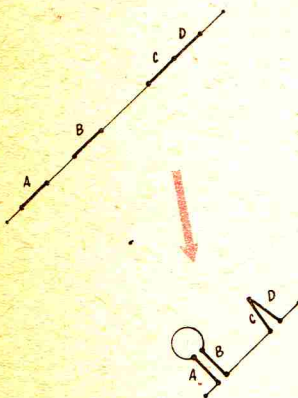
Rys. 1. Parzystość okręgu: jest jeszcze jeden sposób przekonania się o tym.



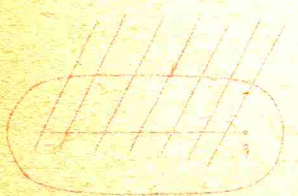
Rys. 2. Nieudana próba z odcinkiem.



Rys. 3.



Rys. 4.



Rys. 5. Jeśli rozbicie nie jest półciągle ...

— inaczej niż okrąg: o jego parzystości przekonujemy się łącząc w pary przeciwległe punkty. Podobna próba dla odcinka (z końcami) zawodzi: jeśli np. odcinek o końcach  $-1$  i  $1$  zegniemy na pół wokół  $0$ , łącząc w pary punkty  $-t$  i  $t$ , to punkt  $0$  pozostanie bez pary. Nie widać tak od razu innych sposobów łączenia punktów odcinka w pary, chyba że go przedtem porozcinamy.

Np. jeśli ten sam odcinek podzielimy na nieskończenie wiele odcinków z jednym (np. lewym) końcem tak, by dotykały do siebie, i tak, by w punktach  $-1$  i  $1$ , i tylko w tych punktach, skupiało się nieskończenie wiele odcinków (rys. 3), to łącząc jakkolwiek w pary odcinki podziału i nasuwając w każdej parze jeden odcinek na drugi (powiększając lub zmniejszając go przedtem przez podobieństwo), połączymy w pary wszystkie punkty z wyjątkiem  $-1$  i  $1$ , ale te tworzą znowu parę.

Nie umiemy pomyśleć tego łączenia w pary jako sklejanego odcinka bez uprzedniego rozcinania. Nie rezygnujmy mimo to z szukania sklejeń dwukrotnych odcinka; tak nazwiemy te łączenia w pary punktów odcinka, które można pomyśleć (nie zwolnić to od podania później ścisłego określenia) jako sklejanego odcinka bez uprzedniego rozcinania.

Inna próba. Sklejamy parami pododcinki, rozłączne lub mające wspólny koniec, przez nałożenie jednego na drugi przez podobieństwo. Przypadek, kiedy odcinki jednej pary dają całość, mamy za sobą. Rys. 4 ilustruje typową nową sytuację: odcinek  $A$  skleja się z odcinkiem  $B$  (odcinki te są rozłączne), a odcinek  $C$  z odcinkiem  $D$ , mającym z  $C$  wspólny koniec, zginając odcinek wokół tego wspólnego końca; ten wspólny koniec nie skleja się z żadnym innym punktem. Suma odcinków  $A$  i  $B$  jest rozłączna z sumą odcinków  $C$  i  $D$ , bo inaczej pewne trzy punkty byłyby sklezione. Wynik sklejenia pokazany jest w drugiej części rysunku. Przyjmijmy, że odcinki ze sklejających się par nie są zawarte w żadnych większych sklejających się przez podobieństwo. Jest to początek próby, która dalej wygląda tak, że pewna nowa para odcinków, poza sumą dotychczas sklejoną, skleja się ze sobą jednym z opisanych sposobów, zależnie od tego czy odcinki te stykają się końcami, czy nie. Pomyślmy teraz sytuację skrajną, kiedy poza sumą posklejanych odcinków nie ma odcinków. Ta pozostałość plus końce posklejanych odcinków jest zbiorem rzadkim (tak nazywa się zbiory domknięte nie zawierające odcinków). Składa się na nią zbiór homeomorficzny ze zbiorem Cantora i punkty izolowane (punkty wspólne odcinków takich, jak  $C$  i  $D$ ). Punkty tej pozostałości trzeba teraz posklejać po dwa. Czy to się da zrobić bez rozrywania figury, którą już mamy?

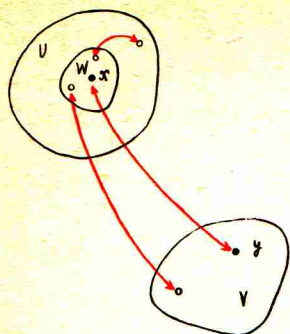
Trudno mieć od razu jakieś zdanie, bo wyszliśmy poza znane sytuacje geometryczne. Nie da się pójść dalej nie wyjaśniając, co rozumie się przez sklepanie figury bez uprzedniego jej rozcinania czy rozrywania.

Aby sklejać figurę geometryczną, trzeba mieć wprawdzie jej *rozbicie*, tj. przedstawienie jej jako sumy podzbiorów rozłącznych, aby wiedzieć, które punkty sklejać z którymi: punkty skleja się ze sobą wtedy i tylko wtedy, gdy należą do tego samego elementu rozbicia. Aby sklepanie nie wymagało przedtem rozcinania (rozrywania) figury, rozbicie nie może być całkiem dowolne, np. takie jak rozbicie na pary przedstawione na rys. 3.

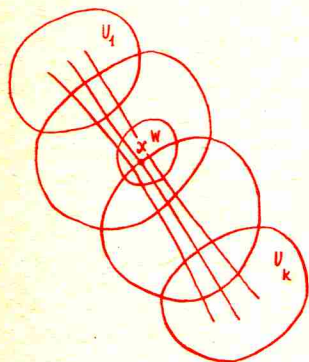
Rozbicie nazywane jest *półciągle*, jeśli dla każdego zbioru domkniętego suma elementów rozbicia mających punkty wspólne z tym zbiorem jest zbiorem domkniętym; w szczególności, elementy rozbicia półciąglego są zbiorami domkniętymi, bo przez punkt przechodzi jeden element rozbicia, a zbiory jednopunktowe są domknięte. Jak wiele rzeczy, także i półciąłość widzi się najlepiej tam, gdzie jej nie ma.

Jeśli rozbicie nie jest półciągle, to istnieje zbiór domknięty  $F$  taki, że suma  $S$  elementów rozbicia mających punkty wspólne z  $F$  nie jest zbiorem domkniętym. Znaczący to, że istnieje punkt  $p$  rozważanej figury, będący punktem skupienia zbioru  $S$  i nie należący do  $S$ . Element  $A$  rozbicia, do którego należy punkt  $p$ , omija zbiór  $F$ ; co więcej, omija on pewną kulę wokół  $F$  (rys. 5; rysunek ten zwalnia z tłumaczenia tego, czym jest kula wokół zbioru, chociaż nie zwolnić z wytłumaczenia się z istnienia kuli, o której była mowa). Dowolnie blisko punktu  $p$  są punkty zbioru  $S$ , a więc punkty sklejające się z punktami zbioru  $F$ ; te punkty zbioru  $F$  mają punkt skupienia  $q$  w zbiorze  $F$  i ten punkt  $q$  nie skleja się z punktem  $p$ , bo  $p$  nie skleja się z żadnym punktem zbioru  $F$ . Nie można pomyśleć takiego sklejanego bez rozzerwania figury w punkcie  $p$ . Rozumowań motywacyjnych prawie się nie spotyka w pracach z matematyki, przez co wyniki w nich zawarte są jak góry lodowe, które znamy jedynie z wierzchołków. Jest to reżym narzucony częściowo przez modę: elegancja może tu sąsiadować z szablonem. W artykule tego rodzaju nie musimy się takiego reżymu trzymać.

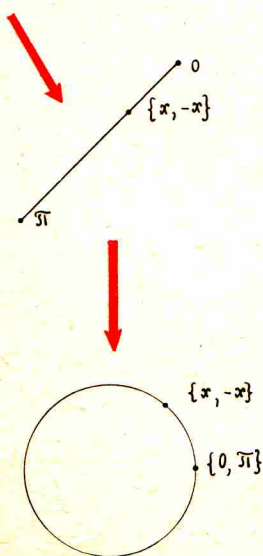
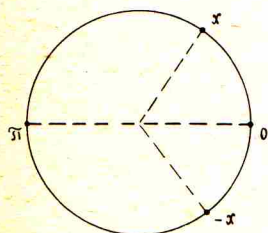




Rys. 6.



Rys. 7.



Rys. 8. Para  $\{\pi, 0\}$  nie jest elementem ciągłości.

Rozumowanie motywacyjne, które przeprowadziliśmy, daje nam tyle, że jeśli będziemy już mieli dowiedzione

Twierdzenie. *Nie istnieją rozbięcia półciągłe odcinka na zbiory dwupunktowe*, to będziemy mogli to twierdzenie rozumieć. Jak? Właśnie tak, że nie można skleić odcinka, uprzednio go nie rozrywając, i sklejąc po dokładnie dwa punkty. Okrąg można (teraz to precyzujemy), bo rozbić na zbiory dwupunktowe (co wymaga sprawdzenia). Rozumowanie to ma jednak swoją wartość dopiero wtedy, kiedy figura jest *przestrzenią zwartą*, z czego korzystaliśmy m.in. (kiedy po raz drugi?) twierdząc, że zbiór domknięty omijający zbiór domknięty  $F$  omija pewną kulę wokół  $F$ . Odcinek jest zwarty; zwarte są też jego podzbiory domknięte.

Dobrze jest przeformułować warunek półciągłości rozbięcia przez prawa de Morgana (przejście do dopełnień). Brzmi on wtedy: dla każdego zbioru otwartego suma elementów rozbięcia zawartych w tym zbiorze jest zbiorem otwartym.

Teraz widać od razu, że jeśli  $A$  jest elementem rozbięcia półciągłego,  $U$  jest zbiorem otwartym zawierającym  $A$  i  $x$  jest punktem zbioru  $A$ , to istnieje otoczenie  $W$  punktu  $x$  takie, że jeśli element rozbięcia ma punkty w zbiorze  $W$ , to jest zawarty w  $U$ .

Dla wyjaśnienia: *otoczenie punktu*, to zbiór otwarty, do którego ten punkt należy.

Wyjaśniając półciągłość nie ograniczyliśmy się do rozbić odcinka i do rozbić na zbiory dwupunktowe. Są dwa powody: 1. dalej pojawiają się inne niż odcinek przestrzenie zwarte i rozbięcia niekoniecznie na zbiory dwupunktowe; 2. na rzeczy nie można patrzeć zbyt wąsko, jeśli chce się je rozumieć, a znakomite wyjątki, np. owego jabłka, które wystarczyło dla uchwycenia prawa grawitacji, jedynie unaczyniają tę prawdę.

Niebanalne sytuacje matematyczne (miejmy nadzieję, że te, o których tu mowa, są takimi) nie boją się wszakże ostrego światła przypadków szczególnych. Odnotujmy więc fakt, dotyczący rozbić półciągłych na zbiory dwupunktowe, wynikający bezpośrednio z ostatniego stwierdzenia.

(I) Jeśli  $\{x, y\}$  jest elementem rozbięcia,  $U$  jest otoczeniem punktu  $x$  i  $V$  jest otoczeniem punktu  $y$ , to istnieje otoczenie  $W$  punktu  $x$  zawarte w  $U$  takie, że każdy element rozbięcia mający punkt w  $W$  ma swój drugi punkt w  $U$  lub w  $V$ .

Najlepiej widzieć to tak: jeśli zbiory  $U$  i  $V$  są małe (p. rys. 6), to elementy rozbięcia mające punkty dostatecznie blisko  $x$  są albo małe, zawarte w  $U$ , albo od razu duże, bo mające swoje drugie punkty w  $V$ .

