SPIS TREŚCI

W następnym numerze:
BENEFIS

„Delta"
matematyczno-fizyczny miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa Matematycznego i Polskiego Towarzystwa Fizycznego
wydawany przy poparciu Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Adres Redakcji
ul. Hoża 69 pok. 151,
00-681 Warszawa

Zakład Narodowy im. Ossolińskich — Wydawnictwo
Wrocław, Oddział w Warszawie
Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark. wyd.; 2,50 ark. druk.;
papier offsetowy III kl. 80 g. 61 × 86
Wydrukowano w Drukarni im. Rewolucji Październikowej
Warszawa, ul. Mińska 65.
Nr zam. 1333/77 F-15

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60, — cena prenumeraty półrocznej zł 30 —

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch" oraz urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach:
— do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i cały rok następny
— do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego.
Jednostki gospodarki uspołecznionej instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienie w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch".
Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW, oraz prenumeratorzy indywidualni zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.
Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch", Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTĘ":

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.
Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.
Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, konto PKO I OM W-wa 1531-912

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona" Krakowskie Przedmieście 7 00-068 Warszawa, Poland or with
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland.
— Earlscourt Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain,
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia.

Cena 1 egzemplarza zł 5.— nr indeksu 35723/35550

Wielki postęp
jaki dokonał się w edukacji narodowej
najlepiej obrazuje (naszym zdaniem) zestawienie
programów szkolnych
sprzed dwustu lat
z programem startującej właśnie
dziesięcioletniej powszechnej szkoły średniej.

Takie będą Rzeczypospolite
jakie ich młodzieży chowanie.

Jakie były — wiemy.

Przeczytajmy więc
program matematyki szkół pijarskich
reprodukowany niżej
i zestawmy go
z programem dziesięciolatki.

Będziemy wiedzieć jakie będą.

POPIS ROCZNY
Z NAUK DAWANYCH
W SZKOŁACH WARSZAWSKICH
u XX. SCHOLARUM PIARUM
ODPRAWIONY
w Miesiącu Lipcu Roku 1787.

KLASSA I.
ARYTMETYKA.

Przez rozmaité przykłady wprawiani byli Uczniowie w Dodawanié, Odéymowanié, Mnożénié, i Dzielénié liczb, tak ieden, iako i różny gatunek znaczących.

KLASSA II.
ARYTMETYKA.
O Liczbach Łamanych.

Co są liczby łamane inaczéy Ułomki?
Co wyraża Mianownik a co Licznik?
Jak się Ułomki sprowadzaią do iednego Mianownika?
Dodawanié — Odéymowanié — Mnożenié — Dzielenié Ułomków.

KLASSA III.
JEOMETRYA.
Wiadomości początkowe

O Liniiach prostych, Obwodzie Koła, o Kątach i wymiarze ich.
Summa kątów przyległych równá się dwóm kątom prostym.
Kąty w wierzchołku przeciwległé są sobie równé.

O przystawaniu Tróykątów.

Dwa Tróykąty są sobie doskonale równé, gdy maią ieden kąt równy, zawarty między dwoma bokami równémi, każdy każdemu.
Gdy w Tróykącie dwa boki są równé, będą też równé i dwa kąty położoné na przeciwko boków równych.
Wyliczénie innych przypádków, w których dwa Tróykąty przystaią do siebie.
Maiąc dané dwa punkta znaleźć trzeci, w iednakowéy od obudwóch danych odległości.
Od punktu danégo na linii lub za liniią, prowadzić liniię prostopadłą.
Z danych liniy wystawić Tróykąt równoboczny, równoramienny, różnoboczny.
Przerysować Tróykąt lub iaką inną Figurę.
Danemu kątowi zrobić inny równy.
Kąt dany podzielić na 2, 4, 8, i t. d. części równych.

O liniiach równoległych.

Gdy dwie liniie równoległé przeciná trzeciá liniiá, natenczas czyni kąty iednostronné i naprzemianległé równe: Kąty zaś wewnętrzne równe dwóm kątom prostym.
Do liniy danéy prowadzić drugą równoległą.
W Równoległoboku, i boki i kąty przeciwné, są sobie równé.
Z danych linii wystawić Prostokąt lub Kwadrat.
Kąt zewnętrzny Tróykąta, równy iest dwom kątom wewnętrznym przeciwległym.
W każdym Troykącie, trzy kąty wewnętrzné ważą dwa kąty proste.

O Równoległobokach i Tróykątach równych co do powiérzchni.

Równoległoboki lub Troykąty równych podstaw i wysokości, są sobie równé co do powiérzchni.
Sposób zamiéniénia iakiéykolwiek Figury na Tróykąt lub na Prostokąt równéy powierzchni.

O Dodawaniu i odéymowaniu Kwadratów.

Kwadrat z przeciwprostokątnéy Tróykąta prostokątnego, równá się Kwadratom wystawionym na dwóch innych bokach tegoż Tróykąta.
Zrobić Kwadrat równy summie albo różnicy dwóch Kwadratów danych.
Znaleźć Kwadrat, któryby kilka razy zawiérał w sobie kwadrat dany.
Jakąkolwiek Figurę prostokréślną zamienić na Kwadrat.

O Kole.

Liniiá prostá prowadzoná od środka koła do środka cięciwy, iest do niéy prostopadłá.
Przez dané trzy punkta nakréślić koło, tudzież znaleźć środek koła danégo.
Kąt przy środku Koła iest dwa razy większy od kąta przy Okręgu, gdy obudwóch ramiona na iednymże łuku stoią.

KLASSA IV.
JEOMETRYA.
O proporcyi, podobieństwie Figur i stosunku ich powiérzchni.

W Tróykącie poprowadzoná liniiá równoległá do podstawy, przeciná boki Tróykąta proporcyonalnie. *Wnioski.*

We dwóch Figurach podobnych poprowadziwszy przekątne; Tróykąty Figury iedney będą podobne Tróykątóm Figury drugiey.

Do trzech liniy danych znaleźć czwartą proporcyonalną.

Linią daną przeciąć podług stosunku danego w liniiach, lub liczbach.

Na linii daney wykreślić Figurę podobną Figurze daney.

W Tróykącie prostokątnym spuszczona prostopadła od Kąta prostego na przeciwprostokątną, dzieli Tróykąt na dwa Tróykąty podobne całemu, a oraz podobne sobie. *Wnioski.*

Sposoby znalezienia śrzedniey linii proporcyonalney między dwiema danemi liniiami.

Powierzchnie Figur podobnych maią się iak Kwadraty wystawione na ich bokach odpowiadaiących.

TRYGONOMETRYA.

W każdym Tróykącie boki maią się do siebie iak wstawy kątów przeciwległych tymże bokóm.

Summa dwóch boków Tróykąta ma się do ich różnicy; iak Styczna połowy Summy kątów przeciwnych tym bokóm, do Styczney połowy ich różnicy.

A L G I E B R A.

Uczniowie wyłożywszy różnicę zachodzącą między Arytmetyką i Algiebrą; przytoczą *Zadania, w które iedna tylko niewiadoma ilość wchodzi i same ilości całkowite: a w tych pokażą:*

1. Rozwiązanie każdego Zadania na iakie części dzieli się? iakie ich są nazwiska? i które są prawidła przyprowadzenia Zadania do nayprościeyszych wyrazów.
2. Sposób dodawania ilości maiących znaki odmienne.
3. Sposób mnożenia ilosci niewiadomey przez liczbę całkowitą.
4. Dla czego w Odeymowaniu odmieniaią się znaki przed wyrazami ilości odeymować się maiącey, to iest + na — a zaś — na +.
5. Wyłożą różnicę między ilościami przydaynemi i uiemnemi, (quantitates positivae & negativae).
6. Sposób mnożenia ilości niewiadomey przez drugą niewiadomą.
7. Okażą przyczynę tey ogólney reguły: że gdy się mnożą dwa wyrazy z iednakowemi znakami, ilość rozmnożona będzie poprzedzona znakiem dodawania, to iest +: Jeżeli zaś oba wyrazy mnożące się maią znaki odmienne, ilość rozmnożona będzie poprzedzona znakiem odeymowania, to iest —.

K L A S S A V.

J E O M E T R Y A

O Bryłach.

Definicya Kąta Bryłowego.

W Kącie bryłowym złożonym ze trzech Kątów płaskich summa dwóch większa iest od Kąta trzeciego.

W Kącie bryłowym, summa wszystkich Kątów płaskich mnieysza iest od summy cztérech Kątów prostych. *Wnioski.*

Definicya Równoległościanu. *(Parallelopipedum.)*

Dwa Równoległościany prostokątne wystawione na iednéyże podstawie, maią się do siebie iak ich wysokości, i przeciwnie, maiące iednakową wysokość, są do siebie iak podstawy.

Dwa Równoległościany prostokątne maiące podstawy w stosunku odwrotnym swych wysokości, są równe, i przeciwnie. *Wnioski.*

Dwa iakiekolwiek Równoległościany równe podstawy i wysokości maiące, są w bryłowatości równe. *Wnioski.*

Definicya Graniastosłupa *(Prisma.)*

Graniastosłup Tróykątny iest połową Równoległościanu maiącego równą z Graniastosłupem wysokość, a za podstawę Równoległobok dwa razy większy od podstawy Graniastosłupa. *Wnioski.*

Definicya Ostrosłupa *(Pyramis.)*

Przeciąwszy Ostrosłup płaszczyzną równoodległą od podstawy, przecięcie to będzie figurą podobną podstawie. *Wnioski.*

Wpisawszy w Ostrosłup, i opisawszy na nim Graniastosłupy; różnica summy wpisanych od summy opisanych może bydź mnieysza od iakieykolwiek ilości daney. *Wnioski.*

Graniastosłup tróykątny może bydź rozłożony na trzy Ostrosłupy tróykątne równe, z których dwa będą miały też samę podstawę i wysokość co i Graniastosłup. *Wnioski.*

Definicya Walca. *(Cylinder.)*

Powierzchnia krzywa Walca prostego równa się Prostokątowi maiącemu za podstawę okrąg podstawy Walca, a za wysokość bok tegoż Walca. *Wnioski.*

Dwa Walce z równą wysokością maią się do siebie iak podstawy. *Wnioski.*

Definicya Ostrokręgu. *(Conus.)*

Powierzchnia krzywa ostrokręgu prostego równa się Tróykątowi maiącemu za podstawę obwód podstawy Ostrokręgu, a za wysokość bok tegoż Ostrokręgu. *Wnioski.*

Powierzchnia krzywa Ostrokręgu prostego ściętego równa się Prostokątowi maiącemu za wysokość bok Ostrokręgu ściętego, a za podstawę okrąg takiego Koła, którego promieniem byłaby Srzednia Arytmetyczna między promieniami dwóch podstaw iego. *Wnioski.*

Bryłowatość Ostrokręgu iest trzecią częścią bryłowatości Walca równey z nim podstawy i wysokości. *Wnioski.*

Definicya Kuli *(Sphaera.)*

Powierzchnia Kuli równa się Prostokątowi maiącemu za wysokość śrzednicę Kuli, a za podstawę okrąg wielkiego iey Koła.

Bryłowatość Kuli równa się $\frac{2}{3}$ bryłowatości Walca na tey Kuli opisanego. *Wnioski.*

Powierzchnie brył podobnych maią się do siebie w stosunku dwumnożnym odpowiadaiących sobie wymiarów. Bryłowatości zaś tychże brył są do siebie w stosunku tróymnożnym tychże wymiarów.

K L A S S A VI.

L O I K A.

Idąc ukazaną nam od natury drogą, przez doświadczenie i uważanie, wszelkiego nabywamy poznania.

Rozbiór iest iedynym sposobem poznania rzeczy.

Tym sposobem postępuiąc, postrzegamy, że piérwsze wyobrażenia nasze są zmysłowe, a te naprzód poiedyncze, potém powszechne czyli rodzaiowe, nakoniec gatunkowe.

Z uważania rzeczy zmysłowych, nabywamy wyobrażeń umysłowych.

Podobnymże sposobem przychodzimy do poznania Władz Duszy, które wszystkie zamykaią się w Władzy Czucia.

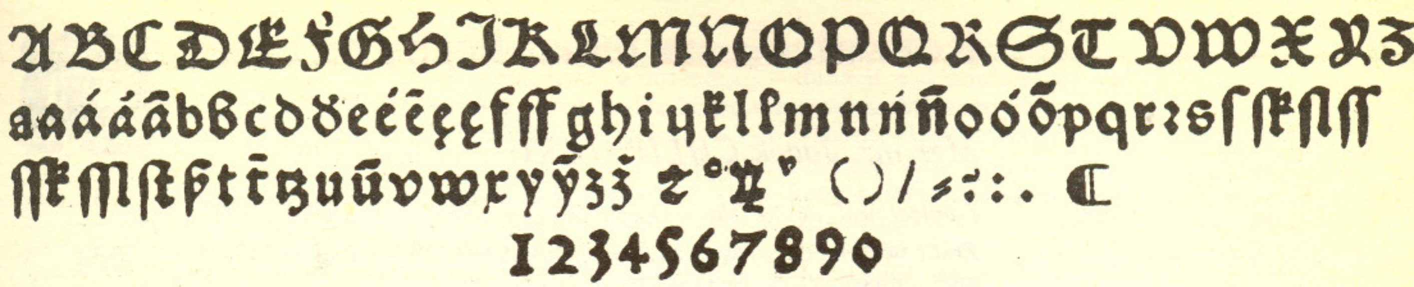
Nawyknienia mózgu są przyczyną fizyczną i poboczną pamięci: tymże sposobem sny wyłożyć można.

