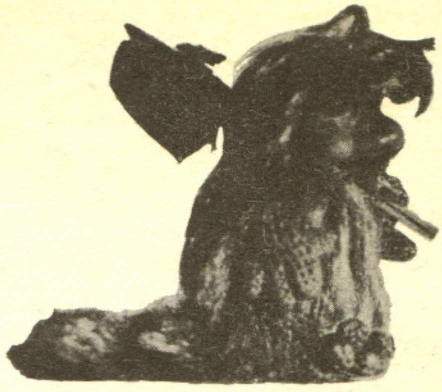
Czy umiecie się dziwić



książka dla Sympatyków Małej Delty

SPIS TREŚCI

NUMERU 7 (55)

W następnym numerze:
EXTREMA

Nie można powiedzieć, aby nasz ubiegłoroczny konkurs grudniowy, polegający na zbudowaniu najczulszego amperomierza, cieszył się specjalnym powodzeniem. Pierwszą i jedyną nagrodę (książki) zdobyli: Andrzej Konwiński i Tomasz Kasperski z Gdyni. Pozostałych nagród nie przyznano z wielu powodów. Po pierwsze — nie napłynęło więcej prac. Po drugie..., ale wolimy nie zdradzać pozostałych ważnych powodów. Cała sprawa zmartwiła nas bardzo — świadczy, że nie umieliśmy wymyśleć takiego konkursu, który byłby atrakcyjny dla Czytelników. Nagrody w konkursie Małej Delty („Delta" 12/77) otrzymują: Małgorzata z Żawiśla i Koło Matematyczne przy Szkole Podstawowej w Giławach.

Redakcja

„Delta"
matematyczno-fizyczny miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa Matematycznego i Polskiego Towarzystwa Fizycznego
wydawany przy poparciu Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Adres Redakcji
ul. Hoża 69 pok. 151,
00-681 Warszawa

Zakład Narodowy im. Ossolińskich — Wydawnictwo
Wrocław, Oddział w Warszawie
Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark. wyd.; 2,50 ark. druk.;
papier offsetowy III kl. 80 g. 61 × 86
Wydrukowano w Drukarni im. Rewolucji Październikowej
Warszawa, ul. Mińska 65
Nr zam. 514/78 S-130

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zl 60, — cena prenumeraty półrocznej zl 30, —

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch" oraz urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach
— do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i cały rok następny
— do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego.
Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienie w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch".
Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW oraz prenumeratorzy indywidualni, zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.
Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch", Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28,00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTĘ":

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.
Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.
Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, konto PKO I OM W-wa 1531-912

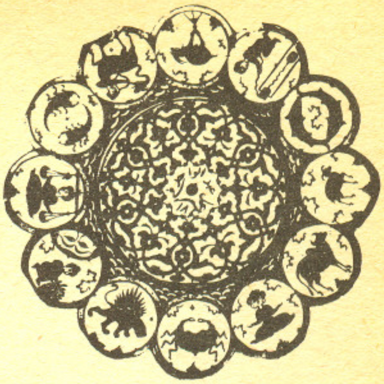
w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona" Krakowskie Przedmieście 7 00-068 Warszawa, Poland or with
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland.
— Earlscourt Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre. London W 12. Great Britain,
— Licosa Commissionaria Sansoni. Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia.

Cena 1 egzemplarza zł 5.— nr indeksu 35723/35550



O układaniu horoskopów, astrologii... i nie tylko

Dr Marek Artur ABRAMOWICZ

Wstęp

Każdy z Was spotkał się niejednokrotnie z drukowanymi w prasie horoskopami. Astrologia, tzn. sztuka ich układania i interpretacji zakłada, iż z położenia na niebie gwiazd i planet w momencie urodzin człowieka, można przewidzieć jego charakter i przyszłe losy. Założenie takie jest przykładem myślenia magicznego i ludziom wykształconym dzisiaj wydaje się śmieszne. Kilkaset lat temu jednak astrologia była poważnym i systematycznym poglądem na świat, który podzielało wielu najwybitniejszych intelektualistów na wszystkich szczeblach drabiny społecznej. Większość astronomów układała horoskopy tak, jak np. działający na przełomie XVI i XVII wieku znakomici Tycho Brache i Johannes Kepler. Pierwszy z nich napisał nawet podręcznik astrologiczny „*Apologia Astrologiae*" a drugi oprócz wielu druków poświęconych tej nauce wydał słynny „*Prodromus dissertationum mathematicarum continens mysterium cosmographicarum*" i sporządził głośny horoskop księcia Wallensteina, przepowiadając temu dowódcy wojsk cesarskich w wojnie trzydziestoletniej klęskę pod Lützen.

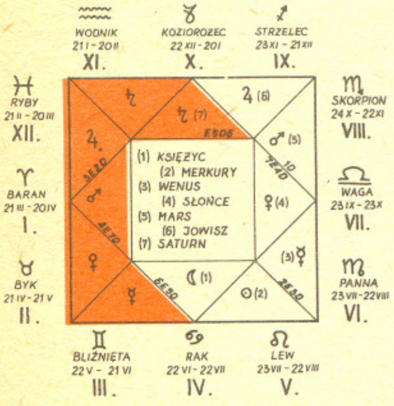
Od czasu, gdy publicznie przyznałem się do umiejętności układania horoskopów według średniowiecznych reguł, stale jestem o to proszony. Chciałbym tu wyjaśnić jedną sprawę: Uważny Czytelnik tego artykułu bez trudu dostrzeże mój ambiwalentny stosunek do astrologii. Jestem mianowicie jej zdecydowanym przeciwnikiem, gdy jest ona traktowana serio, jako światopogląd lub choćby jako nauka. Jednocześnie jestem amatorem zabawy w astrologię — lubię oglądać i czytać stare horoskopy jednakowo wzruszając się ich przyrodniczą naiwnością i podziwiając piękno ich formy. Uważam, że zupełna ignorancja w zakresie astrologii, jaką można obserwować wśród ludzi zawodowo zajmujących się astronomią oraz miłośników tej nauki, nie jest rzeczą godną pochwały. Rzetelna, fachowa krytyka astrologii jest konieczna — wystarczy wspomnieć plagę gazetowych horoskopów lub, co znacznie groźniejsze, dość powszechne przekonanie, że „coś w tym jest". Nie sądzę, aby wiara w astrologię nie była społecznie szkodliwa: wszelkie antyracjonalne, antyintelektualne postawy lub poglądy mające podłoże w przesądzie, zabobonie lub fałszywej filozofii są groźne, ponieważ uczą pogardy dla kultury. Uważam, że przeciwstawienie się astrologii jest społecznym obowiązkiem astronomów, podobnie jak przeciwstawianie się fałszowaniu historii jest społecznym obowiązkiem historyków a walka z nieodpowiedzialnymi doktrynami ekonomicznymi jest społecznym obowiązkiem ekonomistów — w sferze fachowej krytyki oczywiście, ponieważ przeciwstawianie się tym zjawiskom powinno być powszednią troską nas wszystkich, niezależnie od uprawianego zawodu. Po to, aby uczciwie i kompetentnie krytykować czyjeś poglądy (zwłaszcza publicznie), trzeba je najpierw poznać i, co nie mniej istotne, dopuścić, by mogli poznać je inni.
Często można spotkać się z twierdzeniem wygłaszanym zwłaszcza przez ludzi sztuki, iż współczesna astronomia jest sucha, matematyczna, nie porywa wyobraźni — przeciwnie niż astronomia dawna, złączona z astrologią i mitologią. Richard F. Feynman, uważany za najwybitniejszego spośród żyjących fizyków, tak ustosunkował się do tego poglądu: „Poeci mówią, że nauka odziera gwiazdy z piękna, czyni z nich zwykłe gazowe zbiorowiska atomów. Nic nie jest tu jednak „zwykłe".

Ja także umiem patrzeć na gwiazdy nocą na pustkowiu i odczuwać ich piękno. A czy widzę mniej, czy więcej niż inni? Ogrom niebios pobudza moją wyobraźnię... Zawieszony na naszej maleńkiej karuzeli widzę światło wysłane do nas przed milionem lat. Ogromna jest całość, której część stanowię. Może część materii, która mnie tworzy, wyrzucona została z odległej, zapomnianej gwiazdy, tak samo jak światło, które widzę? A gdy patrzę na gwiazdy przez potężne oko palomarskiego teleskopu i widzę, jak rozbiegają się one od jakiegoś wspólnego punktu, w którym — być może — kiedyś się skupiały, myślę, na czym polega regularność i sens tego wszystkiego. Dlaczego tak jest? Urok tajemnicy nie ucierpi, jeśli poznamy jej maleńką część. Albowiem prawda jest dużo wspanialsza, niż to sobie wyobrażali artyści dawnych wieków! Dlaczego nie opiewają jej współcześni poeci? Cóż to za dziwny gatunek ci poeci, jeśli potrafią głosić chwałę Jowisza jako żywej istoty a zachowują milczenie wobec Jowisza — ogromnej kuli z metanu i amoniaku".

Przypuśćmy, że ktoś bardzo uczony zechciałby przekonać nie bardzo wykształconą w podstawach fizyki publiczność, iż oglądany przez nią występ magika pokazującego unoszącą się w powietrzu dziewczynę, nie dowodzi wcale możliwości lewitacji i psychokinezy. Założę się, że w ośmiu wypadkach na dziesięć argumentacja byłaby taka: „*prawo powszechnego ciążenia..., siła Archimedesa..., przyspieszenia wszystkich ciał są równe...*". Otóż dużo prostsze i skuteczniejsze, jak sądzę, byłoby pokazanie ukrytej sprężyny, która zawieszonej na niej dziewczynie umożliwia — tak jak Bronisławowi Pawlikowi w wystawianej przed laty sztuce Ionesco „Pieszo w powietrzu" — podobne ewolucje, sprzeczne na pozór z prawem grawitacji.

Podobnie jest z astrologią: z punktu widzenia współczesnej fizyki jest zupełnie wykluczone, żeby oddziaływanie tak bardzo od nas odległych gwiazd i planet mogło mieć jakikolwiek wpływ na cokolwiek dziejącego się na Ziemi. Łatwo można na przykład wykazać, że oddziaływanie grawitacyjne mebli w naszym pokoju jest nie mniejsze. Może jednak z astrologią sprawa ma się podobnie, jak z medycyną ludową. Może jej złożone i magiczne przepisy zawierają pewną zaszyfrowaną wiedzę nie mającą wprawdzie nic wspólnego z gwiazdami, ale utrwaloną przez doświadczenia wielu pokoleń. Wiemy jednak, że zarówno planetom, jak i gwiazdozbiorom nadawano nazwy w sposób zupełnie przypadkowy, a od tych właśnie nazw bierze początek cała magia związanych z nimi znaczeń. Skuteczniejsze od tego typu dowodów będzie jednak, uważam, pokazanie jak horoskopy są układane, zdemaskowanie czarnej magii przez wyciągnięcie wszystkich ukrytych sprężyn, zapadni i mechanizmów — patrzcie, to tylko tyle, nic więcej w tym nie ma, ta mistyczna, tajemnicza nauka umiejąca jakoby przepowiadać losy ludzi i świata to żałosny humbug, zbiór niedorzecznych przepisów, wywołujących uśmiech politowania zasad i kanonów.
Tak, horoskopy to bzdura — a jednak coś w nich jest. Przede wszystkim — powaga tradycji. Astrologia dała początek astronomii i skierowała zainteresowania wielu ludzi w różnych epokach i w różnych częściach świata na sprawy dziejące się na niebie. Odrzucamy dziś astrologię jako naukę, jako pogląd na świat ale nie możemy zapominać, my — astronomowie, ile jej zawdzięczamy. Wreszcie — horoskopy są piękne graficznie: mają one zazwyczaj kształt kwadratu lub koła, w które wpisane są magiczne symbole dwunastu znaków Zodiaku i siedmiu planet znanych w starożytności: Merkurego, Wenus, Marsa, Jowisza, Saturna, Księżyca i Słońca. Symbole te pokazane są na rysunku 1. Niebo podzielone jest na nim na dwanaście zodiakalnych domów. Daty, napisane obok symbolu i nazwy każdego domu, mówią, kiedy przebywa w nim Słońce. Symbole planet rozmieszczone są zgodnie z astrologiczną konwencją, przypisującej każdej planecie właściwy jej dom zodiakalny. Z rysunku wynika, iż np. Saturn ma dom dzienny w Koziorożcu a nocny w Wodniku, Słońce ma tylko dom dzienny — w Lwie, Księżyc tylko nocny — w Raku, etc. W niektórych domach znaleźć można zapis specjalnego typu, np. 6E5D w Raku. Oznacza to, że Jowisz (6) ma największą moc w Raku (E = egzaltacja) a Mars (5) najmniejszą (D = = depresja). Oczywiście podział nieba na zodiakalne domy, umieszczanie w nich planet etc. jest wyłącznie konwencją, uświęconą wielowiekową tradycją i nie ma żadnego przyrodniczego znaczenia.

Na koniec chciałbym przytoczyć jedyny znany mi przykład pomyślnego zastosowania astrologii w praktyce: Louis de Whol był węgierskim astrologiem, mieszkającym w Niemczech. Jako przeciwnik reżimu hitlerowskiego zmuszony był emigrować do Anglii. Po wybuchu wojny zgłosił się w angielskiej Admiralicji i zaproponował swoje usługi: stawianie horoskopów przewidujących bieg wojennych wydarzeń.



