

SPIS TREŚCI

NUMERU 5 (53)

Program Hilberta

Doc. dr Leszek Pacholski str. 1

Co to jest teoria względności

Dr Andrzej Krasieński str. 6

Wahadło kwantowe

Doc. dr Michał Świącki str. 10

Co dają komputery

Mgr inż. Piotr Kapela str. 12

Mała Delta

str. 14

Laboratorium w domu

Doc. dr Tomasz Hofmokl str. 16

Zadania str. 16

Drobiazgi str. 17

W następnym numerze:

**Krzywa trójkąta
 Sierpińskiego**

Wśród autorów tekstów matematycznych w nr 4/78 pominięty został mgr M. Cichy — przepraszamy

Kol. *Stanisław CEMPA*:

„... Chciałbym stać się członkiem Korespondencyjnego Koła Naukowego. Chętnie wymieniałbym swe poglądy z dziedziny fizyki. Mój adres:
 Uhryń 2
 33 336 Łabowa
 woj. N. Sącz”

Kol. *Danuta ABUCEWICZ*:

„... Interesuję się fizyką. Mój adres:
 ul. Armii Czerwonej 16-18 m 8 82-300 Elbląg”

„Delta”
 matematyczno-fizyczny miesięcznik
 popularny
 Polskiego Towarzystwa
 Matematycznego i Polskiego
 Towarzystwa Fizycznego
 wydawany przy poparciu
 Ministerstwa Oświaty i Wychowania
 Komitet Redakcyjny

doc. dr J. Bartke
 doc. dr A. Bączyński
 doc. dr B. Gleichgewicht
 prof. dr K. Goebel
 doc. dr B. Iwaszkiewicz
 doc. dr T. Iwiński
 doc. dr A. Januszajtis
 prof. dr Leon Jeśmanowicz —
 wiceprzewodniczący
 mgr H. Kaczorek
 prof. dr B. Karczewski
 prof. dr M. Kuczma
 mgr A. Mąkowski
 prof. dr Z. Pawlak
 prof. dr A. Piekara
 prof. dr Z. Semadeni
 prof. dr J. Stankowski

prof. dr M. Subotowicz
 doc. dr S. Turnau
 doc. dr J. Wdowczyk
 prof. dr Janusz Zakrzewski —
 przewodniczący

Redaguje Kolegium w składzie:
 doc. dr T. Hofmokl — z-ca red. nac.
 dr T. B. Iwiński
 B. Jaworska-Kordos — ilustracje
 dr M. Kordos — red. nac.
 mgr K. Prażmowski — red. techn. graf.
 mgr K. Szypcio — sekr. red.
 doc. dr M. Świącki
 Adres Redakcji
 ul. Hoża 69 pok. 151,
 00-681 Warszawa

Zakład Narodowy im.
 Ossolińskich — Wydawnictwo
 Wrocław, Oddział w Warszawie
 Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.
 wyd.; 2,50 ark. druk.;
 papier offsetowy III kl. 80 g. 61 × 86
 Wydrukowano w Drukarni im.
 Rewolucji Październikowej
 Warszawa, ul. Mińska 65
 Nr zam. 211/78 S-80

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60, — cena prenumeraty półrocznej zł 30, —

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach
 — do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i cały rok następny
 — do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego.
 Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienie w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”.
 Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW oraz prenumeratorzy indywidualni, zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.
 Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej

Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.
 Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.
 Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, konto PKO I OM W-wa 1531-912
 w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław
 w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa
 w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków
 Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7 00-068 Warszawa, Poland or with
 — Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland.
 — Earls Court Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain,
 — Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia.

Cena 1 egzemplarza zł 5.— nr indeksu 35723/35550

Doc. dr Leszek PACHOLSKI

Redakcja Deltę zwróciła się do mnie z propozycją napisania artykułu o programie Hilberta. Długo zastanawiałem się, jak temat ten można spopularyzować, a im dłużej myślałem, tym bardziej byłem przekonany, że jest to bardzo trudne. Pisanie o podstawach matematyki, a o programie Hilberta w szczególności, oznacza konieczność wejścia na grząski teren pogranicza filozofii i matematyki, gdzie do tej pory jest wiele spraw spornych i nie wyjaśnionych. Tu nie można posłużyć się ilustracją ani przybliżeniem, nie można zaniedbać szczegółów, a przy tym ważne i ciekawe są nie same twierdzenia lecz wnioski, do których prowadzą, a których interpretacja do tej pory budzi kontrowersje. Ileż uroczych metafizycznych nonsensów zawierają artykuły popularyzujące wnioski z twierdzenia Gödla!

Jedynym wyjściem jest w tej sytuacji ucieczka w historię. Zresztą dla zrozumienia źródeł programu Hilberta konieczna jest znajomość pewnych faktów z historii rozwoju pojęć i kryteriów ścisłości w rachunku różniczkowym, geometrii i teorii zbiorów. Program Hilberta wyrósł bowiem z entuzjazmu dla formalizacji. Początek XX wieku był okresem, kiedy po dwóch wiekach braku ścisłości w matematyce udało się stworzyć takie metody, że nie tylko z powrotem osiągnięto rygor ścisłości „Elementów” Euklidesa, ale nawet znacznie je przekroczone.

Gdy na przełomie XVII i XVIII wieku I. Newton oraz G. W. Leibniz stworzyli początki rachunku różniczkowego, matematycy z entuzjazmem zaczęli stosować nowo wprowadzone metody. Rachunek różniczkowy rozwijał się bardzo gwałtownie. Z jego pomocą opisano wiele zjawisk fizycznych i rozwiązano wiele ważnych zagadnień. Osiągnięto bardzo dużo, ale metody, których używano, dalekie były od ścisłości. Wyprowadzono nieprawdziwe wzory, a prawdziwe często uzasadniano nieprecyzyjnie i niedostatecznie. Entuzjazm dla nowych metod był jednak tak wielki a ich skuteczność tak ogromna, że niemal wszyscy matematycy uważali, iż uzasadnianie metod rachunku różniczkowego i uściślanie go jest zbędne. Dla Leibniza rachunek różniczkowy był zbiorem reguł algorytmicznych, które można powszechnie stosować, a których najlepszym uzasadnieniem jest ich skuteczność. Zresztą trzeba przyznać, że entuzjazm i beztraska były zrozumiałe, osiągnięcia były bowiem ogromne. Niemal wszystko, czego do dziś uczą się studenci w czasie tradycyjnego kursu analizy i wiele stosowanych obecnie metod rachunku różniczkowego i równań różniczkowych, powstało w tych czasach. Aż trudno dziś uwierzyć, że używając tak mało precyzyjnych i ścisłych metod można było osiągnąć tak wspaniałe rezultaty.

Pierwsze próby uzasadnienia rachunku różniczkowego były bardzo naiwne. Jedni szukali go w metafizyce, inni w tym, że błędów popelnia się tak wiele, iż w końcu się redukuje. Wielu uczonych i filozofów uważało wręcz, że rachunek różniczkowy musi być mętny, jest on przecież sztuką dokładnego mierzenia i liczenia rzeczy, których pojęć nie można (Wolter). Niektórzy uważali brak ścisłości za zaletę, dumni z osiągniętego ich zdaniem sukcesu, który polegał na tym, że udało się zerwać narzucone przez matematykę grecką więzy ścisłości. Za uzasadnienie wystarczała fizyczna motywacja i niejasna czasem intuicja. S. F. Lacroix pisał: „takim subtelnym mięczakom jak Grecy potrzebne były dowody, my ich już nie potrzebujemy”.

W końcu XVIII wieku pojawiły się pierwsze uściślenia pojęć rachunku różniczkowego. J. d’Alembert zauważył, że różniczkowanie to znajdowanie granicy różnic skończonych, on też, mimo iż w swoich rozumowaniach często posługiwał się intuicją geometryczną, podkreślał, że ścisłości należy szukać w arytmetyce. J. L. Lagrange twierdził, że pochodna jest konkretną wielkością, podczas gdy wcześniej uważano ją za coś nieokreślonego i mglistego. Dużym krokiem na drodze do uściślenia pojęcia pochodnej były prace B. Bolzano, który uważał, że rachunek różniczkowy należy sprowadzić do działań arytmetycznych. Konsekwentnie stosował pojęcie granicy w definicji ciągłości i pochodnej. On też po raz pierwszy pokazał niezgodność intuicji z własnościami badanych pojęć. Zbudował bowiem przykład funkcji ciągłej, która nigdzie nie jest różniczkowalna, wbrew panującym przekonaniom, że wszystkie funkcje ciągłe są różniczkowalne. Ponieważ pojęcia ciągłości i pochodnej zostały przez Bolzano zredukowane do pojęcia granicy, to ostatnie pilnie wymagało uściślenia. Uściślenia wymagało też pojęcie liczby rzeczywistej, czy, jak dawniej mówiono, zmiennej. Prace A. Cauchy’ego i K. Weierstrassa doprowadziły wreszcie do zdefiniowania pojęcia granicy, które nie różni się niczym od definicji przyjmowanej dziś. Cauchy podjął również próbę zdefiniowania liczby rzeczywistej. Niestety jego definicja zawierała błędne koło. Liczbę rzeczywistą definiował on jako granicę ciągów liczb wymiernych, ale w definicji granicy używał pojęcia liczby rzeczywistej. Inną propozycję przedstawił W. R. Hamilton, który oparł swą teorię na pojęciu czasu. Liczby rzeczywiste były dla niego punktami dzielącymi czas na przeszłość i przyszłość i były wyznaczone przez dwa zbiory liczb wymiernych — zbiór liczb wymiernych w przeszłości i zbiór liczb wymiernych w przyszłości. Niemal identyczna była definicja R. Dedekinda, który jednak nie używał pojęcia czasu.





Dyscypliną matematyki, której rozwój miał duży wpływ na ścisłości i prawdziwości w matematyce, była geometria. W geometrii od dawna ważną rolę odgrywała dedukcja, a ścisłość geometrii Euklidesa przez długie wieki była niedoścignionym ideałem. Jednak w końcu XIX wieku w dowodach Euklidesa zaczęto dostrzegać luki. Zauważono też, że definicje podstawowych pojęć były niepoprawne. Podawały one tylko mało precyzyjne intuicje. Punkt był bowiem czymś, co nie ma części, a przecież na to, aby ta definicja była poprawna, należałoby zdefiniować pojęcie części. Intuicja i rysunki, wbrew intencjom Euklidesa, były istotnymi składowymi dowodów twierdzeń, które podawał. Wiele z nich nie wynikało z podawanych aksjomatów. W 1882 roku M. Pasch opublikował pracę, w której przedstawił udoskonalony system aksjomatów geometrii. W systemie tym występowały pojęcia niezdefiniowane, a istotne własności tych pojęć i ich wzajemne związki były opisane przez aksjomaty.

W starożytności i jeszcze długo potem geometria była nauką o przestrzeni, którą uważano za dokładną idealizację przestrzeni fizycznej. Odkrycie geometrii nieeuklidesowych spowodowało zachwianie tego poglądu. Wprawdzie dalej geometria Euklidesa była jedyną prawdziwą, a inne tylko sztuczkami polegającymi na wymyślaniu dziwnych sposobów mierzenia odległości, powoli jednak zaczynało pojawiać się przekonanie, że geometria jest tylko konstrukcją umysłu ludzkiego i nie musi być dokładnym odbiciem rzeczywistości. Do ugruntowania tego poglądu przyczyniły się badania nad geometriami przestrzeni wielowymiarowych. Geometrie takie rozważano już w pierwszej połowie XIX wieku. Początkowo traktowano je jak bezsensowną zabawę. Potem zaczęły pojawiać się coraz częściej, odgrywając przy tym ważną rolę jako narzędzie w analizie matematycznej. Użyteczność i powszechność ich stosowania sprawiły, że pod koniec wieku uważano geometrie przestrzeni dowolnych wymiarów za jednakowo ważne.

Pojęcia, które badała matematyka tradycyjna, miały oczywiste intuicje i wyrażały się obserwacji fizycznych i doświadczenia. Nawet nieskończenie małe Leibniza i fluksje Newtona nie były czystym dziełem rozumu, ale odpowiadały intuicjom prędkości ruchu i szybkości zmian. Nie było pojęć i konstrukcji sztucznych, wszystko miało odbicie w świecie. Stąd wiele faktów było oczywistych. Niepotrzebne było uzasadnienie, że teoria jest dobra lub zła. Wystarczała zgodność z rzeczywistością oraz intuicją. Matematycy nie obawiali się, że poprawne rozumowania mogą doprowadzić ich do wniosków fałszywych lub sprzecznych, bo przecież twierdzenia matematyki mówiły prawdę o świecie. Tradycje i intuicja były tym, na czym opierało się szereg pewników o bardzo ogólnym charakterze. Uważano, że nieskończone zbiory dyskretne (tzn. złożone z oddzielnych punktów) są niedopuszczalne, jak również niemożliwe jest nieskończone dzielenie prostej. Widziano zasadnicze różnice między zbiorami punktów (liczb) a linią. Między arytmetyką i geometrią.