W szczególności,

(I') Jeśli zbiory  $U$  i  $V$  są rozłączne i zbiór  $U$  nie zawiera całych elementów rozbięcia, to każdy element rozbięcia mający punkt w  $W$  ma swój drugi punkt w  $V$ , a odwzorowanie  $h$  przyporządkowujące punktowi  $x'$  zbioru  $W$  drugi punkt w elemencie rozbięcia, do którego punkt  $x'$  należy, jest homeomorfizmem zbioru  $W$  na zbiór  $h(W)$ .

Część końcowa tego stwierdzenia (o homeomorfizmie) nie mieści się w stwierdzeniu (I). Nie dowodząc jej (bo dowód nietrudny), zwróćmy jednak uwagę na ostrożne sformułowanie na samym końcu.

Element  $A$  rozbięcia nazywany jest elementem ciągłości, jeśli dla każdej rodziny skończonej  $\{U_1, \dots, U_k\}$  zbiorów otwartych takich, że (rys. 7)

(1)  $A \subset U_1 \cup \dots \cup U_k$  i (2)  $A \cap U_j \neq \emptyset$  dla każdego  $j$ ,

i każdego punktu  $x$  ze zbioru  $A$  istnieje otoczenie  $W$  punktu  $x$  takie, że elementy rozbięcia mające punkt w  $W$  są zawarte w  $U_1 \cup \dots \cup U_k$  i mają punkty w każdym  $U_j$  (spełniają więc, jak  $A$ , warunki (1) i (2)), a ich suma jest zbiorem otwartym (zawierającym  $A$ ).

Znaczący to m.in., że jeśli element rozbięcia jest dostatecznie blisko jakiegoś punktu z elementu ciągłości, to jest blisko w stopniu danym z góry wszystkim punktom z tego elementu ciągłości.

Różnicę między elementami ciągłości a innymi (w rozbięciach półciągłych) zobaczymy na przykładach rozbić na zbiory dwupunktowe.

Jeśli okrąg zegnijemy na pół wokół średnicy, łącząc w pary punkty odpowiadające kątom  $x$  i  $-x$ , jak na rys. 8, a potem końce tej średnicy skleimy ze sobą, to dokonamy jeszcze jednego sklejenia dwukrotnego okręgu (półciągłość odpowiadającego temu sklejeniu rozbięcia wypadaloby sprawdzić), w którym para złożona z końców średnicy nie jest elementem ciągłości.

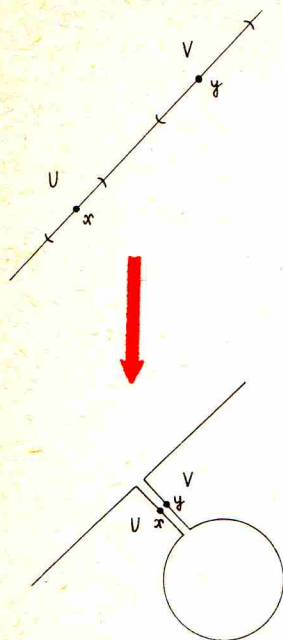
To, że  $\{\pi, 0\}$  nie jest elementem ciągłości wynika m.in. stąd, że jeśli  $W$  jest dostatecznie małym otoczeniem punktu  $0$ , to suma elementów mających punkty w  $W$  nie jest zbiorem otwartym, mając punkt izolowany  $\pi$ . Ale wystarczyłoby i takie kryterium:

(II) Jeśli  $\{x, y\}$  jest elementem rozbięcia na zbiory dwupunktowe i każde otoczenie punktu  $x$  zawiera całe elementy rozbięcia, to  $\{x, y\}$  nie jest elementem ciągłości.

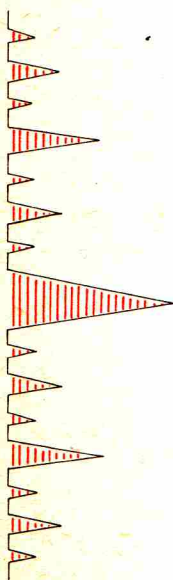
Kryterium to jest zamieszczone nie po to, by dać drugi dowód prostego faktu (nasuwałoby to wątpliwości co do wartości pierwszego dowodu), ale dlatego, że się przyda dalej.

Inne elementy rozbięcia (okręgu) z rys. 8 są elementami ciągłości. Rozbięcia (okręgu) z rys. 1 i (odcinka) z rys. 2 mają same elementy ciągłości.





Rys. 9. Sklejanie dwukrotne w pobliżu elementu ciągłości.



Rys. 10. Takie sklejanie odcinka nie doprowadzi do sklejania dwukrotnego.

Popatrzmy teraz ogólnie na rozbięcia półciągle na zbiory dwupunktowe:

(III) Jeśli  $\{x, y\}$  jest elementem ciągłości rozbięcia, to dla każdego otoczenia  $V$  punktu  $y$  istnieje otoczenie  $W$  punktu  $x$  takie, że każdy element rozbięcia mający punkt w  $W$  ma swój drugi punkt w  $V$ , a odwzorowanie  $h$  przyporządkowujące punktowi  $x'$  zbioru  $W$  drugi punkt w elemencie rozbięcia, do którego punkt  $x'$  należy, jest homeomorfizmem zbioru  $W$  na zbiór  $h(W)$  i zbiór  $h(W)$  jest otwarty.

Inaczej (choć nie oddając całej treści): sklejanie dwukrotne polega w pobliżu punktów  $x$  i  $y$  stanowiących element ciągłości na sklejaniu przez homeomorfizm pewnych otoczeń punktów  $x$  i  $y$ .

Dowód stwierdzenia (III) nie zawiera innych trudności niż dowody poprzednie, ale trwa dłużej. Wystarczy go robić dla zbiorów  $V$  rozłącznych z pewnym otoczeniem  $U$  punktu  $x$ . Rodzina dwuelementowa  $\{U, V\}$  spełnia warunki (1) i (2) dla  $\{x, y\}$ . Zbiór  $W$  dobieramy dla  $\{U, V\}$  i  $x$  na mocy warunku ciągłości. Ten dobór zbioru  $W$  zapewni to, że  $h(W)$  ( $h$  określa się tak, jak to było robione poprzednio) będzie zbiorem otwartym.

Głównym w teorii rozbić półciąglych jest

**Twierdzenie.** *Rozbięcie półciągle przestrzeni zwartej (metrycznej) ma elementy ciągłości.*

Twierdzenie to jest odpowiednikiem twierdzenia Baire'a o istnieniu punktów ciągłości funkcji rzeczywistej i ma z nim wspólny rodowód w twierdzeniu Baire'a (bardziej znanym), że przestrzeń metryczna zupełna (tym bardziej zwarta) nie może być sumą przeliczalnie wielu podzbiorów rzadkich. Twierdzenie należy do Kuratowskiego i można je znaleźć w „*Topologie II*” na str. 38 wydania z r. 1950. Nie będziemy tu dowodzić tego twierdzenia. Sama teoria rozbić półciąglych została zapoczątkowana w latach dwudziestych przez Aleksandrowa i Moore'a.

Rozbięcie półciągle pozostanie półciąglym, jeśli je ograniczyć do podzbioru domkniętego.

Ponieważ zbiory domknięte są zwarte, wobec zwartości rozważanych przestrzeni, więc rozbięcie ograniczone do podzbioru domkniętego będzie miało elementy ciągłości na mocy sformułowanego twierdzenia. Jest to bardzo ważna okoliczność (i jednocześnie nie bardzo ważna, bo wynikająca z prostej obserwacji). Wynika stąd m.in., że elementy ciągłości rozbięcia półciąglych przestrzeni zwartej wypełniają jej podzbiór gęsty. Stąd, wobec (III), sklejania dwukrotne odcinka muszą być wszystkie takie jak te, które rozważaliśmy w próbie zwanej inną, ilustrowanej na rys. 4.

Wtedy po sklejaniu ze sobą przez homeomorfizmy przedziałów, trzeba skleić ze sobą pozostałość, na którą składa się zbiór  $Q$  homeomorficzny ze zbiorem Cantora i punkty izolowane, po nie więcej niż jednym w każdym przedziale dopełniającym do  $Q$ . Ta pozostałość jest już wszakże częściowo sklejona: sklejone są ze sobą po dwa końce przedziałów dopełniających do  $Q$ ; mogą się przy tym sklejać końce tego samego przedziału (sytuacja z odcinkami  $C$  i  $D$  na rys. 4), lub końce dwu różnych (więc rozłącznych) przedziałów (sytuacja z odcinkami  $A$  i  $B$  na tymże rysunku).

Jeśli ograniczyć rozbięcie do zbioru  $P$  równego wspomnianej pozostałości pomniejszonej o pary punktów izolowanych sklejających się ze sobą (zbiór  $P$  jest zwarty), to każdy element rozbięcia zbioru  $P$  ma punkt w  $Q$ .

(IV) Jeśli  $\{x, y\}$  jest elementem rozbięcia i  $x$  jest punktem zbioru  $Q$ , to w każdym przedziale wokół  $x$  są zawarte całe elementy rozbięcia.

Jeśliby (IV) było nieprawdą, to wobec (I') pewien przedział wokół  $x$  sklejałby się przez homeomorfizm z pewnym przedziałem wokół  $y$  (obrazem homeomorficznym przedziału wokół  $x$ ). Sprzeczność, bo  $x$  leżąc w  $Q$ , leży poza wszelkimi przedziałami sklejającymi się przez homeomorfizm.

Z (IV) wynika niemożliwość pomyślanego przez nas sklejania.

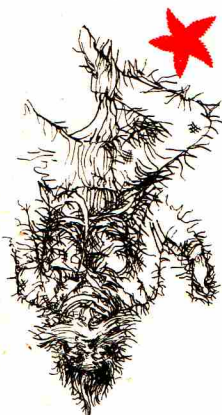
Bo skoro w każdym przedziale wokół dowolnego punktu  $x$  zbioru  $Q$  są całe elementy rozbięcia całości odcinka, to są również i całe elementy rozbięcia ograniczonego do  $P$ ; bo pary punktów sklejających się (jeśli nie mielibyśmy ich od razu) pojawiłyby się na dowolnie drobnych przedziałach dopełniających do  $Q$  i skupiających się przy punkcie  $x$ ; wtedy końce tych przedziałów, należące już do  $P$ , musiałyby się sklejać ze sobą.

Stąd, na mocy (I') i tego, że każdy element rozbięcia zbioru  $P$  ma punkt w  $Q$ , żaden z elementów rozbięcia zbioru  $P$  nie jest elementem ciągłości. Przeczy to twierdzeniu o istnieniu elementów ciągłości.

Dowód nieparzystości odcinka został w ten sposób zakończony.

Było w nim jedno delikatne miejsce. Brak otwartości zbioru  $h(W)$  w stwierdzeniu (I') nie przeszkodził nam w dojściu do sprzeczności poprzez dowiedzione wprawdzie stwierdzenie (IV). Obraz homeomorficzny przedziału jest w tak oczywisty sposób (czyżby?) zbiorem otwartym na odcinku, że nie myślimy o trudnościach, które by się pojawiły, gdybyśmy podobnym rozumowaniem chcieli dowieść np. nieparzystości dysku (domkniętego) lub dendrytu; jeśliby dendryt miał nieskończenie wiele końców, trudności byłyby nie do pokonania.





Dygresja. Trochę ich było, ale jeszcze jedna na koniec.