Rys. 1. Podział nieba na domy zodiakalne (noc zaznaczyliśmy kolorem)

Jego propozycja została natychmiast przyjęta. Nie, Anglicy nie wierzyli w horoskopy, podobnie zresztą jak i sam de Whol. Chodziło o to, że Adolf Hitler otaczał się astrologami i często zasięgał ich rad — także w sprawie prowadzenia wojny. De Whol znał metody stosowane przez niemieckich kolegów i z dużym prawdopodobieństwem mógł przewidzieć, co poradzą oni Führerowi. Dzięki współpracy z de Wholem Anglicy rozgromili w 1940 roku sprzymierzonych z Niemcami Włochów w słynnej bitwie w zatoce Tarenckiej, gdzie mieściła się dobrze strzeżona główna baza włoskiej marynarki. Był to pierwszy w historii morskiej sztuki wojennej skuteczny atak na okręty znajdujące się w bazie, wykonany siłami lotnictwa.

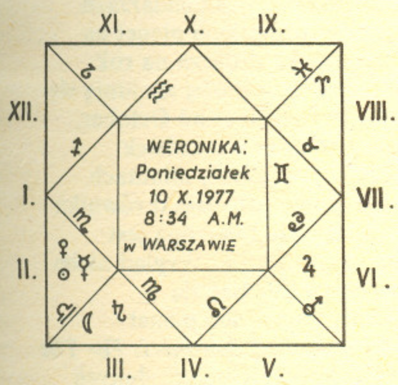
Czarna magia...

„... — A więc wystąpi teraz z seansem czarnej magii znakomity artysta zagraniczny monsieur Woland. Oczywista, i ja wiem, i państwo wiecie, ..., że czarna magia w ogóle nie istnieje i że nie jest to nic innego jak tylko przesąd, zaś maestro Woland po prostu mistrzowsko opanował technikę tricków, o czym się zresztą przekonacie w najciekawszej części jego występu, to znaczy w części demaskującej całą tę technikę..."

M. Bułhakow „Mistrz i Małgorzata"

Domy astrologiczne nie mają nic wspólnego z omówionymi domami zodiakalnymi.

Rysunek 2 przedstawia horoskop ułożony przeze mnie dla sześciotygodniowej Weroniki. Duży kwadrat podzielony jest na trzynaście części: mały kwadrat, w którym wpisałem dane dotyczące urodzin, oraz dwanaście trójkątów, symbolizujących dwanaście astrologicznych domów, to znaczy dwanaście nierównych części, na które dzieli się niebo według pewnego, skomplikowanego, przepisu. Układ gwiazd i planet w momencie urodzin Weroniki określa, jakie planety i jakie znaki Zodiaku znajdują się w poszczególnych domach a to z kolei ma zasadnicze znaczenie dla interpretacji horoskopu.



Rys. 2. Horoskop Weroniki

Wedle astrologicznej doktryny, dom pierwszy określa przyszły charakter i zamiłowania Weroniki. Nie znajdujemy w nim żadnej planety lecz tylko dwa znaki Zodiaku: Skorpiona i Strzelca. To połączenie jest wyjątkowo korzystne, ponieważ Strzelec daje takie cechy charakteru jak: umiłowanie prawdy, sprawiedliwość, głębię myśli, niezależność oraz impulsywność i gorący temperament, Skorpion natomiast: silną wolę i twórczy niepokój. Skorpion w pierwszym domu sprawia, że kobieta ma to, co Anglosasi nazywają sex appealem — jest atrakcyjna, pociągająca, magnetyczna. Tyle o charakterze. Zamiłowania określa Strzelec: długie podróże, dobre książki, rozszerzenie i pogłębianie wiedzy oraz Skorpion: sex. Dom drugi mówi o sprawach finansowych. Mamy tu Słońce, które jest symbolem złota, Merkurego, przynoszącego jak wiadomo pomyślność w interesach i Wenus, która jest planetą przynoszącą szczęście. Do tego Wagę, której atrybutami są równowaga i stałość. Może to oznaczać tylko jedno: wielką i stałą pomyślność finansową, nawet bogactwo. Nie ma żadnych znaków lub planet zagrażających tej pomyślności. Najlepsze dni na załatwianie operacji finansowych to: niedziela (dzień Słońca), środa (dzień Merkurego) i piątek (dzień Wenus) a także okres, w którym Słońce znajduje się w znaku Wagi, tzn. od 23 września do 23 października, zwłaszcza, jeśli pod nieobecność innych planet znajdują się tam jeszcze Merkury i Wenus. Dom trzeci określa studia, bliższą rodzinę, sąsiadów i krótkie podróże. Weronika ma w nim Księżyc i Saturna (w egzaltacji) oraz znaki Wagi i Panny, Weronika urodziła się pod wyraźnym wpływem Księżyca, o godzinie 8:32 rano, a więc w godzinie Księżyca. Oznaczać to może studia artystyczne — najlepszy dzień na egzaminy to poniedziałek, zwłaszcza, jeśli Księżyc jest na nowiu. W trzecim domu znajduje się także Saturn, planeta przynosząca nieszczęścia. Mogą one dotyczyć albo nauki szkolnej i studiów, albo bliższej rodziny. Dniem Saturna jest sobota i dlatego Weronika powinna unikać sobotnich egzaminów i zwracać uwagę, aby tego dnia nie wywoływać rodzinnych nieporozumień.

Domów jest dwanaście i każdy z nich rządzi określonymi życiowymi sprawami — może więc, jeśli kto chce, znając astrologiczny charakter planet i znaków Zodiaku, prowadzić dalej wróżby.
Tych, którzy chcieliby to robić, odsyłam do mojego artykułu o astrologii (Problemy, 378, 1977, str. 30), gdzie znajdą niezbędne wskazówki.

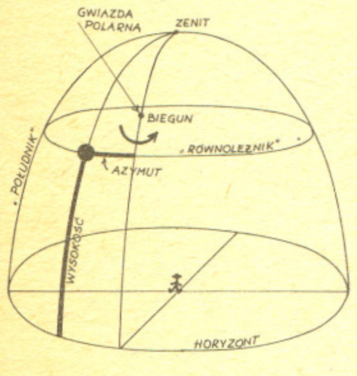
...oraz jak ją zdemaskowano

„— Mimo wszystko, pożądane by było, obywatelu artysto, by zechciał pan bez zwłoki zdemaskować wobec publiczności technikę swoich tricków... Jeśli to nie nastąpi, pański występ pozostawi przygnębiające wrażenie. Masowy odbiorca domaga się wyjaśnień. — Wydaje mi się — przerwał (...) bezczelny bufon — że masowy odbiorca nie wyrażał takich życzeń.

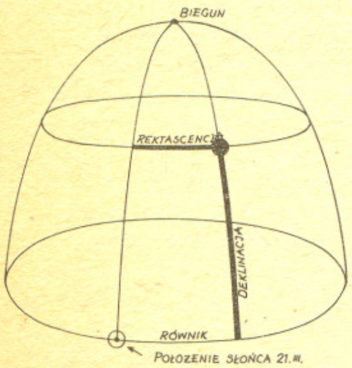
M. Bułhakow „Mistrz i Małgorzata”

W książce Bułhakowa okazało się jednak, że obywatel artysta był prawdziwym magikiem.

Dla każdego z nas wygląd pogodnego, nocnego nieba nasuwa nieodparcie wyobrażenie połowy kuli, jak nazywają ją astronomowie — sfery niebieskiej (rys. 3). Kula ta przecięta jest płaszczyzną Horyzontu a obserwator ma wrażenie, że znajduje się w jej środku. W najwyższym punkcie sfery, dokładnie nad głową obserwatora, znajduje się punkt Zenitu, po przeciwnej stronie niewidoczny, punkt Nadiru. Po to, aby w ścisły sposób określać położenia gwiazd i planet na sferze niebieskiej, trzeba wprowadzić na niej układ współrzędnych. Można posłużyć się analogią z siatką geograficzną na Ziemi i tak dobrać współrzędne, aby punkty Zenitu i Nadiru odpowiadały ziemskim biegunom —Horyzont będzie wtedy odpowiadał ziemskiemu równikowi. Koła równoległe do Horyzontu (równoleżniki) i prostopadłe do nich (południki) utworzą siatkę tzw. współrzędnych horyzontalnych. Wystarczy kilka godzin obserwacji, aby się przekonać, iż współrzędne horyzontalne wszystkich ciał niebieskich (z wyjątkiem Gwiazdy Polarnej) zmieniają się nieustannie skutkiem ruchu obrotowego Ziemi. Prócz tego współrzędne horyzontalne są w oczywisty sposób związane z obserwatorem: dwaj astronomowie w dwóch różnych miejscach na Ziemi przypisują w każdym momencie czasu inne współrzędne temu samemu ciału niebieskiemu. Z tego powodu współrzędne horyzontalne są bardzo niewygodne w praktyce. Zamiast nich używa się współrzędnych równikowych, w których rolę biegunów grają dwa punkty sfery niebieskiej, przez które przechodzi oś tej sfery (rys. 4). Z rysunku można łatwo zorientować się, jak mierzyć „szerokość geograficzną”. Do mierzenia „długości geograficznej” potrzebna jest umowa, który południk wybiera się, jako południk zerowy. Astronomowie umówili się, że Słońce przechodzi przez południk zerowy 21 marca. Aby nie było pomyłek, astronomowie używają zamiast nazwy „długość geograficzna na sferze niebieskiej” jednego słowa — rektascencja a zamiast „szerokość geograficzna na sferze niebieskiej” — deklinacja. W kalendarzach astronomicznych można znaleźć rektascencje i deklinacje wszystkich planet na każdy dzień roku. Na rysunku 5 pokazana jest strona 256 kalendarza na rok 1977, z którego korzystałem układając horoskop Weroniki, na której znajdują się dane dotyczące rektascencji i deklinacji Saturna. Oct. jest skrótem od October, tzn. październik. Rektascencja mierzona jest zgodnie z ruchem wskazówek zegara (patrząc od strony Bieguna Północnego nieba) w godzinach, minutach i sekundach. Godzina ma 15°, (tzn. piętnaście stopni), ponieważ obwód równika ma 24^h (tzn. dwadzieścia cztery godziny) lub 360°. Deklinacja mierzona jest w stopniach od Równika nieba; południowe deklinacje są ujemne. Wygląd nieba w ustalonym momencie czasu można więc łatwo ustalić posługując się astronomicznym kalendarzem. Współrzędne równikowe wszystkich planet w momencie urodzin Weroniki znalezione w *The Astronomical Ephemeris For The Year 1977* zebrane są w Tabeli 1. Używając tej tabeli jako wyjściowych danych ułożymy teraz horoskop Weroniki.



Rys. 3. Współrzędne horyzontalne



Rys. 4. Współrzędne równikowe

Tabela 1

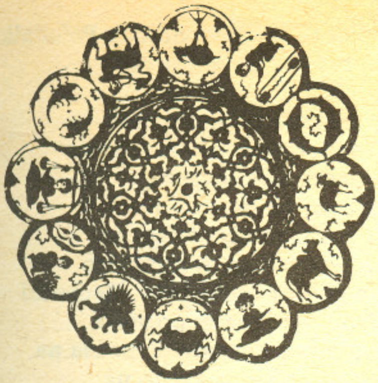
		Rektascencja	Deklinacja
Słońce	☉	13^h	−6°30′
Księżyc	☾	11^h	+3°20′
Merkury	☿	12^h40^m	−2°30′
Wenus	♀	11^h30^m	+4°40′
Mars	♂	7^h40^m	+22°40′
Jowisz	♃	6^h20^m	+23°
Saturn	♄	10^h	+13°30′

