

## SPIS TREŚCI

NUMERU 6(54)

Dlaczego interesuje nas krzywa trójkątowa Sierpińskiego ? <i>Prof. dr Jerzy Mioduszewski</i>	str. 1
Co to jest teoria względności ? <i>Dr Andrzej Krasieński</i>	str. 4
Mechanika, komputer, człowiek <i>Prof. dr Dominik Rogula</i>	str. 8
Zadania	str. 9
Mała Delta	str. 10
Fizyka na boisku piłkarskim <i>Dr Daria Ziemińska i dr Andrzej Ziemiński</i>	str. 14
Drobiazgi	str. 17

*W następnym numerze:  
O układaniu horoskopów*

„Delta”  
 matematyczno-fizyczny miesięcznik  
 popularny  
 Polskiego Towarzystwa  
 Matematycznego i Polskiego  
 Towarzystwa Fizycznego  
 wydawany przy poparciu  
 Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny  
 doc. dr J. Bartke  
 doc. dr A. Bączyński  
 doc. dr B. Gleichgewicht  
 prof. dr K. Goebel  
 doc. dr B. Iwaszkiewicz  
 doc. dr T. Iwiński  
 doc. dr A. Januszajtis  
 prof. dr Leon Jeśmanowicz —  
 wiceprzewodniczący  
 mgr H. Kaczorek  
 prof. dr B. Karczewski  
 prof. dr M. Kuczma  
 mgr A. Mąkowski  
 prof. dr Z. Pawlak  
 prof. dr A. Piekara  
 prof. dr Z. Semadeni  
 prof. dr J. Stankowski

prof. dr M. Subotowicz  
 doc. dr S. Turnau  
 doc. dr J. Wdowczyk  
 prof. dr Janusz Zakrzewski —  
 przewodniczący

Redaguje Kolegium w składzie:  
 doc. dr T. Hofmokl — z-ca red. nac.  
 dr T. B. Iwiński  
 B. Jaworska-Kordos — ilustracje  
 dr M. Kordos — red. nac.  
 mgr K. Prażmowski — red. techn. graf  
 mgr K. Szypcio — sekr. red.  
 doc. dr M. Świecki  
 Adres Redakcji  
 ul. Hoża 69 pok. 151,  
 00-681 Warszawa

Zakład Narodowy im.  
 Ossolińskich — Wydawnictwo  
 Wrocław, Oddział w Warszawie  
 Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.  
 wyd.; 2,50 ark. druk.;  
 papier offsetowy III kl. 80 g. 61 × 86  
 Wydrukowano w Drukarni im.  
 Rewolucji Październikowej  
 Warszawa ul. Mińska 65.  
 Nr zam. 333/78 S-83

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60, — cena prenumeraty półrocznej zł 30, —

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach:  
 — do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i cały rok następny  
 — do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego.  
 Jednostki gospodarki uspołecznionej instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienie w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”.  
 Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW, oraz prenumeratorki indywidualni zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.  
 Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTA”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.  
 Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.  
 Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, Konto PKO I OM W-wa 1531-912

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław  
 w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa  
 w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 00-068 Warszawa, Poland or with  
 — Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland.  
 — Earls Court Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain,  
 — Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia

Cena 1 egzemplarza zł 5, — nr indeksu 35723/35550



# Dlaczego interesuje nas krzywa trójkątowa Sierpińskiego?

Krzywa trójkątowa Sierpińskiego to zbiór punktów płaszczyzny leżących w przekroju ciągu zstępującego figur  $T_0 \supset T_1 \supset T_2 \supset \dots$ , z których  $T_0$  jest trójkątem równobocznym,  $T_1$  powstaje z  $T_0$  przez usunięcie wnętrza środkowego trójkąta spośród czterech, równych, na które wcześniej podzielimy trójkąt  $T_0$ , a  $T_2$  powstaje z  $T_1$  przez dokonanie na każdym z trzech składających się na figurę  $T_1$  trójkątów operacji dopiero co opisanej; podobnie dostaje się dalsze figury ciągu (rys. 1).

Figury  $T_k$  są spójne, domknięte i ograniczone; są więc kontinuumami, według powszechnie przyjętej terminologii. Przekrój ciągu zstępującego kontinuumów jest również kontinuum. Jest to już twierdzenie, ale z rodzaju tych, które głoszą, że jest tak jak się nam wydaje; zostawmy je więc bez dowodu, tym bardziej, że nie daliśmy ani określenia spójności, ani domkniętości, mając na myśli, że każde z grubsza dobre wyobrażenie o tych pojęciach wystarczy do śledzenia tego tekstu. Przekrój  $T$  figur  $T_k$  nie zawiera żadnego (pełnego) krążka: średnica największego krążka zawartego w figurze  $T_k$  jest nie większa niż  $(1/3)^k$  średnicy trójkąta  $T_0$ . Jest to jeden z powodów, dla którego mówimy o  $T$ , że jest krzywą.

\*

Opisana konstrukcja pochodzi z pracy Wacława Sierpińskiego, „O krzywej, której każdy punkt jest punktem rozgałęzienia”, *Prace Matematyczno-Fizyczne* 27 (1916), str. 77–86.

Przez krzywą rozumie się zbiór na płaszczyźnie, który jest (1) kontinuum nie zawierającym żadnego (pełnego) krążka i który jest (2) obrazem ciągłym odcinka (z końcami), a więc jest zbiorem opisanym równaniami, w których występują funkcje ciągłe.

W czasach, z których pochodzi praca Sierpińskiego, zbiory na płaszczyźnie mające własność (1) nazywano krzywymi w sensie Cantora; te, które mają własność (2), nazywano krzywymi w sensie Jordana, co prawda już raczej dla tradycji, bo wiadomo było od dawna (Peano 1890), że kwadrat jest krzywą w tym sensie. Tytuł pracy wskazywał, dlaczego budowana w niej krzywa miała zasługiwać na uwagę.

Abyśmy jednak mogli z własnego przekonania uznać rzecz za ciekawą, powinniśmy najpierw wiedzieć, co to jest punkt rozgałęzienia.

\*

Opiszemy to pojęcie, tak jak to robił Urysohn mniej więcej dziesięć lat później (P.S. Urysohn, *Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes* II, *Verhandelungen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen* 13 (1928), str. 1–172).

Punkt  $p$  jest punktem (rozgałęzienia) rzędu  $\leq n$  zbioru  $A$ , jeśli istnieją dowolnie małe otoczenia punktu  $p$ , których brzeg ma nie więcej niż  $n$  punktów; najmniejszą z takich liczb  $n$  nazywamy rzędem (rozgałęzienia) zbioru  $A$  w punkcie  $p$ ; jeśli ten rząd jest 3 lub większy, to punkt nazywany jest wprost punktem rozgałęzienia. Chociaż można, nie myślmy o rzędach rozgałęzienia nieskończonych. Wszystkie punkty odcinka są rzędu 2 lub 1 (rzędu 1 są tylko końce); wszystkie punkty okręgu są rzędu 2. Najprostszą figurą mającą (jeden) punkt rozgałęzienia jest trójnóg (litera Y). Jeśli z punktu wychodzi  $n$  łuków, z których żadne dwa nie mają poza tym punktem punktów wspólnych, to punkt ten jest rzędu co najmniej  $n$ . Z punktu rzędu  $n$  nie może wychodzić więcej niż  $n$  takich łuków. Na krzywej  $T$  widać po cztery odcinki wychodzące z punktów będących wspólnymi wierzchołkami trójkątów z figur  $T_k$  (rys. 2). Są to punkty rzędu 4, bo są dowolnie małe otoczenia tych punktów o brzegach (na rysunku symbolizują je okręgi rysowane linią przerywaną) mających po cztery punkty.

Obwody trójkątów z figur  $T_k$  są zawarte w krzywej  $T$ . Punkty z tych obwodów nie będące wierzchołkami trójkątów z żadnej z tych figur są rzędu 3. Dwa odcinki wychodzące z takiego punktu widać; widać także trzeci łuk wychodzący z takiego punktu i tworzący z tymi dwoma odcinkami trójnóg; widać dowolnie małe otoczenia o brzegach mających po trzy punkty (rys. 3).

Są punkty krzywej  $T$  nie leżące na żadnym z obwodów trójkątów z figur  $T_k$ . Czy są? Zamiast odpowiadać na kłopotliwe pytania (chyba niepotrzebne, skoro nie stawialiśmy podobnego pytania z okazji poprzednio rozpatrywanych punktów), pokażmy, na wypadek gdyby takie punkty istniały, że są one rzędu 3. Widać to z rysunku 4, robionego według tego samego schematu co poprzednie dwa.

Ale są trzy punkty krzywej  $T$ , wierzchołki trójkąta  $T_0$  (i to jest już reszta), które są rzędu 2. Są dwa odcinki wychodzące z takiego punktu i są dowolnie małe otoczenia ich, których brzegi mają po dwa punkty (rys. 5).

Biorąc dwa egzemplarze krzywej  $T$  i sklejjąc w nich po dwa wierzchołki w trójkątach  $T_0$  dostajemy krzywą mającą same punkty rozgałęzienia; rzędy tych punktów są 3 lub 4; punktów rzędu 4 jest tylko przeliczalnie wiele. Czy istnieje krzywa, której wszystkie punkty są rzędu 3?



ilustracje  
na  
okładce!





Że takiej krzywej nie ma, pokazał później Urysohn we wspomnianej już pracy: nie ma krzywych mających ten sam (skończony) rząd rozgałęzienia w każdym punkcie, chyba że ten rząd jest 2.

Dokładniej: jeśli krzywa (której każdy punkt jest rzędu skończonego) ma w każdym punkcie rząd  $\geq n$ , to są punkty tej krzywej, w których rząd jest  $\geq 2n-2$ . Dla  $n=2$  dostajemy znowu liczbę 2, a dla  $n=3$  liczbę 4. Krzywa trójkątowa Sierpińskiego daje przykład na to, że twierdzenia Urysohna nie można wzmocnić.

Dowód twierdzenia Urysohna (uproszczony przez Parchomienkę w książce „Co to jest linia?”, tłumaczenie z rosyjskiego, Warszawa 1961). Przypuścimy, że wszystkie punkty krzywej (są rzędu skończonego i) są rzędu  $< 2n-2$ . Wtedy (\*) każdy zbiór otwarty niepusty  $U$  zawiera wraz z brzegiem zbiór otwarty niepusty o brzegu mającym nie więcej niż  $n-1$  punktów.

Mając tę przesłankę kończymy dowód, budując ciąg zstępujący zbiorów otwartych niepustych o średnicach dążących do zera (rys. 6), takich, że następny jest zawarty z brzegiem w poprzednim i te brzegi mają nie więcej niż  $n-1$  punktów. Punkt wspólny tych zbiorów jest rzędu  $\leq n-1$ ; sprzeczność.

Dowód przesłanki (\*). Niech  $p \in U$ . Ponieważ punkty krzywej są wszystkie rzędu skończonego, więc istnieje otoczenie  $W$  punktu  $p$  o brzegu skończonym i zawarte w  $U$  wraz z tym brzegiem. Niech  $q$  będzie punktem na brzegu zbioru  $W$  (rys. 7). Istnieje otoczenie  $V'$  punktu  $q$ , zawarte wraz z brzegiem w  $U$ , nie zawierające innych niż  $q$  punktów brzegu zbioru  $W$  i którego brzeg ma mniej niż  $2n-2$  punktów (założenie przesłanki (\*)). Zbiór  $V'$  rozpada się po odjęciu punktu  $q$  na dwie części otwarte niepuste. Na brzegu obu tych części jest razem (nie licząc punktu  $q$ ) mniej niż  $2n-2$  punktów. Stąd, na brzegu jednej z nich jest (razem z punktem  $q$ ) nie więcej niż  $n-1$  punktów. Ta właśnie część jest szukanym zbiorem  $V$ .

\*

Rozważmy w przestrzeni czworościan foremny. Podzielmy go na równe czworościany o średnicy dwa razy mniejszej i zostawmy tylko te przy wierzchołkach. Postępując tak dalej, dostaniemy jako pozostałość kontinuum, które we wszystkich punktach jest rzędu 4 i 6 z wyjątkiem wierzchołków wyjściowego czworościanu, które są rzędu 3. Jest to przestrzenny odpowiednik krzywej trójkątowej Sierpińskiego. Sklejając ze sobą po dwa punkty rzędu 3 dostaniemy kontinuum, którego wszystkie punkty są rzędu 4 i 6.