Dlaczego tak okreźnie formułowaliśmy wynik? Pomińmy pretensjonalny tytuł, bo to nieważne. Dlaczego by nie napisać wprost, że nie ma odwzorowań ciągłych dwukrotnych z odcinka (bo chyba o to chodziło?). Dlatego, że wtedy trzeba by powiedzieć w co, i rzecz stałaby się kłopotliwa z całkiem błędnym powodem. Oto dla wygody formalnej pojawiło się w działach ogólnych topologii wiele mniej realnych bytów, przez co nabrało sensu mówienie o ciągłości odwzorowania także i tam, gdzie to już nie ma znaczenia: każde odwzorowanie *staje się ciągle*, jeśli w zbiorze wartości *uznać za otwarte* odpowiednio mało zbiorów. Np. biorąc jakiegokolwiek rozbitcie odcinka na zbiory dwupunktowe, np. takie jak to z rys. 3, lub całkiem nie kontrolowane przez wyobrażenia, robione za cenę pewnika wyboru, i biorąc pod uwagę odwzorowanie przyporządkowujące punktom odcinka elementy rozbitcia, w których te punkty leżą, dostajemy odwzorowanie dwukrotne, które *stanie się ciągle*, jeśli w zbiorze złożonym z elementów rozbitcia *uznać za otwarte* jedynie takie zbiory, dla których sumy elementów do nich należących są zbiorami otwartymi na odcinku. Widać małą wartość takiego rozwiązania.

Od kłopotów z bytami wprowadzanymi dla wygód formalnych nie są wolne i inne działy matematyki: wygody, jakie mogłoby dawać zero, czyż nie są zniweczone przez kłopoty, jakie mamy wtedy, kiedy chcemy przez to zero podzielić?

Twierdzenie o nieparzystości odcinka zostało dowiedzione przez O. G. Harrolda, *Duke Mathematical Journal* 5 (1939), str. 475—486. Potem P. Civin, tamże 10 (1943), str. 49—57, wykazał nieparzystość kostek euklidesowych (domkniętych) wymiaru  $\leq 3$  oraz, że na sferach do wymiaru 3 włącznie nie ma innych sklejeń dwukrotnych oprócz tych, które od razu widzimy. Kostki euklidesowe wyższych wymiarów okazały się też nieparzyste, co pokazał A. W. Czernawski, *Doklady Akademii Nauk SSSR* 144 (1962), str. 286—298.

P. S. Kostka Hilberta, która raz zachowuje się jak kostka (odwzorowania ciągle kostki Hilberta w siebie mają punkty stałe), a raz jak sfera (jest jednorodna), okazuje się parzysta, ale autor tego artykułu nie umie tego pokazać inaczej niż przez łatwe zastosowanie trudnego twierdzenia o tym, że produkt dendrytu i kostki Hilberta jest kostką Hilberta. Dowody nieparzystości kostek euklidesowych są trudne w sposób prawdziwy, polegając na niebanalnym stosowaniu trudnych twierdzeń o zbiorach punktów stałych inwolucji ciągłych na sferach. Liczba 2 okazuje się wyjątkowa: bez trudu buduje się rozbitcia półciągle odcinka (kwadratu, kostki etc.) na same zbiory trójpunktowe etc.



## Zadania

Redaguje mgr Andrzej MAKOWSKI

**M 175.** Niech  $a, b, c$  będą takimi liczbami całkowitymi, że liczba  $a + b + c$  jest podzielna przez 6. Udowodnić, że liczba  $a^3 + b^3 + c^3$  jest podzielna przez 6.

Rozwiązanie na str. 12

**M 176.** Określić w zbiorze dwuelementowym  $X = \{a, b\}$  dwa działania  $\circ$  i  $\square$ , przy czym  $\square$  ma być działaniem nieprzemienne, ale rozdzielnym obustronnie względem działania  $\circ$ .

**Uwaga.** Działaniem (w zbiorze  $X$ ) nazywamy każdą funkcję  $f: X \times X \rightarrow X$ . Mówimy, że działanie  $\circ$  jest rozdzielne obustronnie względem  $\square$ , gdy dla wszelkich (niekoniecznie różnych)  $x, y, z \in X$  jest

$$x \square (y \circ z) = (x \square y) \circ (x \square z),$$

$$(y \circ z) \square x = (y \square x) \circ (z \square x).$$

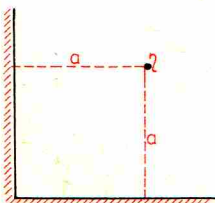
Rozwiązanie na str. 2

**M 177.** Znaleźć liczbę par uporządkowanych podzbiorów rozłącznych zbioru  $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ .  
Rozwiązanie na str. 11

Redaguje dr Waldemar GORZKOWSKI

**F 59.** Dwie półpłaszczyzny metalowe stykają się pod kątem prostym (rysunek). Wewnątrz kąta dwuściennego utworzonego przez te półpłaszczyzny, równoległe do wspólnej krawędzi biegnie jednorodnie naładowany cienki drut. Gęstość liniowa ładunku na drucie (czyli ładunek przypadający na jednostkę długości) wynosi  $\eta$ . Odległości drutu od półpłaszczyzn metalowych są jednakowe i wynoszą  $a$ . Wyznacz wielkość i kierunek siły działającej na jednostkę długości drutu (XXVII Olimpiada Fizyczna, zawody stopnia II).

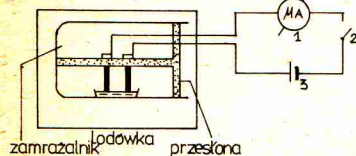
Rozwiązanie na str. 10



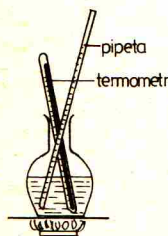
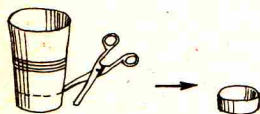


Zainteresowany się propozycją zbadania zależności czasu zamrażania wody od jej temperatury początkowej, zamieszczoną w marcowym numerze „Delt”, przeprowadziłem doświadczenie potwierdzające przedstawione tam tezy.

Istotą metody pomiarowej, którą się posłużyłem, było przewodnictwo elektryczne wody (wodociągowej), a w szczególności brak tego przewodnictwa, gdy woda zamieni się w lód. Do pomiaru czasu zamrażania posłużyłem się stoperem, zaś rolę sygnalizatora pokrywania się powierzchni wody lodem pełnił obwód złożony z baterii 4,5 V, amperomierza, klucza i dwóch elektrod węglowych. Elektrody ustawiłem tak, by dotykały powierzchni wody w naczyniu, w którym zamarza. Zamykając obwód mogłem sprawdzać, czy zachodzi przepływ prądu w wodzie obserwując wskazania amperomierza. Jeżeli woda w naczyniu pokrywała się lodem, przepływ prądu ustawał.



1. Mikroamperomierz ( $\pm 0,1 \mu A$ )
2. Klucz
3. Bateria 4,5V



Proponowany przeze mnie sposób wykonania doświadczenia nie jest z pewnością tak doskonały jak metoda polegająca na posługiwaniu się przy pomiarze temperatury wody termoparą. Nie pozwala on bowiem obserwować w czasie trwania pomiaru zmian temperatury, sygnalizuje jednak, że powierzchnia wody pokrywa się lodem. Podstawowe niedoskonałości tej metody są następujące:

1. Do doświadczenia możemy używać tylko wody lekko zasolonej (wodociągowej), co nie pozwala nam zbadać, jak zachowuje się w omawianej sytuacji woda destylowana.
2. Czas zamrażania mierzony jest do chwili pokrycia się lodem całej powierzchni wody, a nie, jak Redakcja sugerowała, do osiągnięcia przez wodę temperatury  $0^{\circ}C$ . Zamrażanie powierzchni wody jest procesem dosyć przypadkowym, zachodzącym w sposób nieregularny. Dlatego metoda wymaga dużej liczby pomiarów w celu zmniejszenia błędów doświadczalnych.
3. Do doświadczenia używamy równych objętości wody, a nie równych mas, co w zakresie temperatur  $0^{\circ}$ — $100^{\circ}C$  powoduje pewne różnice mas zamrażającej wody.

Poza tym jednak metoda ta, wydaje mi się, spełnia wymagania postawione w artykule.

Doświadczenie przeprowadzamy w zamrażalniku lodówki domowej. Ponieważ poszczególne pomiary trwają dosyć długo (około 20 min.), dobrze jest dysponować dłuższym okresem, aby wykonać je w jednej długiej serii. Im czas trwania takiej serii jest krótszy, tym zmiana warunków panujących w zamrażalniku jest mniejsza. Chodzi tu głównie o oszronienie ścianek zamrażalnika, które może spowodować zmianę temperatury panującej w zamrażalniku. Naczynie użyte do doświadczenia powinno mieć jak najmniejszą masę, aby jego stygnięcie nie zakłócało przebiegu zjawiska. Użyłem do tego celu naczynia z lekkiego, cienkiego tworzywa sztucznego, zrobionego z kubka, jakiego używa się zwykle do napojów chłodzących.

Aby skład chemiczny i zawartość gazów we wszystkich porcjach wody użytych do doświadczenia były takie same, przed doświadczeniem gotujemy większą ilość wody, co usuwa z niej rozpuszczony chlor i tą samą wodą posługujemy się w całym doświadczeniu.

Szybkość parowania w zamrażalniku lodówki można uznać za stałą dla danej temperatury wody, gdyż nie odbywają się tam większe ruchy powietrza.

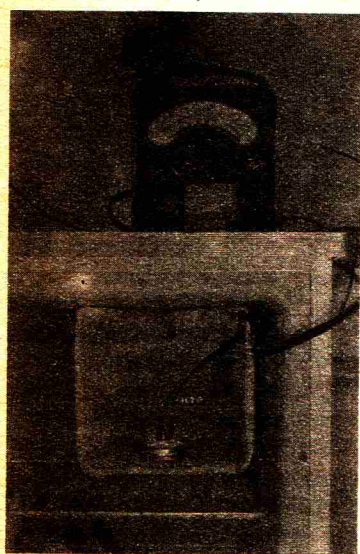
A oto dokładny opis przebiegu pomiaru:

1. W zamrażalniku lodówki zainstalowałem elektrody węglowe, a na zewnątrz zmontowałem obwód.
2. Kolbę z uprzednio przegotowaną wodą ogrzewałem na palniku gazowym lub oziębiałem w lodówce tak, by osiągnęła żądaną temperaturę.
3. Za pomocą pipety z podziałką ( $\pm 0,05$  ml) nabierałem 5 ml wody do pomiaru. Pipetę trzymałem uprzednio w kolbie razem z wodą, aby miała ona tę samą temperaturę.
4. Wodę umieszczałem w plastikowym naczyniu, które wstawiłem do zamrażalnika lodówki tak, by elektrody węglowe dotykały powierzchni wody. Włączałem przy tym stoper mierzący czas zamrażania. Wylot zamrażalnika zamykałem przesłoną utrudniającą wymianę ciepła z otoczeniem zamrażalnika.
5. Za pomocą klucza zamykałem obwód. Oczywiście, przepływ prądu przez wodę powoduje wydzielanie się ciepła Joule'a-Lenza oraz elektrolizę wody. Toteż sprawdzwszy, że prąd płynie, natychmiast ponownie przerywałem przepływ prądu. Po kilku próbnym pomiarach można zauważyć, że woda nie zamarza szybciej niż np. po 15 minutach, wobec czego można przez ten okres czasu w ogóle obwodu nie zamykać. Dopiero później, gdy woda była już dostatecznie zimna, próby, czy prąd płynie, przeprowadzałem częściej. Natężenie prądu było już tak małe ( $0,1$ — $0,2 \mu A$ ), że wydzielone ciepło ani rozkład elektrolityczny wody nie zakłócały pomiarów. Trudno jest dokładnie uchwycić moment, w którym prąd przestaje płynąć. Dlatego mierzyłem czas, w którym natężenie osiągnie wartość  $0,1 \mu A$  (najmniejsza działka przyrządu), zakładając, że czas spadku natężenia do  $0 \mu A$  był dla wszystkich pomiarów taki sam. Mierzenie czasu w ten sposób daje dokładność rzędu około 15 s., tj. 0,25 min.