SATURN, 1977

GEOCENTRIC POSITIONS FOR 0^h EPHEMERIS TIME

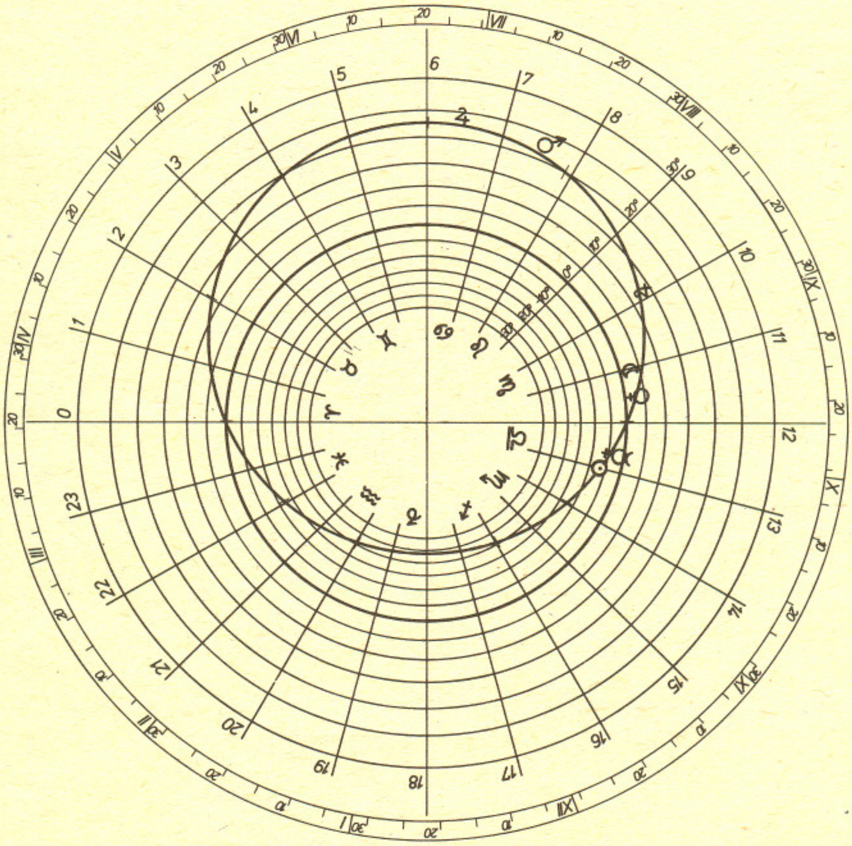
Date		Apparent Right Ascension		Apparent Declination		H.P.	S.D.	True Distance from the Earth		Ephemeris Transit
		h m s	s	° ′ ″	″	″	″			h m s
Oct.	1	9 55 39·504	+24·878	+13 47 40·38	−121·77	0·89	7·52	9·917 4072	−11 0100	9 15 51
	2	9 56 04·382	24·665	13 45 38·61	120·72	·89	7·53	·906 3972	11 1984	9 12 20
	3	9 56 29·047	24·449	13 43 37·89	119·64	·89	7·54	·895 1988	11 3848	9 08 48
	4	9 56 53·496	24·226	13 41 38·25	118·51	·89	7·54	·883 8140	11 5691	9 05 16
	5	9 57 17·722	23·998	13 39 39·74	117·37	·89	7·55	·872 2449	11 7513	9 01 45
	6	9 57 41·720	+23·767	+13 37 42·37	−116·19	0·89	7·56	9·860 4936	−11 9310	8 58 12
	7	9 58 05·487	23·529	13 35 46·18	114·97	·89	7·57	·848 5626	12 1084	8 54 40
	8	9 58 29·016	23·286	13 33 51·21	113·74	·89	7·58	·836 4542	12 2836	8 51 07
	9	9 58 52·302	23·039	13 31 57·47	112·47	·90	7·59	·824 1706	12 4560	8 47 35
	10	9 59 15·341	22·788	13 30 05·00	111·18	·90	7·60	·811 7146	12 6257	8 44 02
	11	9 59 38·129	+22·532	+13 28 13·82	−109·87	0·90	7·61	9·799 0889	−12 7925	8 40 28
	12	10 00 00·661	22·274	13 26 23·95	108·53	·90	7·62	·786 2964	12 9565	8 36 55
	13	10 00 22·935	22·011	13 24 35·42	107·18	·90	7·63	·773 3399	13 1173	8 33 21
	14	10 00 44·946	21·745	13 22 48·24	105·78	·90	7·64	·760 2226	13 2746	8 29 47
	15	10 01 06·691	21·475	13 21 02·46	104·37	·90	7·65	·746 9480	13 4288	8 26 12

Rys. 5. Kalendarz astronomiczny



Zaczniemy od podziału nieba na domy, używając definicji pochodzącej od Regiomontana, znanego astrologa z XV wieku: *Podziel Równik niebieski na dwanaście równych części tak, aby pierwszy punkt podziału wypadł tam, gdzie Równik przecina się z Horyzontem. Przeprowadź przez Zenit i dwanaście punktów podziału dwanaście wielkich kół. Koła te rozetną niebo na dwanaście domów.* Jeżeli mamy pod ręką globus, możemy na nim nanieść położenia wszystkich planet (znamy przecież ich rektascencje i deklinacje, tzn. długości i szerokości geograficzne). Aby podzielić niebo na domy, musimy wiedzieć, gdzie na globusie leży Horyzont. Gdyby Słońce poruszało się w ciągu roku ruchem jednostajnym po Równiku (poczynając od 21 marca i rektascencji 0^h), to każdego dnia dokładnie o dwunastej czasu miejscowego znajdowałoby się na Południku miejscowym, to jest wielkim kole łączącym Zenit i Biegun. Po znalezieniu położenia Południka łatwo znaleźć Zenit — deklinacja Zenitu równa jest szerokości geograficznej (Warszawa, gdzie urodziła się Weronika, ma szerokość geograficzną 52°). Mając ustalony punkt Zenitu nietrudno wykreślić na globusie Horyzont a po wykreśleniu Horyzontu wszystkie koła wielkie dzielące niebo na dwanaście domów. Tu dygresja: do rysowania kół wielkich na kuli przygotowujemy sztywną obręcz z cienkiego drutu o średnicy równej średnicy Równika. Przez dwa dane punkty na kuli przeprowadzamy koło wielkie po prostu przykładając obręcz do punktów. Także zupełnie proste jest rysowanie koła prostopadłego do danego i przechodzącego przez dany punkt. (Zauważcie analogię pomiędzy płaszczyzną, prostymi i linijką a kulą, kołami wielkimi i obręczą!).

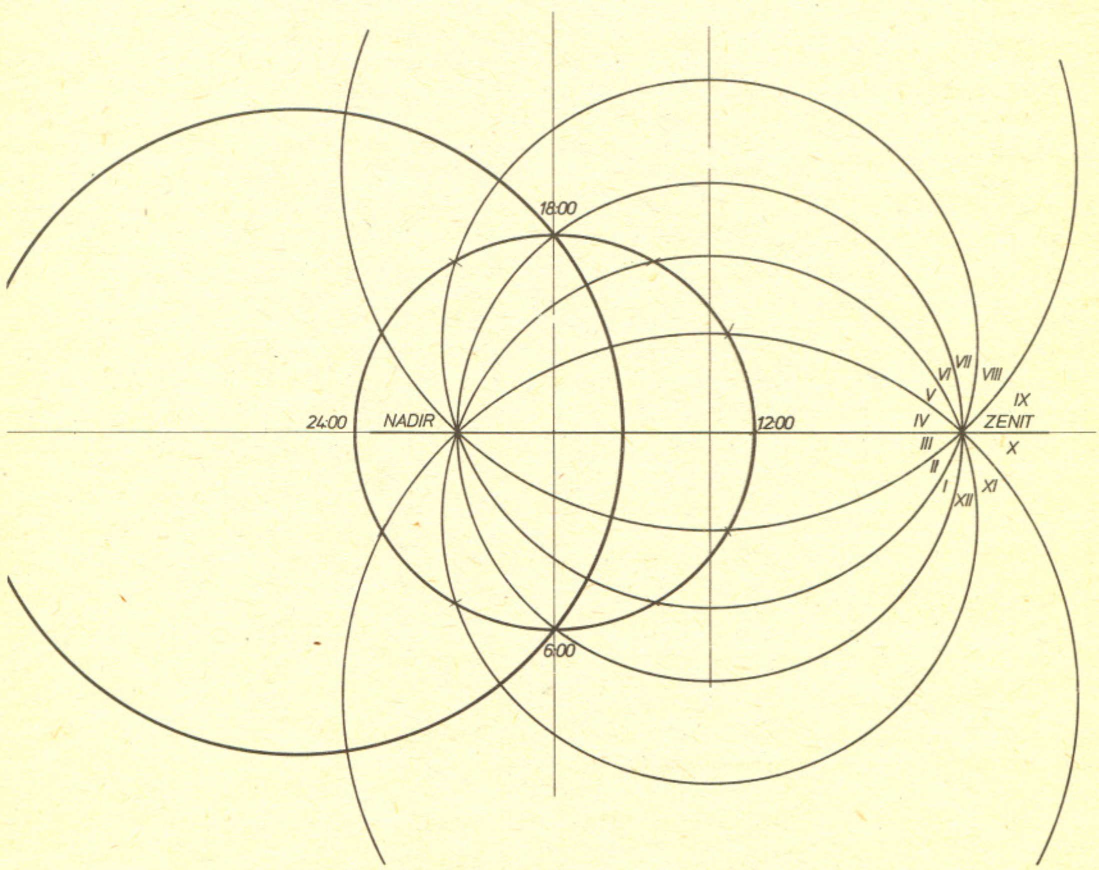
Zadanie nasze sprowadza się zatem do odnalezienia na globusie Południka miejscowego — potem wszystko jest już proste. Zrobimy to tak: podzielimy najpierw Równik niebieski na 365 dni. Gdyby Weronika urodziła się dokładnie w południe 10 października (przypominamy, że mówimy o czasie miejscowym — różni się on w Warszawie o 24 minuty od czasu urzędowego, ponieważ Warszawa nie leży na 15° długości geograficznej wschodniej), to Południk miejscowy w momencie jej urodzenia byłby tym południkiem na globusie, który przechodzi przez punkt na Równiku odpowiadający dacie 10 października.



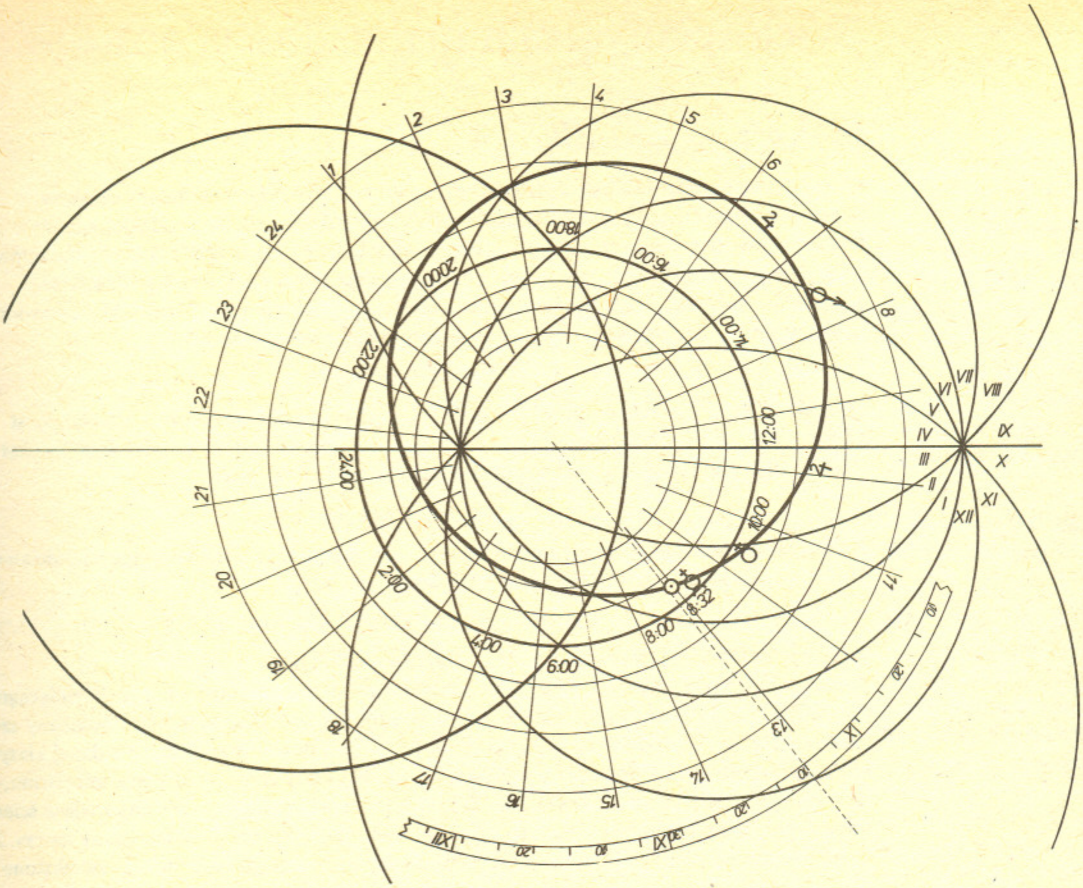
Rys. 6. Siatka współrzędnych równikowych w rzucie stereograficznym na płaszczyznę. W środku koncentrycznych kół jednakowej deklinacji znajduje się Biegun Południowy, z którego promieniście wychodzą proste o jednakowej rektascencji. Niekoncentryczne koło przedstawia Ekliptykę, tj. roczną drogę Słońca po firmamencie: jest ono podzielone na dwanaście zodiakalnych domów, których symbole umieszczono w południowej czapie polarnej. Zewnętrzna podziałka mówi, gdzie znajdowałoby się Słońce, gdyby obiegało nieboskłon ruchem jednostajnym po równiku, w różne dni roku. Takie Słońce astronomowie nazywają „Słońcem średnim". Symbole planet odpowiadają ich ustawieniu w momencie urodzin Weroniki.