Błędnie rozumuiemy, gdy zaniechawszy podanych nam od natury prawideł, któremi są doświadczanie i uważanie, rozumuiemy podług złych naszych nałogów.

Sztuka rozumowania zależy na doskonałym sposobie mówienia.

Okazanie tego w przykładzie: które dowodzi oraz, że *tosamość (identitas)* iest gruntem oczywistości rozumowania.

Zapewniamy się o prawdzie, acz w różnym stopniu pewności, albo przez Oczywistość, albo przez Domysł, albo przez Podobność czyli Analogiią.



Umiejętności, których osiągnięcie przewiduje program dziesięcioletniej powszechnej szkoły średniej (do wstępnych wdrożeń — innego jeszcze nie ma) wg czasopisma *Matematyka*, lipiec — sierpień 1977 r. (pominięte jest nauczanie początkowe).

Klasa IV

Badanie podzielności liczb naturalnych przez 2, 3, 4, 5, 9, 10, 25 i 100. Objaśnianie na przykładach sposobów porównywania, dodawania i odejmowania liczb wymiernych w postaci ułamków dziesiętnych i zwykłych. Rozpoznawanie kół, okręgów, prostokątów, kwadratów, kul, prostopadłościanów i sześcianów oraz rozumienie pojęć związanych z tymi figurami. Rozpoznawanie odcinków równoległych, prostopadłych i skośnych. Kreślenie okręgów, odcinków równoległych, odcinków prostopadłych, prostokątów i kwadratów. Obliczanie obwodów i pól prostokątów oraz pól powierzchni i objętości prostopadłościanów w zakresie posiadanych umiejętności rachunkowych. Określanie położenia punktów o danych współrzędnych na płaszczyźnie. Dodawanie, odejmowanie i mnożenie przez liczby wektorów o danych współrzędnych na płaszczyźnie, w zakresie posiadanych umiejętności rachunkowych. Rozumienie pojęcia skali. Formułowanie definicji i twierdzeń na wybranych przez ucznia przykładach.

Klasa V

Wykonywanie czterech działań arytmetycznych na liczbach wymiernych i stosowanie ich w obliczeniach. Rozwiązywanie równań i nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą oraz zadań prowadzących do takich równań i nierówności. Rozpoznawanie prostych i płaszczyzn równoległych oraz prostopadłych. Obliczanie pól trójkątów, równoległoboków i trapezów oraz pól powierzchni i objętości graniastosłupów i ostrosłupów. Określanie położeń punktów o danych współrzędnych w przestrzeni oraz dodawanie, odejmowanie i mnożenie przez liczby wektorów o danych współrzędnych na płaszczyźnie i w przestrzeni. Rozumienie ogólnie dostępnych diagramów statystycznych i procentowych. Rozpoznawanie w twierdzeniu założenia i tezy. Rozumienie i formułowanie zdań z kwantyfikatorami wyrażonymi słownie.

Klasa VI

Badanie funkcji liniowych, sporządzanie ich wykresów, dodawanie i mnożenie tych funkcji przez liczby oraz stosowanie wiadomości o funkcjach liniowych w rozwiązywaniu zagadnień dotyczących proporcjonalności. Przedstawianie prostych na płaszczyźnie za pomocą równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi oraz półpłaszczyzn za pomocą nierówności pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi. Rozwiązywanie układów dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi oraz zadań prowadzących do takich układów równań. Wyznaczanie obrazów punktów, wektorów i figur geometrycznych w przesunięciach równoległych i obrotach na płaszczyźnie i w przestrzeni. Dzielenie odcinków w danym stosunku i obliczanie współrzędnych punktów podziału. Rozumienie rysunków w rzucie równoległym na płaszczyźnie. Rozumienie potęg o wykładnikach wymiernych. Formułowanie twierdzenia odwrotnego do danego twierdzenia.

Klasa VII

Badanie funkcji kwadratowych oraz sporządzanie ich wykresów. Rozwiązywanie równań i nierówności kwadratowych oraz zadań prowadzących do takich równań i nierówności. Wykonywanie działań na wielomianach i funkcjach wymiernych. Rozwiązywanie zagadnień dotyczących proporcjonalności odwrotnej. Wyznaczanie obrazów punktów, wektorów i figur geometrycznych w symetrii osiowej, środkowej i płaszczyznowej. Obliczanie iloczynów skalarnych wektorów oraz stosowanie ich do rozwiązywania trójkątów, obliczania długości wektorów i badania kątów między prostymi. Analizowanie doświadczeń losowych i obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń. Przeprowadzanie rozumowań, w których występuje alternatywa lub koniunkcja.

Klasa VIII

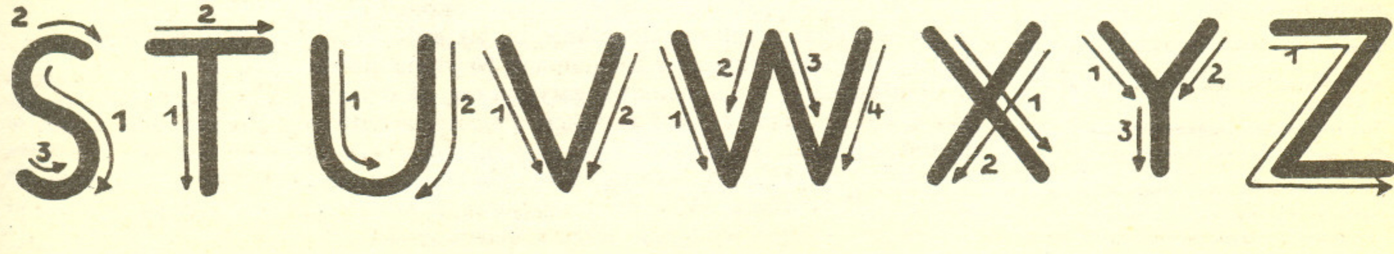
Szkicowanie wykresów funkcji wykładniczych i logarytmicznych oraz objaśnianie ich własności. Rozumienie związków między logarytmowaniem oraz mnożeniem, dzieleniem i potęgowaniem. Wyznaczanie obrazów punktów, wektorów i figur geometrycznych w jednokładności i podobieństwie. Stosowanie wiadomości o figurach podobnych w rozwiązywaniu zadań. Rozumienie własności funkcji trygonometrycznych. Analizowanie rozkładów zmiennych losowych na przykładach. Rozumienie pojęcia dowodu i jego roli.

Klasa IX

Badanie monotoniczności ciągów. Wyznaczanie monotonicznych ciągów przybliżeń dziesiętnych liczb wymiernych i niektórych liczb niewymiernych. Rozumienie pojęcia ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego oraz obliczanie sumy n kolejnych wyrazów tych ciągów. Rozumienie pojęcia granicy funkcji i granicy ciągu. Obliczanie granic funkcji w punkcie, w nieskończoności oraz granic ciągów w prostych przypadkach. Badanie zbieżności szeregów geometrycznych i obliczanie ich sum. Zamiana ułamków okresowych na ułamki zwykłe. Rozwiązywanie zadań z geometrii płaskiej i przestrzennej dotyczących pól powierzchni i objętości. Rozwiązywanie prostych zadań z kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa. Rozumienie kwantyfikatorów i przeprowadzanie rozumowań z ich wykorzystaniem.

Klasa X

Rozumienie pojęcia ciągłości funkcji oraz stosowanie własności funkcji ciągłych w rozwiązywaniu nierówności i przybliżonym rozwiązywaniu równań. Rozumienie pojęcia pochodnej oraz jej geometrycznej i fizycznej interpretacji. Obliczanie pochodnych wielomianów i funkcji wymiernych. Badanie i sporządzanie wykresów wielomianów i funkcji wymiernych w prostych przypadkach. Rozwiązywanie zadań prowadzących do obliczania minimum lub maksimum funkcji, w zakresie wielomianów i funkcji wymiernych w prostych przypadkach. Obliczanie prawdopodobieństwa warunkowego i badanie niezależności zdarzeń. Przeprowadzanie rozumowań z użyciem negacji, alternatywy, koniunkcji, implikacji oraz kwantyfikatorów.



Rozważania na temat liczby e

Mgr inż. Jacek CHLIPALSKI

Pamięci prof. dr Zdzisława Opiala poświęcam tę publikację

Zbiór liczb rzeczywistych zawiera, jak wiadomo, nieskończoną ich ilość, wśród nich najbardziej znane są liczby naturalne; te — można powiedzieć — są najstarsze, gdyż bez ich znajomości nasi praojcowie nie mogliby policzyć stada swoich owiec czy też wojowników idących w bój. W miarę rozwoju ludzkości zaczęto używać liczb ułamkowych i ujemnych, zaś z chwilą pojawienia się początków algebry musieliśmy wprowadzić liczby niewymierne.
Cofnijmy się do prehistorii. Ówcześni (inżynierowie?) wpadli na pomysł, że podłożenie pod blok skalny okrągłego pnia drzewa niewspółmiernie ułatwia jego transport. Potem okazało się, że odpowiednio obrobiony ten pień w postaci prymitywnego koła może znaleźć zastosowanie przy budowie pojazdów. Tak powstało jedno z największych odkryć starożytności, jakim jest koło. W miarę rozwoju cywilizacji przypuszczalnie pierwsi uczeni zaczęli zajmować się właściwościami koła. Powstało pojęcie średnicy, promienia, obwodu itp. Wiemy, że np. Archimedes ustalił na drodze doświadczalnej, że stosunek obwodu do podwójnego promienia wynosi $3\frac{1}{7}$. Na temat koła można pisać wiele i snuć bardziej lub mniej realne rozważania, czego przykładem była tzw. „kwadratura koła". Na przestrzeni wieków wytworzono pojęcie liczby π, by następnie udowodnić, że jest ona przestępna, czyli że nie może być pierwiastkiem żadnego równania algebraicznego o współczynnikach wymiernych. Jest ona związana z kołem, jego podstawowymi wielkościami, pomiarami kątów, funkcjami związanymi z nim (jak trygonometryczne i cyklometryczne itd.). W szkole zaczyna uczniom „towarzyszyć" od prawie pierwszych klas, przez maturę i studia techniczne, by później w czasie pracy zawodowej towarzyszyć już na stałe. Liczba π wydaje się być czymś bardzo oczywistym, takim jak jest koło. Na tym kończę zbyt długie rozważania na jej temat — może będą one pomocne do zrozumienia tego, co według mnie jest niezrozumiałe.
Pierwsze spotkanie z liczbą „e" w zależności od programu szkolnego może nastąpić jeszcze przed maturą, albo dopiero w czasie kursu matematyki wyższej na studiach techniczno-przyrodniczych (ja osobiście zetknąłem się z nią dopiero na wyższych studiach). W zasadzie, przy „przerabianiu" logarytmów jest możliwość, by nauczyciel wspomniał o tym, że oprócz najbardziej rozpowszechnionych logarytmów o podstawie 10 mogą istnieć logarytmy o innej podstawie będącej liczbą naturalną, a także o bardzo „dzikiej" — niezrozumiałej, tj. o 2,71.... Mogłoby się wydawać, że to „niewydarzone dziecko" w porównaniu do logarytmów dziesiętnych skazane będzie na upośledzenie (przysłowiowy kopciuszek), ale, jak dalej się okaże, te „dziesiętne" zawdzięczają swoje powstanie „kopciuszkowi".
Pierwsze moje zetknięcie się z liczbą „e" nastąpiło na wykładach, gdzie omawiane były ciągi i szeregi. Na ćwiczeniach przedstawiono nam charakterystyczne wyrażenia:

a) ciąg $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

b) szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

Obliczenie przybliżonej wartości sumy szeregu nie było trudne, chwila rachowania wykazała, że suma jego wynosi około 2,72. Przykład z ciągiem wprowadził nas w pełne zakłopotanie, bo jak sądziliśmy, granicą tą powinno być 1. Ale gdy skorzystamy z dwumianu Newtona lub zastosujemy dla przybliżonych obliczeń metody logarytmiczne, okaże się, że otrzymamy liczbę 2,7182... czyli e. Otóż w trakcie obliczeń rachunkowych tą czy inną metodą otrzymamy wartość e z pewnym przybliżeniem. Dla matematyka nie istnieje przybliżenie — to jest dobre dla technika lub astronoma — dla niego istnieje tylko liczba e. Mogłoby się wydawać, że gdy „przerobimy" ciągi i szeregi, w których występuje liczba e, będzie spokój.