Należy zauważyć, że prąd w czasie wszystkich prób przewodnictwa wody płynie przez około 10—15 s, co jest wielkością małą w porównaniu z czasem trwania całego pomiaru 15—20 min (około 1%).

Czas zamrażania wyznaczałem dla 11 temperatur początkowych:

$0^{\circ}$ ,  $10^{\circ}$ ,  $20^{\circ}$ ,  $30^{\circ}$ , ...,  $90^{\circ}$ ,  $100^{\circ}C$ . Pomiary wykonywałem w seriach po 5 dla każdej z tych temperatur.



Laboratorium  
w domu



Oto wyniki dwóch serii pomiarowych.

Seria I była przeprowadzona z przerwami w dosyć długim okresie. Temperatura w zamrażalniku wynosiła  $-12^{\circ}\text{C}$ .

Seria II jest dokładniejsza i dała lepsze wyniki. Przeprowadzona została w możliwie krótkim okresie (2 dni) tak, że zmiany warunków zewnętrznych były nieznaczne. Temperatura w zamrażalniku była w tej serii niższa i wynosiła  $-18^{\circ}\text{C}$ .

Rachunek błędów prowadziłem obliczając średnią wartość czasu  $T$  dla danej temperatury:

$$\bar{T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i \quad n \text{ — liczba pomiarów, następnie wyznaczając odchylenie standardowe średniej:}$$

$$S_{\bar{T}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n E_i^2}, \quad E_i \text{ — odchylenie } i\text{-tego pomiaru od wartości średniej,}$$

oraz uwzględniłem współczynnik Studenta  $\alpha_n$  dla  $n$  pomiarów przy poziomie ufności  $0,68 \approx 0,7$  (odchylenie standardowe):  $S_{\bar{T}} = \alpha_n \cdot S_{\bar{T}}'$ .

Na rysunkach przedstawiających zależność czasu zamrażania od temperatury początkowej wody jako błąd pomiaru temperatury przyjąłem dokładność termometru, którym dysponowałem  $\delta = \pm 1^{\circ}\text{C}$ . (Nie publikujemy szczegółowych wyników pomiarów i przebiegu obliczeń, zamieszczamy jedynie końcowe wykresy. Redakcja.)

Lukasz KALINOWSKI, Warszawa

*Autor kończy sprawozdanie z eksperymentu próbą interpretacji wyników. Nie zamieszczamy jej. Chciałbym sprowokować dyskusję dotyczącą samego doświadczenia.*

*Mam kilka uwag krytycznych.*

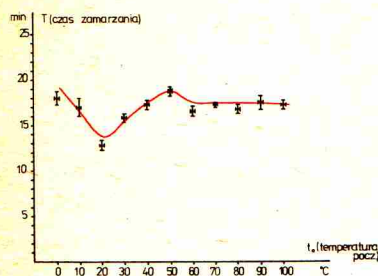
1. Zamrażanie wody wymaga odprowadzenia około 80 razy więcej energii na jednostkę masy niż obniżenie temperatury o  $1^{\circ}\text{C}$ . Stąd zastosowana metoda mierzenia czasu do chwili pokrycia się wody lodem może prowadzić do rezultatów trudnych do interpretacji. Jak uwzględnić zjawisko przechłodzenia wody?

2. Zastanawiający jest pomiar w II serii przy temperaturze zera stopni. Jest to wyraźnie pomiar czasu zamrażania. Być może jest to zjawisko dominujące.

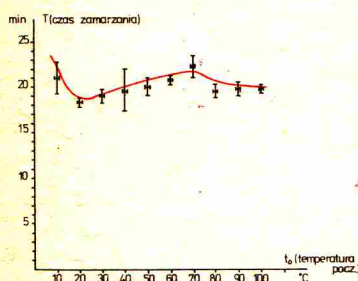
3. Dominowanie zjawiska zamrażania może tłumaczyć niezależność w pierwszym przybliżeniu czasu ostygnięcia i zamrażania od temperatury wyjściowej.

Wątpliwości tego typu można rozstrzygnąć tylko eksperymentalnie. Namawiam do podjęcia badań.

T.H.



Seria I  
Otrzymana zależność czasu zamrażania od temperatury początkowej



Seria II  
Otrzymana zależność czasu zamrażania od temperatury początkowej

## Kącik filatelistyczny (8)

Dzisiaj przypomnimy dwóch matematyków i filozofów pierwszej połowy XVII wieku: Jungiusa i Kartezjusza.

Joachim Jungius (1587—1657) był botanikiem i lekarzem, a także filozofem i matematykiem (wykładał matematykę w Giessen). Już przed Kartezjuszem zwrócił uwagę na znaczenie matematyki dla filozofii, na możliwość ścisłego i logicznego formułowania pojęć przy pomocy języka matematycznego.

Poglądy te rozwinął René Descartes (1596—1650), zwany w Polsce Kartezjuszem, wybitny filozof i matematyk francuski. Był on jednym z czołowych racjonalistów. Głosił, że metoda ludzkiego myślenia powinna opierać się na wzorach rozumowań matematycznych.

W matematyce Kartezjusz wprowadził pojęcia wielkości zmiennej i funkcji, badał równania algebraiczne, może być też uważany za twórcę geometrii analitycznej. Z nazwiskiem jego spotykamy się w matematyce na każdym kroku — wymienny przestrzeń kartezjańska, kartezjański iloczyn zbiorów, kartezjański układ współrzędnych, krzywe Kartezjusza („liść” i „owal”) itd.

Kartezjusz zajmował się także badaniami fizycznymi, głównie optyką geometryczną, formułując m.in. prawa odbicia i załamania światła.

Przedstawiamy portret Joachima Jungiusa na znaczku NRD z roku 1957 (trzechsetna rocznica śmierci uczonego) oraz portret Kartezjusza na znaczku Francji z roku 1937. Przy okazji wydania tego ostatniego znaczka miała miejsce ciekawa historia:

projektant pomylił się w tytule przedstawionego w tle dzieła Kartezjusza „Rozprawa o metodzie”, pisząc „Discours sur la méthode” zamiast właściwego „Discours de la méthode”. Po zauważeniu błędu poczta francuska zdecydowała się powtórzyć nakład tego znaczka ze skorygowanym tytułem, tak, że znaczek ten istnieje w dwóch odmianach.

Jerzy Bartke







### Rozwiązanie zadania F 59

Na powierzchniach metalowych wyindukuje się ładunek powierzchniowy. Rozkład tego ładunku jest taki, że linie sił pola elektrycznego są prostopadłe do powierzchni przewodnika. W przypadku pojedynczej nieskończonej powierzchni z symetrii problemu wynika, że warunek prostopadłości pola będzie spełniony, jeśli pole pochodzące od wyindukowanego ładunku powierzchniowego będzie takie samo, jakie byłoby pole drutu naładowanego z gęstością  $-\eta$  i umieszczonego symetrycznie po drugiej stronie płaszczyzny. Przy dwóch płaszczyznach prostopadłych musimy mieć aż trzy obrazy drutu (rys. 1). Tak więc wyindukowany na obu półpłaszczyznach ładunek powierzchniowy wytwarza w obszarze I takie samo pole, jak trzy druty naładowane gęstościami liniowymi  $-\eta$ ,  $\eta$  i  $-\eta$ , znajdujące się w częściach II, III i IV. (Zauważmy przy okazji, że całkowite pole elektryczne w częściach II, III i IV jest równe zeru.) Pole pochodzące od drutu naładowanego gęstością  $\eta$  wyznacza się z prawa Gaussa wykorzystując symetrię układu — rys. 2. Pole  $E$  ma symetrię osiową, a zatem

$$\epsilon_0 E \cdot 2\pi rh = \eta h.$$

Stąd

$$E(r) = \frac{\eta}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Uwzględniając kierunek pola  $E$ , można napisać

$$E(r) = \frac{\eta}{2\pi\epsilon_0 r^2} r.$$

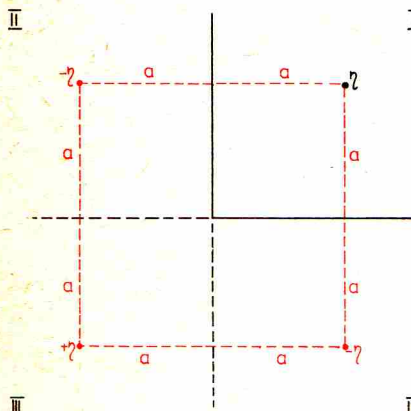
Na drut w przestrzeni I działa pole wypadkowe pochodzące od obrazów tego drutu w obszarach II, III i IV. Wartość tego pola wynosi

$$E_{wyp} = \frac{\eta}{2\pi\epsilon_0 2a} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} - \frac{\eta}{2\pi\epsilon_0 2a} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} + \frac{\eta}{2\pi\epsilon_0 2a \sqrt{2}} = -\frac{\eta \sqrt{2}}{8\pi\epsilon_0 a}.$$

Jeżeli  $\eta > 0$ , to pole to jest skierowane ku krawędzi kąta dwusiecznego. Szukana siła jest więc równa

$$F = -\frac{\eta^2 \sqrt{2}}{8\pi\epsilon_0 a}.$$

Znak „-” wskazuje, że jest ona skierowana ku krawędzi kąta dwusiecznego niezależnie od znaku  $\eta$ .



Rys. 1

## Coś o sprawdzaniu

Każdy, kto prowadzi badania naukowe, zna emocje związane z oczekiwaniem na wyniki pomiaru, który ma potwierdzić lub odrzucić choćby zwyczajną roboczą hipotezę.

Fizycy, pracujący podczas drugiej wojny światowej nad skonstruowaniem bomby atomowej, rozważali w swoich obliczeniach możliwość, że eksplozja jednej bomby będzie zapalnikiem dla reakcji łańcuchowej na całym globie. Zdarzenie takie zdawało się praktycznie niemożliwe. Jeżeli jednak wniosek ten był błędny... To już nie były emocje, to było stałe ogromne napięcie.

W 1959 r. znana pisarka amerykańska Pearl Buck ogłosiła wywiad z Arturem H. Comptonem na temat możliwości reakcji jądrowej wodoru i innych pierwiastków:

— „... cóż powiedzieć o wodorze w wodzie morskiej. Czy wybuch bomby atomowej nie zainicjuje eksplozji oceanu. Oppenheimer bał się nie tylko tego. Azot w powietrzu też jest niestabilny, aczkolwiek w mniejszym stopniu. Czy atomowa eksplozja w atmosferze nie spowoduje reakcji łańcuchowej?

— Ziemia by wyparowała — powiedziałam.

— Dokładnie — odpowiedział Compton i to z jaką powagą. — Byłaby to ostateczna katastrofa. Lepiej zaakceptować panowanie nazistów, niż ryzykować ostateczny koniec ludzkości”.