Ale matematyka zmienia się bardzo szybko. Pojawiają się pojęcia i teorie, które nie są już dokładnym odbiciem rzeczywistości. Wspomniana wyżej definicja liczb rzeczywistych po ulepszeniu przez B. Russella mówi, że liczbą rzeczywistą są dwa zbiory liczb wymiernych. Definicja ta godzi ciągle z dyskretnym, jest ścisła, ale jakże odległa od intuicji. Pojawiają się geometrie nieeuklidesowe i wielowymiarowe, a w analizie trudno się obejść bez zbiorów nieskończonych. Matematycy pracują nad stworzeniem abstrakcyjnej algebry, która coraz mniej jest oparta na arytmetyce, a częściej polega na badaniu abstrakcyjnych operacji na abstrakcyjnych obiektach. Matematyka oddala się od fizyki i intuicji. Powszechniejszy staje się pogląd, że pojęcia matematyki są tworem myśli nie skrepowanej doświadczeniem. Kryteria ścisłości często odwołują się do definicji formalnych, czasem sztucznych ale precyzyjnych. W dowodach intuicja zostaje zastąpiona przez logikę.

Nie wszyscy matematycy uważali, że zachodzące procesy w istotny sposób wpłynęły na zmianę istoty matematyki. Część z nich uważała, że ścisłość i rygor nie tworzą matematyki, lecz tylko pozwalają udowodnić to, co podpowiada intuicja, że nowe aksjomaty służą do dowodzenia starych twierdzeń. A jednak rygor i logika prowadzą do nowych twierdzeń, które nie tylko nie są uściśleniem intuicji, ale wręcz jej przeczą. Matematycy konstruują dziwne przykłady — funkcje ciągłe bez pochodnych, linie ciągłe wypełniające kwadrat. Okazuje się, że suma szeregu funkcji bardzo ciągłych i różniczkowalnych nie musi być ciągła. Wielu matematyków uważa te przykłady za patologiczne i protestuje przeciwko nowym pomysłom. H. Poincaré pisze: „Logika czasami tworzy monstra. Przez pół wieku oglądaliśmy mnóstwo dziwnych funkcji, które zmusza się do tego, aby możliwie mało przypominały przyzwoite funkcje, które do czegoś służą [...]. Istotnie, z punktu widzenia logiki te dziwne funkcje są najbardziej ogólne, natomiast te, które spotykamy bez specjalnego szukania i które podlegają prostym prawom, okazują się szczególnym przypadkiem, nic nie znaczącym marginesem. W dawnych czasach wymyślano funkcje z powodów praktycznych, dziś wymyśla się je tylko po to, by ukazać defekty w rozumowaniach naszych poprzedników”.

Niezależnie od poglądów wielu ówczesnych matematyków nowe metody i nowe kryteria ścisłości weszły do matematyki na stałe. Można było ignorować patologiczne konstrukcje i najbardziej abstrakcyjne działy matematyki, ale trzeba było pogodzić się z tym, że nawet w badaniach starych, dobrych zagadnień rygor i logika zajęły miejsce intuicji, że zmieniły się kryteria poprawności dowodów, że zmieniło się pojęcie prawdy w matematyce.

Na początku XX wieku rozwój pojęć matematyki osiągnął taki poziom, że w codziennej praktyce nie było już kłopotów ze ścisłością. Trudno było jednak uznać, że wszystkie pojęcia są jasne, że podstawy, na których opiera się matematyka, są bardzo solidne. Najwięcej kłopotów sprawiało pojęcie zbioru nieskończonego. Jego pojawienie się było nieuniknioną konsekwencją rozwoju analizy. Mimo to wielu uczonych uważało pojęcie zbioru nieskończonego za sprzeczne. Nie wierzono, że zbiory nieskończone mogą być używane i badane w matematyce. Ale nawet ci matematycy, którzy oficjalnie odrzucali to pojęcie, używali go w swoich pracach.

Początki teorii zbiorów związane są z nazwiskiem R. Dedekinda, który przy okazji wprowadzania definicji liczb rzeczywistych używał zbiorów nieskończonych i badał ich własności. Wyniki Dedekinda znacznie wzbogacił G. Cantor, który stworzył obszerną teorię zbiorów nieskończonych, liczb kardynalnych i porządkowych. Jednym z ważniejszych pojęć badanych przez Cantora było pojęcie równoliczności. Dwa zbiory A , B są równoliczne, jeśli mają tyle samo elementów, to znaczy jeśli każdemu elementowi zbioru A można przyporządkować element zbioru B , przy czym różnym elementom zbioru A należy przyporządkowywać różne elementy zbioru B , oraz elementy przyporządkowane elementom zbioru A powinny wyczerpać zbiór B . Jednym z ciekawszych odkryć Cantora było twierdzenie, że istnieją zbiory nieskończone nierównoliczne, innymi słowy, że nie wszystkie zbiory nieskończone mają taką samą ilość elementów (czyli moc). Nowe odkrycia często zaskakiwały matematyków. Nawet sam Cantor komentując jedno z nich pisał w liście do Dedekinda „widzę, ale nie wierzę”. Zresztą teoria zbiorów nieskończonych spotkała się ze sprzeciwami wielu matematyków. Ataki na Cantora były tak ostre, że pod ich wpływem załamał się nerwowo i musiał na pewien czas przerwać pracę naukową.

Trzeba przyznać, że posługiwanie się pojęciem zbioru nieskończonego było niebezpieczne, a teoria Cantora tych niebezpieczeństw nie umiała uniknąć. Pojawiło się wiele antynomii (paradoksów) związanych z pojęciem zbioru nieskończonego i z pojęciem mocy. Dla ilustracji przytoczę tu jedną z bardziej znanych, pochodzącą od Russella. Niech X będzie zbiorem wszystkich zbiorów, które nie są swoimi elementami. Wtedy na pytanie, czy X jest swoim elementem ($X \in X$), nie można udzielić sensownej odpowiedzi. Bo jeśli $X \in X$, to X jest swoim elementem, a więc na mocy definicji $X \notin X$. Jeśli natomiast $X \notin X$, to X jest swoim elementem, przeto z definicji $X \in X$.

Antynomie zmusiły matematyków do szukania precyzyjniejszej teorii zbiorów od tej, którą podał Cantor. Dla niektórych uczonych było jasne, że rozwiązania należy szukać w aksjomatyzacji pojęcia zbioru. Jednym z najstarszych systemów aksjomatów opisujących pojęcie zbioru jest system E. Zermelo. Udoskonalony później przez A. Fraenka jest stosowany do dziś i znany pod nazwą teorii mnogości ZF (Zermelo-Fraenkel). Metoda uniknięcia antynomii zaproponowana przez Zermelo polegała na tym, że nie postulował on, tak jak Cantor, że dowolna własność definiuje zbiór elementów, które mają tę własność. System Zermelo był stosunkowo prosty i użyteczny, ale nie było pewności, że system ten jest niesprzeczny, to znaczy, że ma realizację czyli model. Wprawdzie zwolennicy teorii Zermelo wierzyli w jej niesprzeczność, ale ich wiara opierała się tylko na tym, że znanych antynomii nie można było w tym systemie zbudować. Zresztą do dziś matematycy nie znaleźli żadnych paradoksów, które wskazywałyby na to, że aksjomaty Zermelo należy odrzucić. Wypada dodać, że były też inne propozycje uniknięcia paradoksów, bardziej nawet ambitne niż teoria Zermelo, gdyż usiłujące zbudować podstawy nie tylko dla teorii mnogości, lecz dla całej matematyki. Jedną z nich to teoria typów logicznych B. Russella, druga to intuicjonizm L. E. J. Brouwera. Przedstawione przez nich metody przewyżnienia kryzysu podstaw matematyki miały wady. Brouwer proponował bowiem przebudowanie istniejącej matematyki i zrezygnowanie z dużej części aparatu dedukcyjnego, który od dwustu lat był stosowany przez matematyków. System Russella był natomiast skomplikowany i mało skuteczny, a poza tym w jego pracach było dużo filozofii, co bardzo odstraszało matematyków. Obie propozycje odegrały marginesową rolę w rozwoju matematyki, mimo iż wzbudziły dużo zainteresowania wśród filozofów i przyczyniły się do powstania dwóch szkół — intuicjonistycznej i logistycznej — w podstawach matematyki i filozofii matematyki. Większe znaczenie miała propozycja przedstawiona przez D. Hilberta, który rozwiązania szukał w aksjomatyzacji, przy czym duży nacisk kładł na dowody niesprzeczności. Oba te pomysły nie były nowe. Już wcześniej badane były teorie aksjomatyczne: geometria Euklidesa, geometrie nieeuklidesowe, teoria liczb naturalnych (zaksjomatyzowana przez G. Peano) i inne. Udowodniono też niesprzeczność geometrii nieeuklidesowych. Zdaniem Hilberta znane sposoby aksjomatyzacji teorii matematycznych były niewystarczające. Dotychczasowe systemy formalizowały bowiem tylko charakterystyczne pojęcia teorii, natomiast metody dowodzenia opierały się na intuicyjnej logice. W systemie aksjomatycznym Hilberta zaksjomatyzowane miały być nie tylko pojęcia teorii, ale także logika i metody dowodzenia. Oprócz aksjomatów teorii system formalny powinien zawierać aksjomaty logiki a także reguły dowodzenia. Aksjomatów logiki i teorii mnogości oraz reguł dowodzenia powinno być skończenie wiele lub powinny być opisane przez skończoną ilość schematów. W takim systemie dowodzenie polegałoby na mechanicznym stosowaniu podanych reguł. Do sprawdzenia poprawności dowodu zbędne byłoby rozumienie znaczenia pojęć matematyki i logiki oraz intuicja, wystarczałaby umiejętność rozróżniania znaków.



Nacisk, jaki Hilbert kładł na dowody niesprzeczności, był czymś nowym. Jak już wspominałem, systemy aksjomatyczne opisywały dawniej pojęcia dobrze poznane w sposób nieformalny. Matematycy uważali, że znają dość faktów, aby za pomocą aksjomatów stworzyć idealny obraz rzeczywistości. Powstanie geometrii nieeuklidesowych oraz kłopoty z analizą oraz pojęciem zbioru spowodowały załamanie się tego przekonania. Możliwość tworzenia systemów aksjomatycznych, które byłyby doskonałym odbiciem świata fizycznego, wydawała się coraz bardziej problematyczna. Coraz powszechniejsze stawało się przekonanie, że matematyka jest raczej konstrukcją wolnego umysłu ludzkiego. Dotychczas kryterium poprawności systemu była jego zgodność z intuicją i doświadczeniem, teraz tego kryterium zabrakło i wielu uczonych uważało, że jedynym uzasadnieniem teorii może być jej logiczna niesprzeczność. Spowodowało to wzrost znaczenia dowodów niesprzeczności. Do tej pory opierały się one na teoriach, których niesprzeczność nie budziła wątpliwości. I tak w dowodzie niesprzeczności geometrii nieeuklidesowych posługiwano się geometrią euklidesową, a w dowodzie niesprzeczności geometrii euklidesowej Hilbert posłużył się teorią liczb rzeczywistych. Dowody te polegały na konstruowaniu przy pomocy jednej teorii modeli dla teorii, której niesprzeczności dowodzono. Ale te metody straciły znaczenie w chwili, gdy uznano, że żadna teoria nie ma dostatecznych podstaw. Ponadto było wiele teorii, dla których trudno było znaleźć nawet takie, względne dowody niesprzeczności. Tak było z teorią liczb naturalnych, z teorią liczb rzeczywistych i teorią zbiorów nieskończonych. Było oczywiste, że dla zbudowania modelu dla teorii zbiorów nieskończonych trzeba mieć do dyspozycji zbiory nieskończone, a żadna inna teoria nie gwarantowała istnienia takich zbiorów.

Aby uniknąć kłopotów z konstruowaniem modeli dla różnych teorii, Hilbert zaproponował inną metodę dowodzenia niesprzeczności. Wprowadził pojęcie niesprzeczności formalnej; teoria jest formalnie niesprzeczna, jeśli z aksjomatów tej teorii przy pomocy reguł dowodzenia nie da się udowodnić dwóch zdań sprzecznych lub, co oznacza to samo, jeśli nie uda się wyprowadzić zdania logicznie fałszywego, np. $1 \neq 1$. Dowodzenie w systemie formalnym sprowadza się do skończonej ilości prostych, mechanicznych operacji. Nawet gdy system formalny opisuje zbiory nieskończone, posługiwanie się nim nie wymaga żadnej wiedzy o zbiorach nieskończonych. Hilbert miał nadzieję, że dzięki temu uda się uniknąć kłopotów z powstawaniem błędnego koła. Wyobrażał sobie, że formalną niesprzeczność systemów opisujących zbiory nieskończone lub inne skomplikowane obiekty będzie można udowodnić używając bardzo prostych środków, bez odwoływania się do pojęć i metod mogących budzić wątpliwości, takich jak na przykład zbiory nieskończone. Zamierzenia te udało się zrealizować jedynie w przypadku kilku prostych teorii. Znalezienie dowodów niesprzeczności dla teorii bardziej skomplikowanych było niezwykle trudne.