Przypomnijmy, że sumą szeregu $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots$ nazywamy granicę ciągu (s_n), $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}$.
Udowodnimy, że ciągi (a_n) i (s_n), gdzie

$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ są zbieżne —

i to do tej samej granicy, a więc że granica ciągu a) równa jest sumie szeregu b).
W dowodzie dwukrotnie skorzystamy z twierdzenia orzekającego, że *jeśli ciąg liczbowy jest rosnący i ograniczony z góry, to jest zbieżny.*

Ciąg (s_n) jest rosnący, bo $s_{n+1} = s_n + \frac{1}{(n+1)!} > s_n$; jest on też ograniczony z góry, bowiem dla wszystkich $k > 0$ spełniona jest nierówność $k! \geqslant 2^{k-1}$, z której wynika, że

$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leqslant 1 + \frac{1}{2^0} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 1+2 = 3.$$

Jest więc zbieżny.
Rozwińmy a_n wg wzoru Newtona:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \ldots + \frac{1}{k!} \times \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k} + \ldots + \frac{1}{n!} \times \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 1}{n^n},$$

skąd

$$(*)\ a_n = 1 + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Podobnie

$$(**)\ a_{n+1} = 1 + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) + \ldots + \frac{1}{(n+1)!} \times \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Spośród $n+1$ pierwszych składników prawej strony (*) każdy jest niewiększy od odpowiedniego składnika prawej strony (**); ponadto w (**) występuje dodatni $(n+2)$-gi składnik, który nie ma swego odpowiednika w (*). Zatem $a_{n+1} > a_n$ i ciąg (a_n) jest rosnący. Jednocześnie zaś z (*) wnioskujemy, że $a_n < 1 + \ldots + \frac{1}{k!} + \ldots + \frac{1}{n!} = s_n < 3$, zatem (a_n) jest również ograniczony z góry — a więc jest zbieżny.
Przy tym ostatnia nierówność orzeka, że $a_n < s_n$, skąd wynika, że $\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} s_n$.
Aby udowodnić równość granic obu ciągów wystarczy więc wykazać, że zachodzi nierówność przeciwna: $\lim a_n \geqslant \lim s_n$.

W tym celu weźmy ustalone k i dowolne $n > k$. Z (*) wynika, że

$$a_n > 1 + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

(po prawej stronie pozostawiliśmy tylko $k+1$ pierwszych składników). Przy $n \to \infty$ każde z wyrażeń w nawiasach okrągłych dąży do 1, zatem

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geqslant 1 + \ldots + \frac{1}{k!} = s_k$$

(przy dowolnym k). Ponieważ ciąg (s_k) jest zbieżny, to możemy po prawej stronie przejść do granicy przy $k \to \infty$. Otrzymamy

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geqslant \lim_{k\to\infty} s_k,$$

a więc to, o co chodziło. Ostatecznie $\lim a_n = \lim s_n$, czyli

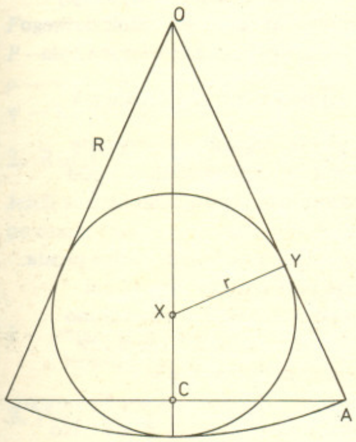
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}.$$

Zatem zarówno ciąg a) jak i szereg b) definiują tę samą liczbę.
Można też podać inną jeszcze definicję liczby e: jest to jedyna liczba rzeczywista a spełniająca nierówność

$$a^x > 1+x$$

dla wszystkich rzeczywistych $x \neq 0$ (zob. W. Sierpiński, *Działania nieskończone*, ss. 133—137).

Rozwiązanie zadania M 145. Stosujemy oznaczenia takie jak na rysunku.



Trójkąty OXY i OAC są podobne i $OX = R - r$, a więc $\frac{XY}{XO} = \frac{AC}{OA}$, czyli $\frac{r}{R-r} = \frac{a}{R}$.
Przekształcając ostatnią równość otrzymujemy kolejno:

$$rR = aR - ar,$$
$$rR + ar = aR,$$
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{R} = \frac{1}{r}, \text{ c.n.d.}$$

(1) Zob. np. K. Kuratowski, *Wykłady rachunku różniczkowego i całkowego*
(2) Rolę e jako tego łącznika opisuje wzór Eulera
$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,\ \varphi \in R.$
(3) $\log x = \log e \cdot \ln x$, $\log x \stackrel{\text{df}}{=} \log_{10} x$, $\ln x \stackrel{\text{df}}{=} \log_e x$.

Ale nie — pojawi się ona znowu przy omawianiu funkcji elementarnych, a dokładniej — funkcji wykładniczej typu a^x, gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą. Matematycy wprowadzili tutaj liczbę e i otrzymali funkcję wykładniczą e^x. Wiadomym jest, że odwrócenie funkcji wykładniczej daje nam funkcję logarytmiczną i tak otrzymaliśmy logarytm o podstawie e, który zapisywany jest jako $\ln a$.
I oto wchodzimy w rachunek różniczkowy i całkowy. Okazuje się, że funkcja wykładnicza e^x ma pochodną równą funkcji e^x. Przy całkowaniu otrzymujemy to samo: otrzymana funkcja pierwotna równa się wyrażeniu podcałkowemu (z dokładnością do stałej[1]). Liczba e opanowuje prawie cały rachunek różniczkowy i całkowy, panuje prawie niepodzielnie w równaniach różniczkowych, na niej w dużym stopniu opiera się rachunek prawdopodobieństwa i teoria błędów. Podobnie wygląda sprawa z teorią funkcji analitycznych, gdzie e „łączy" świat liczb zespolonych z liczbami rzeczywistymi[2].
Ze świata równań różniczkowych wkracza do teoretycznych problemów techniki, wspomnę tu tylko o rachunku operatorowym, elektrotechnice, teorii wymiany ciepła, hydrologii wód gruntowych. Można powiedzieć, że obejmuje swoim zasięgiem wszystko, począwszy od głębin ziemi i oceanów, a skończywszy na mechanice rządzącej ruchem ciał niebieskich.
Szczególnie liczba e z ujemnym wykładnikiem e^{-xk} $(k, x > 0)$ występuje w tych wzorach, które obejmują zanikające w czasie zjawiska fizyczne, czego przykładem będzie wzór na rozpad pierwiastka promieniotwórczego, rozładowanie kondensatora w obwodzie prądu stałego, zanikanie prądu i powstawanie siły elektromotorycznej wynikające z praw samoindukcji w obwodzie prądu zmiennego i stałego w przypadku występowania indukcyjności własnej, procesy wymiany ciepła (stygnięcia), gdy temperatura jakiegoś ciała w sposób asymptotyczny zbliża się do temperatury otoczenia itd.
Także i stosunkowo elementarny wzór obejmujący procent składany powiązany jest z liczbą e.

A teraz możemy sobie zadać pytanie, jaką drogą dochodzimy do „dokładnej" jej wartości. I tu matematyka wyższa daje od razu odpowiedź. Korzystamy tu z szeregów potęgowych Taylora, które to z dowolnie żądaną dokładnością (i to bez komputerów) umożliwiają obliczenie dowolnie dokładnego przybliżenia wartości e^x jak też $\ln x$ — gdzie w przypadku logarytmów $x > 0$. I tutaj znajdziemy odpowiedź na pytanie, jaki jest cel stosowania logarytmów naturalnych, tj. o tak dziwnej podstawie? Dzięki nim jesteśmy w stanie z dowolną dokładnością obliczyć wartości logarytmów dziesiętnych stosując metodę znaną jeszcze ze szkoły średniej[3].

Jak się dalej potoczyły losy „mojej" liczby e?
Po ukończeniu studiów na Politechnice Warszawskiej (tutaj wspomnę, że moim nauczycielem akademickim był prof. Edward Otto, który swoimi pięknymi wykładami z matematyki ugruntował moje zainteresowanie tym przedmiotem) zacząłem się zajmować w wolnych chwilach z amatorstwa wybranymi dziedzinami matematyki i za cel postawiłem sobie wyjaśnienie wątpliwości związanych z liczbą e, a głównie — skąd się ona wzięła.
Swoje kroki zacząłem kierować na popularne odczyty organizowane przez PTM. Obejmowały one różne tematy, ale nigdy nie dotyczyły liczby e. Pamiętam takich prelegentów, jak niezapomnianej pamięci prof. prof. W. Sierpiński, A. Mostowski, a z żyjących prof. prof. Otto, Schinzel, Turski, Żakowski i wielu innych. Ponieważ temat nigdy nie dotyczył liczby e, więc o jej genezę mogłem w zasadzie pytać się prelegenta po odczycie. Odpowiedź na ogół była podobna: „posiada takie a takie właściwości w rachunku różniczkowym, ale kto ją pierwszy odkrył i jaka jest geneza jej powstania tego nie wiem; rozumiem całkowicie o co pytającemu chodzi, ale to już sprawa historii matematyki" itp. W roku 1968 jeden z prelegentów zaproponował, abym zwrócił się bezpośrednio do jedynego historyka matematyki, który w tym czasie był w kraju, tj. prof. Z. Opiala z Krakowa.
Na zakończenie moich może przydługich wywodów z żalem przypominam, że mój Szanowny Informator, z którym osobiście miałem przyjemność rozmawiać już po otrzymaniu odpowiedzi, chcąc mu podziękować za trud jaki sobie zadał odpisując na mój list, jak też wysoce życzliwe potraktowanie interesującego mnie problemu, zmarł w Krakowie 27 lipca 1974 r.
Niech te rozpoczęte przeze mnie rozważania na temat historii powstania liczby e przyczynią się chociaż w skromnym stopniu do uczczenia pamięci zmarłego prof. Z. Opiala.

Warszawa 13 XII 1968 r.

Wielce Szanowny Panie Profesorze!

Najmocniej przepraszam, że nie znając Pana osobiście zwracam się bezpośrednio do Pana; na swoje usprawiedliwienie muszę podać, że upoważnili mnie Prelegenci prowadzący odczyty popularne z matematyki w ramach działalności PTM.

Od blisko 15 lat staram się nie opuścić żadnego z odczytów, jakie co roku odbywają się w Warszawie. Matematyka interesuje mnie bardzo, a szczególnie jej historia. Zawód mój obecny nie wymaga na ogół wyższej matematyki, zaś istniejące pomoce, jak tablice, nomogramy itp., sprowadzają znajomość matematyki do jakiegoś minimalnego poziomu (jestem st. projektantem z dziedziny instalacji sanitarno-przemysłowych w Biurze Projektów w Warszawie). [...] Chodzi mi o historię liczby e, jak do tej „dzikiej i tajemniczej liczby" doszli pierwsi matematycy (Neper).

[...] Znana mi chronologia liczby e jest następująca: w roku 1614 Neper w dziele *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* wspomina o niej układając tablice logarytmów przy podstawie $\left(1+\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$ i wprowadza pojęcie niezbyt zrozumiałe jak: $\text{Nep}\lg y = 161\,180\,957 - 10^7\ln y$, $\text{Nep}\ln 1 = 161\,180\,957$.

W roku 1728 granicę ciągu $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ oblicza Daniel Bernoulli, zaś w 1736 Euler oblicza sumę szeregu $\sum \frac{1}{n!}$.

W roku 1873 Ch. Hermite udowadnia przestępność liczby e. Właściwy rachunek różniczkowy powstaje pod koniec XVII wieku, tak że odkrycie liczby e nie mogło powstać wg mnie z poszukiwaniami funkcji równej swojej pochodnej. [...] Będę Panu Profesorowi wielce zobowiązany za pomoc i udzielenie mi odpowiedzi na podany problem. Przy najbliższej obecności mojej w Krakowie podziękuję osobiście. Przepraszam serdecznie za kłopot.

Z poważaniem *J. Chlipalski*

Kraków, dnia 19 grudnia 1968 r.

Szanowny Panie!

Od razu na wstępie należy zaznaczyć, że ma Pan najzupełniej rację. Ani Neper, ani nikt inny z jego okresu nie mógł wpaść na liczbę e stawiając problem znalezienia funkcji równej swojej pochodnej. Tak można było stawiać problem dopiero po ugruntowaniu rachunku różniczkowego i całkowego. Ale i wtedy liczba e, jako podstawa logarytmów naturalnych, raczej wiązana była z całkowaniem funkcji $\frac{1}{x}$ niż z problemem funkcji równej swojej pochodnej. Po prostu tak bywało i bywa w historii matematyki, że to co nam wydaje się proste, naturalne i oczywiste nie bardzo pokrywa się z faktami historycznymi. Po to zresztą jest dyscyplina naukowa pod nazwą historia nauki, by wszystkie subtelności (a tych jest bardzo dużo) rozwoju nauki wyjaśniać i z właściwej strony oświetlać.