Compton brał udział w ostatecznej decyzji. Jeżeli obliczone szanse, że Ziemia zostanie unicestwiona, byłyby większe niż trzy milionowe, byłby za wstrzymaniem próby. Prawdopodobieństwo to okazało się tylko nieco mniejsze i prace kontynuowano. Pierwsza eksplozja nastąpiła 16 czerwca 1945 roku o 5<sup>30</sup> rano w stanie New Mexico. Zdenerwowanie zebranych tak opisuje jeden z uczestników, Stephan Groueff:

„Wszyscy byli przemęczeni i napięcie rosło w sposób widoczny ze zbliżaniem się godziny zero. Generał Groves niepokoił się szczególnie o Oppenheimera, który zdawał się zbliżać do granicy swej wytrzymałości. Groves chciał, aby dyrektor laboratorium był w chwili podejmowania ostatecznej decyzji jak najbardziej spokojny. W otoczeniu znajdowało się zbyt wielu podnieconych ludzi dających mu dobre rady. Denerwował go również Fermi przyjmujący zakłady, czy bomba zapali powietrze i jeżeli tak, to czy zniszczy tylko New Mexico, czy też cały świat. Fermi twierdził również, że nawet jeżeli bomba nie wybuchnie, będzie to bardzo istotny eksperyment — udowodni to, że wybuch bomby atomowej jest najprawdopodobniej niemożliwy”.

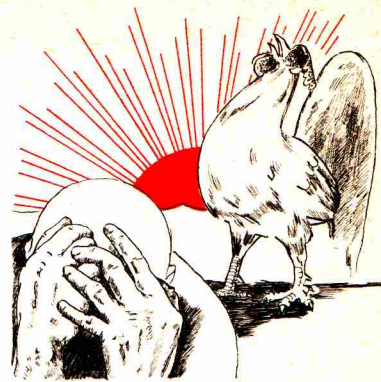
— Nie każda teoria i hipoteza fizyczna sprawdzana jest w tak dramatycznych warunkach, ale każda teoria musi przejść przez ten egzamin, chyba że..., ale tu musimy się przenieść prawie 1800 lat wstecz.

W zeszłym roku ukazała się książka Roberta Newtona pt. Zbrodnia Klaudiusza Ptolemeusza. Jeżeli wierzyć autorowi — Ptolemeusz był największym oszustem, jakiego zna historia astronomii. Opierając się na współczesnych tablicach astronomicznych Robert Newton sprawdził wyniki obserwacji Ptolemeusza, które zamieścił on w swoim dziele Syntaxis. Niektóre obserwacje są tak dokładne, że nie mogły być wykonane przy użyciu ówczesnych przyrządów. Inne znów obarczone są niezwykle dużym błędem. R. Newton uważa, że Ptolemeusz po prostu dopasował wyniki obserwacji do swojej teorii lub po prostu je zmyślił. Dla ścisłości należy powiedzieć, że nie wszyscy historycy nauki zgadzają się z tak ostrą oceną Ptolemeusza podkreślając, że nie fałszował on wyników obserwacji, a jedynie wybierał te dane, które pasowały do teorii, co było przyjętą w owym czasie metodą.

Powiedzmy na koniec, że niestaranne sprawdzenie teorii nie wychodzi przeważnie nauce na zdrowie.



Nowocześni ludzie często wykazują pewną ciekawą sprzeczność. Na ogół dysponują licznymi teoriami, jednocześnie jednak nigdy nie dostrzegają roli, jaką teoria odgrywa w życiu praktycznym. Wciąż mówią o temperamencie, okolicznościach i roli przypadku. Ale większość ludzi jest takimi, jakimi ich ukształtowały ich własne teorie. Większość ludzi popełnia morderstwa, wstępuje w związki małżeńskie, czy też po prostu marnotrawi czas w wyniku jakiejś własnej teorii życia, narzuconej lub dowolnie obranej.  
(G. K. Chesterton, *Poeta i wariaci*, przekład Zofii Sroczyńskiej.)



## Zmysły

Mgr Jacek KACZYŃSKI

Wszyscy dobrze wiemy, że zadawać pytania można w sposób ułatwiający lub utrudniający odpowiedź. Znamy to choćby ze szkoły, egzaminów czy teleturniejów. Na przykład — ile centymetrów wynosi różnica poziomu wody w Bałtyku między przypływem a odpływem? To pytanie (zadane w jednym z teleturniejów) jest wybitnie „podchwytliwe”, gdyż w Bałtyku nie ma w ogóle przypływów. Z kolei — na przeciwnym krańcu można umieścić szereg pytań opatrzonych wskazówką w rodzaju anegdotycznej już niemal: „dla ułatwienia dodajmy, że...”

Poznała to zjawisko na własnej skórze 40-osobowa grupa studentów matematyki Uniwersytetu Warszawskiego, gdy wzięła udział w swego rodzaju „psychoeksperymentie”. Polegał on na wypełnieniu ankiety zawierającej pytania na temat różnych szczegółów architektury wnętrza hallu Pałacu Kultury i Nauki. W tym właśnie gmachu mieści się Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, a więc wszyscy ci studenci od paru lat przemierzali ów hall po parę razy dziennie i powinni go znać jak własną kieszeń. Okazało się jednak inaczej.

Zacznijmy od wejścia do gmachu. Jedną z najcharakterystyczniejszych jego cech jest troje drzwi obrotowych, ale tylko trzy czwarte osób odpowiedziało prawidłowo na pytanie, ile jest tych drzwi. Pozostali sądzili, że jest ich 2 lub 4, a jednej osobie wydawało się nawet, że jest ich aż 5. Pytanie to zostało sformułowane obiektywnie. Były jednak także pytania „tendancyjne” — sugerujące dobrą lub przeciwnie — błędną odpowiedź. Dodać trzeba, że połowa studentów dostała ankiety wyłącznie z pytaniami „obiektywnymi”, zaś połowa miała niektóre pytania sformułowane tendancyjnie — jako naprowadzające, bądź mylące.

Najciekawszy efekt dały pytania mylące. Okazało się, jak zawodna jest nasza pamięć, czy też, może, jak mało spostrzegamy w miejscach, w których często jesteśmy. Zwłaszcza, gdy jest tam dużo różnorodnych szczegółów architektonicznych — jak właśnie w hallu PKiN. Okazało się, z jaką łatwością nasza wyobraźnia tworzy wtedy nie istniejące szczegóły czy przedmioty. Rozmnażają się kolumny. Schody wydłużają się lub skracają. Po sufitach i ścianach wędrują punkty świetlne: kinkiety przeobrażają się w świetlówki, zaś lampy neonowe — w żyrandole. Stojąca pośrodku rzeźba wędruje w jedną albo drugą stronę, raz stoi, raz siedzi, czasem jest jedną postacią, czasem dwiema. I tak dalej, i tak dalej.

Przyjrzyjmy się jeszcze przykładom. Na pytanie w wersji obiektywnej: „czy na ścianach galerijek są jakieś ozdoby?” — 90% osób słusznie odpowiedziało, że nie ma. Lecz gdy zapytano „jakie ozdoby znajdują się na ścianach galerijek?” — fałszywa sugestia zawarta w tym sformułowaniu sprawiła, że połowa odpowiadających wypełniła w wyobraźni to miejsce najróżniejszymi zdobami. Tak więc ściany pokrywały się malowidłami albo płaskorzeźbami, wyrastały jakieś marmurowe kwiaty albo metaloplastyka.

Na pytanie obiektywne „czy wejścia do sali przy windach mają drzwi?” prawie połowa osób odpowiedziała prawidłowo — że nie mają. Jednak z ilością tych wejść (w pytaniu sąsiednim) były pewne kłopoty — znów niespełna połowa pamiętała, że są 2, pozostałym wydawało się, że jest ich 1 lub 3. Z tych, których zapytano „jakie drzwi są w tych wejściach?”, tylko jedna czwarta nie dała się zwieść sugestii. Natomiast cała reszta zaczęła skwapliwie fantazjować. „Wmontowywano” tam drzwi wahadłowe, półobrotowe; niekiedy były to drzwi szklane, niekiedy dębowe, często pokrywała je metalowa krata.

Jak widać z tych przykładów, niesłychanie łatwo było uczestnikom ankiety powoływać do życia bardzo zróżnicowane przedmioty i detale lub mnożyć ilość istniejących. Wydaje się, że gdyby zmaterializować wszystkie te wtwory fantazji — nie udało by się ich pomieścić w hallu PKiN, mimo jego pokaźnych rozmiarów. Ale wybaczymy naszym matematykom.

Red.: Przedstawione fakty przekonują nas o doniosłości architektonicznego kształtu i wystroju pomieszczeń dla ich użytkowników.



### Rozwiązanie zadania M 177

Niech  $A$  będzie  $k$ -elementowym podzbiorem zbioru  $X_n$ ,  $B$  zaś dowolnym podzbiorem zbioru  $X_n$ , rozłącznym z  $A$ . Dla danego zbioru  $A$  zbiór  $B$  może być jednym z  $2^{n-k}$  podzbiorów zbioru  $X_n - A$ . Tak więc par  $(A, B)$ , gdzie  $A \subset X_n$ ,  $B \subset X_n$ ,

$A \cap B = \emptyset$  i  $A$  ma  $k$  elementów jest  $\binom{n}{k} 2^{n-k}$ ,

gdzie zbiór  $A$  można wybrać na  $\binom{n}{k}$  sposobów. Szukanych par  $(A, B)$  jest więc

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} 1^k = (2+1)^n = 3^n.$$

Wynik ten można także uzasadnić indukcyjnie. Dla  $n = 1$  istnieją trzy pary podzbiorów rozłącznych:  $(\emptyset, \emptyset)$ ,  $(\emptyset, \{1\})$ ,  $(\{1\}, \emptyset)$ . Załóżmy, że liczba par uporządkowanych podzbiorów rozłącznych zbioru  $X_n$  jest równa  $3^n$ . Niech  $(A, B)$  będzie parą uporządkowaną podzbiorów rozłącznych zbioru  $X_{n+1}$ . Wówczas do co najmniej jednego ze zbiorów  $A$  i  $B$  należy liczba  $n+1$  i zachodzi jeden z prz./padków:

- 1)  $A \subset X_n$ ,  $B \subset X_n$
- 2)  $A \subset X_n$ ,  $n+1 \in B$
- 3)  $n+1 \in A$ ,  $B \subset X_n$ .

Tak więc z każdej pary  $(A, B)$  podzbiorów rozłącznych zbioru  $X_n$  otrzymujemy trzy pary podzbiorów rozłącznych zbioru  $X_{n+1}$ :  $(A, B)$ ,  $(A, B \cup \{n+1\})$ ,  $(A \cup \{n+1\}, B)$ . Każdą parę podzbiorów rozłącznych zbioru  $X_{n+1}$  otrzymamy w ten sposób. Zatem szukana liczba dla zbioru  $X_n$  równa jest  $3 \cdot 3^n = 3^{n+1}$ . Na podstawie zasady indukcji matematycznej wnioskujemy, że dla każdej liczby naturalnej  $n$  liczba par uporządkowanych podzbiorów rozłącznych zbioru  $X_n$  równa jest  $3^n$ .



# Niebezpieczne golenie

Dr Krzysztof PRAŻMOWSKI

Rozpoczynając swoją „Summa Logicae” Ockham formułuje zasadę metodologiczną, której dalej konsekwentnie stara się przestrzegać i do której wielokrotnie od tego czasu inni ludzie się odwoływali. Do historii weszła ona pod nazwą „brzytwy Ockhama”. Oddajmy na chwilę głos średniowiecznemu logikowi:

„... Można natomiast wątpić, czy imiesłowom wypowiedzianym i napisanym odpowiadają w umyśle pewne pojęcia, odrębne od czasowników, a to z tego powodu, iż nie wydaje się, aby istniała konieczność przyjmowania tak wielkiego zróżnicowania w dziedzinie pojęć pomyślanych”.