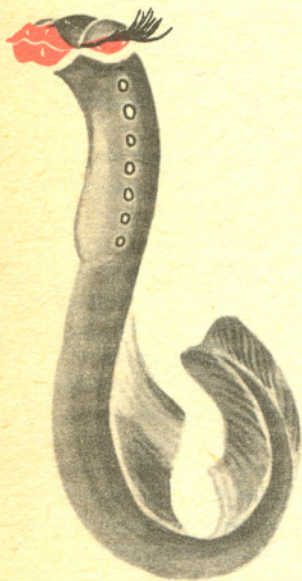
Program Hilberta przyczynił się do powstania i gwałtownego rozwoju pasjonującej teorii matematycznej nazywanej czasem metamatematyką. Zajmuje się ona badaniem własności systemów formalnych.

Najdokładniej zostały zbadane systemy formalne zwane teoriami elementarnymi. Są one bardzo dobrym przybliżeniem ogólnego pojęcia systemu formalnego, a niektórzy uczeni uważają, że teorie elementarne są jedynymi systemami spełniającymi wszystkie postulaty Hilberta. Jednym z ważniejszych problemów metamatematyki było pytanie, czy dla teorii, która jest formalnie niesprzeczna, można znaleźć model. Pozytywną odpowiedź na to pytanie zawiera twierdzenie K. Gödla z 1930 roku. Z twierdzenia tego wynika też, że aksjomatyzacja logiki podana przez G. Fregego i B. Russella, a użyta przez Hilberta do formalizacji matematyki, jest zupełna. Oznacza to, że dane zdanie można udowodnić z aksjomatów logiki wtedy i tylko wtedy, gdy jest ono prawdziwe przy wszystkich możliwych interpretacjach występujących w nim symboli matematycznych (poza logicznych).

Inną bardzo ważną dla programu Hilberta konsekwencją wyniku Gödla było twierdzenie, że zdanie można udowodnić w systemie formalnym wtedy i tylko wtedy, gdy jest ono prawdziwe we wszystkich modelach tego systemu. Oznacza to, że siła dowodów formalnych jest bardzo duża, że można za ich pomocą udowodnić wszystko, co wynika z aksjomatów.

W trakcie badań nad zagadnieniami niesprzeczności rozważano możliwości interpretowania jednych systemów w innych. Wprawdzie nie udało się tą drogą uzyskać absolutnych dowodów niesprzeczności, niemniej stworzono aparat, który w tej chwili jest bardzo intensywnie stosowany w badaniach nad teorią mnogości i pozwala na istotne osłabianie założeń w dowodach względnej niesprzeczności. Metoda interpretacji okazała się też bardzo użyteczna w badaniach zagadnienia rozstrzygalności.

Hilbert spodziewał się, że systemy formalne służące do opisanego jednego obiektu będą zupełne, kategoryczne i rozstrzygalne. Wyjaśnijmy kolejno znaczenie tych słów. Teoria jest zupełna, jeśli każde zdanie sformułowane w języku właściwym dla tej teorii można w niej udowodnić lub obalić. Teoria jest kategoryczna, jeśli ma tylko jeden model (interpretację), a jest rozstrzygalna, jeśli istnieje mechaniczna metoda pozwalająca sprawdzić (rozstrzygnąć), czy dane zdanie jest twierdzeniem. Badania nad zupełnością, kategorycznością, a szczególnie nad rozstrzygalnością teorii prowadzone były przez wielu uczonych i dały szereg ciekawych wyników. Niestety rezultaty tych badań były inne niż oczekiwano.



Pierwszym wynikiem, który zachwiał wiarę w możliwość pełnej realizacji programu Hilberta, było twierdzenie Löwenheima-Skolema. Mówi ono, że jeśli teoria ma model nieskończony, to ma także model równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych. Z twierdzenia tego i twierdzeń G. Cantora wynika między innymi, że teoria zbiorów i teoria liczb rzeczywistych nie są kategoryczne. Twierdzenie Löwenheima-Skolema prowadziło do tak zwanego paradoksu Skolema: Rozpatrzmy model teorii zbiorów, który jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych. W tym modelu prawdziwe są wszystkie twierdzenia teorii zbiorów. Wobec tego, na mocy twierdzenia Cantora, istnieje w nim zbiór nieskończony, który nie jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych, a więc ma większą liczbę elementów niż zbiór liczb naturalnych. Z drugiej strony, zbiór ten jest elementem naszego modelu i nie może mieć więcej niż on elementów. Uczni szybko odkryli błąd w przytoczonym wyżej rozumowaniu i paradoks Skolema okazał się niegroźny dla podstaw teorii mnogości. T. Skolem skonstruował też model peanowskiej arytmetyki liczb naturalnych, który zawiera niestandardowe „liczby naturalne”, większe od każdej prawdziwej liczby naturalnej, a mimo to są w nim prawdziwe te i tylko te zdania elementarne, które są prawdziwe w modelu zbudowanym z liczb naturalnych. Wobec tego elementarna teoria liczb naturalnych ma dwa różne modele, a więc nie jest kategoryczna.

Niedługo potem K. Gödel pokazał, że arytmetyka Peano, teoria formalna opisująca liczby naturalne, jest niezupełna, dokładniej, udowodnił, że jeśli arytmetyka Peano jest niesprzeczna, to istnieje zdanie prawdziwe, którego w niej udowodnić ani obalić w sposób formalny nie można. Co więcej, nie można zapewnić zupełności przez dodanie nowych aksjomatów. Każda teoria rozszerzająca arytmetykę Peano jest niezupełna, jeśli tylko system aksjomatów jest zadany w sposób efektywny, to znaczy jeśli istnieje metoda rozstrzygnięcia, czy dane zdanie jest aksjomatem. Z twierdzenia Gödla wynika, że w systemach formalnych nie można udowodnić wszystkich prawdziwych zdań matematyki, natomiast A. Tarski udowodnił twierdzenie o niedefiniowalności pojęcia prawdy, z którego wynika, że w systemach formalnych nie można zdefiniować wszystkich naturalnych pojęć.

Podobnych wyników było więcej. Okazało się, że wiele teorii jest nierozstrzygalnych. A. Church udowodnił, że zbiór twierdzeń logiki jest nierozstrzygalny, a J. B. Rosser, że żadna teoria, której modelem są liczby naturalne, nie może być rozstrzygalna. Niedawno J. Matijasiewicz pokazał, że nie ma metody rozstrzygnięcia nawet bardzo prostych pytań — czy zadane równanie algebraiczne o współczynnikach całkowitych ma rozwiązanie w liczbach naturalnych. Z twierdzeń o niezupełności i nierozstrzygalności wynika, że nie można zbudować systemu aksjomatycznego opisującego wszystkie własności liczb naturalnych. Podobne twierdzenia są prawdziwe dla wielu teorii, między innymi dla teorii zbiorów. Tak więc pierwsza część programu Hilberta — zaksjomatyzowanie całej matematyki — jest nierealna.

Podobny los spotkał drugą część programu. W 1931 roku K. Gödel udowodnił bowiem, że jeśli tylko teoria T jest dostatecznie bogata, to znaczy jeśli można w niej opisać pewien fragment arytmetyki liczb naturalnych, to niesprzeczności T nie można w T udowodnić. W szczególności za pomocą środków dostępnych w arytmetyce Peano nie można udowodnić jej niesprzeczności. To samo dotyczy teorii ZF. Wiadomo, że wszystkie metody, które Hilbert uważał za dopuszczalne w dowodach niesprzeczności, można sformalizować i opisać w arytmetyce Peano. Stąd i z twierdzenia Gödla wynika, że absolutnego dowodu niesprzeczności arytmetyki Peano ani teorii mnogości podać nie można. Warto może na zakończenie dodać, że dla arytmetyki można podać względne dowody niesprzeczności, chociażby na gruncie teorii ZF. Natomiast dla teorii mnogości takich dowodów nie ma, jeśli pominąć dowody posługujące się „liczbami nieosiągalnymi”, których istnienie jest znacznie bardziej problematyczne niż niesprzeczność teorii ZF.

Nie spełniły się marzenia Hilberta o aksjomatyzowalności matematyki. Trudno jednoznacznie rozstrzygnąć, czy to dobrze, czy źle. Jedno jest pewne, nieaksjomatyzowalna matematyka jest dużo ciekawsza i o wiele bardziej fascynująca niż jakikolwiek system formalny.

Powiedzenie, że dwa zbiory są równoliczne oznacza, że istnieje funkcja wzajemnie jednoznaczna odwzorowująca jeden ze zbiorów na drugi. W przeliczalnym modelu teorii mocy istnieją dwa zbiory, które, patrząc z zewnątrz, są przeliczalne, a więc równoliczne, ale funkcja ustalająca równoliczność nie należy do modelu.



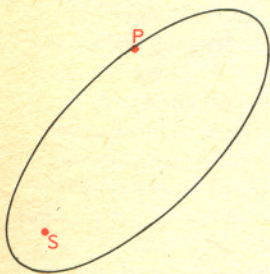


Co to jest teoria względności

PODSTAWY GEOMETRYCZNE

Dr Andrzej KRASIŃSKI

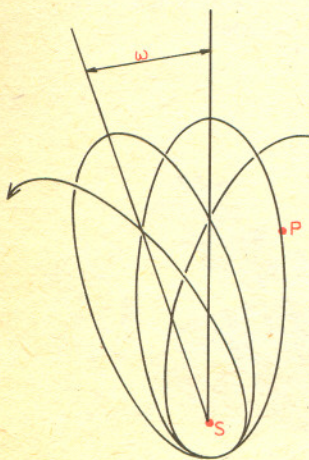
Odpowiedź na tytułowe pytanie zacznijmy od stwierdzenia, że: Istnieją dwie teorie względności. Pierwsza z nich, zwana szczególną, została opublikowana przez Alberta Einsteina w roku 1905 jako podsumowanie długiej serii prac, częściowo jego własnych, częściowo zaś innych autorów, wśród których przede wszystkim trzeba wymienić fizyka H. A. Lorentza, wielkiego matematyka i fizyka H. Poincarégo oraz matematyka H. Minkowskiego. Teoria ta zajmuje się zjawiskami mechanicznymi i elektromagnetycznymi zachodzącymi w układach poruszających się jeden względem drugiego z dużymi prędkościami („dużymi” znaczy tu: powyżej kilkunastu procent prędkości światła w próżni). Mówi się w niej o względnym spowolnieniu biegu czasu w dwu poruszających się względem siebie układach, o niemożności „prześcignięcia światła”, o tym, że zdarzenia równoczesne dla jednego obserwatora mogą nie być równoczesne dla innego, i o wielu innych tak zwanych paradoksach, dobrze znanych czytelnikom literatury popularnej. Głównym tematem niniejszego artykułu będzie druga teoria względności, zwana ogólną, nad którą Einstein pracował w latach 1905—1915. Jest ona, jak wskazuje nazwa, uogólnieniem poprzedniej. Ta pierwsza zajmowała się bowiem opisem zjawisk zachodzących bez udziału sił grawitacyjnych, podczas gdy teoria ogólna opisuje zjawiska fizyczne zachodzące w obecności pola grawitacyjnego. Z tego powodu ogólna teoria względności, choć wywodzi się z „czystej” fizyki, jest silnie powiązana z astronomią — nauką o obiektach i zjawiskach, w których grawitacja jest wszechobecnym, często najważniejszym elementem.



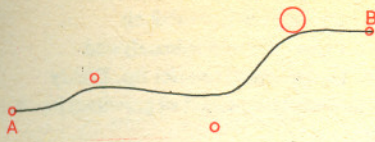
Rys. 1. To: planety P wokół Słońca S według teorii Newtona w hipotetycznym przypadku, gdy Słońce ma tylko jedną planetę.