Pozostaje więc wyjaśnić, w jaki sposób Neper doszedł do liczby e. Odpowiedź jest bardzo prosta. Wcale nie doszedł. Po pierwsze, ani u Bürgiego (w pewnej mierze prekursora Nepera), ani u samego Nepera nie ma pojęcia podstawy logarytmów. Jest to pojęcie, które wprowadzono znacznie dopiero później. Po drugie, nie odpowiada prawdzie twierdzenie, że u Nepera czy Bürgiego mamy do czynienia z logarytmami naturalnymi, to znaczy przy podstawie e.

Prawdą jest natomiast, że jeżeli popatrzeć na pierwsze próby Nepera i Bürgiego ze współczesnego punktu widzenia, to można w nich odkryć pewne ślady prowadzące na trop liczby e, ale tylko ślady — nic więcej. I tu, jeżeli chcemy wyjaśnić zagadkę, czeka nas pełna niespodzianka.

U jednego i drugiego związki logarytmów z liczbą e miały charakter czysto rachunkowy i przypadkowy. Postaram się rzecz wyjaśnić na przykładzie prób Bürgiego, bo u niego związki te są nieco jaśniejsze.

W pewnej mierze idea logarytmów była znana już nawet Archimedesowi, który w pełni zdawał sobie sprawę ze związku między postępem arytmetycznym

0,1,2,3,4,5,...

i postępem geometrycznym

$1, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, \ldots$

Dopiero jednak pod koniec XVI wieku udało się matematykom europejskim wykorzystać ten związek do celów uproszczenia rachunków. Między innymi dlatego, że bardzo zręcznie udało im się uprościć, przez odpowiedni dobór liczby a, sprawę kolejnych potęgowań tej liczby. Oto jak poradził sobie z tym Bürgi.

Jeżeli przyjąć $a = 1+10^{-4}$, to w drugim z tych ciągów każdy kolejny wyraz powstaje z poprzedniego przez dodanie go z przecinkiem przesuniętym o cztery miejsca w lewo. Symbolicznie $a_{n+1} = a_n + a_n 10^{-4}$.

I w ten sposób żmudne potęgowanie czy mnożenie natychmiast zamienia się w dodawanie. W konsekwencji, kolosalnie upraszcza się sporządzanie „tablic" logarytmów. I to jest cały wynalazek Bürgiego.

Patrząc na to ze współczesnego punktu widzenia, można powiedzieć, że w ten sposób Bürgi wprowadził logarytmy przy podstawie

$$\left(1+\frac{1}{10000}\right)^{10000},$$

a to jest już dość dobre przybliżenie liczby e.

Powtarzam więc jeszcze raz. U Bürgiego związek jego logarytmów z liczbą e ma charakter rachunkowy, co zresztą wcale nie umniejsza rangi jego pomysłu. Podobnie jest i u Nepera. Mam nadzieję, że te kilka moich uwag pozwoli Panu na rozwianie tych wątpliwości, jakie łączyły się Panu z historią liczby e. Jeżeli potrzebne byłyby jakieś inne, dalsze wyjaśnienia, to z przyjemnością podzielę się nimi z Panem.

Łączę najserdeczniejsze pozdrowienia

Zdzisław OPIAL

Wiele procesów w przyrodzie można z dobrym przybliżeniem opisać równaniem różniczkowym, którego rozwiązanie zawiera funkcje wykładnicze typu $y = Ae^{Bx}$, gdzie A i B są stałymi. Przyjrzyjmy się bliżej tabelce, w której zamieszczono dla przykładu wartości, jakie przybiera funkcja $y = e^{-ax}$ dla różnych argumentów x i dla kilku wartości parametru a. Widać, że dobierając odpowiednio parametr a można opisywać bardzo szybkie jak i powolne zmiany obserwowanej wielkości fizycznej w zależności od badanej zmiennej. Dlatego, nawet w tych przypadkach gdy mechanizm zjawiska nie jest znany, sprawdza się bardzo często, czy zależność wykładnicza opisuje obserwowane zmiany wielkości fizycznej. Jeżeli bowiem uda się przybliżyć dane doświadczalne zależnością wykładniczą, można wtedy wnioskować o mechanizmie zjawiska. A oto kilka praktycznych przykładów zastosowań funkcji wykładniczej do opisu procesów fizycznych.

1. Cumowanie łodzi do słupka

$$F = Pe^{\mu\varphi}$$

F — siła z jaką łódź ciągnie linę
P — siła z jaką żeglarz trzyma swobodny koniec liny
μ — współczynnik tarcia liny o słupek
φ — kąt opasania słupa.

2. Ruch w ośrodku lepkim (przy małych prędkościach)

Jeżeli w chwili $t = 0$ ciało o masie m ma prędkość v_0, to po czasie t prędkość ta zmaleje do prędkości v

$$v = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$$

k — współczynnik proporcjonalności zależny od kształtu ciała i lepkości cieczy.

3. Pochłanianie światła w ośrodku przezroczystym

Natężenie światła przechodzącego przez ośrodek maleje wykładniczo z przebytą drogą x:

$$I = I_0 e^{-\alpha x}$$

I_0 — natężenie początkowe
α — współczynnik absorpcji.

4. Rozkład Maxwella

Rozkład wartości bezwzględnej prędkości v cząsteczki gazu znajdującego się w temperaturze bezwzględnej T opisuje zależność

$$f(v) = \frac{4}{\pi^{1/2}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{3/2}} v^2 e^{-\frac{m}{2kT}v^2}$$

zwana rozkładem Maxwella.
m — masa cząsteczki
k — stała Boltzmanna.

$y = e^{-ax}$

x \ a	1	0.8	0.6	0.4	0.2	0.1	0.01	0.001
1	0.3679	0.4493	0.5488	0.6703	0.8187	0.9048	0.9900	0.9990
2	0.1353	0.2019	0.3012	0.4493	0.6703	0.8187	0.9802	0.9980
3	0.0498	0.0907	0.1653	0.3012	0.5488	0.7408	0.9704	0.9970
4	0.0183	0.0408	0.0907	0.2019	0.4493	0.6703	0,9608	0.9960
5	0.0067	0.0183	0.0498	0.1353	0.3679	0.6065	0.9512	0.9950
6	0.0025	0.0082	0,0273	0.0907	0.3012	0.5488	0.9418	0.9940
7	0.0009	0.0037	0.0150	0.0608	0.2466	0.4966	0.9324	0.9930
8	0.0003	0.0017	0.0082	0.0408	0.2019	0.4493	0.9231	0.9920
9	0.0001	0.0007	0.0045	0.0273	0.1653	0.4066	0.9139	0.9910
10	$4.5 \cdot 10^{-5}$	0.0003	0.0025	0.0183	0.1353	0.3679	0.9048	0.9900

5. Stygnięcie

Różnica temperatur między stygnącym ciałem a otoczeniem maleje wykładniczo z czasem t.

$$\Delta T = (T_1 - T_0)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$(T_1 - T_0)$ — początkowa różnica temperatur
τ — stała charakteryzująca warunki stygnięcia.

6. Rozładowanie kondensatora przez opór

$$u = u_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

u, u_0 — różnice potencjałów na okładkach kondensatora w chwili t i $t_0 = 0$
R — opór
C — pojemność.

7. Rozpad substancji promieniotwórczej

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$N(t)$ i N_0 — odpowiednio ilość jąder pierwiastka promieniotwórczego po czasie t i w chwili $t = 0$
τ — czas rozpadu.

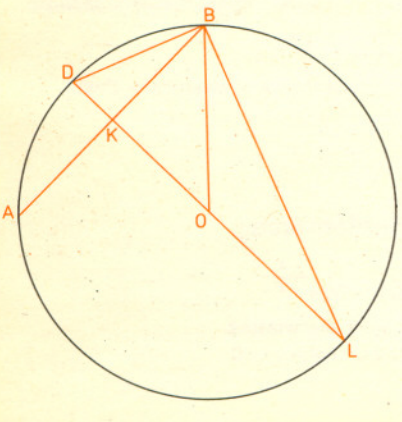
Liczba π — wielki symbol geometryczny

W momencie pisania artykułu Autor był uczniem ostatniej klasy LO w Żyrardowie.

Oto wiersz matematyka, Kazimierza Cwojdzińskego:

3 1 4
Kuć i orać
1 5 9
w dzień zawzięcie
2 6
bo plonów
5 3 5
niema bez trudu!
8 9 7
Złocisty szczęścia okręcie,
9
kołyszesz...
3
Kuć!
2 3 8 4
My nie czekajmy cudu.
6
Robota
2 6 4
to potęga ludu.

Zapewne niektórzy Czytelnicy zwrócą uwagę na pisownię wyrazu *niema*, dopatrując się błędu ortograficznego. Trzeba jednak pamiętać, że według dawnej pisowni (współczesnej Cwojdzińskiemu zwrot: niema — w znaczeniu: brak — pisał się łącznie.



Jerzy ZARAKOWSKI

Jak zapewne orientują się wszyscy Czytelnicy Delty, symbol π oznacza w matematyce stosunek długości okręgu do jego średnicy. Po raz pierwszy został on użyty w 1706 roku przez angielskiego matematyka Williama Jonesa w jego dziele pod tytułem Synopsis Palmariorum Matheseos. W powszechnym użyciu znajduje się dopiero od połowy XVIII wieku po wydaniu Analizy Eulera. Samo jednak zagadnienie, choć bez symbolicznego oznaczenia, istniało już od 4000 lat. Badacze słynnej piramidy Cheopsa zauważyli, że stosunek sumy dwóch boków podstawy do wysokości piramidy wyraża się liczbą 3,1416, czyli jest równy π z dokładnością do czterech cyfr po przecinku. Słynny papirus Ahmesa, najstarszy „podręcznik" matematyczny powstały 2000 lat p.n.e., podaje następujący sposób budowy kwadratu, którego pole równe jest polu danego koła „Odrzuć od średnicy jej część dziewiątą i zbuduj kwadrat o boku równym pozostałej części, będzie on równoważny z kołem". Pole koła jest równe πr^2. Bok kwadratu ma być równy $2r - \frac{2r}{9} = \frac{16}{9}r$, a więc jego pole wynosi $\left(\frac{16}{9}r\right)^2 = \frac{256}{81}r^2$. Według podanej konstrukcji ma być: $\pi r^2 = \frac{256}{81}r^2$ czyli $\pi = \frac{256}{81}$, a w przybliżeniu $\frac{256}{81} \approx 3{,}1605$. Tak więc budowniczowie piramidy Cheopsa byli lepszymi matematykami od Ahmesa. Niektóre wyrażenia dla π są szczególnie ciekawe, oto kilka z nich:

Ptolemeusz podaje taką wartość: $\pi = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{3600} = 3{,}141(6)$, Bhâskara, słynny matematyk hinduski: $\pi = \frac{3927}{1250} = 3{,}1416$, Al Chwarizmi (rok 830): $\pi = \sqrt{10} = 3{,}1623\ldots$, Metius (rok 1585): $\pi = \frac{355}{113} = 3{,}141593\ldots$,

Francuski matematyk Viète (rok 1579): $\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \ldots$

Angielski matematyk Wallis (rok 1656): $\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n-1)(2n+1)}$; $n \in N$.

Jeszcze ciekawszy jest jego ułamek łańcuchowy: $\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \ldots}}}$

Aby dać pewne rozeznanie co do dokładności przedstawionych tu wartości liczby π, podam jej dosyć dokładną wartość: $\pi = 3{,}14159265358979323846264338327 9\ldots$.
Obecnie przy pomocy maszyn elektronowych obliczono już 100 000 cyfr po przecinku. Zapamiętanie kilkunastu pierwszych cyfr po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby π nie jest sprawą łatwą, lecz tutaj z pomocą matematyce przychodzi poezja. Znane są wiersze, które bardzo prosto rozwiązują ten problem. Otóż licząc litery w poszczególnych wyrazach otrzymujemy kolejne cyfry liczby π.