Bywała ona najczęściej potem interpretowana jako dyrektywa usuwania z budowanych teorii założeń i pojęć zbędnych: „nie mnożyć bytów ponad potrzebę”. Jest to niewątpliwie postulat słuszny, a jedyną wątpliwość budzić może fragment „*ponad potrzebę*”. (Druga zresztą wątpliwość dotyczy może słowa „*bytów*”).

Spójrzmy najpierw na matematykę. Tak, jak chciałaby spora część logików, uznajemy, że teoria matematyczna to zbiór formalnie zbudowanych zdań zamknięty ze względu na konsekwencje — cokolwiek dałoby się dowieść przy pomocy zdań owego zbioru także do teorii należy.

W praktyce teorię formułuje się podając pewien podzbiór takiego zbioru zwany zbiorem aksjomatów i mówiąc, że teoria to to wszystko, co z aksjomatów możemy wyprowadzić. Jak tu użyć brzytwy? Ano — gdyby się okazało, że pewne ze zdań uznanych za aksjomaty są konsekwencjami pozostałych, to przecież te zdania można opuścić w aksjomatyce, na teorię to nie wpłynie. Podobnie, gdyby się okazało, że jakieś pojęcie używane w teorii daje się zdefiniować za pomocą pozostałych, to także można je pominąć — w razie potrzeby będziemy się posługiwali jego definicją. Inna sprawa, czy wygodniej będzie nam taką teorię uprawiać. Operacje obu zresztą typów (mówi się „fachowo” o rugowaniu aksjomatów zależnych i pojęć zależnych) są w matematyce stosowane. Pierwsza z nich — to w istocie opuszczanie założeń zbędnych, druga zaś — to opuszczanie zbędnych nazw.

Porwani tym ideałem niektórzy filozofowie wysunęli postulat przeprowadzenia podobnej operacji na języku naturalnym: znaleźć taki zbiór słów (pojęć), przy pomocy których dałoby się zdefiniować wszystkie słowa (pojęcia) języka. Stworzyć uniwersalny słownik oparty na tych pojęciach. Na szczęście nikt nie proponował, żeby owe inne słowa, słowa zależne, wyrugować z mowy. Po takiej operacji teoria matematyczna pozostaje jeszcze żywa, choć może mniej zrozumiała. Jak jednak wyglądałby „Pan Tadeusz” czy wiersze Leśmiana, gdyby usunąć z nich pojęcia zależne?

Zdaje się bowiem, że czasownik oraz jego imiesłów wzięte razem ze słowem „jest” są zawsze równoważne pod względem znaczeniowym. I z tego powodu podobnie jak zwielokrotnienie synonimów wymyślone zostało nie z powodu konieczności znaczeniowej, ale ze względu na piękno języka lub inną przypadkową [chyba z logicznego punktu widzenia tylko?] rację, albowiem wszystko, co może być oznaczone przy pomocy nazw synonimicznych, może być w dostateczny sposób oznaczone przez jedną z nich, i stąd wielość synonimów nie odpowiada wielość pojęć, tak również wydaje się, że zróżnicowanie czasowników wymówionych oraz imiesłów nie jest spowodowane koniecznością znaczeniową i z tej racji wydaje się, że imiesłowom słownym nie muszą odpowiadać odrębne pojęcia w umyśle. Analogiczna wątpliwość może istnieć odnośnie do zaimków.

Ockham, *Summa Logicae*, PWN 1971, s. 17.



**Rozwiązanie zadania M 175**  
Zauważmy, że zachodzi równość

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 + - 3(a + b + c)(ab + bc + ca) + 6abc.$$

Ponieważ jedna z liczb  $a, b, c$  jest parzysta, więc  $6 \mid 3abc$ , a ponieważ na mocy założenia również pierwsze dwa składniki sumy występującej po prawej stronie równości są podzielne przez 6, zatem  $a^3 + b^3 + c^3$  jest liczbą podzielną przez 6.

Inne rozwiązanie można otrzymać rozpatrując reszty jakiej przy dzieleniu przez 2 i 3 mogą dawać liczby  $a, b, c$ .

To fakt, że usuwając pojęcia zależne oszczędzamy na ilości nazw. Zwróćmy jednak uwagę na to, że zarazem zdania, w których takie pojęcia zastąpiliśmy ich definicjami, mają bardziej skomplikowaną budowę.

A zresztą — i na definicje trzeba uważać.

W logice obowiązuje prawo

$$P(a) \rightarrow (\forall x)P(x).$$

Umówmy się, że  $(\forall x)Q(x)$  oznacza „to coś, co ma własność  $Q$ ”.

Wtedy z definicji  $Q((\forall x)Q(x))$ .

W takim razie dla każdej formuły  $Q(x)$

otrzymujemy  $(\forall x)Q(x)$ .

Wystarczy przyjąć  $Q(x) : \Leftrightarrow x$  jest kwadratowym kołem, aby uzyskać — dowodliwą — sprzeczność, przez zdefiniowanie

kwadratowe koło :=  $(\forall x)Q(x)$ .



Przy takim rozumieniu zresztą nie ruguje się żadnych założeń o istnieniu bytów. Staramy się tylko oszczędniej używać języka.

Można jednak inaczej, można powiedzieć sobie — chcę zbudować taki fragment teorii, w którym pewne fakty dałyby się dowieść. I wtedy szukamy tak małego zbioru aksjomatów, który by nam to już zapewnił. Odrzucamy takie, które do dowodu pożądaných własności nie są potrzebne. Ba, ale to znowu sztuczka formalna — można by było te własności po prostu założyć, a potem wyrzucić zależne zdania. No tak, powiedzą matematycy — ale to tak jakoś nieelegancko. I istotnie, fryzjer strzygąc klienta stara się (na ogół), by włosy były równo i estetycznie przycięte.

Posługiwanie się brzytwą — to także sztuka.

Jest jednak i inne rozumienie słów „ponad potrzebę”, umiłowane przez empiryków. W ich interpretacji postulat Ockhama znaczy tyle, co przestroga przed badaniem tworów, których istnienia ani własności nie umiemy stwierdzić w sposób odpowiedzialny. Skoro bowiem o czymś mówimy naukowo, to to coś powinno istnieć realnie. Jeśli jednak nie mamy metody przekonania się, czy istotnie owo coś istnieje i jakie ma własności, to powinniśmy powstrzymać się od mówienia o nim. Poeci mogą pisać o smokach, gryfach i centaurach albo



Zasada względności (nieodróżnialność spoczynku i ruchów jednostajnych przez żaden eksperyment, albo raczej tożsamość wyników wszystkich doświadczeń przeprowadzonych w różnych układach inercjalnych) znana była poprzednio, ale jej pełną głębię zrozumiał dopiero Einstein. Nie ma żadnego wyróżnionego „prawdziwie” spoczywającego układu, w którym eter byłby nieruchomy. Korzystając z tego można wyprowadzić transformację Lorentza, a ile wynosi jedyna dowolna stała  $c$  (300 000 km/s, czy nieskończoność) jest kwestią odpowiedniego pomiaru. Takich pomiarów jest wiele i większość z nich wcale nie wiąże się ze światłem. Polegają one po prostu na sprawdzaniu kinematyki relatywistycznej [Red.]

W fizyce potraktowanie na serio słów „cząstki elementarne są tak małe, że to praktycznie punkty” wywołałoby podobnie katastrofalne „obcięcie ucha”. Zrezygnowanie z wyznaczalności wymiarów cząstek (przyjęcie, że są po prostu punktami) prowadzi do wniosku, że ich energia, a zatem i masa, jest nieskończoność wielka. Chwytnie się kwantowej brzytwy i nieprzypisywanie cząstkom podstawowym pojęcia „rozmiar” powoduje, że w ramach teorii masy tych cząstek stają się nieprzewidywalne; realne ich wielkości można wyznaczyć jedynie doświadczalnie.

o duszy, naukowcy jednak powinni się wystrzegać traktowania tych słów jako nazw czegośkolwiek i unikać chociażby chęci badania takich tworów.

Aby zaś można było stwierdzić, czy coś istnieje, trzeba to coś zaobserwować. Fizycy chwają się tu swoim osiągnięciem, jakim było wyrugowanie pojęcia eteru. Jak pisał A. Szymacha (Delta 4/1977), eter miał być czymś, co — zasadniczo nieobserwowalne — w pożądany sposób wpływa na przebieg obserwowanych zjawisk. Zrezygnowanie z istnienia eteru i przyjęcie zamiast tego stosownej struktury przestrzeni doprowadziło do powstania szczególnej, a potem ogólnej teorii względności — a więc do jednego z większych osiągnięć współczesnej fizyki. Jest to sprawne użycie brzytwy do ucięcia narodził się tylko przeszkadzającej prawidłowo opisywać świat — a do tego pustej (w środku).

Zastanówmy się tylko chwilę, co oznaczać ma „obserwowalność”. Tak naprawdę to obserwować możemy tylko wzajemne oddziaływania pewnych obiektów. Każdy uwierzy, że pewnego rodzaju zaobserwowaniem ognia jest dotknięcie palcem drzwiczek pieca. Reakcja skóry jest bezpośrednio obserwowana. Stąd wnosimy, że ciepło jest jakością obserwowalną. Możemy także chcieć stwierdzić, że ciepłota pieca jest pewnej określonej wielkości — to znaczy chcemy zmierzyć tę ciepłotę. Przykładamy do pieca termometr, odczytujemy jego wskazania i sprawdzamy, jaką liczbę wskazuje. Doświadczenie to proste i zawsze wykonalne — w efekcie dowiedzieliśmy się, jaką temperaturę miał piec (o ile termometr w międzyczasie nie pękł).

Przypuśćmy teraz, że chcemy wykonać inne doświadczenie — przetestować orbitalny model atomu wodoru. No tak, ale żaden określony tor elektronu nie może być sprawdzony. Można powiedzieć — elektron nie jest obserwowalny zatem — i wyrugować to pojęcie. Jednakże widać, że w istocie to „tor elektronu” jest owym zbędnym bytem, zbędnym pojęciem. Wyjście jest, wystarczy przyjąć zamiast niego „prawdopodobieństwo toru elektronu”. Daje to nam natychmiast i czysto teoretyczne korzyści. Obserwujemy na przykład interferencję elektronów. Skoro tak, to i prawdopodobieństwa zajmowanych przez nie stanów muszą interferować. Prawdopodobieństwo znalezienia się dwóch elektronów w tym samym stanie wygasza się, czyli równa się zeru. Ostatecznie wyprowadzamy stąd zakaz Pauliego; praktycznie więc zrezygnowanie z przypisywania elektronom klasycznych torów pozwoliło nam ów, również obserwowalny zakaz wyjaśnić. Trzeba uznać, że chociaż można określać „tor” obiektów makroskopowych, a i elektrony w istocie są obserwowalne, to „tory elektronów” są tylko pustym dźwiękiem bez fizycznego sensu.

W pierwszym przykładzie stwierdziliśmy nieistnienie pewnego rodzaju materii; w drugim — pewnej formy zachowywania się tejże. W obu przypadkach argumentem była nieobserwowalność odpowiednich tworów. Ot, taki zamach brzytwą — i brzytwa tnie powietrze, słowa. Przecież nie było nic realnego pod tymi słowami ukrytego.

Może zresztą niekoniecznie tak jest. Z uznania nieobserwowalnych bezpośrednio tworów można zrezygnować bądź dlatego, że się wierzy, iż ich wcale nie ma, bądź dlatego, że to jednak upraszcza samo badanie, opisywanie świata.