SKĄD SIĘ WZIĘŁA OGÓLNA TEORIA WZGLĘDNOŚCI

W początkach XX wieku mechanika i teoria grawitacji Newtona, oparte na trzech znanych prawach dynamiki, wydawały się niewzruszalną podstawą całej fizyki i nikt poważnie nie wątpił w ich prawdziwość. Istniała tylko jedna luka w tym pozornie doskonałym dziele. Zgodnie z teorią Newtona, planety powinny krążyć wokół Słońca po zamkniętych torach eliptycznych. Ściślej mówiąc, gdyby Słońce miało tylko jedną planetę, jej tor powinien być elipsą o ognisku w środku masy układu Słońce — planeta. Ponieważ w rzeczywistości układ słoneczny składa się z 9 planet oraz znacznej liczby księżyców, planetoid i komet, wszystkie te ciała zaburzają nawzajem swoje orbity i żadna z nich nie jest ściśle eliptyczna. Zaburzenia toru planety pochodzące od księżyców innych planet oraz od komet są na tyle małe, że można je pominąć. Zsumowane zaburzenia pochodzące od pozostałych 8 planet ujawniają się w ten sposób, że tor planety jest krzywą „rozetkową”, którą można sobie wyobrazić w następujący sposób. Przypuśćmy, że dana planeta porusza się po prawdziwej elipsie, lecz elipsa ta równocześnie obraca się powoli wokół swojego ogniska w tym samym kierunku, w którym planeta krąży. Wówczas, po wykonaniu obiegu o 360° wokół Słońca, planeta nie powróci do punktu wyjściowego. Proste, poprowadzone z ogniska orbity do dwóch kolejnych punktów maksymalnego oddalenia planety od Słońca, będą tworzyły różny od zera kąt zwany kątem obrotu aphelium (z powodów technicznych w astronomii mierzy się raczej kąt obrotu perihelium, czyli punktu minimalnego oddalenia planety od Słońca). Kąt ten jest tym większy, im bliżej Słońca leży dana planeta. W przypadku Merkurego wynosi on $5599,74 \pm 0,41$ sekund kątowych na stulecie. Jest to efekt na tyle wyraźny, że był znany astronomom już w pierwszej połowie XIX wieku. Jednak w roku 1859 francuski astronom U. J. Leverrier stwierdził, że zsumowane oddziaływania pozostałych planet nie wystarczą do wywołania tak dużego obrotu perihelium Merkurego. Obrót obserwowany jest o $(43,11 \pm 0,45)''$ na stulecie za duży. Rozbieżność ta stała się jednym z głównych problemów XIX-wiecznej astronomii, zaś jej wyjaśnienie — pierwszym i do dziś najważniejszym sukcesem ogólnej teorii względności.



Rys. 2. Rzeczywisty tor planety wokół Słońca. ω — kąt obrotu aphelium podczas jednego okrążenia (znacznie przesadzony).

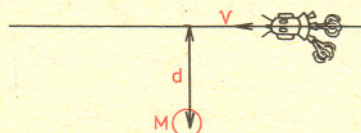
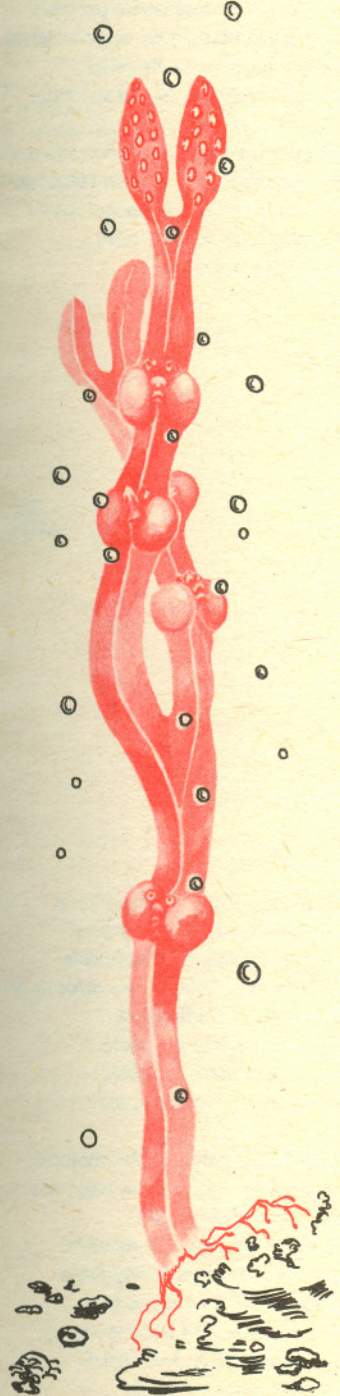


Rys. 3. „Wzorcowy liniał” rozciągnięty między gwiazdami A i B, powyginany przez pola grawitacyjne innych gwiazd. W fizyce Newtona uważano to zjawisko za skutek działania sił grawitacyjnych. W teorii Einsteina (patrz koniec artykułu) jest to efekt geometryczny.

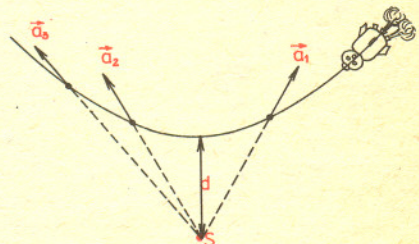
Wyjaśnienie to było „efektem ubocznym” teorii Einsteina, nie zaś wytyczonym z góry celem. Punkt wyjścia rozumowania, na którym oparła się teoria względności, był następujący. Pierwsze prawo dynamiki Newtona powiada, że w przestrzeni wolnej od wszelkich oddziaływań fizycznych każde ciało poruszało się ruchem jednostajnym i prostoliniowym. Jeśli jednak próbujemy zastosować pierwsze prawo Newtona do jakichkolwiek obiektów astronomicznych, przekonujemy się zaraz, że przestrzeń wolna od oddziaływań po prostu nie istnieje. Wszędzie, od skali układu planetarnego do skali całego Wszechświata, działa pole grawitacyjne, powstające przez nałożenie się na siebie oddziaływań grawitacyjnych wszystkich ciał obecnych we Wszechświecie. Zatem pierwsze prawo dynamiki jest tylko abstrakcją, która nigdzie nie może realizować się ściśle. Teoria Newtona miała na to argument w postaci następującego wniosku z II prawa dynamiki: na skutek wszechobecności grawitacji rzeczywiste tory ruchu ciał we Wszechświecie ulegają zakrzywieniu. Tu można zapytać: zakrzywieniu, ale względem czego? Skoro mówimy, że coś jest krzywe, zakładamy automatycznie, że wiemy, co jest proste. A więc: co to jest linia prosta, skoro nie możemy wskazać realnego ciała poruszającego się po niej?

Szkolny kurs geometrii wyrabia w nas pewne „euklidesowe” intuicje i w pierwszym momencie każdemu wydaje się, że wyznaczenie „idealnej” linii prostej biegnącej przez dowolnie duże obszary Wszechświata jest w zasadzie możliwe. Po chwili zastanowienia jednak nie wydaje się to już tak oczywiste. Czy wzorcem prostej byłby sznurek rozciągnięty od gwiazdy do gwiazdy lub odpowiednio długi liniał? Pomijając techniczną nierealność takiego wzorca, odpowiedź brzmi oczywiście: nie! I sznurek i liniał musiałyby też ugiąć się pod działaniem sił grawitacyjnych. Po głębszym zastanowieniu padłaby może propozycja: linią prostą jest przedłużenie osi teleskopu. Jeżeli obserwator patrzący z pewnego punktu widzi dwa obiekty astronomiczne dokładnie w tym samym kierunku, dalszy ukryty za bliższym, to obiekty te muszą leżeć na jednej prostej z obserwatorem. Przełożona na język fizyki definicja ta mówi: promienie świetlne rozchodzą się po liniach prostych. Czy to fakt, czy znów fałszywa intuicja?

Aby odpowiedzieć na to pytanie, przeprowadźmy pewien eksperyment myślowy. Przypuśćmy, że wyznaczenie kierunku idealnej prostej jest możliwe, i że po takim idealnym torze prostym porusza się pojazd międzygwiazdny pozbawiony wszelkich urządzeń umożliwiających zobaczenie tego, co dzieje się na zewnątrz. Wyobraźmy sobie, że przelatuje on, ze stałą prędkością v , obok gwiazdy o masie M . Niech minimalna odległość pojazdu od środka gwiazdy (tzn. odległość środka gwiazdy od toru) wynosi d , zaś moment osiągnięcia odległości d oznaczmy przez $t = 0$. Wtedy natężenie pola grawitacyjnego działającego na pojazd w dowolnej chwili t będzie równe $g = \frac{GM}{d^2 + v^2 t^2}$ i będzie skierowane stale do środka gwiazdy (G — stała grawitacyjna Newtona). Wyobraźmy sobie teraz drugi pojazd, który porusza się z dala od wszelkich gwiazd i planet, ale porusza się po linii krzywej, z niestałym przyspieszeniem równym $a = \frac{GM}{d^2 + v^2 t^2}$ skierowanym stale od tego samego punktu przestrzeni. Tym razem G , M , d i v są parametrami o wymiarach odpowiednio stałej grawitacji, masy, odległości i prędkości dobranymi tak, aby zależność a od t była dokładnie taka sama, jak zależność g od t (w drugim przykładzie stały parametr v nie jest równy prędkości pojazdu, prędkość tę można obliczyć ze wzoru $v(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} a(t)dt + v(t_0)$; jest ona oczywiście zmienna). Siła bezwładności będzie wtedy skierowana przeciwnie do wektora przyspieszenia, a więc będzie skierowana wciąż do tego samego punktu i będzie zależała od czasu w taki sam sposób, jak siła grawitacyjna w pierwszym przykładzie. Krótko mówiąc, będzie dokładnie imitowała siłę grawitacyjną. Do jakiego stopnia dokładnie?



Rys. 4. Pojazd międzygwiazdny przelatujący obok gwiazdy po torze prostoliniowym.



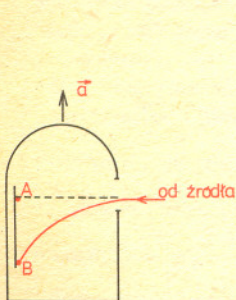
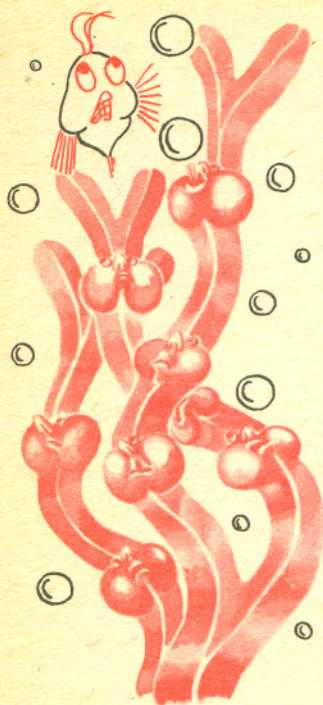
Rys. 5. Pojazd międzygwiazdny poruszający się w pustej przestrzeni ruchem przyspieszonym, przy którym siły bezwładności symulują przyciąganie grawitacyjne gwiazdy. „Symulowana gwiazda” znajduje się w punkcie S, odległym o d od punktu maksymalnej krzywizny toru. a_1, a_2, a_3 — przyspieszenia w różnych punktach toru.

Od czasów Galileusza wiadomo było, że imitacja ta jest zupełna w zjawiskach mechanicznych. Intuicja podpowiadała, że w takim razie analogia powinna być zupełna i w pozostałych zjawiskach, bo własności mechaniczne ciał są tylko powierzchownym obrazem oddziaływań elektromagnetycznych i jądrowych, decydujących o strukturze ciał, ich elastyczności itp. Efekty elektromagnetyczne również nie powinny wobec tego odróżniać sił bezwładności od sił grawitacyjnych. Światło zaś jest strumieniem fal elektromagnetycznych. Zatem...

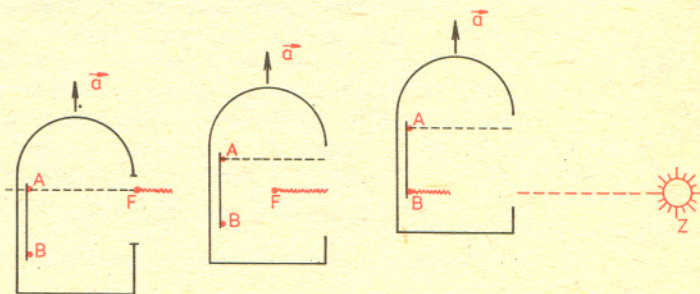
Zanim przeprowadzimy następny eksperyment myślowy, wyjaśnimy małe oszustwo. Obserwator z pierwszego przykładu mógł oczywiście wyjrzeć na zewnątrz pojazdu, zobaczyć, że przelatuje obok gwiazdy i wywnioskować stąd, że działa na niego siła grawitacyjna, a nie siła bezwładności. Dlatego zabroniliśmy mu wyglądać (oszustwo zawsze lubi ukrywać się za niezrozumiałymi surowymi zakazami i ograniczeniami). Sens fizyczny tego ograniczenia był taki: siły grawitacyjne można odróżnić od sił bezwładności tylko przy pomocy informacji zebranych z dużych obszarów przestrzeni, natomiast w eksperymentach lokalnych, przeprowadzanych w małym otoczeniu pojedynczego punktu, te dwa rodzaje oddziaływań są nierozróżnialne.

Przeprowadźmy teraz następny eksperyment myślowy. Przypuśćmy, że nasz pojazd międzygwiazdny porusza się po linii prostej ruchem jednostajnie przyspieszonym i w pewnym momencie przecina prostopadłe promień świetlny. Światło wpada przez okienko i tworzy jasną plamkę na przeciwnym ekranie. Gdyby pojazd stał w miejscu, promień taki powinien, w myśl mechaniki Newtona, biec po linii prostej. Zaznaczmy na ekranie miejsce, gdzie wówczas powstałaby plamka świetlna.