Sposób I:
Opieramy się na twierdzeniu, mówiącym że długość okręgu jest proporcjonalna do średnicy. Oznaczmy:
długość okręgu — C
średnica — $2r$
współczynnik proporcjonalności — h

Aby ustalić — przynajmniej przybliżoną — wartość współczynnika h, postępujemy w następujący sposób:
Niech będzie dany okrąg o promieniu r. Zauważmy, że pomiędzy bokiem a_n wielokąta foremnego wpisanego w koło a bokiem a_{2n} wielokąta foremnego wpisanego w to samo koło o podwojonej liczbie boków daje się ustalić pewna zależność. Z trójkąta prostokątnego DBL mamy: $DB^2 = DL \cdot DK$, czyli $a_{2n}^2 = 2r \cdot DK$, ponieważ $DK = DO - KO = r - KO$, a z trójkąta prostokątnego BOK mamy

$KO = \sqrt{BO^2 - KB^2} = \sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}}$. Więc $DK = r - KO = r - \sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}}$,

czyli $a_{2n}^2 = 2r \cdot DK = 2r\left[r - \sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}}\right]$. Więc ostatecznie $a_{2n} = \sqrt{2r\left[r - \sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}}\right]}$

Przypuśćmy, że promieniem danego okręgu jest $r = 1$. Wtedy wyżej ustalona zależność przybiera postać: $a_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}}$

Przypuśćmy, że pierwszy z wpisanych w okrąg wielokątów jest sześciokątem foremnym; mamy wówczas:

$a_6 = 1,\ p_6 = 6 = 3 \cdot 2,\ p_n$ — obwód n-kąta.

Korzystając z równości (1) obliczamy $p_{12} = 12 \cdot a_{12} = 12 \cdot \sqrt{2-\sqrt{4-1}} = 2 \cdot 3{,}10563\ldots$

Podobnie obliczamy $p_{24} = 24 \cdot a_{24} = 24 \cdot \sqrt{2-\sqrt{4-a_{12}^2}} = 2 \cdot 3{,}13263\ldots$

Postępując w podobny sposób dalej, mamy kolejno:

$p_{48} = 48 \cdot a_{48} = 48\sqrt{2-\sqrt{4-a_{24}^2}} = 2 \cdot 3{,}13935\ldots$

$p_{96} = 2 \cdot 3{,}14103\ldots$

$p_{192} = 2 \cdot 3{,}14145\ldots$

$p_{384} = 2 \cdot 3{,}14156\ldots$

$p_{768} = 2 \cdot 3{,}14158\ldots$

$p_{1536} = 2 \cdot 3{,}14159\ldots$

itd.

Ponieważ p_{2n} dąży przy $n \to \infty$ do długości okręgu, a na wstępie zaznaczyliśmy, że $C = \pi \cdot 2r$ (gdzie r u nas jest równe 1), więc na przykładzie naszych obliczeń możemy stwierdzić, że $\pi \approx 3{,}1416$. Widzimy więc, że możemy wyznaczyć π z dowolną dokładnością, wykonując tylko odpowiednio dużo „kroków" przy wyliczaniu p_{2n}. Metoda ta ma jednak tę wadę, że musimy kolejno obliczać p_6, p_{12}, p_{24} itd., aby obliczyć np. p_{1536}.

Sposób II.

Wpiszmy w okrąg o promieniu 1 n-kąt foremny. Dzielimy go na n trójkątów równoramiennych, a więc jego pole jest równe:

$$\frac{nr^2 \sin \frac{360^\circ}{n}}{2} = \frac{n}{2} \sin \frac{360^\circ}{n}. \text{ Stąd } \frac{n}{2} \sin \frac{360^\circ}{n} \approx \pi.$$

Dobierając odpowiednio wielką wartość n, możemy znaleźć wartość π z dowolną dokładnością.

Np. dla $n = 2160$ mamy $\frac{2160}{2} \sin 10' = \pi \Leftrightarrow 1080 \cdot 0{,}0029 \approx \pi \Leftrightarrow \pi \approx 3{,}132$.

Widzimy więc, że metoda ta jest znacznie krótsza i wymaga mniej rachunków, lecz jest mniej dokładna w porównaniu z poprzednią.

Zadania

Redaguje mgr Andrzej MĄKOWSKI

M 145. W wycinek koła o promieniu długości R wpisano okrąg o promieniu długości r. Cięciwa łącząca końce promieni ograniczających wycinek ma długość $2a$. Udowodnić, że $\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{1}{a}$.

Rozwiązanie na str. 5

M 146. Krawędzie czworościanu wychodzące z jednego wierzchołka mają długości a, b, c i są parami prostopadłe. Wyznaczyć długość wysokości czworościanu opuszczonej z tego wierzchołka.

Rozwiązanie na str. 10

M 147. Udowodnić, że jeżeli a, b, c są liczbami dodatnimi, to $8(a^3+b^3+c^3) \geqslant 3(a+b)(b+c)(c+a$

Rozwiązanie na str. 10

Redaguje dr Waldemar GORZKOWSKI

F 49. Wyznacz długość najkrótszego dnia w roku w miejscowości, w której mieszkasz.
Nachylenie płaszczyzny równika względem płaszczyzny, w której leży orbita Ziemi, wynosi $\varepsilon = 23{,}5^\circ$. Szerokość geograficzną φ miejsca zamieszkania należy odczytać z atlasu.
Uwaga: Zadanie należy rozwiązać zaniedbując ugięcie i rozpraszanie promieni w atmosferze ziemskiej oraz przyjmując, że ruch Ziemi wokół własnej osi odbywa się ze znacznie większą prędkością kątową niż ruch wokół Słońca.

Rozwiązanie na str. 11

Rozwiązanie zadania M 146. Niech V będzie objętością danego czworościanu, h — szukaną długością, S — polem podstawy czworościanu, nie zawierającej wspólnego końca wspomnianych krawędzi. Zachodzą oczywiście równości

$$\frac{1}{3}Sh = V = \frac{1}{6}abc,$$

a więc $h = \dfrac{abc}{2S}$. Zadanie sprowadza się zatem do obliczenia S, a więc do obliczenia pola trójkąta o bokach $x = \sqrt{a^2+b^2}$, $y = \sqrt{b^2+c^2}$, $z = \sqrt{c^2+a^2}$. Z wzoru Herona mamy $4S = \sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}$, skąd po przekształceniach otrzymujemy $16S^2 = 2x^2y^2+2y^2z^2+2y^2z^2+2z^2x^2-x^4-y^4-z^4$.

Podstawiając podane wartości x, y, z stwierdzamy, że

$16S^2 = 2(a^2+b^2)(b^2+c^2)+2(b^2+c^2)(c^2+a^2)+2(c^2+a^2)(a^2+b^2)-(a^2+b^2)^2-(b^2+c^2)^2-(c^2+a^2)^2 = 4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$, $4S^2 = a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$,

$2S = \sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$, a więc

$$h = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}.$$

Rozwiązanie zadania M 147. Znana jest nierówność dla średniej arytmetycznej i geometrycznej trzech liczb dodatnich x^3, y^3, z^3:

$$(*)\qquad \frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geqslant \sqrt[3]{x^3y^3z^3} = xyz$$

(wynika ona natychmiast z tożsamości $x^3+y^3+z^3-3xyz = \frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]$).

Podstawiając do tej nierówności

$x = \sqrt[3]{\dfrac{a+b}{2}}$, tj. $x^3 = \dfrac{a+b}{2}$

i podobnie $y^3 = \dfrac{b+c}{2}$, $z^3 = \dfrac{c+a}{2}$

otrzymujemy nierówność

$$\frac{1}{3}\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}\right) \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\frac{c+a}{2}\right)^{1/3},$$

tj. $\left[\frac{1}{3}(a+b+c)\right]^3 \geqslant \frac{1}{8}(a+b)(b+c)(c+a)$,

$8(a+b+c)^3 \geqslant 27(a+b)(b+c)(c+a)$,

$8(a^3+b^3+c^3)+24(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)+48\,abc \geqslant 27(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)+54\,abc$,

$8(a^3+b^3+c^3) \geqslant 3(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b+2abc) = 3(a+b)(b+c)(c+a)$, c.n.d.

Można też postępować inaczej: z nierówności (*) wynikają nierówności

$a^3+a^3+b^3 \geqslant 3a^2b$

$a^3+a^3+c^3 \geqslant 3a^2c$

$b^3+b^3+c^3 \geqslant 3b^2c$

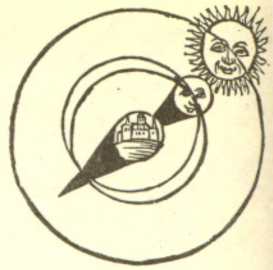
$a^3+c^3+c^3 \geqslant 3ac^2$

$a^3+b^3+b^3 \geqslant 3ab^2$

$b^3+c^3+c^3 \geqslant 3bc^2$

$2(a^3+b^3+c^3) \geqslant 6abc.$

Dodając stronami te nierówności otrzymujemy żądaną nierówność.



Tajemnica neutrin słonecznych

Prof. dr Arnold W. WOLFENDALE (Durham, Wielka Brytania)

Artykuł napisany specjalnie dla Delty

W jednej z głębokich kopalń w Stanach Zjednoczonych jest prowadzony niezwykle trudny eksperyment. Celem tego eksperymentu jest uzyskanie informacji, które pozwolą zrozumieć zjawiska zachodzące w samym środku Słońca. Zadaniem niniejszego artykułu jest wyjaśnienie, dlaczego badania własności Słońca muszą być prowadzone głęboko pod ziemią, oraz omówienie najnowszych rezultatów tego eksperymentu, które okazują się bardzo zaskakujące.

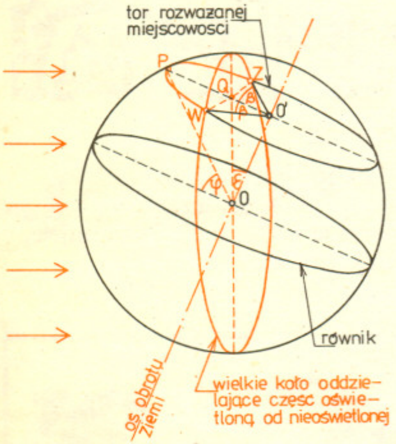
Ziemia oraz całe istniejące na niej życie (w tym ludzkość) zawdzięcza prawie wszystko ciału niebieskiemu, które dostarcza jej energii, to znaczy Słońcu. Od chwili, kiedy inteligencja ludzka rozwinęła się na tyle, aby stawiać pytanie o sprawy dotyczące problemu życia, Słońce w sposób oczywisty stało się centralnym obiektem zainteresowania. Wiele pierwotnych religii uważało Słońce za Boga, czczono je i jednocześnie się go obawiano. W naszych czasach naukowcy doceniają ogromną rolę Słońca i czynią wiele wysiłków, aby zrozumieć jego własności, a w szczególności odpowiedzieć na pytanie: jak to się dzieje, iż temperatura jego powierzchni utrzymuje się w sposób trwały na poziomie około 6000 K.

Od kilkudziesięciu lat powszechnie przyjmuje się, iż w centrum Słońca istnieje źródło wydzielające w sposób ciągły energię, oraz że energia ta stopniowo dociera do powierzchni, skąd jest wysyłana w formie promieniowania.

Jedynym znanym, wystarczająco wydajnym mechanizmem mogącym być źródłem tej energii jest synteza jądrowa. Proces ten może zachodzić jedynie w gigantycznie wysokich temperaturach. Wymagana jest temperatura przekraczająca 13 milionów stopni. Wykonano wiele obliczeń dotyczących procesów jądrowych zachodzących we wnętrzu Słońca i gwiazd. Okazało się, iż mechanizm ten pozwala wyjaśnić bardzo wiele zjawisk zachodzących w gwiazdach. Teoria uzyskała więc dobre uzasadnienie. Każda jednak teoria musi być wszechstronnie sprawdzona. Najlepszą drogą sprawdzenia idei, iż synteza jądrowa jest źródłem energii w Słońcu, byłoby przeprowadzenie pomiaru temperatury jego centralnej części.

Niestety, pomiaru takiego nie można wykonać w sposób bezpośredni, konieczne jest więc prowadzenie badań pośrednich. Powiedzieliśmy, iż proces przekazywania energii z centralnej części do powierzchni Słońca odbywa się stosunkowo wolno (w rzeczywistości trwa on około 10 milionów lat). Stwierdzenie to, ściśle rzecz biorąc, nie jest absolutnie dokładne — niewielka bowiem część wyzwalanej energii dociera do powierzchni z prędkością światła i w rezultacie jest wydzielana bardzo szybko. Ta niewielka część energii jest unoszona przez neutrina — cząstki elementarne o dość niezwykłych własnościach, mające wielką zdolność penetracji bardzo grubych warstw materii. Istnienie neutrina zostało zapostulowane przez Pauliego na początku lat trzydziestych. Jest to cząstka, która ma największą zdolność przenikania ze wszystkich cząstek dotychczas poznanych. W centralnej części gwiazdy w trakcie procesu łączenia się jąder atomowych powstaje duża liczba neutrin. Ilość wyemitowanych neutrin rośnie niezwykle szybko ze wzrostem temperatury w tym obszarze. Dzięki temu, rejestrując neutrina na Ziemi można byłoby określić liczbę neutrin produkowanych w centralnej części Słońca, a tym samym wyznaczyć temperaturę tam panującą.

Rozwiązanie zadania F 49. Sytuację, gdy Słońce znajduje się nad zwrotnikiem Koziorożca — a wtedy w Polsce są najkrótsze dni — ilustruje rysunek.