Na koniec jeszcze jeden przykład. Nie sposób sprawdzić, co naprawdę znaczą słowa. Może dla każdego co innego. Na pewno „*monop*” co innego po rosyjsku, a co innego po polsku znaczy, podobnie jak np. „*diwan*”. Można zgodzić się na następujące, skrajnie już postawienie sprawy: „każdy ma własny język, którym się posługuje”. Nieobserwowalne są jednak ściśle i naukowo (może poza najprostszymi wyrazami) nawet pośrednio znaczenia, jakie w tym języku wiąże on ze słowami. W takim razie należy uznać, że język nic nie znaczy — i badać taki właśnie język. No i tak powstały różne gramatyki generatywne. Tylko czym jest język, jeśli jego wyrażenia nic nie znaczą?

Być może i brzytwa, która chlasta tu na prawo i lewo, jest słowem bez istotnego sensu.

A zapewne całe nieszczęście bierze się stąd. Proszę mi odpowiedzieć na takie proste pytanie: „Jakie mamy przyjęte sprawdzalne kryteria sensowności naszych działań — zdrowy rozsądek, określony światopogląd, spodziewana użyteczność czy jeszcze coś innego?” Mechaniczne, a zatem pewne i ściśle stosowanie określonych reguł prowadzi niestety do efektów we fryzjerstwie zwanych „obcięcie równo pod garnek”. Co prawda część ludzi gustuje w takich fryzurach. Inni znowu lubią się czesać na jeża ... Parafrazując Ockhama rzec tu można: każdemu (z bytów) według jego potrzeb.





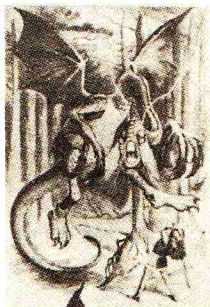
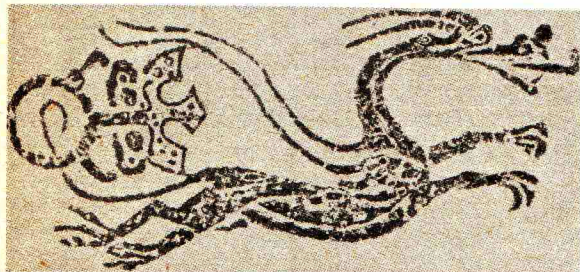
## O ścisłości w nauce

Jorge Luis Borges,  
*Historia universal de la infamia*,  
przekł.  
Andrzej Sobol-Jurczykowski,  
PIW, 1976

... W owym Cesarstwie Sztuka Kartografii osiągnęła taką Doskonałość, że Mapa jednej tylko Prowincji zajmowała całe Miasto, a Mapa Cesarstwa całą Prowincję. Z czasem te Niezmierne Mapy okazały się już niezadowolające i Kolegia Kartografów sporządziły Mapę Cesarstwa, która posiadała Rozmiar Cesarstwa i pokrywała się z nim w każdym Punkcie. Mniej Oddane Studiom Kartografii Następne Pokolenia doszły do wniosku, że ta obszerna Mapa jest Nieużyteczna i nie bez Bezbożności oddały ją na Pastwę Słońca i Zim. Na Pustyniach Zachodu zachowały się rozczłonkowane Ruiny Mapy, zamieszkałe przez Zwierzęta i przez Żebraków; w całym Kraju nie ma innej pozostałości po Dyscyplinach Geograficznych.  
(Suárez Miranda, *Podróże Mężów Roztropnych*, księga czwarta, rozdział XIV, Lèride, 1658).

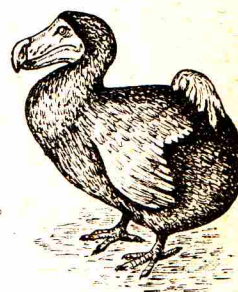
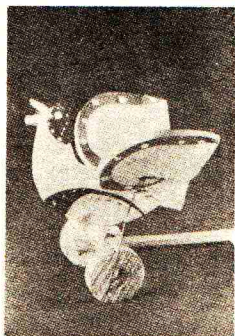
## To jeszcze pytanie

Stworzono teorię, w myśl której smoki nie istnieją, ponieważ zwierzęta o takiej budowie nie mogłyby latać, gdyż ani ich skrzydła, ani ogólna konstrukcja ciała nie dopuszczają tego sposobu lokomocji.



Świadczą o tym wizerunki smoków.

Jeśliby argumenty te uznać za wystarczające, to redakcja Deltę mogłaby wykazać, że nie istnieją również ptaki, ponieważ zwierzęta o takiej budowie itd.



Świadczą o tym choćby załączone wizerunki ptaków.

Można też zlekceważyć powyższe argumenty, w tym jednak wypadku tak kwestię istnienia ptaków, jak i smoków należy uznać za otwartą.

## Trochę futurologii

1 X 1979

Prof. Grüner z Detroit na międzynarodowej konferencji fizyków w Kopenhadze wygłasza wykład pt. „Zacieranie się cech przedmiotu badanego w fizyce cząstek elementarnych”.

Postuluje badania nad wyodrębnieniem cząstki atomowej (decydującej o tym, że dany obiekt jest atomem).

1 XII 1980

Zespół fizyków eksperymentatorów pod przewodnictwem prof. Orłowicz przy nowym megaakceleratorze w Los Angeles wyodrębnia cząstkę atomową. Postuluje się dalsze badania i budowę potężniejszych akceleratorów.

10 II 1981

Zespół badawczy z Dubnej odkrywa cząstkę stołową (decydującą o tym, że dany obiekt jest stołem).

1 III 1981

Odkrycie cząstki skórzanej.

12 IV 1981

Odkrycie cząstki kostnej.

17 V 1982

Odkrycie cząstki katarowej i czosnkowej (ogółem znane są już 1794 cząstki).

20 VII 1983

Prof. Ensenstein na międzynarodowej konferencji w Cannes formuluje ogólną zasadę, w myśl której **ŻADNA TEORIA OPISUJĄCA DANY OBIEKT NIE MOŻE BYĆ MNIEJ SKOMPLIKOWANA OD DANEGO OBIEKTU.**

1 IV 1990

Ostatnia konferencja fizyczna.



# delta

## Statystyka w wesołym miasteczku

Ulegając obietnicom afiszów, kupujemy los. Mamy pecha, los jest pusty. Kupujemy drugi. Znow nic. Trzeci też pusty. Jeszcze wszystko w porządku. „Co trzeci” nie znaczy „na trzy losy jeden musi wygrać”, tylko że na — powiedzmy — każde 100 losów, pustych jest 67 czy 66. Kupujemy zatem czwarty los. Pusty. „Coś chyba nie tak z tą loterią”. „Powinniśmy chyba już coś wygrać”. Opanowuje nas żyłka hazardu. Przy piątym pustym losie zaczynamy podejrzewać, że afisz kłamał: wygrywających losów jest mniej niż  $1/3$ . Przypuszczenie to umacnia się, jeżeli nie wygrywamy nic za szóstym, siódmym i ósmym razem. Ale od którego momentu możemy „tak naprawdę” twierdzić, że loteria jest nieuczciwa? że afisz kłamie? Stuprocentową pewnością osiągniemy dopiero po wykupieniu wszystkich (przy sprzyjających układach prawie wszystkich) losów. Ale rozstrzygnięcie uczciwości loterii poprzez wykupienie wszystkich losów przypomina nieco metodę odróżniania banknotów fałszywych od prawdziwych na podstawie ich popiołu. Musimy wobec tego zadowolić się przekonaniem, opartym na statystyce i rachunku szans.



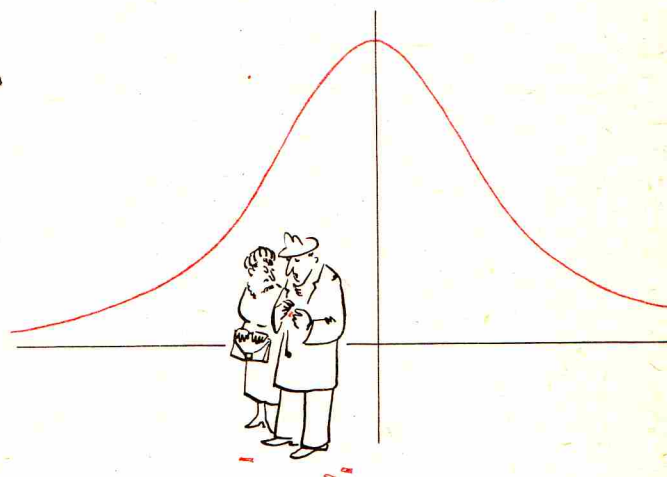
Załóżmy, że losów jest kilkaset, tak że ubytek kilku tylko w bardzo niewielkim stopniu zmienia stosunek pustych do pełnych. Pierwszy los daje nam  $1/3$  szans wygranej. Przy dwóch losach szansa dwukrotnej przegranej wynosi  $2/3 \cdot 2/3 = 4/9$ , a trzy kolejne losy są puste tylko w  $(2/3)^3$  części przypadków. Przy zakupie  $n$  losów szansa choćby jednej wygranej jest równa

$$s_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Obliczmy kilka pierwszych  $s_n$ :

$$\begin{aligned} (2/3)^4 &= 16/81 \approx 0,198 \\ (2/3)^5 &= 32/243 \approx 0,132 \\ (2/3)^6 &= 64/729 \approx 0,088 \\ \dots\dots\dots \\ (2/3)^{10} &\approx 0,017 \\ (2/3)^{11} &\approx 0,012 \\ (2/3)^{12} &\approx 0,008 \\ (2/3)^{13} &\approx 0,005. \end{aligned}$$

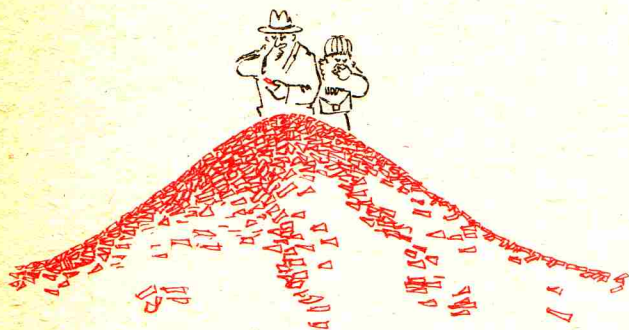
Widzimy, że dopiero  $s_{12} \approx 0,992$  przekracza 99%. Gdybyśmy grali jednocześnie albo raz za razem na 1000 podobnych loteriach, najprawdopodobniej około 8 razy wyciągnęlibyśmy 12 kolejnych losów pustych. Możemy powiedzieć tak: jeżeli 12 kolejnych losów loterii (w której podobno co trzeci los wygrywa) okaże się pustych, to albo mamy okropnego pecha, albo organizatorzy kłamią — przy czym ta druga ewentualność jest znacznie bardziej prawdopodobna. Mamy prawo mówić do znajomych: nie kupujcie losów tej loterii, bo jest nieuczciwa.



Zastosowaliśmy tutaj operację zwaną „weryfikacja hipotezy” (weryfikacja = sprawdzanie prawdziwości, hipoteza = przypuszczenie). Postawiliśmy hipotezę: „loteria jest uczciwa” i okazało się, po wyciągnięciu 12 kolejnych losów pustych, że jest to niemal nieprawdopodobne, można by powiedzieć: praktycznie niemożliwe. Gdyby zależało nam na „bardziej wiarygodnym dowodzie”, należałoby, rzecz jasna, przebadać więcej losów. Wiele procesów przypadkowych opisuje krzywa Gaussa, a raczej różne krzywe Gaussa. Według tych krzywych układają się odchylenia wzrostu ludzi od przeciętnej, długości ich stóp, rzeczywiste wagi „kilogramowych” toreb cukru, rzeczywiste rozmiary „takich samych” detali w zautomatyzowanym procesie produkcyjnym.