Co się dzieje w przyspieszającym pojeździe? Zanim światło przebiegnie od okienka do ekranu, pojazd przesunie się o pewien odcinek. Plamka powinna więc powstać nieco poniżej zaznaczonego miejsca. Zatem promień świetlny ugina się, gdy obserwować go z układu przyspieszonego. Skoro zaś siły bezwładności lokalnie imitują siły grawitacyjne, powinien uginać się także w polu grawitacyjnym. Nie byłby więc wzorcem linii prostej w przestrzeni z grawitacją.



Rys. 6. W pojeździe przecinającym prostopadłe promień świetlny następuje pozorne ugięcie promienia: promień trafia w ekran w punkcie B, zamiast w punkcie A. Rysunek powyższy przedstawia sytuację w układzie odniesienia związanym z pojazdem.



Rys. 7. Ta sama sytuacja, co na rys. 6, narysowana w układzie odniesienia związanym ze źródłem światła Z. Trzy rysunki dotyczą trzech różnych chwil czasu: a) Foton F wpada przez okno, b) Foton w połowie drogi od okna do ekranu, c) Foton trafia w ekran.

W tym miejscu należy podkreślić wielką śmiałość intelektualną Einsteina. Do jego czasów nie wykonano żadnych obserwacji, które sugerowałyby uginanie się promieni świetlnych w polu grawitacyjnym, ponieważ nikt o takiej możliwości nie pomyślał, zaś wielu ludziom wydawała się ona niedorzeczna. Einstein zaryzykował postawienie takiej hipotezy, zaś kilka lat po ogłoszeniu jej drukiem, w roku 1919, ekspedycja astronomiczna pod kierunkiem A. S. Eddingtona przeprowadziła obserwacje, które z małą wprawdzie dokładnością, ale zupełnie wyraźnie potwierdziły ją (jak się robi takie obserwacje, powiemy w następnym artykule). Śmiałość Einsteina polegała również na tym, że poszedł dalej za wnioskami ze swojej hipotezy, nie czekając na jej potwierdzenie.

Skoro nawet promienie świetlne nie mogą być wzorcami fizycznymi linii prostej, trzeba spojrzeć prawdzie w oczy i powiedzieć sobie twardo, że wzorzec linii prostej nie istnieje. Teoria Newtona nie potrafi więc wskazać, jak wyglądałby hipotetyczny tor obiektu astronomicznego w przestrzeni wolnej od grawitacji, a więc nie umie stwierdzić, na ile tor rzeczywisty odchyła się od niego. W tej sytuacji jest rzeczą rozsądniejszą założyć, że pole grawitacyjne modyfikuje geometrię w przestrzeni, zaś w owej zmodyfikowanej geometrii torami ruchów swobodnych są nie linie proste, lecz okręgi, elipsy, hiperbole i inne orbity znane z astronomii obserwacyjnej. Teoria oparta na takich założeniach będzie może trudniejsza w zastosowaniach, lecz będzie używała pojęć mających bezpośredni sens fizyczny i nie będzie musiała posługiwać się abstrakcyjnym tłem w postaci przestrzeni euklidesowej — niemożliwej do zaobserwowania.



Intuicja geometryczna człowieka jest bardzo ograniczona. Potrafimy sobie wyobrazić trójwymiarową przestrzeń euklidesową, która bywa nazywana płaską, lecz „zakrzywiona” przestrzeń trójwymiarowa sprawia naszej wyobraźni już duże kłopoty.

Przestrzenie o liczbie wymiarów większej niż trzy wymykają się wyobraźni zupełnie. Chcąc mieć pewne pojęcie o „krzywej” geometrii w przestrzeni wielowymiarowej, musimy posługiwać się dwuwymiarowymi analogiami. Istnieje wiele dwuwymiarowych powierzchni, których geometria nie jest euklidesowa (najlepiej znanym przykładem jest powierzchnia kuli). Posłużmy się dwuwymiarowym modelem przestrzeni dla objaśnienia podstawowej różnicy między teorią Newtona a teorią Einsteina.

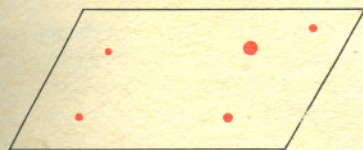
Według tej pierwszej przestrzeń była płaszczyzną, bez względu na obecność lub brak materii. W teorii Einsteina przestrzeń jest prawie płaszczyzną tam, gdzie pola grawitacyjne są bardzo słabe, zaś w otoczeniu ciał wytwarzających pole grawitacyjne na płaszczyźnie pojawiają się „wzgórki” — tym wyższe, im silniejsze pole grawitacyjne.

Taki słowny opis nie może być oczywiście podstawą teorii fizycznej. Dobra teoria musi operować ścisłymi prawami, wyrażonymi przez równania matematyczne. Równania takie, zwane równaniami Einsteina, ma również teoria względności. Są one jednak na tyle zakłócone i operują tak zaawansowanym aparatem matematycznym, że ich przedstawienie w krótkim artykule nie jest możliwe.

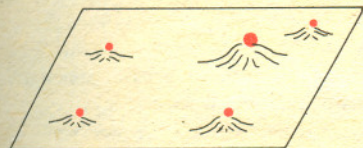
Poprzestańmy więc na stwierdzeniu, że wiążą one gęstość materii i wszystkich rodzajów energii w otoczeniu danego punktu przestrzeni i danej chwili czasu z prawami geometrii obowiązującymi w otoczeniu tego punktu i chwili.

W tym miejscu pojawi się w naszym wywodzie nieciągłość.

W następnym artykule powiemy o doświadczalnych testach teorii względności. Pominiemy natomiast drogę, która prowadzi od założeń, przedstawionych w skrócie powyżej, do wniosków, czyli przewidywanych wyników eksperymentów. Droga ta nie da się bowiem prześledzić bez pomocy zaawansowanej matematyki.



Rys. 8. Dwuwymiarowy model przestrzeni euklidesowej w teorii Newtona. Geometria nie zależy od rozkładu materii, przestrzeń jest płaska.



Rys. 9. Dwuwymiarowy model krzywej przestrzeni używanej w teorii Einsteina: Im silniejsze pole grawitacyjne, tym bardziej „krzywa” przestrzeń. Dla wyrazistości rysunku wysokości „wzgórków” są znacznie przesadzone.

W powyższym artykule dla większej przejrzystości Autor nie używa terminu matematycznego stosowanego powszechnie, a mającego istotne znaczenie w omawianej problematyce. Chodzi mianowicie o pojęcie geodezyjnej (ściślej mówi się linii geodezyjnej, tak jak: linii prostej). Geodezyjne w danej przestrzeni to linie najkrótsze. Gdy naszą przestrzenią jest np. sfera, to geodezyjne są okręgami kół wielkich — patrz wyżej. Nazwę „geodezyjna” można objaśnić następująco: długość szyn „prostego” toru kolejowego między miejscowościami A i B jest równa nie odległości tych miejscowości zmierzonej w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej, a długości łuku przecięcia powierzchni Ziemi płaszczyzną przechodzącą przez A, B i środek Ziemi — takie zagadnienia rozpatrują geodeci. Rozpatrując jakąś przestrzeń wewnętrznie używa się niejednokrotnie terminu „prosta” zamiast „geodezyjna”, nie uważając za słuszne rezerwowania nazwy „prosta” tylko dla geometrii euklidesowej. W teorii względności tor, po którym biegnie światło, jest traktowany jak prosta (bo jest geodezyjną, o ile odległość mierzymy czasem przebiegu światła — prawda?). Warto tu zająrzeć do artykułu Alberta Einsteina, Delta 2/1977.

(Red.)

Rozwiązanie zadania M 158

Załóżmy, że α nie jest wielokrotnością liczby π , a więc $\alpha = 2k\pi + \beta$, gdzie $0 < \beta < \pi$. Z warunków zadania wynika, że dla każdej liczby naturalnej n większej od 1 jest $\sin(n-1)\alpha \leq \sin(n+1)\alpha$, czyli $\sin(n+1)\alpha + \sin(n-1)\alpha \geq 0$, $2\sin\alpha \cos n\alpha \geq 0$. Jeżeli l, m są dowolnymi liczbami naturalnymi większymi od 1, to $2\sin\alpha \cos l\alpha \geq 0$, $2\sin\alpha \cos m\alpha \geq 0$, skąd wynika, że $4\sin^2\alpha \cos l\alpha \cos m\alpha \geq 0$ i ponieważ $\sin\alpha \neq 0$, więc $\cos l\alpha \cos m\alpha \geq 0$.

Wykażemy teraz, że istnieją liczby naturalne l i m , obydwie większe od 1, dla których $\cos l\alpha \cos m\alpha < 0$.

Przedziały $(\frac{3\pi}{2|\beta|}, \frac{5\pi}{2|\beta|})$ i $(\frac{5\pi}{2|\beta|}, \frac{7\pi}{2|\beta|})$ mają długość $\frac{\pi}{|\beta|} > 1$. W każdym z nich znajduje się więc pewna liczba naturalna większa od 1 (gdyż $\frac{3\pi}{2|\beta|} > \frac{3}{2}$). Niech liczbami takimi będą l i m :

$$\frac{3\pi}{2|\beta|} < l < \frac{5\pi}{2|\beta|}, \quad \frac{5\pi}{2|\beta|} < m < \frac{7\pi}{2|\beta|},$$

$$\frac{3}{2}\pi < l|\beta| < \frac{5}{2}\pi, \quad \frac{5}{2}\pi < m|\beta| < \frac{7}{2}\pi.$$

Wówczas $\cos l\alpha \cos m\alpha = \cos(2kl\pi + \beta)\cos(2km\pi + m\beta) = \cos\beta \cos m\beta = \cos|\beta| \cos m|\beta| < 0$, gdyż $\cos|\beta| > 0$, $\cos m|\beta| < 0$.

Założenie, że α nie jest wielokrotnością liczby π doprowadziło nas do sprzeczności, a więc przy pewnym całkowitym p musi być $\alpha = p\pi$. Wtedy oczywiście $\sin n\alpha = \sin(n+1)\alpha = 0$ dla każdej liczby naturalnej n .



Rozwiązanie zadania M 157

Podstawiając w pierwszej równości zamiast x liczbę $x+a$ otrzymujemy $f(x+2a) = g(x+a)$, skąd na mocy drugiej równości wynika, że

$$f(x+2a) = -f(x).$$

Podstawiając tu zamiast x liczbę $x+2a$ otrzymujemy

$$f(x+4a) = -f(x+2a) = f(x).$$

Ponadto $g(x+4a) = f(x+a+4a) = f(x+a) = g(x)$, a więc okresem każdej z funkcji f i g jest $4a$.

Przykładem funkcji f i g spełniających podane w zadaniu warunki przy $a = \frac{\pi}{2}$ są funkcje sinus i cosinus.

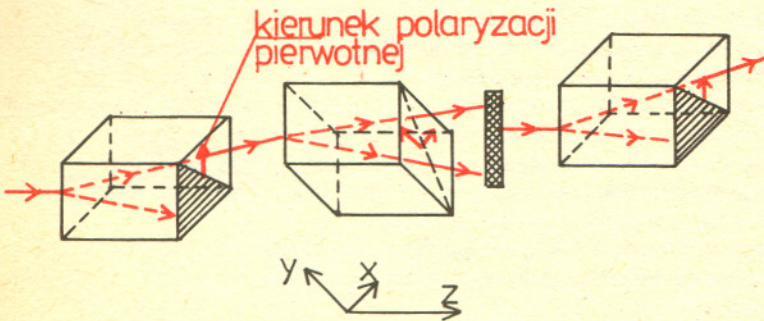


Rozwiązanie zadania M 159

Niech danymi liczbami będą a_1, a_2, \dots, a_m . Utwórzmy iloczyn $P = a_1 a_2 \dots a_m a_1 a_2 \dots a_m \dots a_m$ mający mn czynników. Grupując w nim wyrazy po n otrzymujemy iloczyn m liczb, z których każda, jako iloczyn n danych liczb, jest większa od 1. Liczba $(a_1 a_2 \dots a_m)^n = P$, jest więc iloczynem liczb większych od 1, zatem

$$P > 1, \quad a_1 a_2 \dots a_m = \sqrt[n]{P} > 1.$$

Czy cząstki elementarne zachowują swoją tożsamość? Oczywiście nie. Wiadomo, że większość cząstek rozpada się po pewnym czasie, a przy zderzeniach jedne cząstki giną, a na ich miejsce rodzą się nowe. Zajmiemy się tu innego jeszcze rodzaju przemianą jednych cząstek w drugie — przemianą stosunkowo mało znaną, choć być może najbardziej interesującą. Polega ona na tym, że w miarę upływu czasu jedne cząstki przechodzą na inne, następnie proces odwraca się i tak bez końca. Co najbardziej w tym wszystkim uderzające, to fakt, że oscylacje te (bo proces jest periodyczny) zachodzą w próżni bez udziału jakiegokolwiek czynnika zewnętrznego. To któreś już z rzędu dziwactwo mechaniki kwantowej rzeczywiście obserwuje się w doświadczeniu.