Oznaczając czas trwania doby przez T, a najkrótszego dnia w miejscowości P przez t, zgodnie z podanymi założeniami możemy napisać:

$$\frac{t}{T} = \frac{2\beta}{2\pi}.$$

Z rysunku mamy

$$\cos\beta = \frac{O'Q}{O'W}$$

$$O'W = O'P$$

$$O'Q = OO' \operatorname{tg}\varepsilon$$

$$O'P = \frac{OO'}{\operatorname{tg}\varphi}.$$

Zatem

$$\cos\beta = \operatorname{tg}\varepsilon \operatorname{tg}\varphi,$$

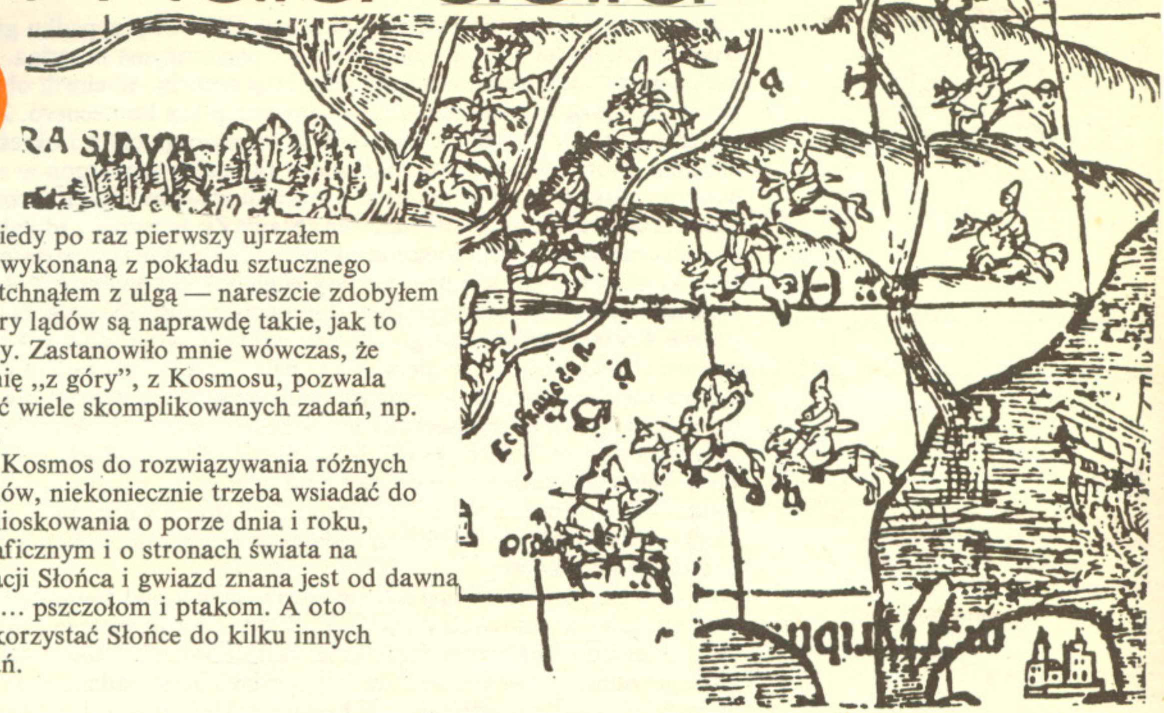
a więc

$$t = \frac{T}{\pi} \arccos(\operatorname{tg}\varepsilon \operatorname{tg}\varphi).$$

Aby otrzymane rozwiązanie miało sens, musi zachodzić związek $\operatorname{tg}\varepsilon \operatorname{tg}\varphi \leqslant 1$. Szczegółową tego dyskusję oraz obliczenia liczbowe pozostawiamy do wykonania Czytelnikowi. Warto zwrócić uwagę, że tak obliczona długość dnia może różnić się nieco od wartości rzeczywistej. Po pierwsze, w czasie ruchu miejscowości po łuku WPZ zmienia się położenie Słońca względem gwiazd, a po drugie, wskutek ugięcia i rozpraszania promieni w atmosferze między faktycznym a obserwowanym z Ziemi wschodem i zachodem Słońca istnieje kilkunastominutowa różnica. Obydwa te czynniki dla uproszczenia zostały pominięte.

Gdyby ta temperatura okazała się zgodna z przewidywaną, hipoteza o syntezie jądrowej jako źródle energii słonecznej znalazłaby potwierdzenie.
Jak to zwykle bywa, sprawa nie jest prosta. W tym przypadku głównym źródłem trudności jest ogromna zdolność penetracyjna neutrina. Wysunięto wiele sugestii dotyczących metod rejestracji neutrin. W chwili obecnej wydaje się, iż najlepszą jest metoda zaproponowana przez Pontecorvo. Zasugerował on, aby użyć wielkiej ilości materiału zawierającego chlor i określić liczbę atomów, które zostały przekształcone w radioaktywny argon w rezultacie bardzo rzadkich zderzeń neutrina z jądrami atomów chloru. Profesor Davis z laboratorium w Brookhaven (Stany Zjednoczone) zdołał zgromadzić dostateczne środki, aby wykonać eksperyment wykorzystujący tę ideę, i od sześciu lat taki eksperyment jest prowadzony w głębokiej kopalni w Południowej Dakocie. Główną część aparatury stanowi ogromny zbiornik zawierający prawie 400 000 litrów ciekłego chlorku węgla (C_2Cl_4). Zbiornik ten umieszczony, jak wyżej wspomniano, w głębokiej kopalni „czeka" na zajście reakcji między jądrem atomu chloru a słonecznym neutrinem. W odstępach około 100 dni przez tę ciecz jest przepuszczany hel w postaci gazowej. W trakcie tego procesu znikoma ilość powstałych atomów argonu wydziela się razem z helem. Po zakończeniu procesu przepuszczania helu przez wymieniony wyżej związek chloru dokonuje się pomiaru ilości atomów argonu. Jest to możliwe dzięki temu, iż atomy argonu są radioaktywne, a zatem można zliczać poszczególne cząstki.
Dlaczego eksperyment musi być przeprowadzony pod ziemią? Przyczyną jest ulewa cząstek atomowych docierających do nas z przestrzeni, znanych jako promienie kosmiczne (cząstki te, będące same w sobie źródłem naszego zainteresowania, są z dużym powodzeniem badane w Polsce — w Instytucie Badań Jądrowych w Łodzi i w Uniwersytecie Łódzkim). Niektóre z cząstek promieniowania kosmicznego również powodują przekształcanie jąder atomów chloru w jądra atomów argonu, a więc aparatura musi być w jakiś sposób zabezpieczona przed tym promieniowaniem. Na szczęście natężenie promieniowania kosmicznego szybko maleje (w wyniku absorpcji tych cząstek), gdy opuszczamy się w głąb ziemi. Na głębokości około 4000 m natężenie promieniowania kosmicznego jest na tyle małe, że większość powstających tam jąder atomów argonu powinna pochodzić od neutrin.
W czasie kiedy Davis rozpoczynał swój eksperyment oczekiwano, iż co najmniej 30 atomów argonu powinno się pojawić w rezultacie każdego pomiaru (przepuszczenia helu przez chlorek węgla). I tutaj nastąpiło wielkie zaskoczenie. Liczba rzeczywiście obserwowanych atomów jest około 5 razy mniejsza i w zasadzie wszystkie zaobserwowane atomy argonu mogły powstać w rezultacie oddziaływań promieni kosmicznych, które przeniknęły na tę głębokość. Rezultat tego eksperymentu stanowi dla naukowców wielką zagadkę. Pojawiają się pytania, czy centralna część Słońca jest rzeczywiście „chłodniejsza" niż się przypuszcza? Czy sugerowane reakcje syntezy jądrowej są rzeczywiście tymi, które zachodzą w Słońcu? Czy w ogóle eksperyment przebiega poprawnie? W związku z tym ostatnim pytaniem przeprowadzono ogromną liczbę najróżniejszych testów i wszystko wydaje się wskazywać na poprawny przebieg eksperymentu. Niewątpliwie byłoby bardzo interesujące przeprowadzenie niezależnego eksperymentu, ale jak dotychczas nikomu nie udało się zgromadzić w tym celu dostatecznie dużych środków finansowych.
Ten zaskakujący rezultat dotyczący natężenia neutrin słonecznych spotkał się z ogromnym zainteresowaniem naukowców. Wysunięto cały szereg niezwykłych sugestii. Najbardziej niepokojącym jest fakt, iż cała teoretyczna konstrukcja wyjaśniająca własności gwiazd może okazać się fałszywa. Jeżeli nie jesteśmy w stanie zrozumieć własności najbliższej gwiazdy — jaka jest szansa, iż rzeczywiście rozumiemy odległe?
Eksperyment jest nadal prowadzony i co 100 dni profesor Davis i jego współpracownicy starannie wyodrębniają powstałe atomy argonu. Z upływem czasu zaczyna się pojawiać bardziej zagadkowe zjawisko — wydaje się, iż produkcja argonu zmienia się stopniowo z czasem. Dane doświadczalne wydają się sugerować, iż strumień neutrin ze Słońca jest nie tylko mniejszy niż oczekiwany początkowo, ale również oscyluje z okresem około dwóch lat. Dwa lata jest to okres niezmiernie krótki, całkiem niemożliwy do zrozumienia, gdyż żadne zmiany w jądrze Słońca nie powinny odbywać się szybciej niż w ciągu miliona lat.
Neutrina słoneczne zachowują się więc w sposób nieoczekiwany i bardzo tajemniczy.

mała delta



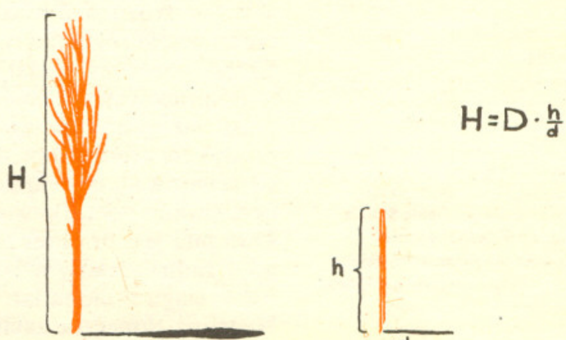
Przyznam się, że kiedy po raz pierwszy ujrzałem fotografię Europy wykonaną z pokładu sztucznego satelity Ziemi, odetchnąłem z ulgą — nareszcie zdobyłem pewność, że kontury lądów są naprawdę takie, jak to przedstawiają mapy. Zastanowiło mnie wówczas, że spojrzenie na Ziemię „z góry”, z Kosmosu, pozwala radykalnie uprościć wiele skomplikowanych zadań, np. sporządzanie map.
Żeby wykorzystać Kosmos do rozwiązywania różnych ziemskich problemów, niekoniecznie trzeba wsiadać do rakiety. Sztuka wnioskowania o porze dnia i roku, o położeniu geograficznym i o stronach świata na podstawie obserwacji Słońca i gwiazd znana jest od dawna żeglarzom a także ... pszczołom i ptakom. A oto przykłady, jak wykorzystać Słońce do kilku innych praktycznych zadań.

Przykład 1 — niezbyt mądry

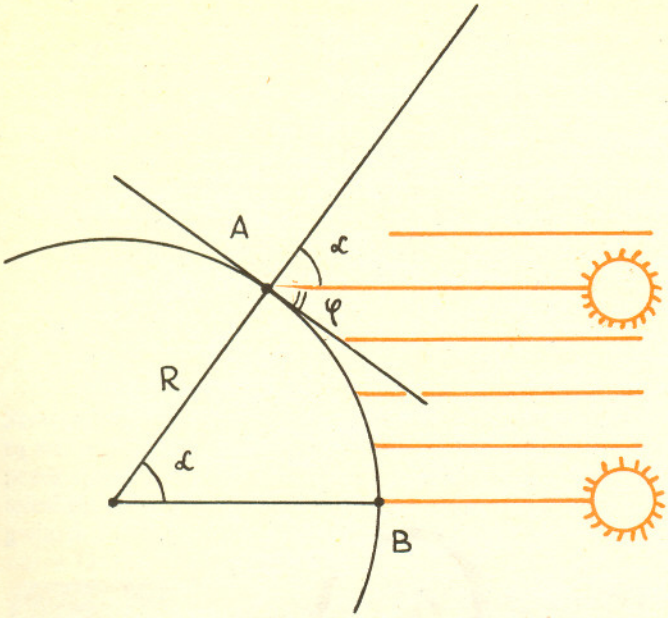
Detektyw *X* wygląda przez okno pędzącego ekspresu i mówi do współpasażerów: — Mam przeczucie, że coś się niebawem wydarzy. Spójrzcie na rysunek i wyjaśnijcie, co jest przyczyną obaw detektywa *X*.