Pokazuje to niemożliwość wzmocnienia twierdzenia Urysohna także dla  $n=4$ . Rzecz dzieje się w przestrzeni, więc kryterium (1) nie może być zastosowane, aby orzec, że dostaliśmy krzywą. Ale zobaczymy, że nie dostaliśmy ani bryły, ani powierzchni. W  $k$ -tym kroku konstrukcji mamy figurę, która jest sumą czworościanów o średnicy  $(1/2)^k$  połączonych ze sobą wierzchołkami i figura ta rozpada się na te czworościany po usunięciu tych (skończenie wielu) wierzchołków. Figura ta nie może więc zawierać żadnej bryły ani powierzchni (w jakimkolwiek możliwym do przyjęcia znaczeniu) o średnicy większej niż  $(1/2)^k$ . Stąd, przekrój tych figur nie może zawierać żadnej bryły ani powierzchni. To samo można zrobić dla każdego  $n$ , w  $n-1$  wymiarach, i dostać krzywe (dopuszmy to słowo), których wszystkie punkty są rzędu  $n$  i  $2n-2$ .

\*

Pozostało do pokazania, że krzywa trójkątowa  $T$  jest obrazem ciągłym odcinka. Dowód, który podaje Sierpiński, sformułujemy w sposób znany z poprzedniego artykułu w Delcie 7/1977.

Rozetnijmy figurę  $T_1$  w jednym z punktów wierzchołkowych nie będącym wierzchołkiem trójkąta  $T_0$ . Powstaje girlanda złożona z trzech trójkątów (rys. 8). Każdy z tych trzech trójkątów rozetnijmy podobnie, ale tak, by powstała girlanda 9 trójkątów; można to zrobić np. tak, jak na rysunku 9.

Potem z tych trójkątów dostaniemy girlandę złożoną z 27 trójkątów; przy rozcinaniu trójkątów można trzymać się takiej reguły: trójkąty przecinamy na bokach mających punkty wspólne z trójkątami sąsiednimi; jedynie w przypadku skrajnych trójkątów reguła ta nie jest jednoznaczna.

Postępując tak dalej, dostajemy w granicy (jakiej i jakim prawem?) łuk, który po sklejeniu go z powrotem daje znowu krzywą trójkątową. Nie sklejamy przy tym więcej niż po dwa punkty. Krzywa trójkątowa jest więc obrazem ciągłym łuku, a więc i odcinka, otrzymanym przez odwzorowanie o krotności nie większej niż 2.



#### Rozwiązanie zadania M 162

Niech  $ABCD$  będzie szukanym czworościanem.

Gdy przez każdą krawędź poprowadzimy płaszczyznę równoległą do krawędzi przeciwległej, otrzymamy sześć płaszczyzn ograniczających równoległościan, którego pewnymi wierzchołkami są punkty  $A, B, C, D$ , końce zaś danych odcinków są środkami jego ścian. Zauważmy, że każda para przeciwległych krawędzi równoległościanu jest równoległa do płaszczyzny zawierającej dwa dane odcinki, gdyż prosta łącząca środki przeciwległych ścian równoległościanu jest równoległa do każdej innej ściany tego równoległościanu.

Czworościan spełniający warunki podane w zadaniu można wskazać w następujący sposób: przez końce każdego danego odcinka poprowadzimy płaszczyznę równoległą do pozostałych dwóch odcinków. Otrzymujemy w ten sposób równoległościan.

Na dwóch przeciwległych jego ścianach obierzmy dwie nierównoległe przekątne. Ich końce są wierzchołkami żądanego czworościanu. Zadanie ma więc (co najmniej) dwa rozwiązania.





### Rozwiązanie zadania F 54

Na pierwszy rzut oka wydaje się, że zderzenie nie jest sprężyste, gdyż po takim zderzeniu kulki 2 i 3 powinny być nieruchome, a kulka 1 powinna poruszać się z prędkością 7 cm/s. Nie zawsze jest to jednak prawdą, a jedynie wtedy, gdy całe zderzenie można uważać za dwa oddzielne, kolejno zachodzące sprężyste zderzenia „dwukulkowe”. Taka sytuacja zdarza się często, ale zależy to od czasu trwania pojedynczych zderzeń. W przypadku ogólnym jako kryterium sprężystości pozostają jedynie zasady zachowania pędu i energii kinetycznej. W rozważanej sytuacji mają one postać:

$$mv = mv_1 + mv_2 + mv_3,$$

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} + \frac{mv_3^2}{2}$$

i stanowią układ tylko dwóch równań z trzema niewiadomymi. Tak więc w ogólności stan końcowy zderzenia z udziałem więcej niż dwóch kulek nie daje się jednoznacznie przewidzieć. Podane zaś w treści zadania prędkości kulek spełniają oba powyższe równania. Rozpraszanie jest więc sprężyste.

Jeśli w krzywej trójkątowej zaszyjemy dziury, to dostaniemy pełny trójkąt. To brzmi nawet prawdopodobnie, ale nie każde zszywanie jest dobre. Opiszemy zaszywanie trójkąta usuniętego w pierwszym kroku konstrukcji. Wystarczyłoby opisać zszywanie obwodu, ale opiszemy zaszywanie całego trójkąta.

Dzielimy trójkąt na cztery równe trójkąty (rys. 10). Środkowy trójkąt redukujemy do punktu. W pozostałych trzech redukujemy do punktów odcinki równoległe do boków środkowego trójkąta. Wierzchołki trójkąta nie zostały zszyte z innymi punktami. Jeśli zaszyjemy w ten sposób wszystkie pousuwane trójkąty, to postąpimy tak, jak byśmy odwzorowali w sposób ciągły (nie tylko to przyjmijmy teraz na słowo) trójkąt  $T_0$  na figurę powstałą z niego przez zredukowanie do punktów wszystkich trójkątów i odcinków, na które zostały porozbijane pousuwane trójkąty. Zauważmy, że punkty na obwodzie trójkąta  $T_0$  nie zostały zszyte z żadnymi innymi, a żaden ze wspomnianych trójkątów i odcinków nie rozpaja trójkąta  $T_0$ .

Jedno z ciekawszych twierdzeń topologii płaszczyzny, twierdzenie Moore'a (w pełnej ogólności i z odnośnikiem do oryginalnej pracy Moore'a z r. 1920 można znaleźć w książce Kuratowskiego, *Topology II*, Warszawa 1968, str. 533), pozwala na konkluzję, że powstała figura jest zbiór homeomorficzny z (pełnym) krążkiem, a więc także i z trójkątem  $T_0$ .

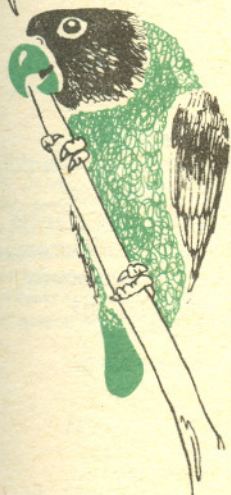
W prawdziwość konkluzji łatwo się wierzy, czując w palcach rezultat zszywania trójkąta  $T_0$ . Oczywiście twierdzenie Moore'a jest jednak zdradliwa: trójwymiarowy analogon, że zlepianiem w punkty łuków nie rozspajających (pełnej) kuli, jest fałszywy. Otrzymany przez zszywanie krążek jest obrazem także krzywej  $T$ , bo elementy rozbicia mają punkty na krzywej  $T$ , a że każdy ma ich nie więcej niż trzy, więc krążek jest obrazem (ciągłym) krzywej trójkątowej przez odwzorowanie krotności nie większej niż 3.

Autor artykułu nie wie, czy krzywą trójkątową można odwzorować w sposób ciągły na krążek przez odwzorowanie krotności nie większej niż 2.

Spójrzmy, jak wygląda krzywa  $T$  po zszyciu (rys. 12). Usunięte trójkąty stały się trójkątami o średnicach dążących do zera wraz ze średnicami odpowiadających im trójkątów.

Punkty rozgałęzienia trójkątów, to środkowe części usuwanych trójkątów.

ilustracje  
na  
okładce!



Przez złożenie opisanych odwzorowań, odcinka na krzywą  $T$  i krzywej  $T$  na krążek, dostajemy odwzorowanie (ciągłe) odcinka na krążek.

Co do krotności jest nieco gorsze niż oryginalne odwzorowanie Peany, które ma krotności 1, 2 i 4 (o odwzorowaniach Peany — zob. artykuł w Delcie 7/1977). To, które dostaliśmy, ma wszystkie krotności od 1 do 4.

Zobaczmy to. Punkty krzywej  $T$  leżące na obwodach usuwanych trójkątów są wartościami krotności 1 lub 2 odwzorowania odcinka na krzywą  $T$  i tylko one są zszywane; wartości krotności 2 jest jedynie przeliczalnie wiele: są to punkty, w których robiliśmy rozcięcia. Zszywamy końce odcinków rozbicia (rys. 11) i wtedy zszywamy dwie wartości krotności nie większej niż 2, ale zdarza się przy tym zszyć punkt krotności 2 z punktem krotności 1 (punkty  $p$  i  $q$  z rys. 11), otrzymując wartość krotności 3 odwzorowania złożonego. Zszycie wierzchołków trójkąta zredukowanego do punktu daje punkt krotności 4 odwzorowania złożonego, bo (trzeba to zauważyć) zszywa się wtedy jeden punkt krotności 2 z dwoma punktami krotności 1. Odwzorowanie złożone ma jeszcze krotności 2 i 1, ale i tak pokazaliśmy już, że otrzymaliśmy odwzorowanie nie lepsze niż Peany, więc oszczędźmy sobie dowodu, w którego wyniku nie jesteśmy zainteresowani.

Pokażemy za to jak, zmieniając nieco sposób zaszywania usuniętych trójkątów, dostać odwzorowanie (ciągłe) odcinka na krążek, mające krotności 1, 2 i 3, z przeliczalną ilością punktów krotności 3, więc nie gorsze niż odwzorowanie Pólyi (przypomniane w Delcie 7/1977). Obniżenie krotności, podobnie jak u Pólyi, będzie otrzymane kosztem symetrii.

Każdy z usuniętych trójkątów dzielimy na cztery trójkąty przez wpisanie trójkąta tak, aby jego wierzchołki były krotności 1, a odcinki równoległe do jego boków (rys. 13) nie łączyły punktów krotności 2 z punktami krotności 2 z obwodu usuniętego trójkąta. Trójkąt tak wpisany się znajdzie, bo punktów krotności 2 jest jedynie przeliczalnie wiele (jest to wskazówka do dowodu, którego dobre wykonanie może dać nawet pewną satysfakcję). Zszywanie robimy jak poprzednio. Otrzymujemy krążek, który jest teraz obrazem odcinka przez odwzorowanie krotności nie większej niż 3 (rys. 14).



# Co to jest teoria względności?

Dr Andrzej KRASIŃSKI

## TESTY DOŚWIADCZALNE

Jeśli nowa teoria fizyczna ma zastąpić starą, musi spełniać trzy podstawowe warunki:

1. Wszystkie fakty eksperymentalne dobrze wyjaśnione przez starą teorię nowa teoria musi wyjaśniać co najmniej równie dobrze (tzn. z nie mniejszą dokładnością).
  2. Nowa teoria musi wytłumaczyć, dlaczego stara dobrze nadawała się do opisu podlegających jej zjawisk.
  3. Nowa teoria musi dobrze opisywać coś, czego stara teoria opisać nie potrafiła, albo co opisywała w sposób niezgodny z wynikami eksperymentu.
- Bez spełnienia pierwszego warunku nowa teoria będzie uboższa od starej i nikt nie zechce zaprzętać sobie głowy uczeniem się jej. Bez spełnienia drugiego warunku, przy spełnionym pierwszym, nowa teoria jest zaledwie nowym podejściem do starych zagadnień, i jej wyższość jest bardzo problematyczna (zwłaszcza w przypadku, gdy stara teoria potrafi objaśnić nową — wtedy nowa jest tylko zabawką teoretyków). Dopiero spełnienie trzeciego warunku ukazuje istotną wyższość nowej teorii nad starą.