Rozważmy na wstępie następujące zjawisko pojawiania się wielu różnych rodzajów polaryzacji światła: liniowych, kołowych i eliptycznych. Niech wiązka światła monochromatycznego o długości fali λ , czyli o określonej częstotliwości ω , porusza się w kierunku osi z . Światło to może być spolaryzowane np. w wyniku przepuszczenia go przez pryzmat Nicol'a. Będzie to oczywiście polaryzacja liniowa. Wektor natężenia pola elektrycznego i prostopadły doń wektor indukcji pola magnetycznego drgają wtedy w jednej z płaszczyzn zawierających oś z . Kierunek drgań zwany kierunkiem polaryzacji jest prostopadły do tej osi. Niech, dla uproszczenia, będzie to kierunek tworzący z osią x kąt $\pi/4$ (patrz rysunek). Ustawmy na drodze naszej wiązki światła

jednorodny kryształ szpatu islandzkiego (z niego właśnie robimy pryzmaty Nicol'a), ale tym razem nie eliminujemy z gry drugiego promienia spolaryzowanego. Z kryształu wychodzą więc dwa różne promienie o wzajemnie prostopadłych kierunkach polaryzacji. Niech te kierunki pokrywają się odpowiednio z osiami x oraz y . Ponieważ wiązka pierwotna była spolaryzowana w kierunku tworzącym jednakowy kąt z obiema tymi osiami, więc po przejściu przez kryształ otrzymamy dwie identyczne wiązki o tym samym natężeniu, tyle tylko, że inaczej spolaryzowane. Jedna w kierunku x , druga — y . Gdybyśmy teraz umieścili za kryształem układ zbierający nasze dwie wiązki w jedną, to wydawałoby się, że znów otrzymamy wiązkę spolaryzowaną liniowo w kierunku polaryzacji pierwotnej. Tak jednak nie jest. Badając polaryzację liniową wiązki końcowej przekonujemy się, że nie jest ona całkowita. Dokładniejsze badania mogą być przeprowadzone jedynie za pomocą przyrządów znacznie bardziej czułych niż pryzmat Nicol'a. Okazuje się wtedy, że koniec wektora polaryzacji zatacza koło w miarę upływu czasu. Wektor natężenia pola elektrycznego drga w płaszczyźnie, która obraca się wokół osi z . Taką polaryzację nazywamy kołową lub eliptyczną, w zależności od krzywej, jaką zakreśla w swym ruchu koniec wektora polaryzacji.

Skąd bierze się to zjawisko? Otóż stąd, że przy przechodzeniu przez kryształ szpatu islandzkiego obie wiązki światła przebiegają różne drogi optyczne. Współczynniki załamania obu promieni są różne, czyli różne są ich prędkości w kryształach, a stąd promienie te po wyjściu z kryształu mają różne fazy. Niech drgania wektora elektrycznego w jednym promieniu — tym o polaryzacji x — będą opisywane przez funkcję $\sin \omega t$. Wtedy drgania w drugim promieniu będą przesunięte w fazie o pewną wielkość δ i opisywane funkcją $\sin(\omega t + \delta)$. Jeżeli kryształ wytniemy tak, że $\delta = \pi/2$, to drgania wypadkowe będą odbywały się wzdłuż krzywej, której współrzędna x zmienia się, jak $\sin \omega t$, a współrzędna y , jak $\cos \omega t$, czyli po kole.

Co to wszystko ma wspólnego z cząstkami elementarnymi? Po pierwsze światło jak i każda fala elektromagnetyczna składa się z fotonów. Opisane wyżej zjawisko zachodzi również dla pojedynczych, niepodzielnych fotonów. Taki pojedynczy foton pochodzący ze spolaryzowanej wiązki pierwotnej i przepuszczony przez kryształ dwójłomny oraz układ zbierający dwie wiązki (choć nie mamy tu żadnych dwóch wiązek tylko jeden foton, to jednak układ ten jest konieczny) wykazuje polaryzację kołową. W tym wypadku znaczy to, że w miarę oddalania się od całego układu foton ten będzie spolaryzowany raz w kierunku x , potem y i tak dalej, na przemian. Liniowa polaryzacja fotonu będzie oscylowała między dwoma wzajemnie prostopadłymi kierunkami. Tak więc, w miarę upływu czasu foton spolaryzowany kołowo przechodzi wahadłowo od stanu o polaryzacji x do stanu o polaryzacji y bez żadnej ingerencji z zewnątrz. Każdy powie, że to trywialne, bo przecież wektor polaryzacji fotonu obraca się. Bliższe rozważania nad zasadą zachowania momentu pędu przekonają nas, że to wcale nie jest trywialne. Zamiast tego rozważmy inny, bardzo zbliżony przykład. Przypomnijmy najpierw, że fotony o częstotliwości ω to nic innego, jak zwykłe cząstki elementarne o energii $E = \hbar \omega$. Wykazują one, jak wiemy, w pewnych warunkach własności falowe. Podobnie, jak wszystkie inne cząstki. Tyle tylko, że nie dysponujemy odpowiednio wielkimi energiami na to, żeby utworzyć tyle cząstek o tej samej energii, ile fotonów produkujemy w laserze (np. 10^{20} fotonów na sekundę). Nie potrafimy więc wytwarzać klasycznych makroskopowych pól cząstek innych niż fotony. Niemniej jednak własności falowe pojedynczych cząstek (w tym i fotonów) zostały stwierdzone doświadczalnie. Odpowiednia częstota fali wiąże się z energią cząstki uniwersalnym wzorem $E = \hbar \omega$. Tak, jak dla fotonów.





Rozważmy teraz dwa rodzaje cząstek różniących się jedynie masą i niczym więcej. Znamy wiele takich par cząstek. Najbardziej interesujące są jednak neutralne mezony K, gdyż różnica ich mas jest niesłychanie mała. Mezony te, K_{0L} i K_{0S} , są więc prawie takie same. Różnią się jednak trochę masą, a w związku z tym i energią, nawet przy tym samym pędzie. Obu gatunkom mezonów o tym samym pędzie odpowiada więc nieco inna częstość związanej z nimi fali. Nie ma w tym na razie nic nadzwyczajnego. Okazuje się jednak, że we wszystkich reakcjach, w których produkowane są neutralne mezony K, nigdy nie otrzymujemy ani mezonów K_{0S} , ani K_{0L} , ale jedynie ich mieszaninę równo bogatą w oba rodzaje mezonów. Podobnie wszystkie reakcje rozpraszania rozróżniają jedynie takie mieszaniny, a nie ich poszczególne składniki. Podobnie, jak pryzmat Nicola rozróżnia określone polaryzacje liniowe, a nie widzi polaryzacji kołowej. Występują dwie takie mieszaniny różnie zachowujące się w reakcjach rozpraszania i produkcji. W jednej z nich składowa K_{0L} jest przesunięta w fazie o π . Pamiętajmy bowiem, że to wszystko fale.

Wyobraźmy sobie teraz, że w jakimś doświadczeniu wyprodukowaliśmy kombinację $K_{0L} + K_{0S}$ (czy też $K_{0L} - K_{0S}$). Oba składniki mają, jak wiemy, różne częstości drgań i z upływem czasu narasta między nimi różnica faz. Po pewnym czasie różnica ta osiągnie π i dostaniemy czystą kombinację $K_{0L} - K_{0S}$ (czyli $K_{0L} + K_{0S}$), która ma zupełnie inne własności w reakcjach rozpraszania. I tak dalej będą następowały periodyczne zmiany.

Tak więc badania nad wiązką neutralnych mezonów K dają wynik taki, że w małej odległości od miejsca produkcji wiązka tych mezonów prawie zawsze prowadzi do reakcji z produkcją hiperonów, w większej odległości nigdy nie powstają hiperony, w jeszcze większej znów powstają itd. Te dwie kombinacje to są naprawdę dwie różne cząstki (zwane K^0 i \bar{K}^0). Podobnie, jak różne są polaryzacje kołowe fotonu: prawoskrętna i lewoskrętna. A jak wykrywamy składniki, K_{0L} i K_{0S} , tych kombinacji? Poprzez ich rozpady. Mezon K_{0L} ma np. czas życia $\sim 10^{-8}$ s, a mezon $K_{0S} \sim 10^{-10}$ s. Takie oscylacyjne zachowanie wiązki neutralnych mezonów K jest jednym z najładniejszych argumentów na rzecz falowej natury cząstek.

Podobne zjawisko może zachodzić w przypadku dwóch rodzajów neutrin: elektronowego i mionowego. Jedno z nich produkowane jest zawsze z elektronem i przy rozpraszaniu przechodzi w elektron. Drugie natomiast zawsze występuje z mionem μ . Masy obu neutrin są bardzo małe, ale niekoniecznie muszą być równe, ani też dokładnie równe zeru. Być może mamy więc taką samą sytuację jak z mezonami K. Wtedy oba rodzaje neutrin byłyby dwiema kombinacjami (o różnych względnych fazach) innych dwóch neutrin i występowałaby podobna oscylacja ich wiązek. I tak pochodzące ze Słońca neutrina elektronowe o z grubsza określonym pędzie mogłyby np. gdzieś w okolicach orbity Ziemi przejść w neutrina mionowe, których nie wykrywa opisywany w poprzednich numerach Delty eksperyment Davisa. Okazuje się, że na to, by pierwsza taka przemiana miała miejsce właśnie w okolicach orbity Ziemi, różnica mas obu neutrin powinna być niesłychanie mała. Należy jednak zdawać sobie sprawę z tego, że neutrina słoneczne mają pewien rozkład pędu, co może znacznie rozmyć miejsce pojawiania się minimum w ich wiązce. Nie jest więc pewne, czy zjawisko oscylacji wiązki neutrin wyjaśnia rzeczywiście negatywny wynik eksperymentu Davisa.



Rozwiązanie zadania F 53

Weźmy pod uwagę dwuwymiarowe „naczynie” o powierzchni S , zawierające N atomów poruszających się we wszystkie strony i zderzających się sprężysto ze „ściankami” naczynia (rys. 1). „Ciśnienie” czyli siłę wywieraną przez gaz na jednostkę obwodu oznaczamy przez p . Źródłem ciśnienia p są zderzenia atomów ze ściankami naczynia. Jest oczywiste, że w stanie równowagi takie same są liczby cząstek o określonej prędkości v przechodzących w jedną i w drugą stronę przez dowolną prostą (np. prostą l) w ciągu czasu Δt , niewielkiego w stosunku do okresów czasu spotykanych w zjawiskach makroskopowych, ale znacznie większego od czasu potrzebnego atomom na przebycie drogi porównywalnej z rozmiarami naczynia. Wynika stąd, że wielkość p nie zależy od samego kształtu naczynia. Weźmy więc pod uwagę najprostszą z nich, pokazaną na rys. 2.

Ciśnienie cząstkowe pochodzące od atomów o prędkości v oznaczamy przez p_v , natomiast liczbę takich atomów oznaczamy przez N_v . Gdyby wszystkie rozważane atomy poruszały się w prawo, to z prawą ścianką w jednostce czasu zderzałoby się $v(N_v/S)$ atomów. Każdy atom przy zderzeniu ze ścianką przekazuje jej pęd $2mv$. Zatem ciśnienie p byłoby równe $2mv \cdot v(N_v/S)$. W rzeczywistości ciśnienie p_v powinno być 4 razy mniejsze. Łatwo to wyobrazić sobie, że atomy poruszają się w czterech „podstawowych” kierunkach wzdłuż dwu wzajemnie prostopadłych osi. Możemy więc napisać

$$p_v = \frac{1}{4} \cdot 2mv \cdot v(N_v/S),$$

czyli

$$p_v S = K_v,$$

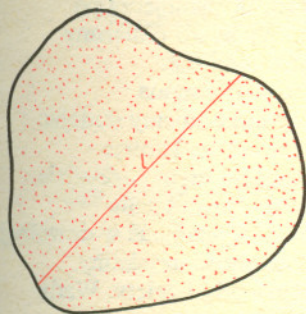
gdzie K_v jest wielkością niezależną od p_v i od S .

Sumując obydwie strony otrzymanej równości po wszystkich możliwych prędkościach v , jakie mogą występować w gazie, otrzymuje się

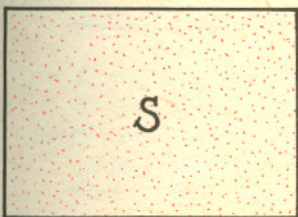
$$pS = \text{const.}$$

Jest to szukany związek, bardzo podobny do prawa obowiązującego w trzech wymiarach $p \cdot V = \text{const.}$

Warto zwrócić uwagę, że rozważania powyższe mają nie tylko akademicki charakter. Gaz dwuwymiarowy nie jest taką fikcją, jak mogłoby się wydawać. Można się o tym samemu przekonać: do czystej miednicy nalejcie czystej wody, na powierzchni wody umieście zapałkę, kilka lub kilkanaście centymetrów od zapałki delikatnie wpuście do wody kroplę szamponu. W chwili wpuszczania szamponu na powierzchnię wody powinniście zaobserwować szybki ruch zapałki, jakby ktoś dmuchnął. Chodzi tu rzeczywiście o wiatr. Niektóre związki chemiczne grupują się przede wszystkim na powierzchni. Związkami takimi są m.in. substancje zawarte w szamponie. Po wpuszczeniu do wody szampon rozchodzi się przede wszystkim po powierzchni, dając „dzwuwymiarowy” powiew przesuwający zapałkę. Roztwory dwuwymiarowe odgrywają rolę w tworzeniu się piany, błonek mydlanych itp. Ciekawe, że wielu zagadnień dotyczących takich roztworów nie udało się do tej pory rozwiązać.