Przykład 2 — taki sobie

Jak najprościej zmierzyć wysokość drzewa? Wystarczy zaopatrzyć się w miarkę, kij znanej długości, np. jednego metra, oraz wybrać słoneczny dzień. Co robić dalej, wynika z zamieszczonego rysunku.



Przykład 3 — bardzo mądry



Aleksandryjski astronom i matematyk z III w. p.n.e. — Eratostenes, obliczył — i to dosyć dokładnie — promień Ziemi następującą metodą.

Warunki eksperymentu. Wybieramy miejscowości *A* i *B* leżące na tym samym południku (tj. łącząca je linia ma kierunek północ-południe) i położone dosyć daleko od siebie, np. 1000 kilometrów. Eksperymentu dokonamy w samo południe i w dniu, kiedy w miejscowości *B* Słońce stoi w zenicie (co możecie powiedzieć o położeniu geograficznym miejscowości *B*, która nadaje się do tak zaplanowanego eksperymentu?). Dokonamy tylko dwóch pomiarów — zmierzymy odległość od *A* do *B* oraz kąt, pod jakim (w południe) widoczne jest Słońce w miejscowości *A*.

Założenia. Zakładamy, że Ziemia jest kulą oraz że wiązka promieni słonecznych docierająca do Ziemi jest wiązką równoległą.

Obliczenia. Sposób obliczeń ustalcie patrząc na zamieszczony obok rysunek. Nic trudnego, prawda? Proponuję Wam samodzielne dokonanie obliczeń promienia Ziemi na podstawie następujących danych.
Odległość między miejscowościami *A* i *B* — 1000 km.
Kąt, pod jakim widoczne jest Słońce w miejscowości *A* — 81°.

Zadanie 1.

W naszych szerokościach geograficznych nie znajdziemy miejscowości, gdzie Słońce kiedykolwiek znajduje się w zenicie. Nie oznacza to wcale, że eksperyment opisany w przykładzie 3 jest u nas nie do wykonania. Trzeba będzie jednak dokonać dodatkowego, trzeciego pomiaru — jakiego? Nie jest również istotne, by pomiar dokonywany był w samo południe. Proponuję Wam obmyślenie eksperymentu, na podstawie którego dokonacie pomiaru promienia Ziemi, w następujących warunkach. Mieszkacie w miejscowości *A*, a wasz kolega w miejscowości *B*. Miejscowości te leżą na tym samym południku i odległość między nimi jest Wam znana. Porozumiewać się możecie z kolegą listownie. Każdy z Was ma w domu radio, więc możecie jednakowo nastawić zegarki.

Zadanie 2.

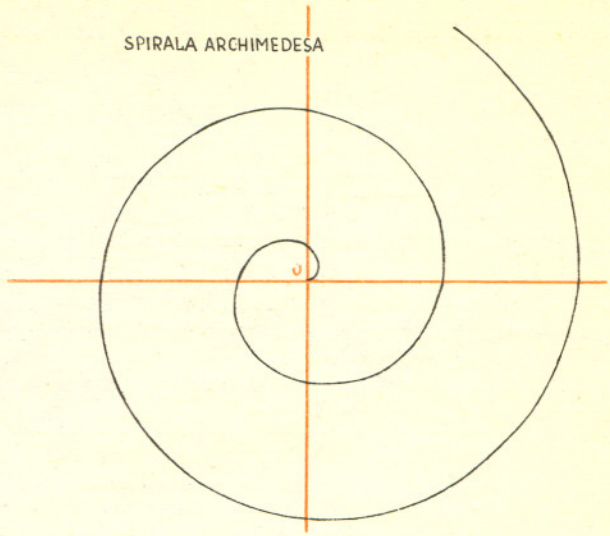
Spróbujcie obmyśleć eksperyment mierzenia promienia Ziemi w następujących, jeszcze bardziej skomplikowanych warunkach. Miejscowość *B*, w której mieszka Wasz kolega, nie leży na tym samym południku, co miejscowość *A*, gdzie Wy mieszkacie. Wiecie jednak, że miejscowość *C* leży na tej samej szerokości geograficznej, co miejscowość *B*, i na tym samym południku, co miejscowość *A*. Wiecie też, że różnica w czasie astronomicznym między miejscowościami *B* i *C* wynosi 7 minut. Znacie też odległość między miejscowościami *A* i *C*. Brak tu jeszcze jednej potrzebnej informacji — jakiej?

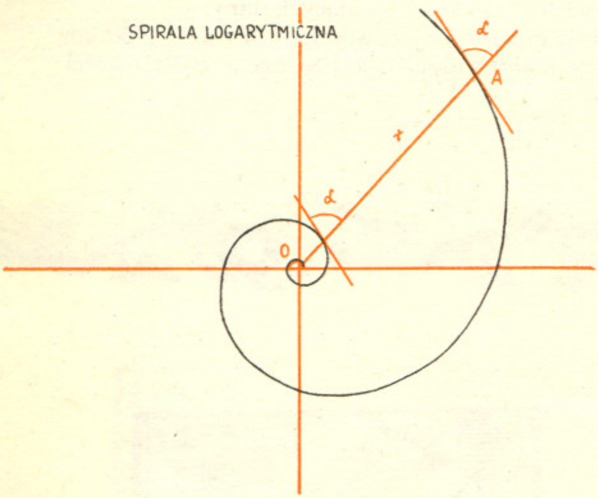
Zadanie 3.

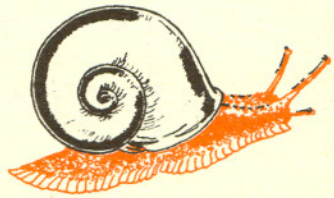
Zima to pora, kiedy nie bardzo wypada mówić o Słońcu. Pomyślcie więc, czy w opisanych przykładach można Słońce zastąpić gwiazdami lub Księżycem.

Trochę o spiralach

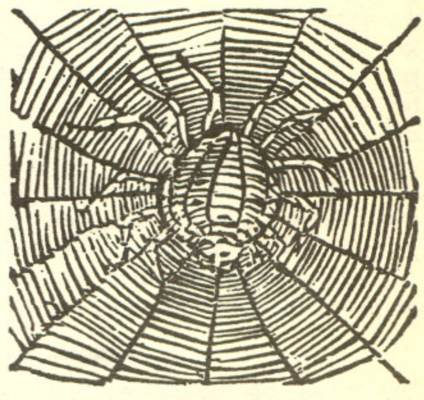
Na płycie gramofonowej, tam gdzie nie ma już muzyki, jest jeszcze rowek, po którym ramię z igłą pełznie do środka, póki adapter nie wyłączy się. Ruch ramienia w stronę środka tarczy jest (w dobrym przybliżeniu) jednostajny. To dlatego, że rowek ma kształt spirali Archimedesa. Gdy mucha pełznie od środka płyty ku brzegowi — też opisuje taką spiralę.

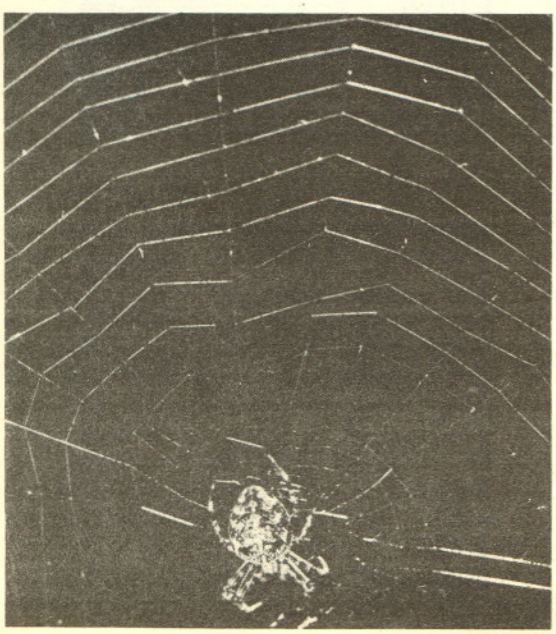




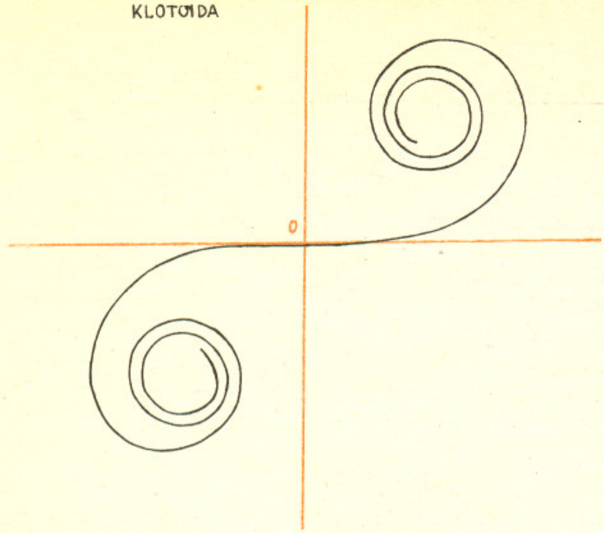


Spiralne kształty mają muszle ślimaków. Gdy mały ślimaczek rośnie, musi troszczyć się o rozbudowywanie swego domku. Wie on, że musi budować go po spirali logarytmicznej, bo tylko taka spirala zapewnia mu stosowny (to znaczy proporcjonalny do tempa wzrostu) przyrost domku. Chodzi tu o to, że długość łuku takiej spirali, liczona od punktu 0 na rysunkn rośnie proporcjonalnie do promienia r.

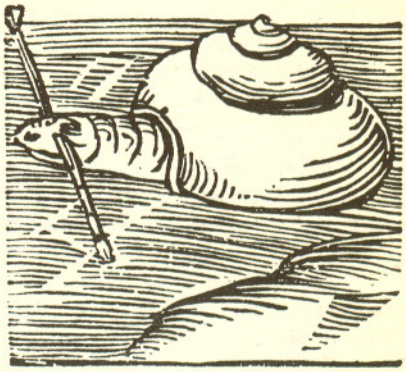




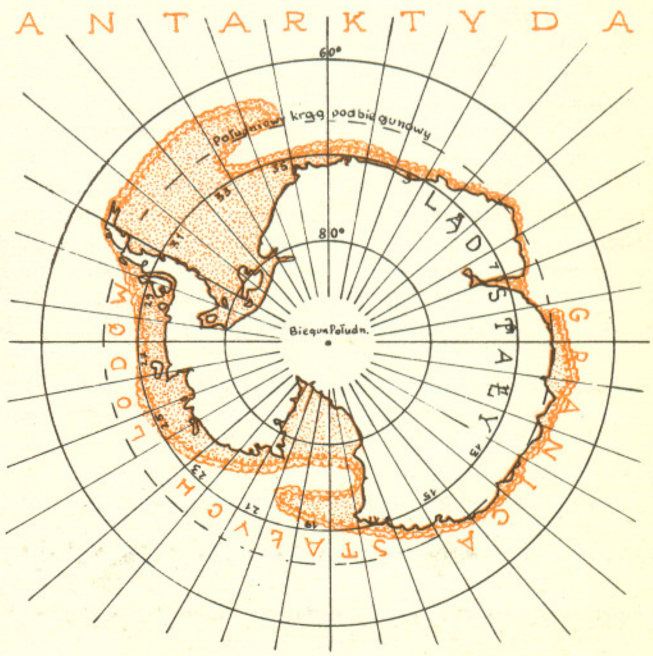
Z innej własności spirali logarytmicznej korzysta pająk budujący sieć. Najpierw rozpina on ramę, potem „szprychy" sieci, potem zaś snuje nitkę od każdej „szprychy" prostopadle do niej — aż dojdzie do następnej. Utkana przez pajączka łamana jest przybliżeniem spirali logarytmicznej. Następnie nasz pająk wraca od brzegu do środka po mniejszej spirali i sieć gotowa. Własnością, którą wykorzystuje on, jest to, że kąt α między styczną do spirali logarytmicznej a promieniem wodzącym r jest stały, niezależny od położenia punktu A na spirali. Tę własność spirali logarytmicznej potrafią wykorzystać i ludzie. Na przykład ostrza w rozmaitych (obrotowych) urządzeniach tnących mają kształt właśnie spirali logarytmicznej. Przy obrocie noża kąt cięcia pozostaje stały.



Gdy kierowca samochodu będzie na zakręcie obracał kierownicę jednostajnie, a przy tym nie zmieni prędkości pojazdu, to samochód opisze klotoidę — krzywą, której krzywizna jest wprost proporcjonalna do długości łuku, obliczanej od pewnego punktu O. Kształt taki mają początkowe łuki zakrętów na kolejowych trasach szybkiego ruchu. Dzięki temu wejście w zakręt jest łagodne.



Słyszymy dzięki spiralnym trąbkom w uchu. Pełne spiral są nasze linie papilarne. Chorujemy na choroby wywołane przez spiralne drobnoustroje. A na niebie możemy przez teleskop zobaczyć spiralne mgławice złożone z milionów gwiazd. Fragmentem jednej z takich mgławic jest nasza Droga Mleczna.