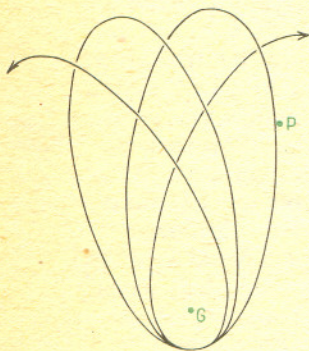
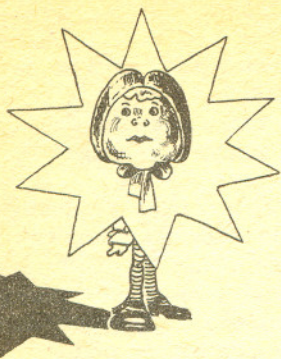
Z punktem pierwszym i drugim (zwanymi razem zasadą korespondencji) teoria względności nie miała większych kłopotów. Nowe, nieznane mechanice newtonowskiej efekty występują przy bardzo dużych prędkościach ruchu, w bardzo silnych polach grawitacyjnych i w wielkich obszarach Wszechświata. Ponieważ obiekty astronomiczne poruszają się na ogół (w porównaniu z prędkością światła) powoli, badane przez ludzi pola grawitacyjne Słońca i planet są słabe, zaś wszelkie dane obserwacyjne dotyczące wielkich obszarów są tak niedokładne, że dopuszczają znaczną dowolność interpretacji — teoria Newtona mogła skutecznie wyjaśniać bardzo wiele zjawisk astronomicznych w sposób ilościowo nieznacznie różniący się od opisu teorii względności. Natomiast punkt trzeci był kłopotliwy. Wyjaśnienie ruchu perihelium Merkurego oraz przepowiedzenie ugięcia promieni świetlnych w polu grawitacyjnym przed doświadczalnym wykryciem tego efektu były wielkimi osiągnięciami nowej teorii, lecz zaledwie dwa nowe, niewątpliwie potwierdzone doświadczalnie efekty — to było trochę za mało, aby odrzucić teorię Newtona, wspaniale rozwiniętą w ciągu 200 lat jej istnienia, prostą rachunkowo i pojęciowo i mającą na swym koncie niezliczoną ilość trafnie przepowiedzianych efektów. Dlatego przez ponad 50 lat teoria względności zdobywała sobie entuzjastów głównie dzięki swojej elegancji matematycznej, precyzyjnej, pięknej strukturze dedukcyjnej oraz dzięki pobudzającym wyobraźnię i fantazję, zaskakującym wnioskom z prostych obserwacji. Dopiero w ostatnich latach sytuacja ta zaczęła się zmieniać. Pięćdziesięciu lat potrzebowała technika na osiągnięcie takiego poziomu, aby odstępstwa teorii względności od teorii Newtona były możliwe do zmierzenia w większej ilości przypadków. Omówimy, w kolejności chronologicznej, najważniejsze i najciekawsze doświadczenia z tej serii.

## RUCH PERIHELIMUM MERKUREGO

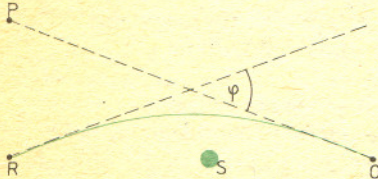
Pokazaliśmy już w poprzednim artykule, jak tłumaczyła ten efekt teoria Newtona i na jaki kłopot przy tym natrafiła. W myśl równań teorii względności, nawet gdyby Słońce miało tylko jedną planetę, jej tor nie byłby elipsą, lecz krzywą „rozetkową”, zaś zaburzenia grawitacyjne wywołane przez inne planety jedynie powiększają obrót perihelium. Różnica obrotu zmierzonego i obliczonej sumy zaburzeń orbity Merkurego przez inne planety wynosiła, jak pamiętamy,  $(43,11 \pm 0,45)''$  na stulecie. „Naturalny” obrót perihelium Merkurego, nie wywołany przez zaburzenia, miał wynosić  $43,03''$  na stulecie. Widać, że pierwszy historycznie test teorii Einsteina wypadł niespodziewanie dobrze.

## UGIĘCIE PROMIENI ŚWIETLNYCH W POLU GRAWITACYJNYM

W czasach, gdy powstawała ogólna teoria względności, jedyną okazję zaobserwowania tego efektu dawały całkowite zaćmienia Słońca. Ugięcie było bowiem wystarczająco duże tylko dla promieni biegnących blisko Słońca, a to oznaczało, że trzeba rejestrować obrazy gwiazd znajdujących się w małej odległości kątowej od Słońca.

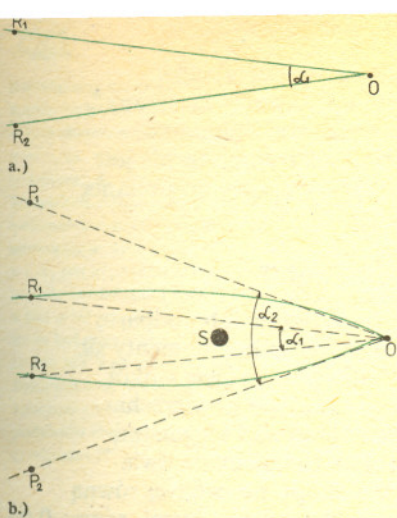


Rys. 1. Według teorii Einsteina planeta porusza się wokół gwiazdy po krzywej rozetkowej nawet wtedy, gdy jest jedyną planetą tej gwiazdy.

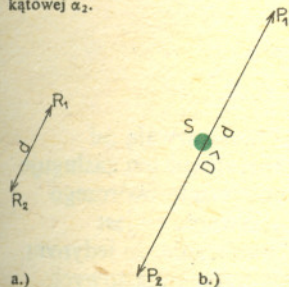


Rys. 2. Ugięcie promienia świetlnego w polu grawitacyjnym Słońca. R — rzeczywiste położenie gwiazdy, P — położenie pozorne rejestrowane na fotografii przez obserwatora O, φ — kąt ugięcia promienia, znacznie przesadzony.

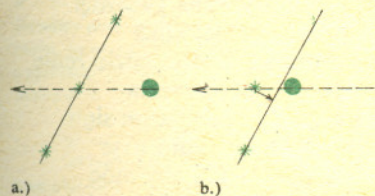




Rys. 3. Zasada pomiaru kąta ugięcia.  
a) Gdy gwiazdy są widoczne na niebie z dala od Słońca, ich położenia obserwowane zgadzają się z rzeczywistymi  $R_1$  i  $R_2$ ; kąt między kierunkami obserwowanych położen wynosi  $\alpha_1$ . b) Gdy gwiazdy są widoczne w pobliżu Słońca, ich położenia pozorne  $P_1$  i  $P_2$  znajdują się w większej odległości kątowej  $\alpha_2$ .



Rys. 4. a) Położenia gwiazd  $R_1$  i  $R_2$  na fotografii w sytuacji odpowiadającej rysunkowi 3a. b) Położenia gwiazd  $R_1$  i  $R_2$  na fotografii w sytuacji z rysunku 3b.



Rys. 5. Zasada pomiaru radiointerferometrycznego: a) Słońce z dala od trójki radioźródeł, ich obrazy leżą na jednej prostej, b) Słońce zbliżyło się do środkowego radioźródła, jego obserwowane położenie odchyliło się od prostej łączącej dwa pozostałe obrazy.

Pomiar polegał na sfotografowaniu dwu wybranych gwiazd w chwili, gdy znajdowały się na niebie blisko tarczy słonecznej, sfotografowaniu tych samych dwu gwiazd w kilka miesięcy później, gdy były widoczne na tle nieba nocnego, i porównaniu ich względnych położen na obu zdjęciach. Był to z wielu powodów trudny eksperyment. Nie zawsze w czasie zaćmień widać dostatecznie jasne gwiazdy leżące wystarczająco blisko Słońca. Przechowywane przez kilka miesięcy materiały fotograficzne deformują się pod wpływem wilgoci i ciepła, każda klisza w swój indywidualny sposób, nawet jeśli wszystkie pochodzą z tej samej serii produkcyjnej. Powiększa to błędy pomiarowe. Jeśli dodać do tego fakt, że całkowite zaćmienia Słońca mają dziwne upodobanie do występowania pośrodku oceanów, dżungli lub pustyń i rzadko zdarzają się w pobliżu dobrze wyposażonych obserwatoriów, sytuacja będzie jasna.

Dzisiaj używa się do tego pomiaru radioteleskopów interferometrycznych, które potrafią wyznaczyć położenia źródeł fal radiowych z wielką dokładnością. Słońce jest dość słabym źródłem fal radiowych, dzięki czemu można śledzić „radiogwiazdy” nawet w małych odległościach kątowych od Słońca. Natura dostarczyła też astronomom bardzo dogodnej konfiguracji trzech radioźródeł (są one oznaczone symbolami 0111+02, 0116+08 i 0119+11). Leżą one niemal dokładnie na jednej linii prostej, prawie prostopadłej do toru Słońca na niebie, przy czym środkowe z nich jest codziennie przez około 4 tygodnie na przełomie marca i kwietnia każdego roku całkowicie przysłaniane przez Słońce. W czasie „zaćmienia” dwa pozostałe radioźródła, położone z dala od Słońca, a więc nie ulegające pozornemu przemieszczeniu na skutek ugięcia fal radiowych, mogą służyć do wyznaczania rzeczywistego położenia trzeciego źródła, dla porównania go z aktualnie obserwowanym położeniem pozornym. Odpadają więc kłopoty z wyprawami do dżungli i długim przechowywaniem nietrwałych materiałów.

Przewidywane przez teorię Einsteina ugięcie promienia świetlnego na samej krawędzi tarczy słonecznej wynosiło 1,749 sekundy kątowej. Pomiar, wykonany w r. 1974 i 1975 przez E. Fomalonta i R. Sramka w Narodowym Obserwatorium Radio-Astronomicznym w Green Bank (West Virginia, USA), dał wynik  $(1,761 \pm 0,016)''$ .

## GRAWITACYJNE PRZESUNIĘCIE KU CZERWIENI

Jest to efekt, który można łatwo wytłumaczyć posługując się analogią między siłami grawitacyjnymi i siłami bezwładności. Obserwator, poruszający się ruchem przyspieszonym wzdłuż kierunku biegu promienia świetlnego, zaobserwuje wydłużenie się fal świetlnych, czyli „poczerwienienie” światła, gdyż w jednostce czasu będzie go mijalo mniej fal, niż wtedy, gdy spoczywał. Podobnie, światło wydobywające się z pola grawitacyjnego ulega „poczerwienieniu”. Wykrycie poczerwienienia linii widmowych gwiazd oraz dwie obserwacje omówione powyżej były nazywane niekiedy „trzema klasycznymi testami teorii względności”. Cywilizowani ludzie XX wieku są wciąż bardzo przywiązani do magicznych i symbolicznych liczb, i dlatego zrzętniej było mówić o trzech testach, niż dwóch czy czterech, choć każdą z tych liczb można by uznać za trafną przy odpowiednio liberalnych kryteriach (niestety, następną liczbą magiczną: siedem, była całkiem nieosiągalna). Grawitacyjne poczerwienienie światła jest bowiem niemal niemożliwe do zaobserwowania metodami astronomicznymi. Światło jest emitowane z powierzchni gwiazd przez materię, wykonującą szybkie, burzliwe ruchy, a więc na poczerwienienie grawitacyjne nakładają się efekty Dopplera związane z ruchem źródła światła. Ponadto, podobny skutek wywołuje przejście światła przez materię międzygwiazdową, której ilości i rozmieszczenie nie są dokładnie znane. Dlatego pierwsze wiarygodne wyniki dał dopiero eksperyment przeprowadzony w roku 1965 przez E. Pounda i F. Snidera metodami laboratoryjnymi w ziemskim polu grawitacyjnym. Okazało się, że zgodnie z przewidywaniami teorii Einsteina zmiana częstotliwości fali świetlnej  $\Delta\nu$  wynosi:

$$\Delta\nu = \frac{gh}{c^2} \nu,$$

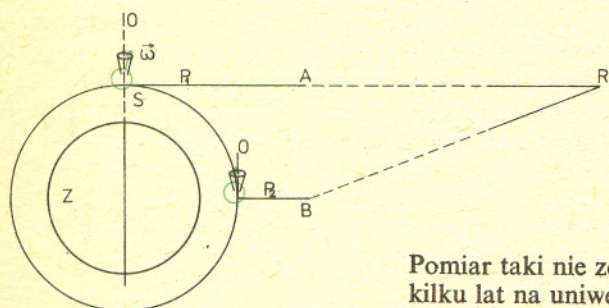
gdzie  $g$  — natężenie pola grawitacyjnego,  $c$  — prędkość światła,  $h$  — różnica wysokości między źródłem a odbiornikiem światła,  $\nu$  — częstotliwość fali wysłanej.



Efekt ten, omówiony w Delcie przez B. Kuchowicza w serii artykułów o kosmologii, bywa podawany jako jeden z dowodów („czwarty klasyczny”, jeśli ktoś chce) ogólnej teorii względności. Rzeczywiście, wyjaśniono go teoretycznie najpierw przy pomocy teorii względności, lecz mimo to nie jest on jej potwierdzeniem eksperymentalnym ponieważ jest możliwy do opisanego również w teorii Newtona.