Rys. 1



Rys. 2



Co dają komputery?

Mgr inż. Piotr KAPELA

W każdej dziedzinie techniki wśród nagromadzonych w czasie teorii i metod projektowania wyróżnić można dwa obszary. Pierwszy — to metody mające uzasadnienie w tradycji, w wieloletnim doświadczeniu konstruktorów. Metody te z konieczności są szacunkowe, wymagają dużego zapasu bezpieczeństwa i dlatego nie są optymalne. Drugi obszar — to metody oparte o teorie matematycznie ściśle, powstałe w wyniku dokładnego przeanalizowania problemu. Rozwój nauki i techniki wiąże się z poszerzaniem drugiego obszaru kosztem pierwszego.

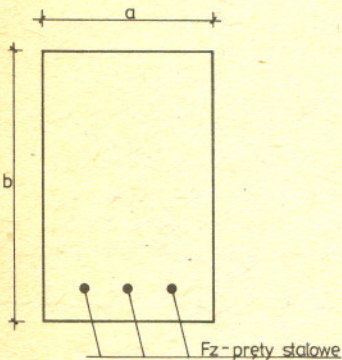
Zastosowanie elektronicznej techniki obliczeniowej (ETO) stwarza nowe możliwości. Podstawowa zaleta komputera — szybkość, umożliwia zastąpienie głębszych rozważań teoretycznych wykonaniem dużej ilości obliczeń. Można mianowicie powtarzać cyklicznie obliczenia jakiegoś zadania zmieniając w każdym cyklu dane początkowe. Otrzymamy w ten sposób szereg różnych rozwiązań. Spośród nich automatycznie wybrać możemy rozwiązanie pod jakimś względem najkorzystniejsze.

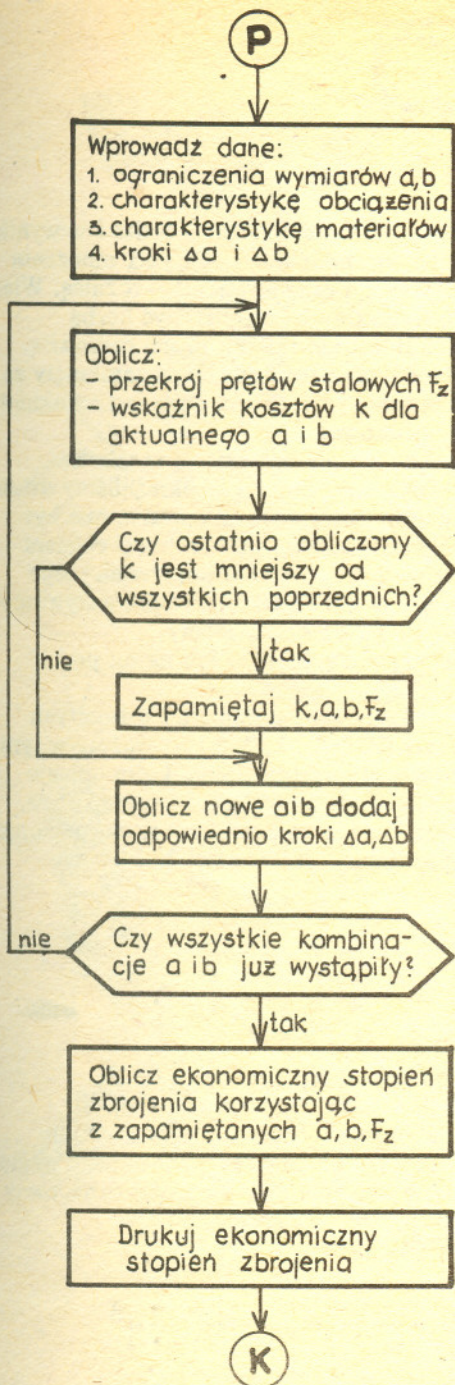
Jako przykład takiego postępowania rozważmy poszukiwanie ekonomicznego stopnia zbrojenia w belce żelbetonowej o przekroju prostokątnym. Chodzi o znalezienie takiego stosunku powierzchni przekroju prętów stalowych do powierzchni betonu w belce, aby belka mając żadaną wytrzymałość była jednocześnie najtańsza. Tradycyjnie uważa się, że stosunek ten powinien wynosić 0,6% ÷ 1,5%. Ważnym problemem jest tu sposób wyboru parametrów początkowych (w przykładzie są nimi wymiary przekroju belki: a i b).

Od tego zależy szybkość i skuteczność otrzymania wyniku. Pisząc program, według którego ma być rozwiązane to zagadnienie, można zastosować dwie proste metody: metodę systematycznego przeszukiwania lub metodę Monte Carlo. Pierwsza zmienia parametry a i b pewnymi krokami — Δa i Δb od wartości najmniejszych do największych. Obliczenia wykonywane będą dla wszystkich kombinacji. Druga jest metodą probabilistyczną. Opiera się na losowym wybieraniu a i b z zakresu wartości dopuszczalnych. Podstawowy etap obliczeń jest w obu metodach taki sam. Mając dane a i b oraz znając obciążenie i charakterystykę materiałów komputer oblicza nam według ogólnej przyjętej teorii żelbetu potrzebne zbrojenie belki (F_z). Mnożąc przekrój betonu ($a \times b$) przez jego cenę, a przekrój stali (F_z) przez cenę stali, otrzymujemy po dodaniu wskaźnik kosztów belki. Następnie sprawdzamy, czy nowo obliczony wskaźnik kosztów jest mniejszy od wszystkich poprzednich. Jeśli tak, zapamiętujemy go na miejscu poprzedniego, po czym następuje zmiana a i b . W metodzie systematycznego przeszukiwania zmiany dokonujemy dodając przyrosty. W metodzie Monte Carlo nowe parametry są losowane. Istnieje wiele programów generujących liczby pseudolosowe o równomiernym rozkładzie. Program pracujący według I metody zostanie zakończony po sprawdzeniu wszystkich kombinacji. Obliczenia według II programu można przerwać w dowolnej chwili. Im dłużej będziemy jednak liczyć, tym większą dokładność uzyskamy. Obie metody prowadzą do rozwiązania. Mają jednak swoje wady i zalety. Wadą metody systematycznego przeszukiwania jest szybko rosnąca wraz ze wzrostem ilości parametrów lub zmniejszaniem przyrostów komplikacja rachunków. A szybkość komputera, choć olbrzymia, jest jednak ograniczona. Metoda Monte Carlo jest szybko zbieżna w pierwszym etapie obliczeń, potem jej skuteczność maleje. Przedstawiony przykład jest bardzo uproszczony.

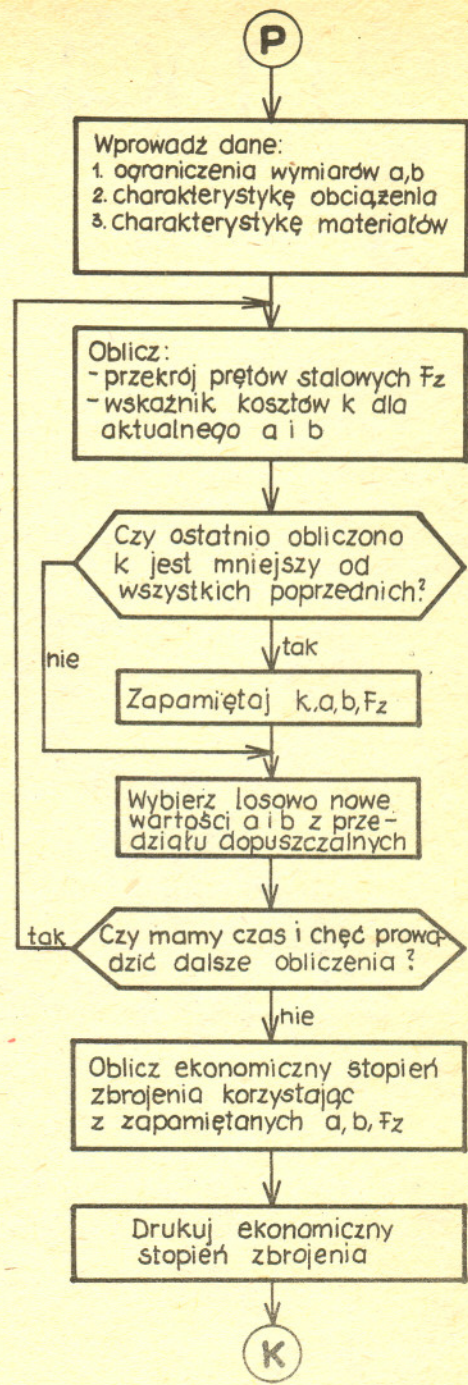
W rzeczywistych badaniach uwzględnia się dużo więcej czynników. Wówczas wybór szybszej metody może mieć duże znaczenie. Komputer jest bowiem narzędziem bardzo drogim. Godzina jego pracy kosztuje do kilku tysięcy złotych. Na pewno metodą lepszą od obu przedstawionych byłaby metoda mieszana.

W pierwszym etapie obliczeń szukalibyśmy metodą Monte Carlo przybliżenia rozwiązania a w drugim metodą systematycznego przeszukiwania z małym krokiem (lub jakąś inną) znaleźlibyśmy rozwiązanie optymalne.





Schemat metody systematycznego przeszukiwania



Schemat metod Monte Carlo

Prawdopodobnie istnieje możliwość sformułowania ściślej matematycznie metody, pozwalającej rozwiązać przedstawiony problem. Komputer zwolnił nas niejako od obowiązku jej poszukiwania. Udało nam się uzyskać praktyczny postęp, omijając pewne zagadnienia. Byłby to więc inny model rozwoju techniki niż przedstawiony we wstępie: oba wskazane tam obszary kurczyłyby się na rzecz trzeciego — komputerowego.

Lecz tak jest tylko pozornie. Już bowiem w przytoczonym przykładzie rysuje się nowa klasa problemów. Jak postępować, aby rozwiązać problem szybciej, z większą dokładnością? Są to również zagadnienia, których rozwiązania należy poszukiwać na drodze badań matematycznych. Komputeryzacja stymuluje więc rozwój zupełnie nowych lub dawniej zaniedbanych dziedzin matematyki.

5 mała delta

O tabelkach działań, symetriach i teorii grup

Każde dwie liczby naturalne możemy dodać i w wyniku otrzymamy liczbę, zwaną ich sumą. Wynik mnożenia nazywamy iloczynem, a odejmowania — różnicą. Wiemy, że różnica liczb naturalnych nie musi być liczbą naturalną — natomiast zawsze jest liczbą całkowitą. Mówimy, że zbiór liczb naturalnych jest zamknięty ze względu na dodawanie i mnożenie, a nie jest zamknięty ze względu na odejmowanie.

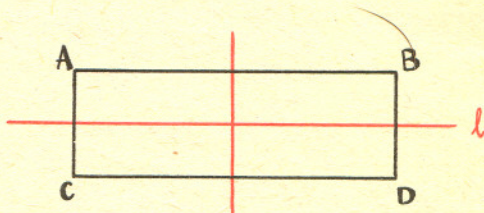
Są działania, o których nie uczymy się w szkole. Matematycy mówią, że w zbiorze X określiliśmy działanie, jeżeli każdym dwóm elementom (nie muszą one być różne) zbioru X przypisaliśmy pewien trzeci element (znów, niekoniecznie inny niż oba poprzednie) tego zbioru. Ten związany z a i b trzeci element nazywamy wynikiem działania na a i b ; oznaczmy go na przykład przez $a \oplus b$, $a \square b$ lub nawet po prostu $a \cdot b$.

Możemy teraz wykonywać działania na rozmaitych obiektach. Weźmy liczby 0, 1, 2, 3 i rozważmy w tym czteroelementowym zbiorze działania, które opisuje tabela 1. Aby odczytać, czemu jest równe np. $2 \cdot 3$, znajdujemy liczbę stojącą na przecięciu rzędu poziomego „2” i pionowej kolumny „3” — czyli $2 \cdot 3 = 1$.

	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

Tabela 1

Niech X oznacza symetrię prostokąta ABCD (przedstawionego niżej) względem poziomej osi symetrii — a zatem przy przekształceniu X punkty prostokąta przechodzą na swe lustrzane odbicia względem prostej l . Symetrię względem osi pionowej oznaczamy przez Y , a obrót o 180° — przez R .