Ponieważ Weronika urodziła się o 8:32 przed południem, tak wyznaczony Południk przesunąć należy (niebo obraca się w tempie jeden obrót na dobę!) o kąt $12^h00^m - 8^h32^m = 3^h28^m = 52°$.
Ponieważ nie mamy pod ręką globusa, rozwiążemy zadanie w inny sposób — wykorzystując własności rzutu stereograficznego, tzn. pewnego odwzorowania powierzchni kuli na płaszczyznę. Rzutu stereograficznego dokonuje się w następujący sposób: z najwyższego punktu kuli leżącej na poziomej płaszczyźnie prowadzi się linie proste, przechodzące przez punkty leżące na powierzchni kuli $P_1, P_2, ..., P_n$. Proste te przebijają płaszczyznę w punktach $Q_1, Q_2, ..., Q_n$. Zbiór punktów Q nazywamy rzutem zbioru punktów P. Zachodzi ważne twierdzenie: rzuty stereograficzne kół są kołami lub liniami prostymi. Posługując się rzutowaniem stereograficznym bardzo łatwo narysować można na płaszczyźnie rzut siatki współrzędnych równikowych — zrobione jest to na rysunku 6, na którym — zgodnie z danymi zebranymi w Tabeli 1 — naniesiono także położenia planet w momencie urodzin Weroniki. Następny rysunek przedstawia podział nieba na domy — wystarcza chwila zastanowienia, by odgadnąć, jak został on skostruowany. (Wskazówka: przez trzy punkty na płaszczyźnie przechodzi dokładnie jedno koło. Koła wielkie, dzielące niebo na domy, przechodzą przez Zenit, Nadir i punkt podziału na Równiku). Zauważmy, że na rysunku 7 nie została określona jeszcze rektascencja Południka miejscowego, tzn. nie jest możliwe ustalenie, jaka jest wzajemna orientacja obu siatek i co za tym idzie — jakie planety znajdują się w poszczególnych domach. Zrobione jest to na rysunku 8 — dokładnie tak, jak w omówionym uprzednio przykładzie z globusem. Horoskop jest zatem ułożony. Pozostało mi tylko bardzo podziękować mamie Weroniki za wykonanie trudnych i pracochłonnych rysunków do tego artykułu.

Plątanina linii na rysunku 8 tylko pozornie jest obrazem zupełnego chaosu. Witold Krassowski, znakomity historyk sztuki związany z Wydziałem Architektury Politechniki Warszawskiej, odkrył, że schemat kompozycyjny tryptyku Hansa Memlinga „Sąd Ostateczny" opiera się właśnie na konstrukcji przedstawionej na rysunku 8. Znajdujący się w Muzeum Narodowym w Gdańsku tryptyk Memlinga jest jednym z zaledwie kilku najwybitniejszych dzieł europejskiego malarstwa, jakie posiadamy w polskich zbiorach.



Rys. 7. Podział na domy. Oznaczono Horyzont, Równik i Południk miejscowy. Liczby na Równiku mówią, gdzie znajduje się „Słońce średnie" w odpowiednich momentach mierzonych w czasie miejscowym. Równik jest kołem opisanym liczbami 24:00, 6:00, 12:00, 18:00.
Południk miejscowy — prostą przechodzącą przez punkty Zenitu i Nadiru; Horyzont kołem, które nie przechodzi przez te punkty.



Rys. 8. Wygląd nieba w momencie urodzin Weroniki (Porównaj z Rys. 6 i 7).

Zadania

Redaguje mgr Andrzej MĄKOWSKI

M 163. Jeżeli n jest liczbą naturalną, to przyjmujemy $\binom{x}{n} = \dfrac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}$. Rozłożyć na czynniki wielomian

$$f(x) = 1-\binom{x}{1}+\binom{x}{2}-\ldots+(-1)^n\binom{x}{n}.$$

Rozwiązanie na str. 10

M 164. Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg i nie będący trapezem. Udowodnić, że dwusieczne kątów utworzonych przez proste AB i CD oraz BC i AD są prostopadłe.

Rozwiązanie na str. 10

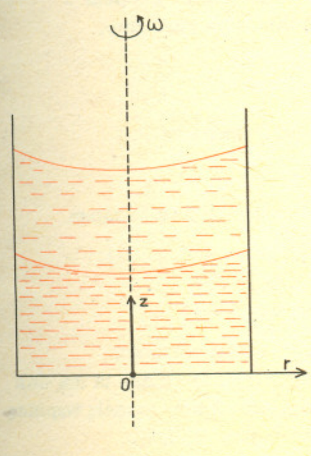
M 165. Liczbę e można zdefiniować jako sumę szeregu

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots.$$

(zob. artykuł J. Chlipalskiego w Delcie 1/1978). Udowodnić, że e nie jest liczbą wymierną.

Rozwiązanie na str. 16

Redaguje dr Waldemar GORZKOWSKI



F55. W walcowym naczyniu znajdują się dwie niemieszające się ciecze o różnych gęstościach. Po ustawieniu na środku obracającej się płyty powierzchnie cieczy przybrały ustalony kształt wklęsły (patrz rysunek). Czy górne powierzchnie obu cieczy są przystające? Napięcie powierzchniowe i przyleganie zaniedbujemy.

Rozwiązanie na str. 15

Wielościany z minimalną ilością powtórzeń (I)

Małgorzata ZALEWSKA

Artykuł ten jest nieco przeredagowaną pracą maturalną wykonaną przez Autorkę w 1977 roku w Liceum im. K. Gottwalda

W artykule tym zajmować się będziemy wielościanami wypukłymi. Ustalmy najpierw terminologię. Będziemy mówili, że ściany wielościanu są tego samego rodzaju, gdy mają tę samą liczbę boków. Jeżeli oznaczamy liczbę ścian wielościanu $\mathscr{W}$ przez $s(\mathscr{W})$ a liczbę rodzajów ścian przez $r(\mathscr{W})$ to $s(\mathscr{W})-r(\mathscr{W})$ nazywać będziemy ilością powtórzeń w tym wielościanie.
Jak można wykazać, każdy wielościan ma dwie ściany tego samego rodzaju. My udowodnimy nawet więcej — a mianowicie: dla każdego wypukłego wielościanu $\mathscr{W}$

$$s(\mathscr{W})-r(\mathscr{W}) \geqslant 3.$$

Dowód: Załóżmy, że w danym wielościanie $\mathscr{W}$ ścianą o największej liczbie krawędzi jest $k(\mathscr{W})$ — kąt. Ścian w tym wielościanie musi być co najmniej $k(\mathscr{W})+1$ (gdyż $k(\mathscr{W})$ — kąt może mieć co najwyżej jedną krawędź wspólną z każdą inną ścianą) więc

$$s(\mathscr{W}) \geqslant k(\mathscr{W})+1.$$

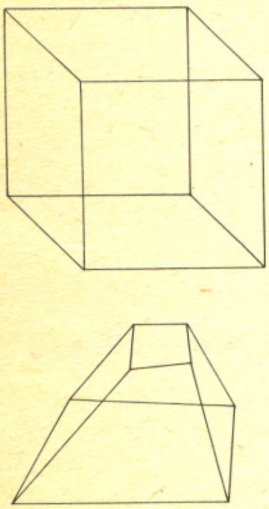
Rodzajów ścian może być co najwyżej $k(\mathscr{W})-2$ gdyż i-kąt może być ścianą tego wielościanu tylko dla $i = 3, 4, \ldots, k(\mathscr{W})$ więc $r(\mathscr{W}) \leqslant k(\mathscr{W})-2$. Stąd

$$s(\mathscr{W})-r(\mathscr{W}) \geqslant k(\mathscr{W})+1-(k(\mathscr{W})-2) = 3.$$

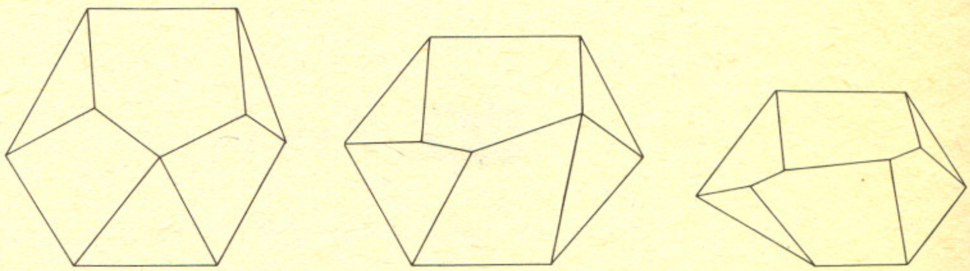
A więc w każdym wielościanie są co najmniej trzy powtórzenia.

Dokładniej: homeomorfizmy wielościanów zachowujące własności: „być krawędzią" i „być wierzchołkiem".

Postaramy się teraz znaleźć wszystkie (z dokładnością do homeomorfizmu, zachowującego wierzchołki i krawędzie) wielościany z trzema powtórzeniami. Inaczej mówiąc będziemy szukać reprezentantów wszystkich klas wielościanów, przy czym dowolny wielościan z danej klasy można przekształcić na dowolny wielościan z tej samej klasy za pomocą homeomorfizmu, zachowującego wierzchołki i krawędzie. Do tej samej klasy należą wielościany mające ściany tego samego rodzaju ułożone w ten sam sposób, np. wielościany na rys. 1. Wielościany na rys. 2. należą do dwóch różnych klas, mimo że mają ściany tego samego rodzaju. Są one ułożone w różny sposób.



Rys 1.



Rys 2.

Wielościany z trzema powtórzeniami mają wiele ciekawych własności. Zaznajomienie się z nimi pozwoli nam na znalezienie wszystkich klas tych wielościanów. Przytoczymy teraz te własności wraz z niektórymi dowodami.
Ponieważ dalej będziemy zajmować się tylko wielościanami z trzema powtórzeniami, mówiąc „wielościan" będziemy mieli na myśli taki właśnie wielościan. Przyjmijmy, że wielościan, w którym ścianą o największej liczbie boków jest k-kąt, nazywać będziemy „wielościanem z k-kątem". Mówiąc „jedyny wielościan" mamy na myśli jedyny z dokładnością do homeomorfizmu, zachowującego wierzchołki i krawędzie.

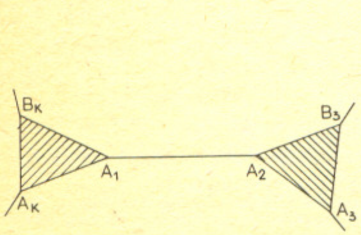
Własności wielościanów

1. Dla wszystkich $i = 3, 4, \ldots, k$ wielościan z k-kątem zawiera ściany, będące i-kątami.

2. W wielościanie z k-kątem każda ściana ma krawędź wspólną z k-kątem.

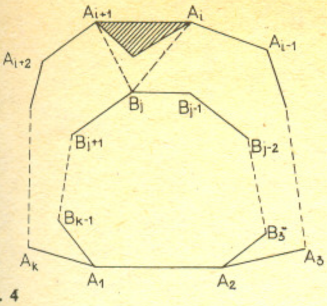
3. W wielościanie z k-kątem dokładnie jedna ściana nie ma krawędzi wspólnej z $(k$-1)-kątem.

4. W wielościanie zawierającym co najmniej dwa k-kąty (oznaczmy je $A_1 \ldots A_k$ i $B_1 \ldots B_k$):
(a) wielokąty te mają wspólną krawędź (przyjmiemy, że $A_1 = B_1$, $A_2 = B_2$),
(b) ściany zawierające krawędzie A_1A_k i B_1B_k oraz A_2A_3 i A_2B_3 są trójkątami.

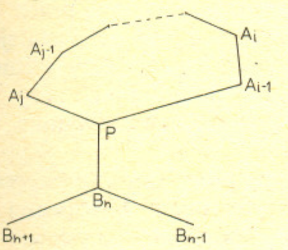


Rys 3.

Dowód (a) wynika bezpośrednio z własności 2. Przy dowodzie (b) z tej samej własności wnioskujemy, że istnieje ściana zawierająca krawędzie A_kA_{k-1} i B_kB_{k-1} (rys. 3). Ściana ta ma dwa punkty wspólne ze ścianą zawierającą krawędzie A_1A_k i A_1B_k, w takim razie ściany te mają wspólną krawędź A_kB_k, czyli ściana zawierająca krawędzie A_1A_k i A_1B_k jest trójkątem $A_1A_kB_k$.



Rys. 4



Rys. 5

5. W wielościanie zawierającym dokładnie jeden k-kąt $A_1 \dots A_k$ i $(k-1)$-kąt $A_1A_2B_3 \dots B_{k-1}$ ściana, zawierająca krawędzie A_2A_3 i A_2B_3 lub A_1A_k i A_1B_{k-1} jest trójkątem. Dowód jest taki sam, jak dla własności **4**. Uwaga: obie ściany, zawierające krawędzie A_1A_k i A_1B_{k-1} oraz A_2A_3 i A_2B_3 nie muszą jednocześnie być trójkątami, gdyż z własności **3** wynika, że istnieje dokładnie jedna ściana nie mająca krawędzi wspólnej z $(k-1)$-kątem $A_1A_2B_3 \dots B_{k-1}$ (por. rys. 4).

6. W wielościanie zawierającym dokładnie jeden k-kąt ściana, która nie ma krawędzi wspólnej z $(k$-1)-kątem, jest trójkątem.

Szkic dowodu:
Oznaczmy: $A_1A_2 \dots A_k - k$-kąt, $A_1A_2B_3 \dots B_{k-1} - (k-1)$-kąt. Niech ściana zawierająca krawędź A_iA_{i-1} nie ma krawędzi wspólnej z $(k-1)$-kątem (rys. 5). Na mocy własności **3**, ściana zawierająca krawędź A_iA_{i-1} jest jedyną ścianą nie mającą krawędzi wspólnej z $(k-1)$-kątem $A_1A_2B_3 \dots B_{k-1}$. Wystarczy zauważyć, że ściany, zawierające krawędzie $A_{i-1}A_i$ i $A_{i+1}A_{i+2}$, mają krawędzie wspólne z $(k-1)$-kątem $A_1 \dots B_{k-1}$ i wspólny wierzchołek B_j. (Gdyby ściana o krawędzi $A_{i+1}A_{i+2}$ zawierała np. krawędź B_jB_{j+1}, a ściana o krawędzi $A_{i-1}A_i$ krawędź $B_{j-2}B_{j-1}$, to ściana o krawędzi $B_{j-1}B_j$ nie miałaby krawędzi wspólnej z k-kątem $A_1 \dots A_k$, co jest sprzeczne z własnością **2**.)