PRECESJA ŻYROSKOPU NA ORBICIE WOKÓŁ ZIEMI

Żyroskopem nazywamy swobodnie wirujące ciało, zawieszone lub podparte w swoim środku masy, a więc takie, na które nie działają żadne momenty sił. Teoria Einsteina przewiduje, że jeśli umieścimy żyroskop na orbicie wokół Ziemi, to jego oś obrotu powinna wykonywać kolisty ruch po powierzchni stożka zwany precesją. W przypadku orbity przebiegającej nad biegunami Ziemi (prostopadłej do płaszczyzny Równika) precesja będzie miała dwie składowe prostopadłe: jedną związaną z ruchem żyroskopu po orbicie, równą 6,9 sekundy łuku na rok, i drugą związaną z ruchem obrotowym Ziemi, równą 0,05 sekundy łuku na rok.

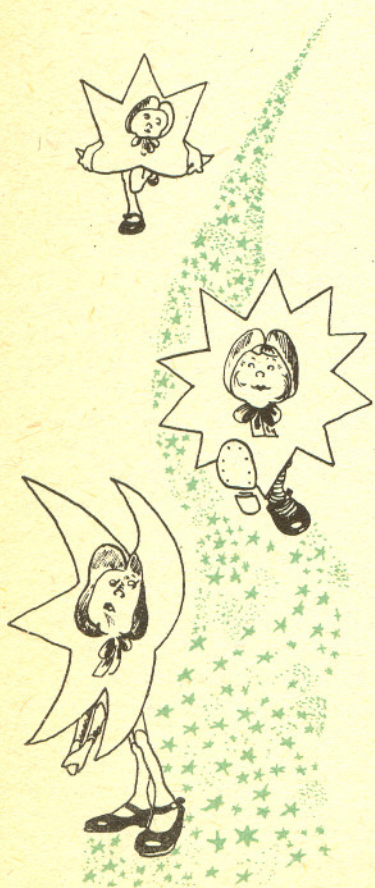


Rys. 6. Zasada pomiaru precesji żyroskopu. Z — Ziemia, S — satelita,  $\omega$  — wektor prędkości kątowej żyroskopu, R — gwiazda używana jako punkt odniesienia, O — oś, wokół której żyroskop wykonuje precesję. W rzeczywistości gwiazda R znajduje się tak daleko od Ziemi, że prosta  $P_1A$  jest równoległa (w granicach błędów pomiarowego) do prostej  $P_2B$ .

Pomiar taki nie został jeszcze wykonany, przygotowania do niego trwają od kilku lat na uniwersytecie w Stanford (USA). Mimo to, eksperyment ten zasługuje na wzmiankę, gdyż jest wyjątkowo pięknym przykładem obustronnie twórczego oddziaływania techniki z nauką. Niestety, zbyt często oddziaływanie to jest rozumiane w sposób wulgarnie dosłowny, gdy np. głosi się publicznie, że jedynym sensem nauki i jedynym zadaniem ludzi nauki jest udzielanie natychmiastowych skutecznych odpowiedzi na problemy zawodowe inżynierów i dyrektorów fabryk. W tym ujęciu nauka (o ile można to zajęcie nazwać nauką) spełnia rolę służebną wobec techniki, zamyka się w ciasnych ramach codzienności i nigdy nie przyniesie wielkich odkryć, ani poznawczych, ani technicznych. Technika zaś, przez nikogo nie prowokowana do twórczych poszukiwań, wpada w tej sytuacji w zastój. W naszym problemie żyroskopu mamy przykład tego, jak wysokie wymagania eksperymentu naukowego stają się wyzwaniem dla ambitnych inżynierów i pobudzają ich do pracy, która w efekcie ubocznym przynosi nowe urządzenia dla „ziemskiej” techniki i nowe problemy dla innych dziedzin nauki. Kierunkiem, względem którego mierzy się precesję, jest oś teleskopu, elektronicznie sterowanego tak, aby cały czas śledził jedną, wybraną gwiazdę. Aby wykryć tak powolną precesję, pomiar musi trwać co najmniej kilka miesięcy, i przez cały czas żyroskop musi swobodnie wirować. Żadne zawieszenie mechaniczne nie może zapewnić dostatecznie małego tarcia. Zawieszenia elektrostatyczne lub magnetyczne indukują prądy wirowe w obracającym się ciele, które hamują obrót jeszcze skuteczniej niż tarcie. Postanowiono więc ochłodzić całe urządzenie do temperatury ciekłego helu ( $-271^{\circ}\text{C}$ ), aby móc skorzystać z nadprzewodzącego ekranu, eliminującego zewnętrzne zakłócenia magnetyczne i związane z nimi prądy wirowe, oraz z nadprzewodzących czujników do rejestrowania położenia żyroskopu. Jeśli teraz uzmysłowimy sobie, że termostat utrzymujący taką temperaturę, urządzenia elektroniczne do sterowania teleskopem i odczytu wyników pomiaru, nadprzewodzące czujniki, komputer i nadajnik radiowy do przetwarzania i przekazywania na Ziemię rezultatów, oraz urządzenia napędowe i paliwo mają być wszystkie razem pomieszczone w niewielkim satelicie kształtu walca o wymiarach  $1,80 \times 1,60$  m, stanie się jasne, jak wielkie wymagania techniczne stawia opisywany eksperyment.

Poprzestańmy na tych przykładach, bowiem omówienie wszystkich, zrobionych i planowanych, testów eksperymentalnych teorii względności wymagałoby znacznie dłuższego artykułu. Przyjmijmy, że wiemy już, czym jest teoria względności i spróbujmy na zakończenie odpowiedzieć:

CZYM BĘDZIE TEORIA WZGLĘDNOŚCI?





Rozwiązanie zadania M 160

Każdy podział niepustego zbioru  $A$  wyznacza w tym zbiorze relację równoważności  $\sim$ :  
 $x \sim y \Leftrightarrow x$  i  $y$  należą do tego samego podzbioru  $A_i$   
 Wszystkich relacji określonych w zbiorze  $n$ -elementowym jest  $2^{n^2}$ , gdyż par uporządkowanych  $(x, y)$ , gdzie  $x \in A$ ,  $y \in A$ , jest  $n^2$ , a relacja jest określona, gdy dla każdej takiej pary wiemy, czy  $x$  jest w tej relacji z  $y$ , czy też nie. Relacja może być więc utożsamiona z podzbiorem zbioru par, a podzbiorów takich jest  $2^{n^2}$ .  
 Ponieważ niektóre tylko relacje są relacjami równoważności, więc liczba podziałów zbioru  $n$ -elementowego nie przekracza  $2^{n^2}$ .

Często przedstawia się teorię względności jako dyscyplinę skończoną, zamkniętą, w której nic więcej nie da się zrobić. Nic bardziej błędnego. Nadchodzi właśnie okres intensywnych testów eksperymentalnych i obserwacyjnych, które odpowiedzą na stare pytania i na pewno dostarczą nowych. Najbliższe lata mogą przynieść rozwiązanie problemu, czy istnieją fale grawitacyjne, tzn. impulsy pola grawitacyjnego oderwane od swoich źródeł i wędrujące samodzielnie przez przestrzeń międzygwiazdą. Mimo znacznego wysiłku koncepcyjnego, technicznego i finansowego włożonego w ten problem przez kilka dużych ośrodków naukowych w świecie, precyzja detektorów jest wciąż jeszcze niezadowalająca, zaś jej poprawienie wiąże się z kolejną serią problemów technicznych najwyższej trudności.

Obserwacje astronomiczne mogą potwierdzić istnienie (lub nieistnienie) czarnych dziur — umarłych gwiazd, które po wyczerpaniu zapasów energii zapadły się pod wpływem własnej grawitacji tak bardzo, że żadna materia ani nawet światło nie mogą wydostać się z ich powierzchni na zewnątrz. I fale grawitacyjne, i czarne dziury są tworam, których istnienie nie daje się opisać w teorii Newtona.

W związku z badaniami doświadczalnymi pozostaje inny, bardzo intensywny nurt działalności relatywistów: tworzenie nowych teorii grawitacji, różnych od teorii Einsteina. Są one tworzone nie po to, aby teorię Einsteina zastąpić (choć i ta możliwość nie jest wykluczona), lecz aby dostarczyć tła, na którym będzie można wyraźniej zobaczyć, co teoria Einsteina przewiduje i co jeszcze można by zmierzyć (przypomnijmy: gdy wszyscy wierzyli tylko w teorię Newtona, nikomu nie przyszło nawet do głowy, że światło może ugiąć się w polu grawitacyjnym).

Można też przypuszczać, że powstanie od dawna oczekiwana kwantowa teoria grawitacji, która pogodzi fizykę kwantową, słuszną w skali atomu i cząstek elementarnych, z teorią względności, operującą w skali gwiazd. Te dwie teorie opisują na razie rozłączne zbiory zjawisk i nikt nie zna sposobu na ich równoczesne zastosowanie, które jest konieczne np. dla opisu pierwszych chwil istnienia Wszechświata (patrz artykuł B. Kuchowicza w Delcie 10/1977).

Tyle można powiedzieć na podstawie prac już rozpoczętych. Przewidywania wybiegające dalej w przyszłość bywają zawsze niebezpieczne. Odkrycia, które dają się zaplanować, są z reguły mało odkrywczwe, zaś przewidywacze zawsze okazują się niedojrzałymi do przyszłości, którą usiłowali przewidzieć. Bardzo pouczającym przykładem jest tu wiersz J. W. Goethego „Zahme Xenien”, napisany w odruchu protestu przeciwko doświadczeniom Newtona z rozszczepianiem światła:



Rozwiązanie zadania M 161

Wprowadźmy w płaszczyźnie kwadratu taki układ współrzędnych, by  $A = (1, 1)$ ,  $B = (-1, 1)$ ,  $C = (-1, -1)$  i  $D = (1, -1)$ .  
 Dowolny punkt okręgu ma wtedy współrzędne  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ , gdzie  $\alpha$  jest pewną liczbą z przedziału  $[0, 2\pi]$ .

Mamy  $a^2 = (1 - \cos \alpha)^2 + (1 - \sin \alpha)^2$ ,  
 $b^2 = (1 + \cos \alpha)^2 + (1 - \sin \alpha)^2$ ,  
 $c^2 = (1 + \cos \alpha)^2 + (1 + \sin \alpha)^2$ ,  
 $d^2 = (1 - \cos \alpha)^2 + (1 + \sin \alpha)^2$ .  
 Stąd  $a^2 c^2 + b^2 d^2 = 2(1 - \cos^2 \alpha)^2 + 2(1 - \sin^2 \alpha)^2 + (1 - \cos \alpha + \sin \alpha - \cos \alpha \sin \alpha)^2 + (1 + \cos \alpha - \sin \alpha - \cos \alpha \sin \alpha)^2 + (1 + \cos \alpha + \sin \alpha + \cos \alpha \sin \alpha)^2 + (1 - \cos \alpha - \sin \alpha + \cos \alpha \sin \alpha)^2$ .

Uwzględniając równości  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$  oraz  $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}(x+y)^2 + \frac{1}{2}(x-y)^2$

otrzymujemy, że

$$a^2 c^2 + b^2 d^2 = 2 \sin^4 \alpha + 2 \cos^4 \alpha + \frac{1}{2} (2 - 2 \cos \alpha \sin \alpha)^2 + \frac{1}{2} (2 \cos \alpha - 2 \sin \alpha)^2 + \frac{1}{2} (2 + 2 \cos \alpha \sin \alpha)^2 + \frac{1}{2} (2 \cos \alpha + 2 \sin \alpha)^2 = 2(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 1 - 2 \cos \alpha \sin \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \sin \alpha + \sin^2 \alpha + 1 + 2 \cos \alpha \sin \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \sin \alpha + \sin^2 \alpha) = 2[(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 + 4] = 10, \text{ c.n.d.}$$

*Bracie! Wyjdźże z izby mroku,  
 Gdzie światło się w sztuki rwie  
 I w żalonych skarg potoku  
 Błaznom w pokłon ciało gnie.  
 Zabobonu wielbicieli  
 Było w latach przeszłych dość,  
 W głowach twych nauczycieli  
 Niech trwa widm i złudzeń czczość.  
 Ty, w pogodny dzień, spojrzenie  
 Do błękitu nieba wznies,  
 Patrz, jak słońce się czerwieni,  
 Gdy nadchodzi już dnia kres.  
 Wtedy, z okiem, sercem zdrowym,  
 Wesół, daj naturze cześć:  
 To o świetle jest tęczowym  
 Wspólna wszystkim wiedzy treść.*

Goethe był nie tylko wybitnym poetą, lecz także, dzięki wszechstronnym zainteresowaniom i działalności, jednym z wielkich ludzi swojej epoki. Nie da się jednak ukryć, że wierszyk ten jest dziś dla niego kompromitujący. Historia przyznała rację Newtonowi, i to w sposób nie dający Goethemu żadnej szansy obrony. Zatem ... nie wystarczy być wielkim człowiekiem, aby trafnie przewidywać przyszły rozwój nauki. Mylili się co do tego nawet sami twórcy wielkich odkryć. Niech o tym pamiętają ci spośród czytelników Delt, którzy za kilka lub kilkanaście lat zajmą w hierarchii naukowej odpowiedzialne stanowiska i będą mogli mądrymi lub niemądrymi decyzjami dobrze lub źle wpływać na rozwój nauki w Polsce.