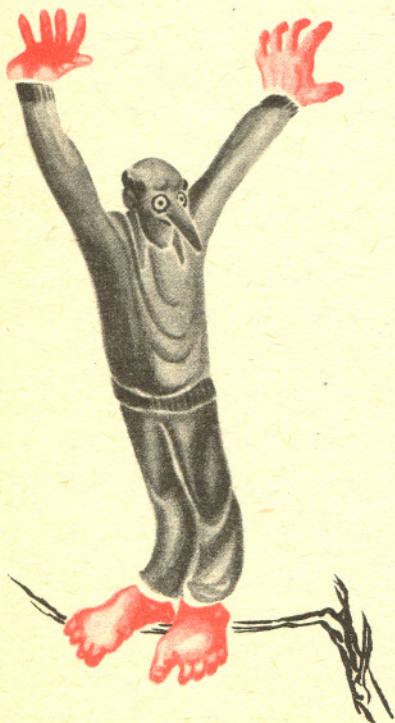


Dwukrotne wykonanie każdego z przekształceń X , Y , R przywraca wszystkie punkty prostokąta do pierwotnego położenia.

Zapiszemy to tak: $X \circ X = Y \circ Y = R \circ R = I$. Przez I rozumiemy przekształcenie tożsamościowe, to jest takie, przy którym wszystkie punkty pozostają na swoich miejscach. Jak możemy się przekonać, że $X \circ Y = R$? Działanie \circ w czteroelementowym zbiorze I, X, Y, R opisuje tabela 2.

	I	X	Y	R
I	I	X	Y	R
X	X	I	R	Y
Y	Y	R	I	X
R	R	Y	X	I

Tabela 2



Będziemy mnożyć pary liczb. „Iloczynem” pary (a, b) przez parę (c, d) nazwiemy parę (ac, bd) . Piszmy p zamiast pary $(1, 1)$, q — zamiast $(-1, 1)$, r — zamiast $(1, -1)$ i wreszcie s zamiast $(-1, -1)$. Rozróżniamy więc kolejność składników! Można łatwo sprawdzić, że nasze działanie „mnożenia” opisuje tabela 3.

	p	q	r	s
p	p	q	r	s
q	q	p	s	r
r	r	s	p	q
s	s	r	q	p

Tabela 3

Pozornie wygląda ona zupełnie inaczej niż pozostałe dwie. Ale oto w każdej z nich zamiast kolejnych elementów piszmy — w tym samym porządku! — o, a, b, c . Za każdym razem otrzymamy tę samą tabelkę 4 i widzimy, że „w gruncie rzeczy” wszystkie one są takie same. Treść matematyki nie zależy przecież od przyjętych oznaczeń. Rozpatrywane tu działania muszą mieć identyczne własności. A jak przekonać się, że przez żadną zmianę oznaczeń z tabelki 5 nie otrzymamy nigdy czwartej?

	o	a	b	c
o	o	a	b	c
a	a	o	c	b
b	b	c	o	a
c	c	b	a	o

Tabela 4

	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Tabela 5

Tabela 2 opisuje tak zwaną grupę symetrii prostokąta. Matematycy i fizycy na grupy napotykają wszędzie, szczególnie w algebrze abstrakcyjnej, która zajmuje się odkrywaniem i badaniem własności działań. Poznaliśmy jedną z podstawowych takich własności: jeżeli dwa działania mają tabelki, które nie różnią się budową, a tylko oznaczeniami, to własności tych działań są identyczne. Matematyk mówi: każda z tabel 1, 2, 3, 4 opisuje grupę symetrii prostokąta. Poszukajcie i innych działań, których tabelki są „w gruncie rzeczy” takie same” jak 1, 2, 3, 4. Zbadajcie na przykład własności takich czterech operacji na liczbach $a \mapsto a$, $a \mapsto -a$, $a \mapsto \frac{1}{a}$, $a \mapsto -\frac{1}{a}$. Co widzimy, wykonując te operacje kolejno?

Rozwiązanie zadania z kwietniowej Radiodelty

Zadanie Znaleźć nieskończoną ilość takich rozwiązań równania $x^2 + y^2 = z^2$, że x, y, z są liczbami naturalnymi i $y - x = z - y$.

Rozwiązanie Zauważmy, że $3^2 + 4^2 = 5^2$. Zatem trójka liczb $(3, 4, 5)$ stanowi rozwiązanie o żądanej własności. Mając jedno rozwiązanie, możemy otrzymać ich nieskończoną ilość. Wystarczy spostrzec, że również trójki liczb $(3k, 4k, 5k)$, gdzie k jest dowolną liczbą naturalną, spełniają nasze warunki.

Można wykazać przy tym, że są to już wszystkie takie rozwiązania. Przyjmijmy, że $y - x = a$. Wówczas $y = x + a$, $z = x + 2a$. Równanie przybiera postać $x^2 + (x + a)^2 = (x + 2a)^2$, a po odpowiednich przeliczeniach $x^2 - 2ax - 3a^2 = 0$.

Wykorzystując stosowne wzory obliczamy: $\Delta = 16a^2$, $x_1 = 3a$, $x_2 = -a$.

Otrzymujemy stąd rozwiązania dwójakiego rodzaju: po pierwsze trójki liczb postaci $(-a, 0, a)$, a po drugie $(3a, 4a, 5a)$. Ponieważ w pierwszym przypadku nie otrzymujemy rozwiązań w liczbach naturalnych, więc rzeczywiście wszystkie rozwiązania mają postać: $x = 3a$, $y = 4a$, $z = 5a$.

Ostatnią audycję w tym roku szkolnym nadamy w maju — 18 — o godz. 10⁰⁰.



Doc. dr Tomasz HOFMOKL

OSCYLATOR SOLNY

Zjawisko to bardzo łatwe do zaobserwowania odkryto dopiero 8 lat temu. Zbadajmy je sami doświadczalnie. Należy zaopatrzyć się w:

- 1) Słoik Wecka o pojemności 1—1,5 l,
- 2) Plastikowy kubeczek od śmietany, jogurtu lub kefiru,
- 3) Kilka łyżek soli kuchennej,
- 4) Farbę rozpuszczalną w wodzie, np. czerwoną.

Kubeczek wstawiamy do słoika, tak aby opierał się o jego brzeg, i przytrzymujemy palcami. Nalewamy do słoika tyle wody, aby poziom jej przypadł w przybliżeniu w 3/4 wysokości od dna kubeczka. Wyjmujemy kubeczek i przekuwamy jego denko igłą. W szklance przygotowujemy stężony roztwór soli zabarwiony farbą. Wkładamy kubeczek do słoika i nalewamy do kubka tyle barwnego roztworu soli, aby poziom cieczy w kubku był równy lub nieco wyższy niż poziom wody w słoiku. Teraz możemy rozpocząć obserwację.

Początkowo obserwujemy cienki strumień barwnej cieczy wypływającej z kubka do słoika. Strumień ten robi się coraz cieńszy i po chwili się urywa. Teraz zaczyna się najciekawsza część doświadczenia. Po okresie pozornego spokoju strumień znowu się pojawia, po chwili zanika i może tak oscylować nawet szereg godzin. W doświadczeniu, które opisałem, strumień pojawiał się co 15 sekund, ale okres ten zależy od wielkości otworu i być może, od stężenia roztworu.

Proponujemy dokładne zbadanie tego zjawiska. W szczególności należy odpowiedzieć na kilka pytań:

- 1) Od jakich czynników zależy okres drgań
- 2) Od czego zależy czas działania urządzenia
- 3) Co dzieje się w okresie przerwy w wypływie słonej cieczy. Jak to zademonstrować.

Znając odpowiedź na te pytania można się pokusić o próbę wyjaśnienia teoretycznego. W związku z tym Redakcja Deltę zamawia u Czytelników artykuł pt. Jak wyjaśnić działanie oscylatora solnego. Najlepszy artykuł nie przekraczający 4 stron maszynopisu z dokładnym opisem doświadczeń zostanie opublikowany.



Zadania

Redaguje mgr Andrzej Mąkowski

M 157. Udowodnić, że jeżeli funkcje f i g określone na zbiorze liczb rzeczywistych oraz przyjmujące wartości rzeczywiste spełniają warunki

$$f(x+a) = g(x), \quad g(x+a) = -f(x),$$

gdzie $a \neq 0$, to są one okresowe.

W. Mnich

Rozwiązanie na str. 9

M 158. Niech α będzie taką liczbą, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $\sin n\alpha \leq \sin(n+1)\alpha$. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość $\sin n\alpha = \sin(n+1)\alpha$.

Rozwiązanie na str. 9

M 159. Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną. Udowodnić, że jeżeli iloczyn każdych n spośród danych m liczb dodatnich ($n < m$) jest większy od 1, to iloczyn wszystkich m liczb jest też większy od 1.

Rozwiązanie na str. 9

Redaguje dr Waldemar Gorzkowski

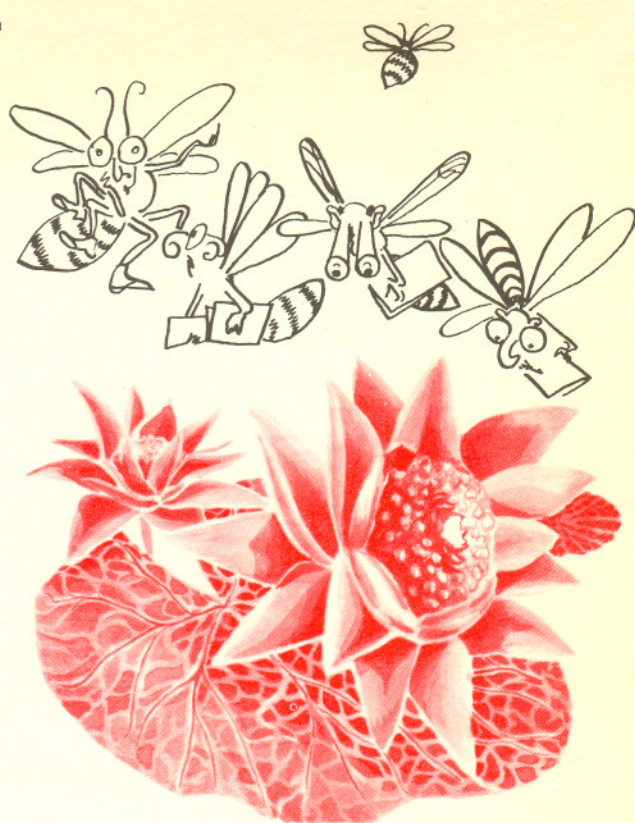
F 53. Wyobraźmy sobie, że w dwuwymiarowym naczyniu mamy „dzwuwymiarowy” gaz doskonały, czyli zbiór punktów materialnych prawie nie oddziałujących wzajemnie i poruszających się bezładnie we wszystkich kierunkach na płaszczyźnie. Na podstawie prostego modelu teoretycznego wyprowadź odpowiednik prawa Boyle'a-Mariotte'a dla tego przypadku.

Rozwiązanie na str. 11

Wycieczka do Szwajcarii. Zaraz po przekroczeniu granicy autokar mija stado białych krów. Uczestniczący w wycieczce fizyk doświadczalnik zauważył: „Patrzcie, wszystkie krowy w Szwajcarii są białe!”. Na to fizyk teoretyk: „W Szwajcarii niektóre krowy są białe”. I wreszcie matematyk: „W Szwajcarii są krowy, które co najmniej z jednej strony są białe”.

Przepis gotowania wody na herbatę, mając dany pusty czajnik, kran z wodą, maszynkę gazową i zapaliki: nalać z kranu wodę do czajnika, czajnik postawić na maszynie, zapalić gaz, czekać do chwili zagotowania wody. Pytanie: Jak gotuje wodę matematyk, mając do dyspozycji czajnik napełniony wodą? Odpowiedź: Wylewa wodę z czajnika i w ten sposób sprowadza zadanie do poprzedniego.

Pewien wybitny matematyk zapytał Richarda Feynmana: Czy to prawda, że bez matematyki rozwój fizyki opóźniłby się zaledwie o tydzień? Feynman odpowiedział: Prawda, ale byłby to ten tydzień, w którym Bóg stworzył świat.



Kącik filatelistyczny (2)

Demokryt (ok. 460 — ok. 370 p.n.e.), grecki filozof-materialista, uważany jest za ojca atomistyki. Głosił on pogląd, że cały Wszechświat zbudowany jest z małych, niepodzielnych, sztywnych ciałek materialnych zwanych atomami, a właściwości ciał zależą od rodzaju i rozmieszczenia składających się na nie atomów. Te całkiem „współczesne” poglądy pozostawały potem w zapomnieniu przez prawie dwa tysiące lat i w wieku XIX teoria atomistyczna musiała na nowo torować sobie drogę. Reprodukowany znaczek z podobizną Demokryta wydany został przez Grecję w roku 1961 z okazji utworzenia ośrodka badań jądrowych o nazwie „Demokritos”. Drugi znaczek z tej serii przedstawia budynek reaktora jądrowego.



Jerzy BARTKE

Czy
umiecie
się
dziwić



książka
dla
Sympatyków
Małej
Delty