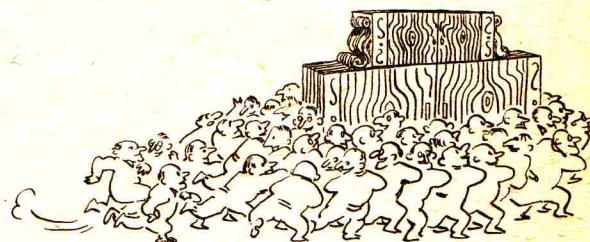


Red.: Badano nie raz — wyniki zależą jednak od tego, jak zdefiniować uzdolnienia matematyczne i jak się je mierzy.



Z pewnością i zdolności matematyczne ludzi też podlegają takiemu samemu rozkładowi, choć nie wiadomo nam, czy ktoś to kiedyś badał. Gdybyśmy chcieli odpowiedzieć na pytanie: czy zdolności matematyczne poznaniaków są większe (przeciętnie rzecz biorąc) niż zielonogórczan, należałoby postąpić tak (zakładając, że przebadanie wszystkich mieszkańców tych ziem jest niemożliwe, oraz zakładając, że umiemy mierzyć zdolności matematyczne!). Wybrać losowo pewną liczbę osób z Zielonej Góry, zmierzyć ich zdolności matematyczne i nanieść wyniki na wykres. Można tak dobrać metodę pomiaru, by ułożyły się one według krzywej Gaussa. Poznaniacy dadzą nieco inną krzywą, a może zresztą taką samą. Teraz do pracy siądzie statystyk. Postawi hipotezę: zielonogórczanie — powiedzmy — nie są zdolniejsi od poznaniaków, i wyliczy, czy to twierdzenie jest do przyjęcia, czy też raczej te dwie różne krzywe Gaussa nie powstały po prostu za sprawą przypadku.

Procedurze „weryfikacji” muszą być poddane na przykład wszystkie twierdzenia nauk społecznych. Także wiele twierdzeń nauk przyrodniczych nie jest „stuprocentowo prawdziwych”. Ocena stopnia prawdziwości głoszonych twierdzeń jest jednym z podstawowych zadań wszystkich nauk.



Jak wiadomo, nowoczesna organizacja pracy opierać się musi na matematyce. Tylko metody matematyczne pozwalają bowiem na obiektywną i optymalną ocenę sytuacji i wyciągnięcie odpowiednich wniosków. Nie od rzeczy będzie tu wspomnieć, że nawet nasz język potoczny traktuje zwrot „z matematyczną ścisłością” jako najwyższy superlatyw. A oto przykłady konkretnych sytuacji.

1. Jeden robotnik kopie studnię w ciągu 16 godzin. A więc co najmniej 3 dni musi trwać oczekiwanie obywatela-klienta na założenie mu tego urządzenia. Tymczasem rozwiązując proste równanie

$$1 \cdot 16 = 16 \cdot x$$

otrzymamy wniosek, że zorganizowanie 16-osobowych brygad pozwoli skrócić ten czas do 1 godziny ( $x = 1$ ).

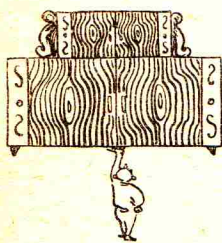
2. Czterech robotników wnosi pianino na III piętro w ciągu 15 minut. Tu możemy zaobserwować elastyczność metod matematycznych. Wychodząc bowiem z założenia, że dostarczanie pianin jest z ogólnospołecznego punktu widzenia sprawą nie najżywotniejszą, możemy wygospodarować tu wolne ręce do pracy. Zauważmy, że równanie

$$4 \cdot 15 = 1 \cdot x$$

ma rozwiązanie  $x = 60$ . A więc tylko 45 minut dłużej czekać będzie pianista na instrument, gdy skierujemy do noszenia pianin jednego robotnika, kierując trzech na bardziej odpowiedzialne miejsca pracy. Wychodząc z kolei z odmiennego założenia, że dąży się do podniesienia kultury na jak najwyższy poziom, możemy korzystając z równania

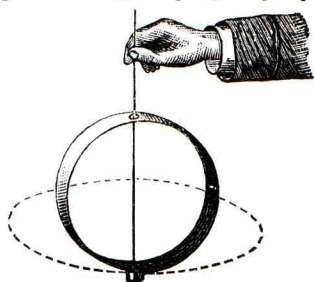
$$\frac{3}{4} = \frac{x}{60}$$

stwierdzić, że 60 robotników w ciągu tych samych 15 minut wnieśli pianino aż na XLV piętro. No dobrze, powiecie, są to żarty i do tego niezbyt mądre. Czyżby rzeczywiście? I czy np. uzależnianie długości trwania zielonego sygnału na przejściu dla pieszych od przeciętnej ilości przechodniów na tymże przejściu nie świadczy o przydatności tego rodzaju nie całkiem ścisłego formułowania zadań? Niemądre żarty? Rzeczywistość skłonni jesteśmy uznawać za rzecz poważną, mam wrażenie. Chyba żebyśmy zdecydowali, że nie.





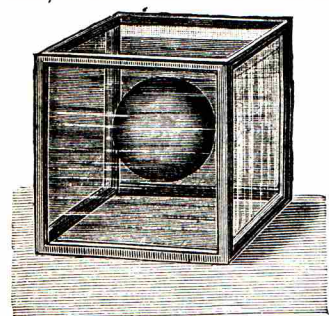
Weźmy pasek papieru (odcięty np. z ćwiartki arkusza) na pół palca szerokości, i sklejmy jego dwa końce z sobą; otrzymamy pierścień papierowy. Postawmy ten pierścień pionowo i przyklejmy go u dołu kropłą gumy lub klajstru do małego koreczka. Na przeciwległym końcu pierścienia, u góry, zróbmy otwór dość szeroki, aby swobodnie wprowadzić drut, którego dolny koniec wtykamy przez ten pierścień w ów korek, do którego pierścień jest przyklejony



Rys. 49. Spłaszczenie pierścienia przy obrocie.

(rys. 49). Jeżeli teraz ujmijemy za górny koniec drucika palcami i zaczniemy go w palcach skręcać, zobaczymy, iż cały pierścień, obracając się dokoła osi, wyobrażonej przez drucik, silnie się spłaszcza (jak wykazuje linja kropkowana na rysunku) i to

bez względu, czy trzymamy pierścień ku dołowi, czy korkiem ku górze, lub cały drucik poziomo. Możemy to samo powtórzyć z kilkoma (2-ma, 3-ma i t. d.) pierścieniami skrzyżowanymi, t. j. złączonymi tak, aby wyobrażały kulę. — Za pomocą maszyny do wprowadzania w szybki ruch wirowy ciał, możnaby pokazać, iż tak samo spłaszczają się nawet żelazne i mosiężne obręcze. — Tak samo zupełnie spłaszcza się i kula, obracająca się wokół swej osi. — Wiecie, że kropla oliwy wpuszczona do wody, wypływa na wierzch; lecz gdybyśmy przedtem dodali do wody spirytusu, który jest lżejszy od oliwy, możnaby wpuścić w sam środek takiej mieszaniny wody ze spirysem kroplę oliwy i przekonać się, że ona wówczas nie wypłynie na powierzchnię cieczy, lecz pozostanie w środku i przyjmie kształt kulisty (rys. 50). Jeżeli do takiej kropli oliwy wstawimy drucik i zaczniemy go szybko, ale jednostajnie, bez wstrząśnień, obracać za pomocą maszynki do wprowadzania ciał w ruch obrotowy, to i kropla oliwy zacznie się również obracać, a wówczas łatwo dostrzeczemy, iż kulista dotąd



Rys. 50. Kropla oliwy przyjmuje kształt kulisty.

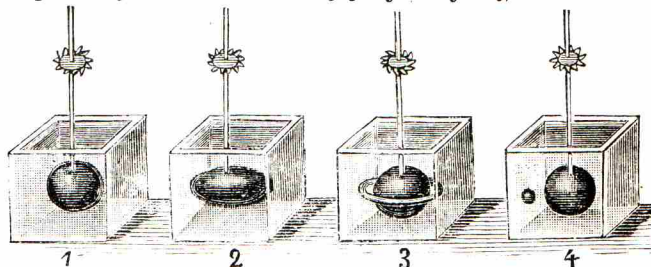
kropla poczyna się spłaszczać u biegunów. Im prędzej obraca się pierścień lub kula, tem bardziej spłaszcza się przy biegunach.

Wiecie już, że kula ziemską była niegdyś roztopioną masą; wirując ciągle, masa ta musiała się więc spłaszczać przy biegunach;

a gdy powierzchnia jej zastygła i utworzyła twardą skorupę, spłaszczenie pozostało, tak, że teraz ma już ziemia stałe kształt sferoidy. (Następuje, jak zwykle, streszczenie wykładu i pytania).

Ile więc gwiazd na niebie, tyle światów całych. Świata całego poznać wcale nie można, bo jest on niezmierny, nieskończony, złożony z niezliczonej ilości słońc i planet. Słońce nasze i wszystkie planety, krążące wokoło niego, a prawdopodobnie także i wszystkie gwiazdy, mają kształt kuli z dwóch końców spłaszczonej. Jak się taki kształt nazywa? Wszystkie te ciała były niegdyś albo są jeszcze masami palącymi się lub roztopionymi; wszystkie obracają się wokół linji, łączącej dwa spłaszczone końce, czyli, jak powiadamy, obracają się wokół swej osi i to, o ile wiemy, w jedną stronę — z zachodu na wschód, tak jak ziemia nasza. Wszystkie planety naszego systemu krążą wokół słońca od zachodu na wschód, a wszystkie prawie księżycy wokół planet obracają się również w jednym kierunku — z zachodu na wschód.

Widzicie więc, że pod wielu względami są wszystkie ciała niebieskie bardzo do siebie podobne. Czy to nie godne zastanowienia? — Czy przypominacie sobie, co się stanie z kroplą oliwy umieszczoną w wodzie zmieszanej ze spirytusem gdy ją pocznijemy obracać wokół jej osi? (Kropla przyjmie kształt kulisty, potem spłaszczy się u biegunów). Gdybyśmy ją dłużej i szybko obracali, wówczas więcej się spłaszczy, a za to równik jej wydłuży się, oddali od



Rys. 76. Doświadczenie z kroplą oliwy obracaną wokół jej osi.

środku kropli i wreszcie na całym równiku oderwie się od kropli pierścień oliwy, który dalej wokół kulistej kropli obraca się, jakby jeszcze był z nią złączony. Po pewnym czasie pierścień przerywa się i skupia tak, że tworzy małą kuleczkę oliwy, obracającą się wokół swej osi i biegnącą dalej wokół dużej kropli, tak, jak biegł przedtem wokół niej pierścień, z której ta kulka powstała. (Nauczyciel ilustruje to objaśnienie rysunkiem na tablicy według rys. 76). Być może, że pierścień otaczający planetę Saturn, o której dziś mówiłem, oderwał się w ten sam sposób od niej. Być może, że gdy ten pierścień przerwie się i skupi, utworzy wtedy nowy, dziewiąty księżyc, biegnący wokół Saturna, tak jak w naszym doświadczeniu mała kulka oliwy krąży wokół dużej; być może, że wszystkie ośm księżyców Saturna w ten sam sposób powstały.

Może księżycy i innych planet tak samo się od nich niegdyś oderwały; być może, że i nasz księżyc był kiedyś pierścieniem, który się oderwał od ziemi, gdy była jeszcze w stanie płynnym; a może i wszystkie planety w ten sam sposób oderwały się od swych słońc.