Prof. dr Dominik ROGULA

## Komputeryzacja człowieka czy humanizacja komputera

Zanim przejdziemy do rozważań dotyczących przyszłego kształtu relacji człowiek — komputer, zastanowimy się przez chwilę nad stanem dotychczasowym. Oddawszy cesarzowi co cesarskie, stwierdzić należy, że stan ten nie jest zadowalający: w ogólnym cyklu przetwarzania informacji z udziałem komputera człowiek nie tylko wykonuje znaczną część pracy, ale praca ta jest w dużej mierze ukierunkowana komputerowo i dla człowieka uciążliwa. Aby zagadnienie to uprościć i jednocześnie skonkretyzować, ograniczymy się do rozważania dwu spraw, które tutaj wydają się najważniejsze. Są to:

- (i) sposób stawiania zadań komputerowi i
- (ii) komunikacja człowiek — komputer — człowiek.

(i) Charakterystyczne dla dzisiejszego komputera jest odwrócenie relacji pomiędzy zadaniem i sposobem jego realizacji. W normalnym „ludzkim” trybie działania samo zadanie jest pierwotne i nadrzędne w stosunku do sposobu realizacji, który odgrywa rolę wtórną, służebną. Dla komputera natomiast zadanie definiujemy przez podanie sposobu realizacji — w postaci programu. Komputer zadania „nie rozumie”. Trzymając się ślepo instrukcji programu zadanie wprawdzie wykona, ale uzyskany wynik jest niejako produktem ubocznym działań komputera. Tylko człowiek wie, że wykonanie tych właśnie instrukcji prowadzi do osiągnięcia pożądanego celu i tylko człowiek dobiera te instrukcje w sposób celowy.

(ii) Komunikacja pomiędzy człowiekiem i komputerem jest formalna. Człowiek może przemawiać do komputera jedynie w specjalnych językach programowania (lub wprowadzania danych) o rygorystycznej składni i czysto formalnej interpretacji. Komunikacja taka nie jest odporna na właściwe naturze ludzkiej błędy: najdrobniejsza pomyłka syntaktyczna jest egzekwowana z konsekwencją godną lepszej sprawy. Błędy rzeczowe natomiast są dla komputera całkowicie niewykrywalne. Niezależnie zresztą od kwestii błędów, czysto formalny system komunikacji jest dla człowieka nienaturalny, krępujący i uciążliwy.

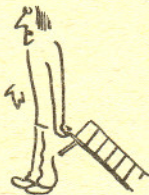
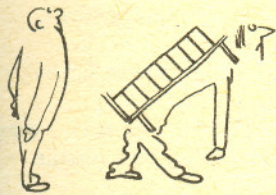
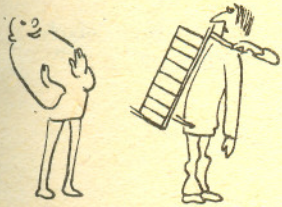
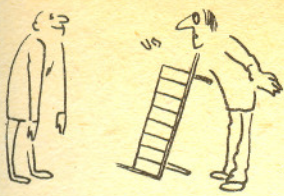
Bez większej przesady możemy więc powiedzieć, że stosunki człowiek — komputer kształtują człowieka na podobieństwo komputera.

W pełnym zakresie powyższe charakterystyki, oznaczone symbolami (i) i (ii), odnoszą się do użytkowania komputera na poziomie programowania. Na poziomie korzystania z gotowych programów pewne ich elementy mogą być złagodzone. Jednakże użytkowanie komputera nie może polegać wyłącznie na posługiwaniu się gotowymi programami, których zestaw zostanie z góry dobrany tak, by rozwiązywały one wszystkie możliwe zadania, nawet jeżeli ograniczyć się do jakiejś jednej realnej dziedziny. Tendencje do takiego „oprogramowania” obliczeń naukowo-technicznych doprowadziły do powstania wielkich współczesnych systemów „software’u”, które jednakże są nie tyle gotowymi programami problemowymi, ile systemami ułatwionego programowania z użyciem problemowo-zorientowanych makrooperacji.

Czy upodabnianie się człowieka do komputera jest konieczne dla rozwoju dobrych wzajemnych stosunków? Czy nie można komputera (tzn. przede wszystkim „software’u”) dostosować trochę do człowieka? Czy nie można nauczyć go osiągania celów zamiast wykonywania instrukcji w przepisanej kolejności? Czy nie można konwersować z nim w języku naturalnym, nie ucząc się żadnych języków programowania, sposobów przygotowania danych, pisania kodów od 7 kolumny, etc.?

Dążenie do uzyskania (umiarkowanie) pozytywnych odpowiedzi na ostatnie pytania nazwiemy tutaj programem (umiarkowanej) humanizacji komputera. Podkreślić od razu należy, że zbyt daleko idąca humanizacja komputera, nie mówiąc nawet o kłopotach z jej realizacją, wcale nie byłaby pożądana. Aby się o tym przekonać, wystarczy przyrzeć się przytoczonej tabelce, gdzie podany jest zestaw cech charakterystycznych dla (a) człowieka, (b) dzisiejszego komputera i (c) idealnego współpracownika, jakim, mam nadzieję, okaże się komputer jutra.





	człowiek	komputer dziś	idealny współpracownik
inteligencja	1	0	1
zamiłowanie do ciężkiej pracy	0	1	1
wyrozumiałość dla innych	1/2	0	1
nieomyślność	0	1	1

Porównanie kolumny pierwszej i trzeciej pokazuje, że zbyt uczłowieczony komputer nie byłby dla nas najlepszym współpracownikiem. Natomiast porównanie kolumny pierwszej z drugą ujawnia ich wzajemną komplementarność. Ich suma logiczna jest zbliżona do parametrów kolumny trzeciej, co oznacza, że w układzie człowiek — komputer tkwią możliwości zbliżone do pożądaných. Iloczyn logiczny dwu pierwszych kolumn jest równy zero, co z kolei oznacza, że porozumienie człowiek — komputer, i w konsekwencji urzeczywistnienie tych pożądaných możliwości, jest trudne i wymaga od człowieka specjalnego wysiłku. Ocena możliwości przesunięcia granicy podziału pracy między człowiekiem i komputerem i uwolnienia od wykonywania ukierunkowanych komputerowo działań zależy od wielu czynników, z których głównym jest problem możliwości maszyn w ogóle. Następnym razem krótko omówimy tę kwestię.



## Zadania

Redaguje mgr Andrzej MAKOWSKI

**M 160.** Udowodnić, że liczba podziałów zbioru  $n$ -elementowego nie przekracza  $2^n$ . (Podziałem zbioru  $A$  nazywamy taką rodzinę  $\{A_1, \dots, A_k\}$  jego podzbiorów niepustych i parami rozłącznych, że  $A_1 \cup \dots \cup A_k = A$ .)

Rozwiązanie na str. 7

**M 161.** Na okręgu o promieniu długości 1 opisano kwadrat  $ABCD$ . Udowodnić, że jeżeli  $a, b, c, d$  są odległościami dowolnego punktu tego okręgu odpowiednio, od punktów  $A, B, C, D$ , to  $a^2c^2 + b^2d^2 = 10$ .

Rozwiązanie na str. 7

**M 162.** Punkt  $O$  jest wspólnym środkiem odcinków  $KK_1, LL_1, MM_1$ , nie leżących w jednej płaszczyźnie. Udowodnić, że istnieje czworościan, dla którego punkty  $K, K_1, L, L_1, M, M_1$  są środkami krawędzi.

Rozwiązanie na str. 2

Redaguje dr Waldemar GORZKOWSKI

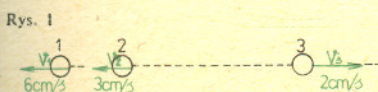
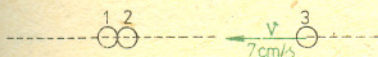
**F 54.** W dwie stykające się nieruchome kulki (rys. 1) uderza trzecia kulka o prędkości  $v = 7 \text{ cm/s}$ . Masy wszystkich kulek są jednakowe. Kulki są gładkie, a ich środki leżą na jednej prostej. Zakładamy, że kulki nie obracają się, ani przed zderzeniem, ani po zderzeniu.

Po zderzeniu prędkości kulek wynoszą odpowiednio:

$v_1 = 6 \text{ cm/s}, v_2 = 3 \text{ cm/s}$  i  $v_3 = -2 \text{ cm/s}$  (rys. 2).

Czy rozważane zderzenie trzech ciał było zderzeniem sprężystym?

Rozwiązanie na str. 3



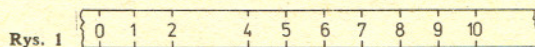
Rys. 1

Rys. 2

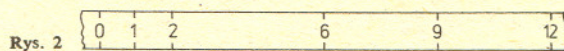


## Matematyczne problemy linijki

Spójrzmy na „wybrakowaną” linijkę na rysunku 1. Jej wada nie jest poważna, bo i tak możemy nią odmierzyć każdy odcinek od 1 do 10. Nie musimy przecież zaczynać mierzenia od punktu „0” linijki.

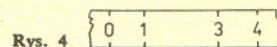
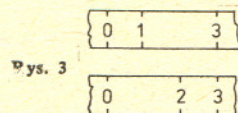


Linijka z rysunku 2 nadaje się do zmierzenia każdego z odcinków o długościach 1, 2, 3, ..., 11, 12 (np. 3 to odcinek między „6” a „9”, 4 — między „2” a „6”, a 5 — od „1” do „6” itd.).

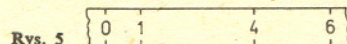


Rozumiemy, że linijka będzie dla nas przyrządem do odmierzania odległości (a nie przyrządem do rysowania linii prostych, jak w geometrii). Nazwijmy dobrą linijką (dokładniej: dobrą  $n$ -linijką) taką linijkę, która umożliwia (za pomocą jednego przyłożenia) odłożenie odcinka długości  $k$  (gdzie  $k$  jest dowolną liczbą naturalną nie przekraczającą  $n$ ). Matematyk od razu postawi pytanie: jaka jest minimalna liczba kresek na dobrej  $n$ -linijce. Tę minimalną liczbę kresek oznaczamy przez  $k(n)$ ; to, że zależy ona od liczby  $n$  jest zrozumiałe.

Kilka początkowych wartości liczby  $k(n)$  możemy łatwo obliczyć. Dla  $n = 3$  mamy oczywiście  $k(3) = 3$  (rysunek 3). Rysunek 4 pokazuje dobrą 4-linijkę i również zrozumiałe jest, że nic więcej z 4-linijkami zrobić się nie da.



Oto dobra 6-linijka.

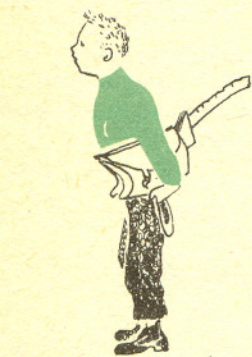
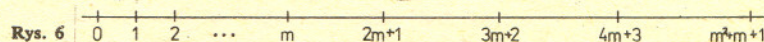


Widzieliśmy też dobrą 12-linijkę, zawierającą tylko 6 kresek. To znaczy, że  $k(12) \leq 6$ . Ale  $k(12)$  nie może być równe 5 (ani mniej), bo używając 5 kresek możemy odmierzyć tylko  $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$  odcinków. Zatem  $k(12) = 6$ . Obliczenie innych wartości  $k(n)$  przy małym  $n$  pozostawiamy już zainteresowanemu Czytelnikowi. My przytoczymy proste:

**Twierdzenie**  $\sqrt{2n} < k(n) < 2\sqrt{n+1}$ .

To łatwo udowodnić. Jeżeli mamy do dyspozycji  $k(n)$  znaków, to możemy za ich pomocą zmierzyć tylko  $\frac{k(n)(k(n)-1)}{2}$  odcinków, nigdy więcej. Po

przekształceniach otrzymujemy pierwszą z nierówności powyższego wzoru. Równie prosta jest druga część, tj. uzasadnienie drugiej nierówności. Jeżeli  $m$  jest liczbą naturalną taką, że  $m^2 < n < (m+1)^2$ , to linijka pokazana na rysunku 6 jest dobrą  $n$ -linijką, chociaż nieekonomiczną.