7. Jeżeli w wielościanie, zawierającym dokładnie jeden k-kąt, wierzchołek P nie należy do k-kąta, ani do $(k-1)$-kąta, to istnieje trójkąt o wierzchołku P i podstawie należącej do k-kąta, a więc nie mający punktów wspólnych z $(k-1)$-kątem.

Dowód: Oznaczmy k-kąt — $A_1A_2 \dots A_k$, $(k-1)$-kąt — $A_1A_2B_3 \dots B_{k-1}$ (rys. 5). P jest wierzchołkiem wielościanu, więc istnieją co najmniej trzy ściany o wierzchołku P. Wszystkie te ściany muszą mieć krawędź wspólną z k-kątem, co najwyżej jedna z tych ścian może nie mieć krawędzi wspólnej z $(k-1)$-kątem, więc istnieją co najmniej dwie ściany mające krawędzie wspólne z k-kątem $A_1A_2 \dots A_k$ i $(k-1)$-kątem $A_1A_2B_3 \dots B_{k-1}$. Załóżmy, że są to ściany, zawierające krawędzie $A_{i-1}A_i$ i A_jA_{j+1} $(i \leqslant j)$. Ściany te mają wspólną krawędź B_nP (w przeciwnym przypadku istniałaby ściana, nie mająca krawędzi wspólnej z k-kątem). Ściany, zawierające krawędzie $A_iA_{i+1}, \dots, A_jA_{j-1}$ nie mają krawędzi wspólnych z $(k-1)$-kątem. Z własności **3** wiemy, że istnieje dokładnie jedna ściana, nie mająca krawędzi wspólnej z $(k-1)$-kątem, więc $j = i+1$ lub $i = j$. Gdyby $i = j$, to wierzchołek P należałby jedynie do dwóch ścian, co jest niemożliwe.

8. W wielościanie, zawierającym dokładnie jeden k-kąt, co najwyżej jeden wierzchołek nie należy do k-kąta ani do $(k-1)$-kąta (wniosek z własności **3** i **7**).

9. Jeżeli w wielościanie $\mathscr{W}$, zawierającym dokładnie jeden k-kąt, istnieje wierzchołek, nie należący do k-kąta ani do $(k-1)$-kąta, to liczba $l(\mathscr{W})$ wszystkich wierzchołków w tym wielościanie równa jest $l(\mathscr{W}) = k+(k-1)-2+1 = 2k-2$, a jeżeli taki wierzchołek nie istnieje — $l(\mathscr{W}) = 2k-3$.

Korzystając z własności **1–9** pokażemy, dla jakich k mogą istnieć wielościany z k-kątem.

10. Jeżeli w wielościanie $\mathscr{W}$, zawierającym dokładnie jeden k-kąt
(a) $l(\mathscr{W}) = 2k-2$, to $6 \leqslant k \leqslant 7$,
(b) $l(\mathscr{W}) = 2k-3$, to $4 \leqslant k \leqslant 6$.
W wielościanie zawierającym dokładnie jeden k-kąt musi być $k > 3$, gdyż dla $k = 3$ nie istnieje $(k-1)$-kąt.

Dowód **(a)**: Dla $k = 4$ otrzymujemy wielościan, należący do tej samej klasy, co graniastosłup o podstawie trójkątnej. Ma on 3 k-kąty. Dla $k > 4$ w wielościanie istnieje co najmniej jeden pięciokąt, różny od k-kąta (p. dowód własności **7**), więc musi być $k > 5$.
Przyjmijmy $k \geqslant 6$. W wielościanie $\mathscr{W}$ istnieje co najmniej jeden pięciokąt, oprócz pięciokąta są jeszcze: k-kąt, $(k-1)$-kąt, czworokąty i trójkąty, lecz nie ma i-kąta dla $5 < i < k-1$. W takim razie $(k-2)$-kąt jest co najwyżej pięciokątem, czyli $k \leqslant 7$.
Dowód **(b)** przebiega analogicznie.

Sformułowaliśmy twierdzenie, rozstrzygające, dla jakich k mogą istnieć wielościany, zawierające dokładnie jeden k-kąt. Podobne twierdzenie można udowodnić dla wielościanów, zawierających dokładnie dwa k-kąty.

11. Dla wielościanu $\mathscr{W}$ zawierającego co najmniej dwa k-kąty
(a) $l(\mathscr{W}) = 2k-2$,
(b) $k \leqslant 5$.

Dowód **(a)**: Należy wykazać, że nie istnieje wierzchołek P, nie należący do żadnego z k-kątów. Gdyby taki wierzchołek istniał, to musiałyby istnieć co najmniej trzy ściany o wierzchołku P, mające krawędzie wspólne z każdym z k-kątów, co jest niemożliwe.

Dowód **(b)**: Ponieważ w takim wielościanie nie ma innych wierzchołków niż wierzchołki dwóch k-kątów, więc $(k-1)$-kąt jest co najwyżej czworokątem, czyli $k \leqslant 5$.

W drugiej części artykułu, która ukaże się w Delcie 9/1978, omówimy wszystkie klasy wielościanów z k-kątem.

Mechanika, komputer, człowiek (II)

Prof. dr Dominik ROGULA

Co maszyna potrafi?

W miejsce terminu *komputer* będziemy używać słowa *maszyna*, któremu przypiszemy znaczenie ogólniejsze, niekoniecznie ograniczone do urządzeń podobnych do dzisiejszych komputerów. Oczywiście, w sprawie możliwości maszyn należy odróżnić kwestię „co może zrobić dana maszyna" od kwestii „co może zrobić maszyna w ogóle". Nie interesują nas tutaj ograniczenia możliwości konkretnej maszyny wynikające z jej konkretnej konstrukcji.

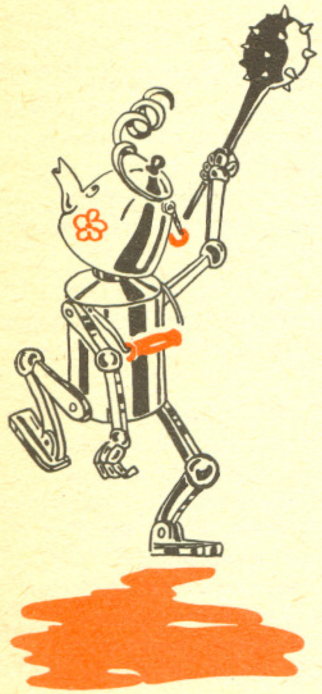
Nie interesują nas również ograniczenia wynikające z ewentualnego niedostatku materiału konstrukcyjnego. Dla pewnego X może być prawdą, iż „zadania X nie wykona żadna maszyna posiadająca mniej niż N elementów", gdzie N jest bardzo dużą liczbą, np. większą niż liczba elektronów w całej naszej Galaktyce, i wówczas trudno oczekiwać, że naprawdę uda nam się zbudować maszynę wykonującą to zadanie.

Nie chodzi nam także o fizyczny aspekt wykonywanych przez maszynę prac. Problem „czy maszyna potrafi uszyć ubranie" rozumiemy nie jako „czy istnieje maszyna, która jest w stanie poruszać nożycami, igłą, nicią i materiałem, i która odpowiednio sterowana będzie w stanie uszyć ubranie", lecz raczej jako „czy istnieje maszyna, która potrafi tak sterować maszyną do szycia, by w wyniku powstało ubranie".

Używając dzisiejszej terminologii komputerowej możemy powiedzieć, że interesują nas możliwości jednostki centralnej, a nie urządzeń peryferyjnych. Możliwości te dotyczą działań w świecie informacji i odpowiadają raczej pracy umysłowej niż fizycznej.

Na czym więc polegają istotne ograniczenia możliwości maszyn? Poglądów takich, jak „maszyna nie może zmienić raz powziętej decyzji" bądź też „maszyna nie może stawiać sobie celów" etc. nie będziemy bliżej omawiać, zaliczając je do poglądów „naiwnych", podyktowanych ich autorom nie tyle znajomością przedmiotu, ile skądinąd szlachetną potrzebą obrony godności człowieka przed zagrożeniem ze strony komputera. Zagrożenie to nie jest chyba większe niż niegdyś heliocentryzacja układu planetarnego, a do treści tych wypowiedzi łatwo budować realizowane kontrprzykłady.

Źródłem głębiej umotywowanych poglądów na temat zasadniczych możliwości maszyn jest teoria algorytmów. W gruncie rzeczy bowiem powstanie i rozwój tej teorii były wynikiem dążenia do wyjaśnienia, co może być zrobione w sposób „mechaniczny". Za podstawę takich poglądów można przyjąć stwierdzenie „maszyna może wykonywać algorytmy i tylko algorytmy", które stanowi nie tyle wynik, ile motto teorii algorytmów. Z tego punktu widzenia, zasadnicze ograniczenie możliwości maszyn można by wyrazić w stwierdzeniu „maszyna nie może wykonywać zadań niealgorytmizowalnych". Poglądem tym zajmiemy się bliżej w następnym odcinku.



Rozwiązanie zadania M 164.
Niech E będzie punktem przecięcia prostych AD i BC, F zaś punktem przecięcia prostych AB i CD. Niech dalej EM i FM będą dwusiecznymi omawianych kątów, G, H, K, L — punktami ich przecięcia z bokami czworokąta.
Rozpatrując trójkąty EAM i EMC otrzymujemy

$\sphericalangle AME + \sphericalangle AEM = \sphericalangle DAM$

$\sphericalangle CMH = \sphericalangle MCE = \sphericalangle MEC$

Dodając te równości stronami i uwzględniając równość $\sphericalangle AEM = \sphericalangle MEC$ otrzymujemy

$\sphericalangle AME + \sphericalangle CMH = \sphericalangle DAM + \sphericalangle MCE$

Podobnie, rozpatrując trójkąt FAM i FMC znajdujemy, że

$\sphericalangle FMC + \sphericalangle AML = \sphericalangle MCD + \sphericalangle MAB.$

Dodając stronami ostatnie dwie równości otrzymujemy

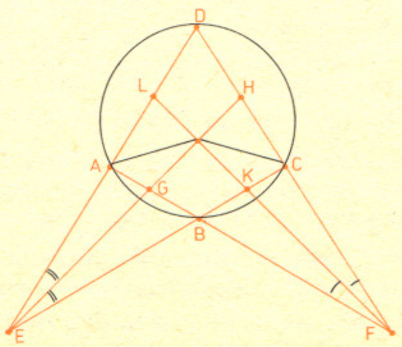
$(\sphericalangle AME + \sphericalangle AML) + (\sphericalangle CMH + \sphericalangle FMC) = (\sphericalangle DAM + \sphericalangle MAB) + (\sphericalangle MCE + \sphericalangle MCD),$

$\sphericalangle LME + \sphericalangle FMH = \sphericalangle DAB + \sphericalangle BCD,$

ale $\sphericalangle LME = \sphericalangle FMH$, więc

$2\sphericalangle LME = \sphericalangle DAM + \sphericalangle BCD$

Wykorzystując wreszcie fakt, że czworokąt jest wpisany w okrąg, a więc że $\sphericalangle DAB + \sphericalangle BCD = \pi$, wnioskujemy, że $\sphericalangle LME = \frac{\pi}{2}$.



Rozwiązanie zadania M 163
W rozwiązaniu wykorzystamy kilka spostrzeżeń:

1. W wielomianie $f(x)$ występuje tylko jeden wyraz zawierający najwyższą potęgę x, jest to $\frac{(-1)^n}{n!} x^n$
2. Jeżeli k jest liczbą naturalną mniejszą od n, to $\binom{k}{n} = 0$.
3. Pierwiastkami wielomianu $f(x)$ są liczby $1, 2, \ldots, n$.

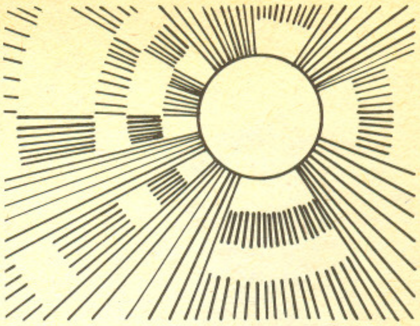
Rzeczywiście, niech k będzie jedną z tych liczb. Wówczas

$$f(k) = 1 - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} - \ldots + (-1)^k\binom{k}{k} + (-1)^{k+1}\binom{k}{k+1} + \ldots + (-1)^n\binom{k}{n} = (1-1)^k = 0.$$

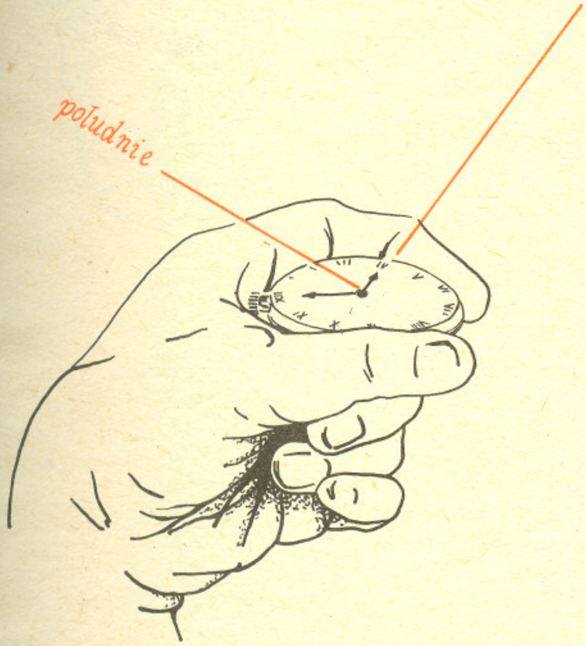
Jest więc

$$f(x) = \frac{(-1)^n}{n!}(x-1)(x-2)\ldots(x-n) = (-1)^n\binom{x-1}{n}$$

mała delta



Do czego może się przydać zegar?