Chociaż do tak prościusieńkiego z pozoru „problemu linijki” zaprzęgnięto tak poważne działy matematyki jak algebrę, teorię liczb, analizę matematyczną, kombinatorykę i geometrię rzutową, to nie udało się znaleźć wzoru wyobrażającego

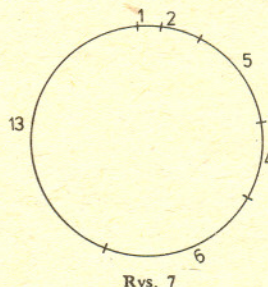
liczbę  $k(n)$  w zależności od  $n$ . Udowodniono, że liczby  $\frac{k(n)^2}{2}$  dążą do pewnej

granicy, która jest większa od 2,434..., a mniejsza od 2,6666... Wykazano też, że dla  $n > 6$  dobre  $n$ -linijki muszą zawsze być trochę nieekonomiczne, to znaczy, że pewne z odcinków można zmierzyć na kilka sposobów.

Ciekawe, że bardziej „ekonomiczne” z tego punktu widzenia są tak zwane linijki koliste. Możemy się przekonać, że każda z odległości 1, 2, ..., 29, 30 może być (licząc po łuku) zmierzona przy pomocy „linijki” przedstawionej na rysunku 7, i to na jeden sposób. Na przykład 10 dostajemy jako 6+4, 11 — jako 2+5+4, 12 — jako 1+2+5+4, 20 — jako 1+13+6, 27 — to całe kółko bez 4 itd. Wykazano, że jeżeli  $q$  jest liczbą pierwszą, to okrąg o obwodzie  $q^2+q+1$  można podzielić na takie  $q+1$  odcinków (raczej: łuków), że otrzymaną kolistą linijką możemy zmierzyć każdy z odcinków o długościach 1, 2, ...,  $q^2+q+1$  w dokładnie jeden sposób. Czytelnik, jeśli zechce, bez dużego wysiłku narysuje kilka takich „linijek”.



Małą Deltę opracował MICHAŁ SZUREK



Rys. 7

## Rozwiązanie zadania z majowej Radiodelty

Wielkościami dualnymi nazwijmy tu takie dwa wielościany, że jeden ma tyle wierzchołków, ile drugi — ścian i odwrotnie: tyle ścian, ile drugi — wierzchołków. Wielościany takie spotykamy i wśród wielościanów foremnych, np. sześcián i ośmiościan foremny.

**Zadanie.** Każde naroże ośmiościanu foremnego ścięto płaszczyzną odcinającą  $\frac{1}{3}$  każdej krawędzi wychodzącej z wierzchołka tego naroża.

a) Zbuduj model powstałego w ten sposób wielościanu oraz model wielościanu do niego dualnego (również o ścianach foremnych).

b) Sformułuj metodę otrzymania tego wielościanu dualnego.

**Rozwiązanie.**

a) Wielościan powstały z ośmiościanu foremnego przez obcięcie naroży w sposób podany w treści zadania to czternastościan o ośmiu ścianach sześciokątnych i sześciu kwadratowych, przy czym w każdym wierzchołku zbiegają się dwa sześciokąty i kwadrat (jak na rysunku 1). Wielościan dualny do niego ma oczywiście 14 wierzchołków i aż 24 ściany będące trójkątami (równobocznymi). Najłatwiej go otrzymać „budowując” sześcián ostrosłupami czworokątnymi prawidłowymi (rys. 2).

b) Pomysły mogą być różne. Najbardziej naturalne to:

1° Połączenie środków sąsiednich ścian danego czternastościanu.

2° Wykorzystanie pojęcia czynności dualnych omówionego w audycji radiowej.

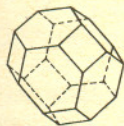
Przecięciu czterech ścian naroża ośmiościanu piątą płaszczyzną odpowiada tu połączenie czterech wierzchołków ściany sześciánu z piątym punktem.

W przyszłym roku szkolnym (1978/1979) nasze audycje będą nadawane w następujących terminach:

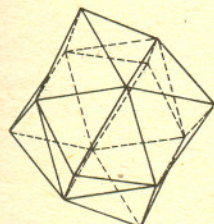
We wrześniu — 21; w październiku — 19; w listopadzie — 9 i 30; w grudniu — 14; w lutym — 15; w marcu — 15; w maju — 3 i 31 — zawsze o godzinie 10<sup>00</sup> w programie IV.

Nasz adres:

Polskie Radio  
skrytka pocztowa 46  
00-950 Warszawa  
Radio-Delta

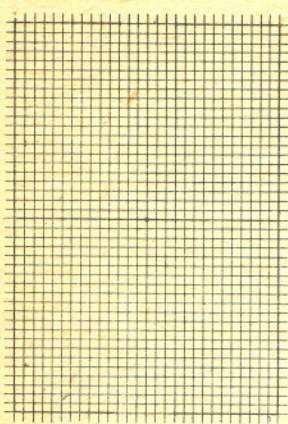


Rys. 1



Rys. 2





rys. 1



## Piłka nożna na kartce papieru

W okresie, gdy każdy Polak, poza niemowlętami, pasjonuje się piłką nożną i my nie chcąc pozostać w tyle, prezentujemy grę w „piłkę nożną” na papierze. Gra jest ciekawa, wymaga pomysłowości i dostarcza interesującej rozrywki. Podobnie jak w normalną piłkę, może grać w nią każdy, a systematyczny trening doprowadza do mistrzostwa.

Jest kilka wariantów tej gry. My opiszemy jeden z prostszych. Można go urozmaicić, wprowadzając nowe przepisy na wzór prawdziwych reguł piłkarskich. Boiskiem do naszej gry jest duży prostokąt kratkowanego papieru. Na boisku mniejszym niż kartka z zeszytu gra szybko staje się nieciekawa. Przez środek boiska przebiega linia środkowa, na środku której leży wymaginowana piłka. Po obu stronach boiska stoją bramki (rys. 1).

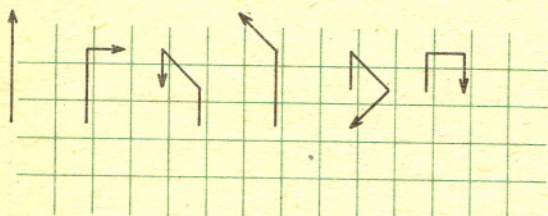
W grze uczestniczą dwie osoby. Rozpoczynamy grę od środka przez „kopnięcie piłki” na połowę przeciwnika. To „kopnięcie”, czy raczej wjechanie z piłką jest podstawowym ruchem w naszej grze. Polega ono na narysowaniu strzałki o długości trzech „jednostek”, przy czym przez „jednostkę” rozumiemy zarówno długość boku kratki, jak i długość przekątnej pojedynczej kratki (rys. 2). Po wykonaniu ruchu wyobrażona piłka znajduje się w końcu narysowanej strzałki (bardziej zaawansowani gracze mogą nie rysować ostrzy strzałek). Teraz wykonuje ruch drugi z graczy. Oczywiście stara się skierować piłkę w stronę bramki przeciwnika i w dalszym ciągu gry gracze stawiają na przemyśle swoje strzałki, a gol jest zdobyty wówczas, gdy piłka przekroczy linię bramkową. Grą rządzą następujące reguły:

1°) Najważniejszym prawidłem naszej gry jest to, że żadne strzałki nie mogą się przecinać, pokrywać, ani mieć wspólnych końców — chyba, że zachodzi jeden z wyjątków, opisanych poniżej w punktach 3° i 4°.

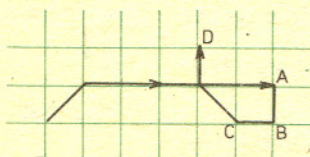
2°) Ruch „kopnięcie piłki” nie może być krótszy ani dłuższy niż trzy jednostki. Dlatego od czasu do czasu gracz zostaje zablokowany przez przeciwnika lub siebie i nie może zrobić ruchu. Na rys. 4 widzimy, że gracz, który postawił strzałkę kończącą się w A, zablokował przeciwnika. W takim wypadku gracz, który pozbawił przeciwnika możliwości ruchu, a więc odebrał mu piłkę, ma prawo do wykonania „podania piłki”;

3°) „podanie piłki” polega na narysowaniu strzałki o długości 6 jednostek w dowolnym kierunku, choćby nawet przecinała uprzednio narysowane linie co przy zwykłym ruchu jest zabronione. W odróżnieniu od zwykłego ruchu strzałka nie może być jednak łamana (rys. 5).

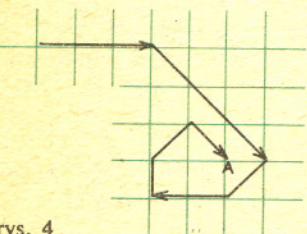
Jeżeli po podaniu przeciwnik znów nie może zrobić ruchu, lub gdy koniec strzałki wypada w punkcie już zajęтым, mamy prawo do następnego podania. To właśnie stanowi o urodzie naszej gry. Systemem sprytnych podań można niejednokrotnie przejść całe boisko. Z podania można zdobyć bramkę;



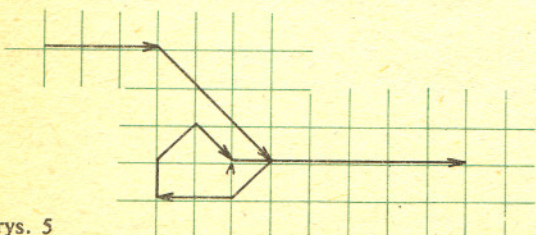
rys. 2. Różne rodzaje ruchów



rys. 3



rys. 4

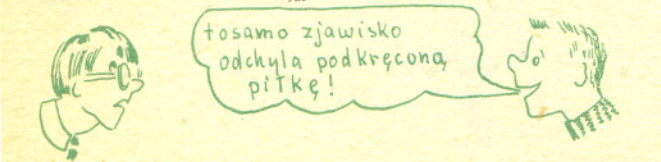
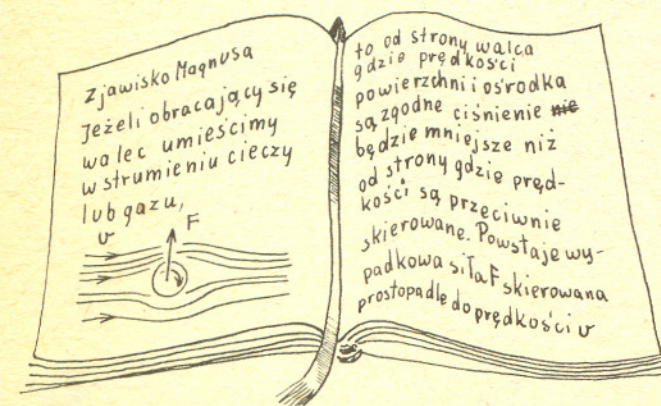
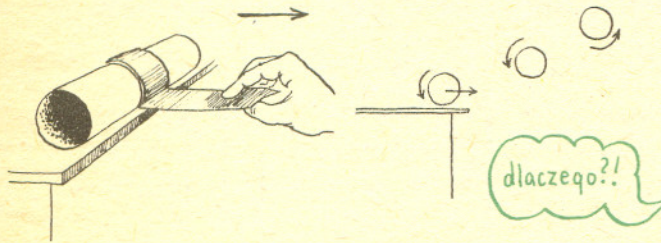
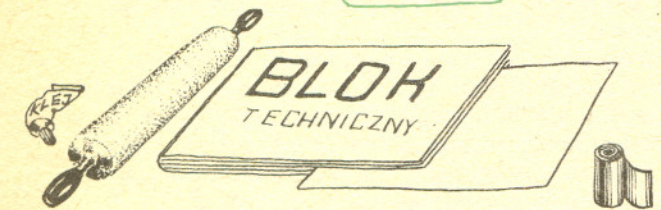
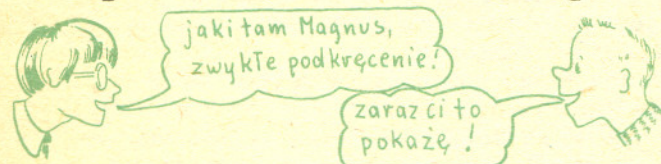
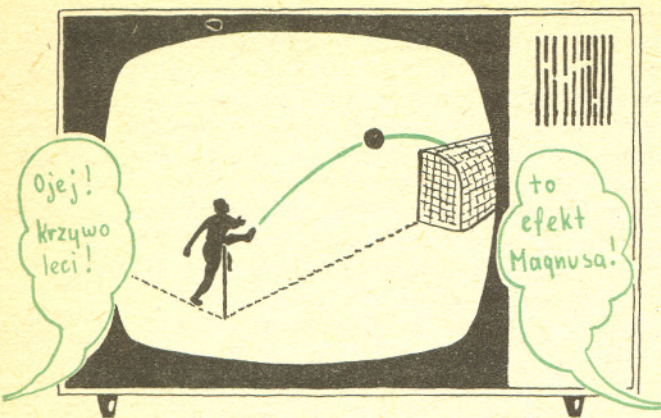


rys. 5









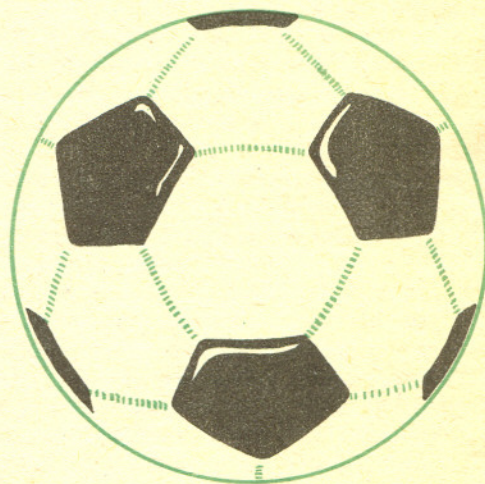
## Czytelnicy proponują

J. F. Szurek z Warszawy: „W Nr 1 „Deltę” z r. 1978 przypomniano wiersz Kazimierza Cwojdzńskiego, ułatwiający zapamiętanie kolejnych cyfr liczby  $\pi$ . Wiersz ten zawiera jeden wyraz pisany według zasad dawnej pisowni, co — mimo uprzedzenia Redakcji — może mylić. Zamiast tego wiersza proponujemy łatwiejszy, chociaż o 7 dalszych cyfr dłuższy.

Oto tekst:

Już i Lato i Deyna	3 1 4 1 5
strzelili do bramki obcej	9 2 6 5
dwa karne	3 5
Lubański dostrzegł mistrza Szarmacha	8 9 7 9
gdy on tak wypuścił cios szacha	3 2 3 8 4 6
że zdobyć musi cel gry	2 6 4 3 3
krzyknął Gol na Mundial Argentyna	8 3 2 7 9

W ten sposób łatwo pamiętamy 30 miejsc po przecinku!"



Rys. 1

## Fizyka na boisku piłkarskim

Dr Daria ZIEMIŃSKA i  
dr Andrzej ZIEMIŃSKI

Rozpoczęły się Mistrzostwa Świata w Argentynie. Przez dwa tygodnie wielu z Was będzie żyć rogalami Deyny, rzutami wolnymi, karnymi itd. Jest to pasjonująca gra. Jest w niej dużo nie mniej ciekawej fizyki, o której nie pamięta się podczas oglądania meczu, ale o której warto pomyśleć w chwilach mniejszego napięcia. Poniżej zamieszczamy krótki słowniczek piłkarsko-fizyczny. Zawiera on kilka zagadnień, które uważaliśmy za najbardziej interesujące.

### PIŁKA

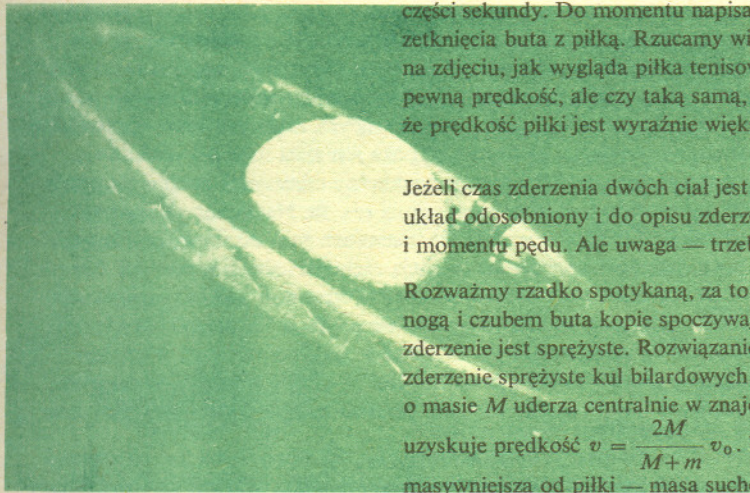
Piłka na pewno powinna być okrągła. Jednakże, szyjąc piłkę z płaskich kawałków skóry osiągamy tylko pewne przybliżenie kuli. Musi ono być dostatecznie dobre, tak, by elastyczność skóry mogła zniwelować niedokładności. Dobór właściwych lat do uszycia piłki był dyskutowany w 7 numerze „Deltę” z 1975 roku. Piłki, jakich używają piłkarze, są uszyte z lat w kształcie wielokątów foremnych: 12 pięciokątów i 20 sześciokątów. Tak uszyta piłka spełnia zależność Eulera dla wielościanów wypukłych:

$$\text{liczba rogów} - \text{liczba szwów} + \text{liczba lat} = 2.$$

Średnica piłki meczowej wynosi 20 cm, a ciśnienie zawartego w niej powietrza jest o 0,6—0,7 atmosfer większe od ciśnienia atmosferycznego.



Większość podstawowych czynności piłkarzy: kopanie i główkowanie piłki, jej „gaszenie” lub wychwytywanie przez bramkarzy sprowadza się do zderzenia piłki z innym ciałem. Piłkarz, kopiąc piłkę, zderza z nią swój but. But naciska na piłkę powodując jej odkształcenie. Podobnie piłka działa siłą reakcji na but piłkarza. Siły sprężyste powstałe w wyniku odkształcenia piłki i buta ostatecznie odepchną oba ciała od siebie. Siły te występują wyłącznie w określonym przedziale czasu  $\Delta t$ , zwanym czasem zderzenia. Czas zderzenia dla piłki jest rzędu setnych części sekundy. Do momentu napisania tego artykułu nie udało nam się sfotografować chwili zetknięcia buta z piłką. Rzucamy więc wyzwanie Czytelnikom. W zastępstwie pokazujemy na zdjęciu, jak wygląda piłka tenisowa w chwili zderzenia z rakiętą. Kopnięta piłka uzyskuje pewną prędkość, ale czy taką samą, jaką miał czubek buta piłkarza? Łatwo zaobserwować, że prędkość piłki jest wyraźnie większa. O ile? Spróbujmy to oszacować.



Jeżeli czas zderzenia dwóch ciał jest mały, to zderzające się ciała możemy traktować jako układ odosobniony i do opisu zderzeń możemy stosować zasady zachowania energii, pędu i momentu pędu. Ale uwaga — trzeba zawsze pomyśleć, co w danej sytuacji zderza się z piłką.

Rozważmy rzadko spotykaną, za to prostą sytuację: stojący zawodnik robi potężny zamach nogą i czubem buta kopie spoczywającą piłkę. Piłka jest dobrze napompowana, więc zderzenie jest sprężyste. Rozwiązanie narzuca się samo. Przypominamy sobie ze szkoły centralne zderzenie sprężyste kul bilardowych. Wiadomo, że gdy nadbiegająca z prędkością  $v_0$  kula o masie  $M$  uderza centralnie w znajdującą się w spoczynku kulę o masie  $m$ , to ta ostatnia uzyskuje prędkość  $v = \frac{2M}{M+m} v_0$ . W praktyce, ponieważ noga piłkarza jest znacznie masywniejsza od piłki — masa suchej piłki wynosi około 250 gramów — piłka powinna odskoczyć z dwukrotnie większą prędkością.

Analogia z kulami bilardowymi nie najlepiej stosuje się do kopnięcia piłki. Noga piłkarza bardziej przypomina sztywny, jednorodny pręt o masie  $M$  i długości  $l$ , obracający się wokół osi umieszczonej w biodrach (lub w kolanie), niż kulę bilardową. Jeżeli podczas zderzenia oś ma pozostać nieruchoma, muszą na nią działać siły pochodzące od całego ciała piłkarza, a więc, z punktu widzenia układu: noga — piłka, siły zewnętrzne. W takiej sytuacji nie można mówić o zachowaniu pędu w zderzeniu. Obowiązuje natomiast prawo zachowania energii i momentu pędu, ponieważ przyłożona do osi siła zewnętrzna nie wykonuje pracy i jej moment równa się zeru. Mamy więc:

$$\frac{1}{3} Ml^2\omega = \frac{1}{3} Ml^2\omega' + vlm,$$

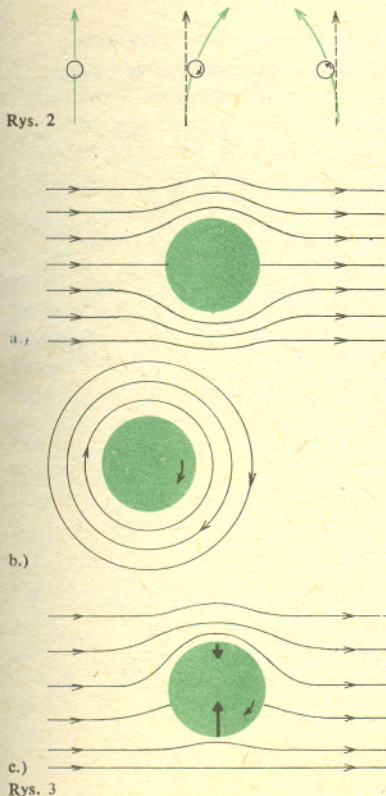
$$\frac{1}{3} \frac{Ml^2\omega^2}{2} = \frac{1}{3} \frac{Ml^2\omega'^2}{2} + \frac{mv^2}{2},$$

gdzie  $\omega$  i  $\omega'$  oznaczają prędkości kątowe nogi przed i po kopnięciu, a  $\frac{1}{3} Ml^2$  odpowiada momentowi bezwładności jednorodnego pręta wokół osi przechodzącej przez jeden z jego końców. Po rozwiązaniu tego układu równań otrzymujemy związek  $v = \frac{2M}{3m+M} v_0$ , gdzie  $v_0 = l\omega$  jest prędkością końca buta przed zderzeniem. Nowa zależność  $v$  od  $v_0$  praktycznie pokrywa się z zależnością otrzymaną dla kul bilardowych, jeśli masę piłki można zaniedbać w porównaniu z masą nogi.

Piłkarzom lekko przychodzi kopanie stojących piłek, podobnie jak fizykom opisywanie akademickich przykładów. Niestety, rzeczywistość jest o wiele bardziej skomplikowana. Nogi piłkarzy różnią się nieco od jednorodnych prętów, rzadko kiedy uderza się piłkę centralnie, zarówno piłkarz jak i piłka najczęściej są w ruchu. Istota zjawiska jednak zawsze pozostaje ta sama.

### GŁÓWKOWANIE

Przypuszczalnie niejedyn z kibiców serdecznie współczuje piłkarzowi przyjmującemu na głowę ciężką, silnie bitą piłkę. Pewne zdziwienie budzi również fakt, że głowa nie pęka od takiego uderzenia. Wy tłumaczenie tego jest ryzykowne, piłkarze mogliby się za nie obrazić. Po prostu nie pęka, bo jest pusta w środku. Nie jest to specyfika głowy piłkarza, ale prawo często wykorzystywane w przyrodzie: w skorupce jajka, sklepieniach budowli itp. Owalny kształt czaszki i jej spistość powodują, że siła uderzenia piłki rozkłada się po całej powierzchni. Jak już wspomnieliśmy, główkowanie jest jednym z przykładów zderzenia. Ale zauważcie, jak piłkarze główkują. Nie jest to machnięcie głową na szyi, ale przyjmując piłkę na głowę piłkarz napina mięśnie szyi i robi zamach całą górną częścią tułowia. Powód? Aby prędkość piłki uległa istotnej zmianie, piłka musi zderzyć się z ciałem o dużym momencie bezwładności.