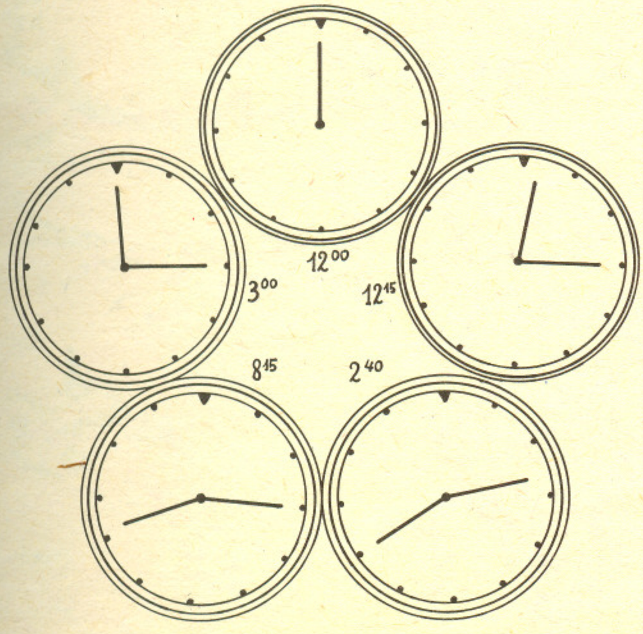


Jak zobaczymy — nie tylko do wskazywania godziny. Od najmłodszych lat uczymy się odczytywać godzinę na podstawie położenia dwu kresek na kole. To koło — to tarcza zegara, a kreski to jego wskazówki. Mniejsza z nich przemierza przez godzinę 1/12 tarczy, a więc 30°, a zatem ma prędkość kątową 30°/godz. Jest to dwukrotnie więcej od prędkości kątowej Słońca na niebie, która wynosi 15°/godz. (bo od południa do zachodu jest 6 godzin i 90°). Wykorzystujemy to do oznaczania stron świata w dzień słoneczny. Kierujemy małą wskazówkę na Słońce. Dwusieczna kąta między kreską oznaczająca godzinę 12 a małą wskazówką wskazuje południe. Ta znana każdemu turyście zasada jest tylko przybliżona (pomijając błędy ustawienia zegarka i przepołowienia kąta „na oko"). Czas astronomiczny nie zawsze zgadza się z zegarowym, szczególnie gdy mamy czas letni.

Nie jest od razu widoczne, że na półkuli południowej w ten sposób wyznaczamy kierunek północy a nie południa. A co będzie na równiku? A gdy Słońce jest w zenicie? A pomiędzy zwrotnikami?

W opisanej metodzie wskazówka minutowa jest niepotrzebna: posługujemy się tylko godzinową. Nic dziwnego: z „teoretycznego" punktu widzenia duża wskazówka jest w ogóle niepotrzebna, bo godzinę wyznacza położenie małej. Duża wskazówka pełni tylko rolę noniusza na skali minut. Dawne zegary istotnie nie miały wskazówki minutowej. Było to w czasach, kiedy człowiek w minutę mógł przebyć kilkaset metrów czy kilometr, a nie jak dziś nawet i dwadzieścia.

Jeżeli już używamy zegara z dwiema wskazówkami, to czy mogłyby one mieć tę samą długość. Od pierwszego rzutu oka widzimy, że na narysowanych obok zegarach mamy odpowiednio godzinę 3.00 (a nie ok. 12.15), 12.15 (a nie ok. 3.00), 8.15 (a nie gdzieś za dwadzieścia trzecia), 2.40 (a nie inną), 12.00. Czy Czytelnik mógłby wykazać rachunkowo, że na zegarze z tak samo długimi wskazówkami godzina 12 i $5\frac{5}{143}$ minut jest nieodróżnialna od 13 i $\frac{60}{143}$ minut?



Rzeczywiście,

o $12^h 5\frac{5}{143}'$ można przestawić wskazówki,

bo:

duża jest na $5\frac{5}{143}'$

– w tym położeniu mała byłaby $\frac{5}{143}'$ tarczy zegara po pełnej (pierwszej) godzinie; ponieważ mała przebiega 5' tarczy zegara na godzinę, więc wskazywałaby

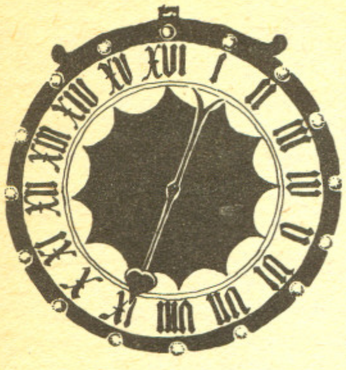
$$\frac{60}{5}\cdot\frac{5'}{143}=\frac{60'}{143}$$

po pełnej godzinie

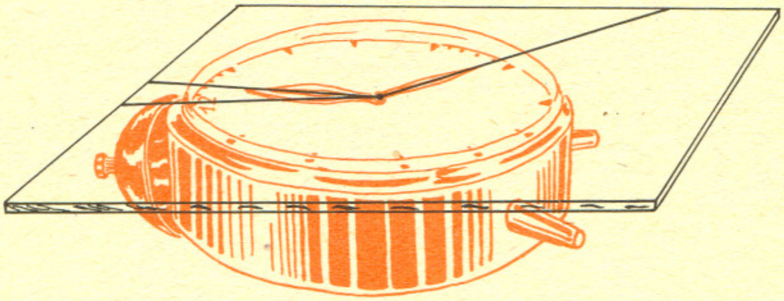
mała (biegnie 12 razy wolniej i) jest na

$$\frac{1}{12}\cdot 5\frac{5}{143}'=\frac{1}{12}\cdot\frac{720'}{143}=\frac{60'}{143}$$

– tyle właśnie minut (po pełnej godzinie) wskazywałaby w tym położeniu duża.

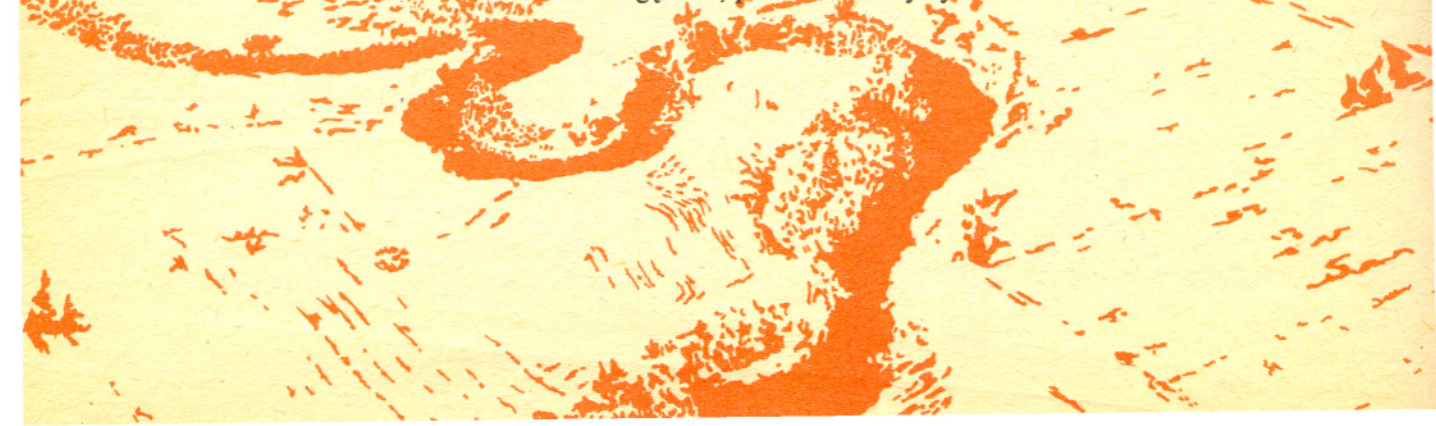


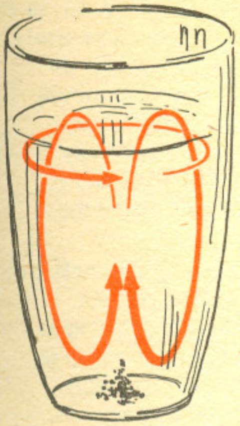
Obie wskazówki zegara przydają się przy rozwiązywaniu zagadnienia trysekcji kąta. Już starożytni Grecy próbowali rozstrzygnąć, czy można konstrukcyjnie (to znaczy za pomocą cyrkla i linijki) podzielić dowolny kąt na trzy równe części. Zadanie to czekało z górą dwa tysiące lat na rozwiązanie, które brzmi: są kąty, których nie da się w ten sposób podzielić na trzy równe części. Przykładowo, nie da się tego zrobić dla kąta 20°. Okazuje się jednak, że trysekcja dowolnego kąta jest wykonalna, gdy posłużymy się dodatkowym „przyrządem geometrycznym": zegarem. Narysujmy nasz kąt na przezroczystym papierze. Ustawmy zegar na 12.00 i połóżmy go tak, by wierzchołek kąta był w środku obrotu wskazówek, a jedno ramię kąta padło wzdłuż wskazówek. Przesuńmy wskazówkę minutową tak, by pokryła się z drugim ramieniem kąta. Zaznaczmy na papierze, o jaki kąt przesunęła się w tym czasie wskazówka godzinowa. Jest to dwunasta część kąta jaki przeszła minutowa, tj. dwunasta część naszego kąta. Wystarczy więc dwukrotnie podwoić ten mały kąt (co możemy już zrobić za pomocą cyrkla i linijki), by otrzymać trzecią część kąta wyjściowego.



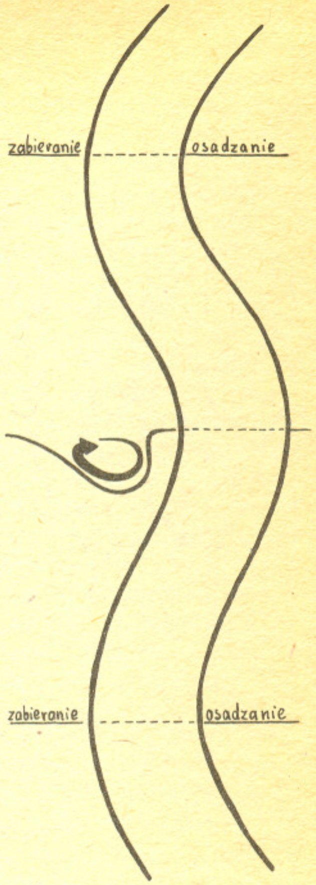
Czy mieszanie łyżeczką w szklance herbaty może pomóc w zrozumieniu meandrowania rzek?

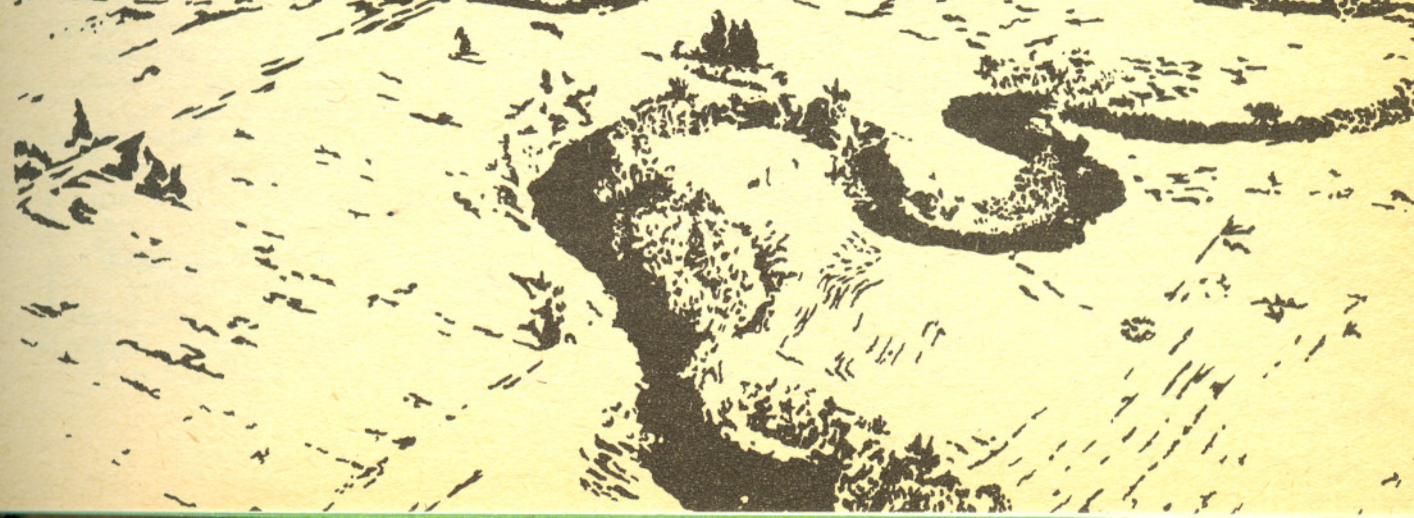
Dziwne pytanie. — Pewnie może, skoro postawiłem taki problem. Najpierw warto przypomnieć sobie, co to jest meandrowanie. Popatrzcie na rysunek. Rzeka płynie raz na prawo, raz na lewo, a powstałe zakola z biegiem czasu stają się coraz głębsze. Co z tym wspólnego może mieć mieszanie łyżeczką w szklance z herbatą?
Zróbcie takie doświadczenie: zalewamy wodą nieco listków herbaty. Jeżeli chcemy ją potem wypić, to woda powinna być wrząca. Poczekamy aż listki herbaty (fusy) opadną na dno i zamieszamy energicznie łyżeczką wprawiając płyn w ruch obrotowy. Listki zbiorą się na dnie szklanki, w samym jej środku.
Na zjawisko to patrzyliście na pewno wielokrotnie, ale czy zwróciliście na nie uwagę? No, pewnie nie wszyscy.