Na piłkę działa siła oporu czolowego, opisana zależnością:

$$F = C(Re) \rho v^2 \frac{\pi d^2}{8},$$

gdzie  $d$  jest średnicą piłki. Współczynnik  $C(Re)$  teoretycznie jest funkcją wielkości bezwymiarowej, tzw. liczby

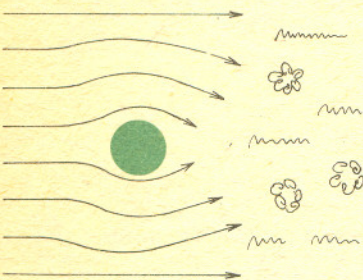
Reynoldsa  $Re = \frac{\rho}{\eta} v d$  ( $\eta$  — lepkość powietrza). Okazuje się jednak, że w interesującym nas obszarze zmienności liczby  $Re(10^4 - 2 \cdot 10^6)$  współczynnik  $C(Re)$  jest praktycznie stały i równy 0,45.

Zagadnienie opływu kuli jest analogiczne do problemu znanego z elektrostatyki z kulą przewodzącą umieszczoną w jednorodnym polu elektrostatycznym. Problem ten rozwiązywaliśmy w 10 numerze „Deltę” z 1974 roku. Pole elektrostatyczne (tutaj prędkości) na zewnątrz kuli jest sumą pola jednorodnego plus pola dipola, umieszczonego w środku kuli. Moment dipolowy należy tak dobrać, żeby prędkość przepływu miała składową normalną do powierzchni kuli, równą zeru.

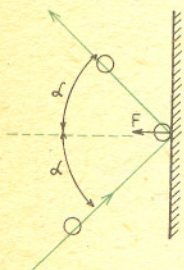
**Twierdzenie Bernoulliego:** przy ruchu ustalonym cieczy doskonałej, odbywającym się pod wpływem sił zachowawczych, dla wszystkich punktów wzdłuż linii prądu zachodzi związek, będący po prostu zasadą zachowania energii:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \varphi = \text{const},$$

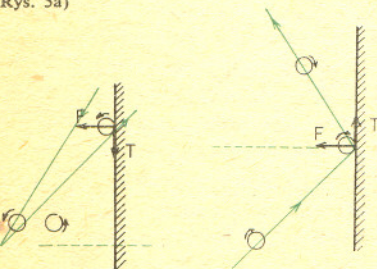
gdzie:  $p$  — ciśnienie,  $v$  — prędkość przepływu,  $\rho$  — gęstość cieczy,  $\varphi$  — energia potencjalna na jednostkę masy. Występowanie lepkości zmienia ten związek, ale przeważnie nie wprowadza to jakościowych różnic.



Rys. 4



Rys. 5a)



Rys. 5b)

Rys. 5c)

## LOT PIŁKI

Jest to oczywiście znany rzut ukośny. Wiadomo, ciało rzucone ukośnie w polu grawitacyjnym porusza się w jednej płaszczyźnie, po paraboli, a dokładniej — wskutek działania oporu powietrza, po krzywej balistycznej. Czy tak jest zawsze? Na czym polega sztuka, którą opanowali niektórzy piłkarze, że piłka wystrzelona z rzutu różnego trafia do bramki, albo podana do kolegi omija przeciwnika stojącego przed nim? Są to tzw. *piłki podkręcone*, kopnięte wewnętrzną lub zewnętrzną częścią buta tak, by piłce nadać dodatkowo ruch obrotowy o osi obrotu w przybliżeniu prostopadłej do kierunku lotu. Na tak kopniętą piłkę działa w powietrzu oprócz siły oporu, siła poprzeczna, skręcająca kierunek lotu piłki. Piłka podkręcona zgodnie z ruchem wskazówek zegara odchyła się w prawo od kierunku ruchu, a podkręcona przeciwnie w lewo (rys. 2). Obserwowane zjawisko znane jest w hydro- i aerodynamice pod nazwą *efektu Magnusa*. Rozważmy ruch kuli o prędkości  $v_0$  w ośrodku ciągłym, takim jak woda czy powietrze. Uprościmy nasze rozważania przyjmując, że gęstość ośrodka jest stała (ośrodek nieściśliwy). Jeżeli kula porusza się tylko ruchem postępowym, to w układzie odniesienia związanym z kulą cząsteczki ośrodka opływają kulę po liniach pokazanych na rys. 3a. Natomiast wirująca kula dodatkowo nadaje cząsteczkom ośrodka w przyległych warstwach ruch obrotowy po okręgach wokół kuli (rys. 3b). Taka, dosyć wyidealizowana sytuacja zachodzi jedynie w pewnym zakresie lepkości oraz prędkości. W rezultacie ruch cząsteczek ośrodka względem kuli jest superpozycją ruchu postępowego i obrotowego (rys. 3a i 3b) Wypadkowa prędkość cząsteczek jest z jednej strony kuli większa niż ze strony przeciwnej. Rys. 3c pokazuje linie opływu kuli. Większym prędkościom opływu odpowiada na rysunku gęstsza sieć linii. Z prawa Bernoulliego wiadomo, że w miejscach, gdzie prędkość przepływu jest większa, ciśnienie musi być mniejsze i odwrotnie.

Wynika stąd, że z dwóch stron działają na kulę nierówne siły. Ich wypadkowa jest skierowana prostopadle do kierunku ruchu kuli i powoduje zmianę tego kierunku. Wartość siły odchylającej można policzyć przy pomocy twierdzenia Bernoulliego uwzględniając rozkład prędkości cząsteczek. Wartość siły, przy zaniedbaniu strat energii na siłę lepkości, jest wprost proporcjonalna do prędkości ruchu postępowego piłki, prędkości kątowej jej obrotu i gęstości powietrza oraz rośnie wraz z rozmiarami piłki.

Inne przykłady występowania efektu Magnusa opisane są w niniejszym numerze Małej Deltę. Należy wspomnieć, że opływ rzeczywistego powietrza, nawet wokół nie podkręconej piłki, bynajmniej nie wygląda tak stacjonarnie, jak na rys. 3a. Jest to opływ turbulentny — burzliwy i w dużym stopniu chaotyczny (patrz rys. 4).

Opis rzeczywistego lotu piłki jest bardzo skomplikowany, nawet przy idealnych warunkach atmosferycznych. Cóż dopiero, jak zadmie wiatr i lunie deszcz. Żaden fizyk nie przepowie lotu piłki w takich warunkach. Tylko piłkarze wiedzą, jak ją kopnąć, by trafiła do adresata.

## ODBIKIE PIŁKI

Odbijanie lecącej piłki, jej gaszenie, łapanie piłki przez bramkarza stanowią liczne przykłady zderzeń dwóch ciał o bardzo różnych masach. Zderzenia omówiliśmy przy okazji główkowania i kopania piłki. Teraz chcemy zwrócić uwagę na trudności, jakie sprawiają piłkarzom, a zwłaszcza bramkarzom, wielokrotnie już wspomniane „podkręcone” piłki. Dlaczego? Bowiemy przy odbiciu piłki „podkręconej” dzieją się dziwne rzeczy. Zawodzi wtedy znane prawo dla odbicia od ściany mówiące, że kąt odbicia równa się kątowi padania. Można się o tym przekonać rzucając ukośnie do podłogi piłeczkę tenisową odpowiednio ją podkręcając. Przy pewnej wprawie można ją rzucić tak, by wróciła do rąk rzucającego! Wytlumaczenie tego „podejrzanego” zachowania się piłki podkręconej jest naszkicowane na rys. 5abc. W przypadku niepodkręconej piłki (rys. 5a) siła oddziaływania podłogi na piłkę skierowana jest prostopadle do powierzchni ściany i nie zmienia składowej pędu piłki, równoległej do ściany. Dlatego kąt padania równa się kątowi odbicia. Natomiast przy zetknięciu się podkręconej piłki ze ścianą pojawia się dodatkowa siła tarcia, hamująca ruch obrotowy piłki. Siła ta jednocześnie zmienia składową pędu piłki, równoległą do ściany, zwiększając ją lub zmniejszając w zależności od kierunku obrotu piłki (rys. 5bc).

## RZUT KARNY

Czy można winić bramkarza, że nie obronił rzutu karnego?

Obliczmy, jakie są jego szanse.

Choćby był najlepiej wytrenowany, nie może zadziałać natychmiast. Czas reakcji dobrego bramkarza wynosi około 0,1 sekundy. Następnie bramkarz musi dotrzeć, choćby rękami, do rogu bramki odległego o blisko 4 metry. Mało prawdopodobne wydaje się skrócenie czasu interwencji bramkarza poniżej 0,3 sekundy. Piłka leci z prędkością około 50 m/s i ma do przebycia drogę około 12 m. Potrzeba na to zaledwie 0,2—0,3 sekundy.

A więc rzut karny, jeśli tylko dobrze wykonany, musi skończyć się bramką. Chyba, że w bramce stoi Jan Tomaszewski....



## Czytelnicy proponują

Kol. Robert Kowal zaproponował, by zamieścić w naszym dziale zadaniowym następujące zadanie:

Udowodnić, że jeżeli  $a, b, c$  są liczbami dodatnimi, to

$$(1) a^4 + b^4 + c^4 + a^2bc + ab^2c + abc^2 \geq 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2.$$

Podał on dowód oparty na nierówności

$$(2) a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc,$$

która jest prawdziwa dla wszelkich dodatnich

liczb  $a, b, c$  (nierówność ta, przy założeniu, że  $a, b, c$  są długościami boków trójkąta, stanowiła treść jednego z zadań VI Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej). Nierówność (1) otrzymuje się z nierówności (2) mnożąc obydwie jej strony przez  $a+b+c$ .

Zauważmy, że nierówność (1) wynika z nierówności 1.31 z książki D. S. Mitrinowicia, *Elementarne nierówności*, PWN, Warszawa 1972: dla wszystkich liczb rzeczywistych  $a, b, c$  jest:

$$(3) a^4 + b^4 + c^4 + abc(a+b+c) \geq a^3(b+c) + b^3(c+a) + c^3(a+b).$$

Mamy bowiem dla liczb dodatnich  $a, b, c$  nierówność

$$ab(a-b)^2 + bc(b-c)^2 + ca(c-a)^2 \geq 0,$$

czyli

$$a^3(b+c) + b^3(c+a) + c^3(a+b) \geq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2).$$

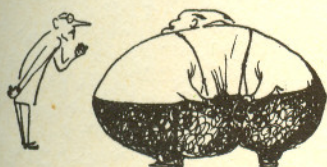
Niestety, dowód nierówności (3), do którego odsyła autor książki, jest błędny (a raczej nie ma go wcale).

Nierówność (3) dla liczb dodatnich  $a, b, c$  jest przypadkiem szczególnym ( $\lambda = 2$ ) omawianej w cytowanej książce nierówności Schura

$$a^\lambda(a-b)(a-c) + b^\lambda(b-a)(b-c) + c^\lambda(c-a)(c-b) \geq 0,$$

udowodnionej tam, niestety, w dość skomplikowany sposób. Pokazaliśmy powyżej inną metodę rozwiązania zadania zaproponowanego przez kol. Roberta Kowala.

Nierówność Schura dla  $\lambda = 2$  jest prawdziwa dla wszystkich liczb rzeczywistych  $a, b, c$  (co wynika z jej dowodu, podanego w książce Mitrinowicia), a więc nierówność 1.31 jest prawdziwa dla wszystkich liczb rzeczywistych  $a, b, c$ .



Nie wydaje mi się, abyś miał wiele stopni swobody!

## Kącik filatelistyczny (3)

Galileo Galilei zwany w Polsce *Galileuszem* (1564—1642), włoski fizyk, astronom i filozof, uważany jest za twórcę mechaniki klasycznej. Odkrył on prawo ruchu wahań, prawo swobodnego spadania ciał, sformułował zasadę względności w mechanice, wprowadził podstawowy dla mechaniki klasycznej związek między współzrędnymi czasowo-przestrzennymi dowolnego zdarzenia rozpatrywanego w dwóch różnych układach odniesienia (tzw. transformacja Galileusza). Skonstruował także lunetę astronomiczną. Reprodukujemy trzy znaczki pocztowe poświęcone temu wielkiemu uczonemu: dwa włoskie (z lat 1942 i 1964) oraz paragwajski z roku 1965. Podobiznę Galileusza znaleźliśmy też na znaczkach Czechosłowacji (z roku 1964), Meksyku (1971), Panamy (1965), Rumunii (1964), Włoch (1933 i 1945, poza reprodukowanymi) oraz Węgier (1964) i Związku Radzieckiego (1964).

Jerzy BARTKE