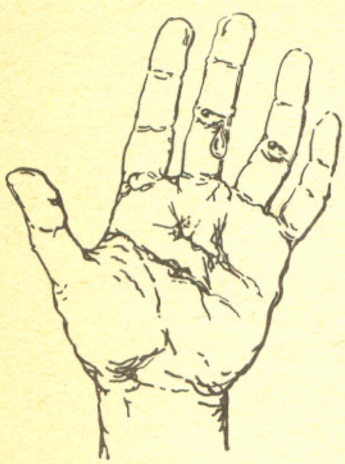
Przyjrzyjcie się więc uważnie. Wydawałoby się, że siła odśrodkowa powinna rozpędzić listki herbaty na obrzeże, a tymczasem „coś" zagania je do środka. Wyjaśnienie zjawiska jest dość proste. Odśrodkowa siła bezwładności rzeczywiście dociska wirującą substancję (herbatę) do ścianek szklanki. Rozważmy mały element objętości herbaty wirujący dokoła osi przechodzącej przez środek szklanki. Im dalej od tej osi tym większa jest siła odśrodkowa. W wyniku tego ciśnienie w herbacie będzie wzrastało od środka do brzegów, równoważąc wzrastającą siłę odśrodkową.
W wirującej cieczy nie powinno być prądów wzdłuż promienia szklanki. Wniosek ten jednak jest fałszywy — nie uwzględniliśmy w rozumowaniu tarcia cieczy o dno szklanki. Ciecz w warstwie dennej wiruje wolniej niż w warstwie powierzchniowej. Ciśnienie przy ścianie na dnie będzie więc mniejsze, niż przy ścianie na powierzchni.
W wyniku tej różnicy ciśnień herbata będzie spływać przy ściankach ku dołowi następnie do środka i wzdłuż osi ku górze. Rozrzucone, cięższe od herbaty (dobrze zaparzonej), fusy skupią się w środku.
W wirującej cieczy powstaje zatem dodatkowy przepływ po zamkniętych krzywych leżących w płaszczyznach pionowych.
Teoria ruchu fusów w herbacie jest gotowa, możemy teraz przejść do meandrowania rzek. Popatrzmy na rysunek.
Taki sam przepływ, który skupia fusy w herbacie, przenosi w zakręcającej rzece piasek z jednego brzegu na drugi.
Mechanizm obu zjawisk jest identyczny. Tak to w szklance herbaty można znaleźć wyjaśnienie procesów, które zmieniają powierzchnię Ziemi.





Modele matematyczne i jak z nich skorzystać

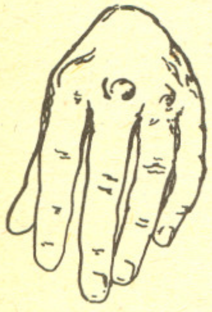
Prof. dr Tadeusz Traczyk

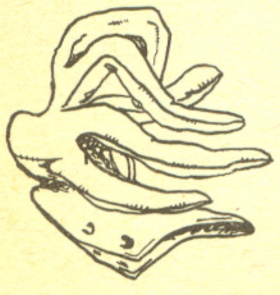


Jeśli jest prawdą, że motorem ludzkiej działalności jest pragnienie szczęścia, to owo szczęście ma tysiąc twarzy — każdy je widzi inaczej i nikt nie poznał jego istoty. Stąd wielość dróg, na których człowiek próbuje realizować swoje dążenie do szczęścia. Stąd także wielość kultur i możliwych cywilizacji. Prawdopodobnie gdzieś w basenie śródziemnomorskim w czasach zamierzchłych zrodziła się i opanowała ówczesnego człowieka idea podporządkowania sobie przyrody i przetwarzania jej na użytek swojej wizji szczęścia. Idea ta, idea władania środowiskiem, stała się zapewne korzeniem cywilizacji, która dziś dominuje w naszym świecie.

Okazało się jednak szybko, że przyrodą rządzą prawa, które nie są podległe woli człowieka: „Aby władać przyrodą, trzeba jej być posłusznym" powiedział Franciszek Bacon, jeden z pierwszych wielkich empiryków Odrodzenia. Stało się jasne, że poznanie praw przyrody jest koniecznym warunkiem opanowania jej. Badania podstawowe — odkrywanie praw rządzących przyrodą — znalazły społeczne uzasadnienie i nobilitację w europejskich kręgach cywilizacyjnych. Niemniej poszukując gorączkowo doraźnych korzyści ekonomicznych, praktycznych, często jeszcze zapominano o niezbywalnych wartościach tych badań nazywanych dla kontrastu teoretycznymi. Nawet Stanisław Staszic — otwierając szkołę przygotowawczą do Instytutu Politechnicznego w Warszawie w 1826 roku — powiedział: „Uczony teoretyk może być jeszcze próżniakiem, jeszcze tylko społeczeństwa ciężarem. On równie jak jego nauki bez celu będąc, stanie się w towarzystwie albo nudnym, albo z zbytnią o sobie zarozumiałością niespokojnym. Lecz ten uczony, który przez zastosowanie swoich nauk i umiejętności do wzrostu krajowych dostatków, do rozwijania narodowego przemysłu, ten będzie obywatelem użytecznym, ten stanie się współpracownikiem koło wszelkiego zamiaru społecznienia się ludów, koło powszechnego dobra" (*Gazeta Warszawska*, nr 5, 9.1.1826).

Matematyka była od czasów starożytnych uznanym narzędziem człowieka w jego staraniach o władanie przyrodą. Jej odkrycia często wyprzedzały postęp w innych dziedzinach wydając się przez to nieużytecznymi. Prawdziwy i szybki jej rozwój nastąpił jednak dopiero w czasach nowożytnych wraz z rozwojem nauk empirycznych — z nich głównie czerpała swoje problemy obdarzając je wzamian nowymi metodami badawczymi. Obdarzając tak hojnie, że nazwano ją królową nauk.





Zawsze tak się dzieje, że im doskonalsze człowiek stworzy sobie narzędzie pracy, tym trudniejszej jest poddawany próbie. Próbie sprostania nowej jakości — wykorzystania wszystkich walorów nowego narzędzia. Walorów, których tworząc je nawet nie przeczuwał. Matematyka jest narzędziem bardzo wymagającym. Jeśli pojęcia są ściśle zdefiniowane, założenie precyzyjnie sformułowane, to — dopiero wówczas — stosując uznane przez logikę reguły wnioskowania matematyk może wyprowadzać nowe tezy zwane zwykle twierdzeniami. Poprawnie wyprowadzone tezy mogą się okazać fałszywe jedynie wtedy, gdy fałszywe są założenia, z których je wyprowadzono. Takie postępowanie nazywa się dedukcją. Rozumowanie dedukcyjne jest trudne, dlatego też definicje i założenia powinny być możliwie najprostsze i w niewielkiej liczbie. Stąd pochodzi konieczność upraszczania i pewnej idealizacji stawianych przed matematykiem problemów, tzn. konieczność pomijania mniej ważnych założeń i szczegółów, upraszczania innych, i tym podobnych zabiegów. Nazywa się to budowaniem matematycznego modelu dla określonego fragmentu rzeczywistości fizycznej. Jest to krytyczny etap stosowania matematyki: jeśli bowiem model został źle dobrany, to choćby do dedukcji użyto potem najpiękniejszej i najbardziej zaawansowanej matematyki, jej wyniki — choć spełnione w tym modelu — są bez żadnej wartości dla tego fragmentu świata, którego mają dotyczyć. Gorzej: bardzo często prowadzą korzystającego z nich człowieka na manowce fałszywych konkluzji i fałszywych decyzji.

Czasem bywa inaczej: matematyczny model pasuje jak ulał do niewielkiego fragmentu rzeczywistości fizycznej, a przestaje pasować, gdy ten fragment powiększymy. Słowo „powiększymy" nie dotyczy odległości elementów, chodzi raczej o rozszerzenie zakresu badań np. o przejście od badań własności fizycznych pewnych obiektów do badania ich składu chemicznego lub jeszcze głębiej —

do badania cząstek elementarnych, z których są zbudowane. Z takiego modelu możemy z powodzeniem korzystać, jeśli uwzględnimy jego ograniczenia. Np. wprowadzona przez Euklidesa geometria przestrzeni trójwymiarowej przez dwa tysiące lat była doskonałym modelem fizycznej przestrzeni, w której wszyscy żyjemy i poruszamy się. Nie wyobrażano sobie nawet, że może być inaczej. Jedynie wśród matematyków pewien niepokój wzbudzał słynny V postulat Euklidesa mówiący, że w płaszczyźnie wyznaczonej przez daną prostą l i dany punkt A nie leżący na prostej l istnieje co najwyżej jedna prosta przechodząca przez A i nie przecinająca prostej l. W równoważnej postaci pewnik ten brzmi: suma kątów trójkąta płaskiego jest równa sumie dwóch kątów prostych. Podejrzewano, że ten pewnik jest konsekwencją pozostałych postulatów Euklidesa. Podejmowane wielokrotnie próby dowodu nie udawały się. I nie mogły się udać, ponieważ w XIX w. pokazano, że V postulat nie jest konsekwencją pozostałych. Powstały wtedy nowe geometrie, w których ten pewnik został odrzucony: geometria Łobaczewskiego i ogólniejsza od niej geometria Riemanna. Można było sądzić, że są to czysto myślowe konstrukcje nie mające zastosowania w naukach empirycznych.

I oto w 1913 roku Albert Einstein ogłosił swoją słynną szczególną teorię względności a potem ogólną teorię względności, poddając rewizji podstawowe zasady fizyki. W tych pracach Einstein przyjął właśnie riemannowski model czterowymiarowej przestrzeni; trzy wymiary określały położenie, czwartym wymiarem był czas: każdemu zdarzeniu w świecie fizycznym odpowiadał punkt w tej przestrzeni. Teoria względności świetnie wyjaśnia wynik różnych eksperymentów; dotychczas nie została obalona. Przeciwnie, potwierdziły ją specjalnie przeprowadzone doświadczenia, np. w dziedzinie fizyki cząstek elementarnych i jądra atomowego, a także w astronomii. Okazało się, że dla tych dziedzin geometria Euklidesa nie jest „dobrym" modelem przestrzeni fizycznej. Warto zwrócić uwagę, na to, że w opisie zjawisk fizyki klasycznej, np. w dynamice lub kinetyce ciała stałego fizyka Einsteina nie różni się od fizyki Newtona. Dlatego też geometria Euklidesa była „dobra" dla tej fizyki.

Konieczność idealizacji i uproszczeń występuje także w procesie tworzenia znacznie bardziej szczegółowych modeli matematycznych dla konkretnych zagadnień technicznych lub ekonomicznych i podobne powstają tu niebezpieczeństwa. Mówił o tym prof. dr Andrzej Wierzbicki w wykładzie inauguracyjnym w Politechnice Warszawskiej 1X1976 r. w następujących słowach: „Użytkowy model matematyczny dla danego problemu jest często z natury rzeczy niedokładny i wymaga weryfikacji w oparciu o dane pomiarowe. Bez praktycznej weryfikacji, teoretyczne modele pozostają pustą abstrakcją, która nie może być wykorzystana dla pożytku społeczeństwa". I dalej: „Sztuka tworzenia dobrego modelu użytkowego wymaga dużego doświadczenia i intuicji technicznej w rozwiązywaniu zadań określonego typu". Posiadanie dobrego modelu matematycznego umożliwia optymalne rozwiązanie problemu praktycznego. Oto klasyczny już przykład — *zagadnienie transportowe*: w kraju jest czynnych n elektrowni zużywających odpowiednio $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ton węgla dziennie. Węgiel ma być dostarczony z krajowych kopalni, których jest m i każda produkuje dziennie co najmniej odpowiednio $b_1, b_2, \ldots, b_m$ ton węgla. Znany jest koszt c_{ij} transportu 1 tony węgla z i-tej kopalni do j-tej elektrowni ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$). Tak należy zorganizować transport węgla, aby całkowity koszt transportu był najmniejszy. Jest to więc zagadnienie decyzji optymalnej. Należy określić taką liczbę x_{ij} ton węgla, który ma być przewieziony z i-tej kopalni do j-tej elektrowni, aby całkowity koszt transportu

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{1}$$

był najmniejszy. Przy tym nałożone są ograniczenia

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant b_i \tag{2}$$

z uwagi na dzienną wydajność i-tej kopalni ($i = 1, 2, \ldots, m$) oraz wymagania

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_j \tag{3}$$

z uwagi na zapotrzebowanie j-tej elektrowni ($j = 1, \ldots, n$).

Rozwiązanie zadania F55

W układzie obracającym się ze stałą prędkością kątową na każdy punkt cieczy działa przyspieszenie ziemskie g (skierowane pionowo) i przyspieszenie odśrodkowe $\omega^2 r$ (skierowane poziomo, od osi obrotu). Pole g jest polem potencjalnym. Jego potencjałem jest $V_g = gz$. Również pole przyspieszenia odśrodkowego jest polem potencjalnym o potencjale $V_0 = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2$ (z i r zaznaczono na rysunku w treści zadania).

Potencjał układu pól jest sumą potencjałów poszczególnych pól, zatem każdy punkt cieczy znajduje się w polu przyspieszenia o potencjale:

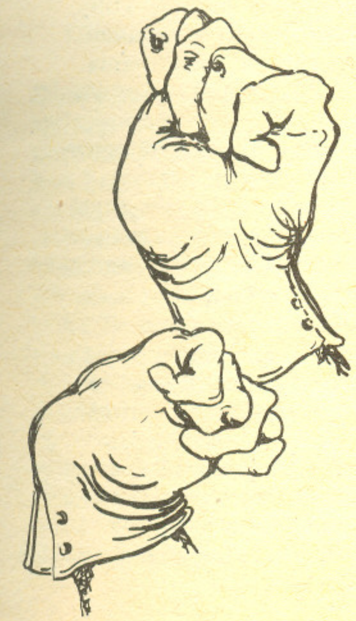
$$V = V_g + V_0 = gz - \frac{1}{2}\omega^2 r^2.$$

Wynika stąd, że powierzchnie ekwipotencjalne (V_g = const) są przystającymi paraboloidami o równaniach postaci

$$z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + \text{stała}.$$

Powierzchnie rozpatrywane w treści zadania z oczywistych powodów muszą być powierzchniami ekwipotencjalnymi. Podany wyżej związek oznacza więc, że powierzchnie te muszą być przystające.

Przy analizie powierzchni ekwipotencjalnych w układzie obracającym się w istotny sposób skorzystaliśmy z faktu, że ciecz jest w równowadze. Gdyby tak nie było, gdyby jakieś obszary cieczy miały w tym układzie niezerową prędkość, to należałoby uwzględnić jeszcze inne przyspieszenia, np. przyspieszenie Coriolisa, którego nie można opisać za pomocą potencjału i nasze rozważania straciłyby sens.



Ponadto ma być

(4) $\qquad x_{ij} \geqslant 0 \quad i = 1, \ldots, m; \; j = 1, \ldots, n.$

Ufamy, że Czytelnik nie dał się zwieść pozorną realnością opisanej wyżej sytuacji: mamy tu do czynienia nie z sytuacją rzeczywistą a jedynie z jej matematycznym modelem. Oczywiście nie tylko dlatego, że użyliśmy symboli literowych, tzn. że rozważamy to zagadnienie ogólnie, ale — co jest znacznie ważniejsze — dlatego, że dokonaliśmy dość poważnych uproszczeń. Zwróćmy uwagę chociażby na jedno: jako kryterium decyzji optymalnej przyjęliśmy koszt transportu. Zadanie rozwiązaliśmy. Czy rzeczywiście wydamy polecenie zgodne z tym rozwiązaniem? A może się np. okaże, że linia kolejowa z j-tej kopalni do i-tej elektrowni jest tak obciążona transportem rudy do Huty Katowice, że transport takiej dużej ilości x_{ij} węgla, jaka wypadła z naszego rozwiązania nie jest już tą linią możliwy. Inne trudności może nam np. stworzyć nagła zmiana pogody w pewnych rejonach kraju itd. Znów więc matematyczny model opisujący bardzo dobrze mały fragment rzeczywistości — pomijający pewne jej aspekty — może się okazać nieprzydatnym, gdy te aspekty uwzględnimy.

Jeśli już uświadomiliśmy sobie jedynie modelowy charakter wyżej opisanego zadania transportowego, to zastanówmy się nad jego rozwiązaniem: być może zostanie ono jednak wykorzystane w praktyce. Rozwiązaniami dopuszczalnymi tego zadania nazywamy takie (skończone) ciągi liczb x_{ij}, gdzie $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$, które spełniają ograniczenia (2), (3), (4). Takie ciągi można traktować jako wektory lub punkty przestrzeni wielowymiarowej. Okazało się przede wszystkim, że zbiór wszystkich rozwiązań dopuszczalnych jest wypukłym podzbiorem tej przestrzeni (jeśli $a = (a_1, \ldots, a_k)$, $b = (b_1, \ldots, b_k)$ są różnymi punktami k-wymiarowej przestrzeni, to mówimy, że punkt $p = (p_1, \ldots, p_k)$ leży na odcinku ab wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba $t \in \langle 0,1 \rangle$, że $p_i = a_i + t(b_i - a_i)$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Podzbiór H tej przestrzeni nazywamy wypukłym, jeśli z każdą parą punktów a, b zawiera także odcinek ab). Okazało się także, że zbiór wszystkich rozwiązań dopuszczalnych jest figurą wypukłą ze skończoną liczbą wierzchołków. Na płaszczyźnie byłyby to więc wielokąty wypukłe, w przestrzeni trójwymiarowej — wielościany wypukłe (ew. zbiory nieograniczone). Pominiemy tu definicję wierzchołka zbioru wypukłego w dowolnej przestrzeni wielowymiarowej. Rozwiązaniami optymalnymi nazwiemy te spośród dopuszczalnych, które minimalizują funkcję kosztów (1). Zwykle jest ich wiele, tworzą jednakże zbiór wypukły ze skończoną liczbą wierzchołków a wierzchołki te są także wierzchołkami zbioru rozwiązań dopuszczalnych. Te fakty czysto geometrycznej natury, owoc rozumowania dedukcyjnego, pozwoliły znaleźć algorytm prowadzący od jednego wierzchołka zbioru rozwiązań dopuszczalnych do innego w taki sposób, aby koszt transportu (1) nie powiększał się. Znalezienie pierwszego wierzchołka jest bardzo łatwe. Potem stosując wspomniany algorytm skończoną liczbę razy znajdujemy wszystkie wierzchołki zbioru rozwiązań optymalnych. Potrzebne rachunki są wykonalne na maszynie cyfrowej nawet wtedy, gdy $m+n$ jest liczbą trzycyfrową.

Zadanie transportowe jest typowym zagadnieniem z działu matematyki, który wyrósł w ciągu ostatnich trzydziestu kilku lat z pytań stawianych w ekonomii i nazywa się programowaniem liniowym. Główne twierdzenia programowania liniowego — także te, które zostały tu sformułowane — otrzymano wykorzystując pojęcia geometrii analitycznej i przestrzeni wielowymiarowej oraz pojęcia algebry liniowej. Tak więc jeszcze jedno uogólnienie geometrii Euklidesa — tym razem nie przez odrzucenie jednego z postulatów lecz przez powiększenie liczby wymiarów — które mogłoby się wydawać pustą jedynie zabawą umysłu, nagle znalazło bardzo piękne i praktyczne zastosowanie. Zauważmy jednak, że gdybyśmy nie mieli do dyspozycji szybkoliczących maszyn, to te zastosowania pozostałyby jedynie w sferze pięknych możliwości: liczba operacji arytmetycznych rośnie bowiem bardzo szybko, gdy rośnie $m+n$.

Zagadnienia optymalnego projektowania urządzeń technicznych nie będą już na ogół tak proste jak zadanie transportowe. Zarówno wymagania nałożone na parametry konstrukcji technicznej (waga, wymiary, wytrzymałość, odporność na czynniki atmosferyczne, czułość, dokładność itp.) jak i kryterium decyzji optymalnej (koszt w zadaniu transportowym) mogą nie mieć postaci liniowej nawet przy znacznych, ale dopuszczalnych uproszczeniach. Jednakże tylko przez znalezienie odpowiedniego modelu matematycznego można tego rodzaju zagadnienia rozwiązywać. Metodą prób i błędów otrzymuje się rozwiązania zwykle dalekie od optymalnego, ponieważ możliwych decyzji jest na ogół nieskończenie wiele.

Rozwiązanie zadania M 165.

Przypuśćmy, że $e = \frac{p}{q}$, gdzie p i q są liczbami naturalnymi. Byłoby więc

$$(q-1)!p = q!e = q!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{q!}\right) + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \ldots$$

Suma występująca w nawiasie jest liczbą wymierną o mianowniku $q!$, a więc po pomnożeniu jej przez $q!$ otrzymamy liczbę naturalną. Liczba

$$A = (q-1)!\, p - q!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{q!}\right)$$

jest więc liczbą całkowitą (jako różnica dwóch liczb naturalnych).
Z drugiej strony

$$A = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \ldots,$$

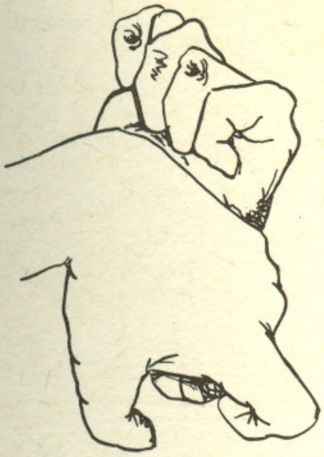
a więc

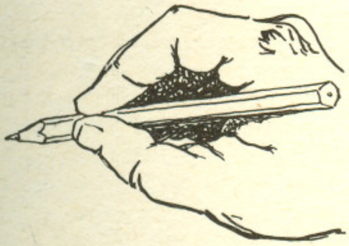
$$0 < A < \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \ldots$$

$$\ldots = \frac{1}{q+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{q+1}} = \frac{1}{q+1-1} = \frac{1}{q} < 1,$$

czyli $0 < A < 1$, co jest sprzeczne z poprzednim stwierdzeniem, że A jest liczbą całkowitą. Tak więc założenie, że e jest liczbą wymierną doprowadziło nas do sprzeczności.

W związku z podobnymi zagadnieniami technicznymi rozwinęły się w ciągu ostatnich dwudziestu lat dwa duże działy matematyki: programowanie dynamiczne i teoria optymalizacji. Są one zbyt skomplikowane, aby w krótkim artykule można było je bliżej omówić.





Zamiast tego podkreślamy, że chociaż rozwiązywanie konkretnych zagadnień technicznych czy ekonomicznych ma ogromne znaczenie dla gospodarki narodowej dla jej doraźnych potrzeb, to jednak niemniej ważnym (dla tej samej gospodarki ale w długim okresie czasu) zastosowaniem matematyki w naukach ścisłych jest właśnie nadawanie ich problemom ścisłego charakteru, tzn. porządkowanie wiedzy o określonym fragmencie rzeczywistości przez tworzenie teorii (np. teoria względności). Tworzenie ścisłych teorii przez wykorzystanie odpowiednich modeli matematycznych pozwala także na odkrywanie nowych faktów naukowych bez pomiarów, eksperymentów i obserwacji — w drodze rozumowania dedukcyjnego. Eksperymenty nabierają wówczas nowego sensu. Mogą być odpowiednio projektowane w celu potwierdzenia poprawności modelu i słuszności odkryć teoretycznych. W taki sposób — najpierw teoretycznie a dopiero potem poprzez przyrządy optyczne — odkryto istnienie planet Neptuna i Plutona i obliczono ich orbity. Plutona dostrzeżono dopiero w 15 lat (w 1930 r.) po teoretycznym stwierdzeniu jego istnienia i położenia w kosmosie. Istnienie elektronów dodatnich zostało udowodnione przez Diraca w 1930 roku w wyniku rozważań teoretycznych na gruncie pewnego modelu matematycznego. Odkrycie to zostało w dwa lata później potwierdzone eksperymentalnie przez Andersona. Eksperyment był specjalnie zaprojektowany — nastawiony na „wyłapanie" dodatnich elektronów z promieni kosmicznych. Zapewne nie doszłoby do tego eksperymentu, gdyby nie teoretyczne odkrycie Diraca.

Próbowaliśmy w tym artykule pokazać sprzężenie zwrotne pomiędzy matematyką i naukami empirycznymi. Nauki te wykorzystują matematykę do uściślenia swoich pojęć, do poprawnego planowania eksperymentów, do rozwiązywania problemów przez tworzenie odpowiednich modeli matematycznych. Matematyka zaś otrzymuje w zamian pakiety nowych zagadnień, nowych pytań, z których powstają nawet nowe teorie matematyczne, które z kolei służą naukom empirycznym.

Kącik filatelistyczny (4)

Evangelista Torricelli (1608—1647) był najznakomitszym spośród uczniów Galileusza. Kontynuował jego badania w zakresie mechaniki, ale największą sławę przyniosły mu doświadczenia w zakresie hydrostatyki i hydrodynamiki. Wynalazł barometr rtęciowy (tzw. rurka Torricellego), wykazał istnienie ciśnienia atmosferycznego, oszacował ciężar atmosfery ziemskiej, odkrył prawo wypływu cieczy z naczynia.
Reprodukujemy dwa znaczki z portretem uczonego, wydane przez Włochy (w roku 1958) i przez ZSRR (w roku 1959).

Jerzy BARTKE