Małą Deltę przygotowali: P. NOWICKI I M. SZUREK

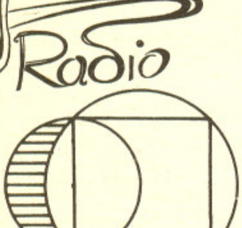
Zadanie z grudniowej „Radiodelty"

Dane są dwa koła: średnicą pierwszego jest bok danego kwadratu, a średnicą drugiego — przekątna tego kwadratu. Odcinając od mniejszego koła część zawartą w większym kole, otrzymujemy figurę zwaną księżycem (rys. 1). Skonstruować kwadrat o polu równym polu tego księżyca.

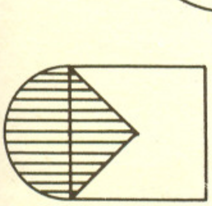
Rozwiązanie. Pole księżyca otrzymamy, odejmując od pola figury zaznaczonej na rysunku 2 pole figury zaznaczonej na rysunku 3. Wobec tego, jeśli długość boku kwadratu równa jest a, to pole P księżyca równe jest

$$P = \left[\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}a^2\right] - \frac{1}{4}\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}a^2.$$

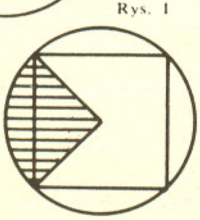
A więc długość boku poszukiwanego kwadratu równa jest po prostu $\frac{a}{2}$.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

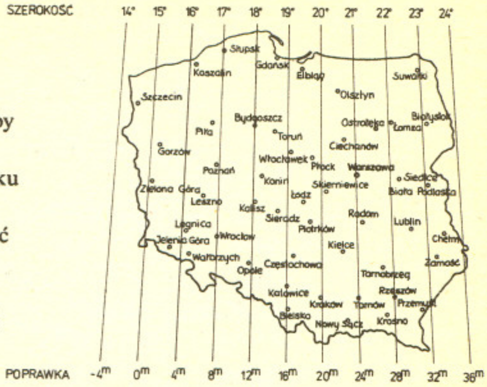
A oto terminy najbliższych naszych audycji:
W styczniu — 5 o godzinie 10^{00} i 7 o godzinie 13^{00}
W lutym — 16 o godzinie 10^{00} i 18 o godzinie 13^{00}
W marcu — 16 o godzinie 10^{00} i 18 o godzinie 13^{00}

Obrotowa mapka nieba

mgr Witold KRANAS

Montaż obrotowej mapki nieba

— wyciąć z okładki koło z mapą nieba
— przygotować sztywną tekturową podkładkę o wymiarach ok. 20×25 cm
— na przecięciu przekątnych podkładki przypiąć (np. pineską) środek kręgu z mapą, tak by mapę można było bez trudu obracać
— skopiować na cienkim kartonie nakładkę na mapę (wg nadrukowanego wzoru); w środku należy wyciąć owal oraz pasek znajdujący się pod napisem „Obrotowa mapka nieba"
— nakładkę dokładnie dopasować do mapy; na brzegach i w wyciętym pasku powinien być widoczny krąg z datami znajdujący się na obrzeżu mapy
— zagiąć górny i dolny bok nakładki i skleić z tyłem podkładki
— ponieważ cała str. 16 jest poświęcona wykorzystaniu otrzymanej mapy, warto ją wyciąć i przykleić z tyłu na podkładce.



Nastawianie mapy

Aby otrzymać wygląd nieba w dowolnym momencie, wystarczy ustawić bieżącą datę na ruchomym kręgu mapy przy godzinie obserwacji na nakładce. Obracanie mapy w kierunku zgodnym ze wskazówkami zegara odzwierciedla dobowy ruch nieba. W wyciętym owalu, którego brzeg odpowiada horyzontowi, ukaże się aktualny wygląd nieba.

Słońce porusza się wśród gwiazd po kole ekliptyki (zaznaczonym czerwonym kolorem) wykonując jeden obieg w ciągu roku. Pozycje zajmowane przez Słońce w dniach 1, 11 i 21 każdego miesiąca zaznaczone są kreskami na ekliptyce. Obserwowany ruch roczny Słońca wśród gwiazd jest wynikiem obiegu Ziemi wokół Słońca. Złożenie obu ruchów — dobowego i rocznego — oraz fakt, że gwiazdy widać jedynie wtedy, gdy Słońce nie świeci, powodują sporą rozmaitość na niebie: różne gwiazdozbiory dostępne są obserwacji w różnych porach roku. Rozpoczynając obserwacje trzeba mapę zorientować według stron świata. Dla porównania mapy z wyglądem nieba najlepiej patrzeć na nią od dołu — czyli trzymać nad głową. Do oświetlenia mapki może służyć b. słaba latarka z czerwonym światłem. Tak ustawiona mapa daje przybliżony obraz nieba. Jeżeli zależy nam na dokładności, to trzeba wprowadzić *poprawki*.

POPRAWKA 1 (NIEWYKONALNA)

Mapka została wykonana dla szerokości geograficznej $\varphi = 52°$ (Warszawa). Wygląd nieba zależy nie tylko od chwili, ale i od miejsca obserwacji. Wyobraźmy sobie, że podróżujemy w kierunku Bieguna Północnego (ponieważ tylko to sobie wyobrażamy — jest to raczej Przyprawa do Bieguna Północnego, jak powiedziałby Kubuś Puchatek). Gdy już jesteśmy na Biegunie — stoimy na osi obrotu Ziemi (przechodzi ona przez nas). Pionowo nad głową mamy punkt, gdzie oś ta „przecina" niebo — bardzo blisko jasnej Gwiazdy Polarnej — biegun północny nieba. Jego kątowa odległość od horyzontu, czyli wysokość nad horyzontem, wynosi 90°, tyle samo co szerokość geograficzna miejsca, w którym stoimy. Gdy będziemy wracali, to zaobserwujemy, że wysokość bieguna niebieskiego (Gwiazdy Polarnej) maleje. Gdybyśmy zapędzili się aż w okolice Równika, to stwierdzilibyśmy, iż Gwiazda Polarna jest bardzo nisko, tuż nad horyzontem. Ogólnie: wysokość bieguna północnego nieba nad horyzontem jest równa szerokości geograficznej φ miejsca obserwacji, czyli w Warszawie wynosi ok. 52°. Dlatego właśnie środek obrotu mapy — biegun — nie znajduje się w środku owalu, gdzie jest zenit czyli punkt o wysokości 90°.

Uwzględnienie poprawki na φ jest niewykonalne, lecz przy posługiwaniu się mapką w Polsce nie odgrywa to większej roli, ponieważ strefę przynajmniej kilku stopni nad horyzontem i tak tracimy dla obserwacji z powodu zamglenia lub zadymienia atmosfery. Pewne kłopoty mogą pojawić się dopiero w czasie wyjazdu do Bułgarii: dla Warny $\varphi \approx 43°$.

POPRAWKA 2 (DOTYCZĄCA CZASU)

Czas, który nastawiamy, powinien być miejscowym czasem słonecznym. Ale zegarek pokazuje czas środkowoeuropejski (CSE), tj. czas miejscowy południka 15°E (uwaga na czas letni CL: CSE $=$ CL-1^h). Trzeba więc odpowiedzieć na pytanie jaki jest czas miejscowy, jeżeli na zegarku mamy godzinę t(CSE)? Różnica czasów wynika z różnicy długości geograficznych $\lambda(x)$ naszej miejscowości x i południka 15°E:

$$\Delta\lambda = \lambda(x) - 15°.$$

Zamieńmy to na różnicę czasów Δt, pamiętając, że jeden obieg dobowy Słońca 360° to 24^h czyli $24 \cdot 60$ min: $\Delta t = (\lambda(x) - 15°)\, 4 \dfrac{\text{min}}{1°}$.

$$\text{Zatem: } t(\text{miejscowy}) = t \text{ CSE} \begin{pmatrix} \text{w zimie: zegarek} \\ \text{w lecie: zegarek} - 1^h \end{pmatrix} + \Delta t.$$

Na rysunku powyżej przedstawiono mapę Polski z zaznaczonymi południkami i odpowiadającymi im poprawkami czasu. Jeśli określicie na niej przybliżone położenie swojej miejscowości, to nie będziecie potrzebowali sami obliczać poprawki.

Wyznaczanie momentów ważniejszych zjawisk astronomicznych

W ruchu dobowym każdego ciała niebieskiego mamy wydarzenia dobrze znane z codziennego ruchu Słońca: wschód — pojawienie się nad horyzontem, zachód — zniknięcie pod horyzontem, oraz górowanie — najwyższe położenie ciała nad horyzontem, w przypadku Słońca — w południe. Momenty tych zdarzeń są istotne dla obserwatora, bowiem wschód oznacza możliwość rozpoczęcia obserwacji, zachód zaś konieczność ich zakończenia. Oba te momenty można łatwo wyznaczyć dla dowolnej gwiazdy. Naprowadzając ją na brzeg owalu po stronie wschodniej lub zachodniej, odczytujemy przy bieżącej dacie moment zjawiska (wchodu, zachodu) w czasie miejscowym. (Teraz, by przejść do CSE, poprawkę trzeba oczywiście odjąć). W analogiczny sposób zaznaczając pozycję Słońca w danym dniu na (pomarańczowej na rysunku) ekliptyce i ustawiając tę pozycję na horyzoncie (brzegu owalu) można odczytać wschody i zachody Słońca. Moment górowania oznacza porę szczególnie dogodną do obserwacji — obiekt znajduje się najwyżej nad horyzontem. Jak ten moment określić? Gwiazdy górują nad punktem Południa, na kole południka niebieskiego, przechodzącego przez zenit — pionowo nad głową obserwatora, Biegun Północny nieba oraz punkty Północy i Południa na horyzoncie. Na mapce możemy południk uzyskać w postaci linii przez przyłożenie linijki do punktów Pn i Pd. Jeśli teraz ustawimy jakąś gwiazdę na południku, to przy danej dacie będziemy mogli odczytać moment górowania w czasie miejscowym. A oto przykład: najjaśniejsza gwiazda nieba nocnego — Syriusz w dniu 15 lutego w Warszawie:

wschodzi: 16^h30^m (odczytane z mapy) — 24^m (poprawka dla Warszawy) $\approx 16^h$ CSE;
góruje: $21^h00^m - 24^m \approx 20^h30^m$ CSE; zachodzi: $1^h30^m - 24^m \approx 1^h$ CSE;

Uwaga: na załączonej mapce brak planet i Księżyca. W najbliższych numerach podamy mapkę, w/g której będzie można odnaleźć na niebie także i te obiekty.

Rozstrzygnięcie konkursu samych zwycięzców na temat "Perpetuum mobile dla każdego" (Delta 4/1977)

A oto pełna lista nagrodzonych:

Edmund Pierzchała, 04-946 Warszawa, ul. Wyszatycka 24
Roman Pomianowski, 62-651 Pomarzany Fabryczne, Józefów 10
Piotr Zielczyński, 00-159 Warszawa, ul. Nowotki 35 m. 104
Zbigniew Kozioł, 22-416 Sitaniec, Łapiguz 1
Cezary Młynarczyk, 97-300 Piotrków Trybunalski, ul. Paplińskiego 16/20 m. 28
Andrzej Paprota, 08-480 Maciejowice, ul. Rynek 25
Andrzej Fręczek, 37-111 Rakszawa 102
Wojciech Kasiński, 02-643 Warszawa, ul. Etiudy Rewolucyjnej 11/13 m. 22
Danuta Abucewicz, 82-300 Elbląg, ul. Armii Czerwonej 16-18/8
Andrzej Kmiecik, 14-520 Pieniężno, Kolonia 19
Edward Bebrysz, 23-200 Kraśnik, ul. Filaretów 8, woj. Lublin
Bruno Siemieniuk, 59-300 Lublin, ul. A. Mickiewicza 52/15
Ryszard Krauze, 50-207 Wrocław, ul. Dubois 39/ 11
Adrian Bujara, 41-500 Chorzów, ul. Dębowa 33
Paweł Roczniak, 71-160 Szczecin, ul. Marcinkowskiego 3/2
Sylwia Kornas, 41—700 Ruda Śląska 1, ul. Norwida 7/3.

Na konkurs nadesłano 16 odpowiedzi, ktore zgodnie z warunkami miały zawierać poprawne wyjaśnienie działania przedstawionych w artykule modeli „perpetuum mobile". Każdy z nadesłanych listów zawierał pozytywne elementy wiedzy o występujących zjawiskach fizycznych, a więc zgodnie z zapowiedzią wszyscy uczestnicy otrzymują nagrody książkowe. Najlepsze wyjaśnienia znajdowały się w dwóch listach, które zacytuję dla przedstawienia prawidłowego rozwiązania:

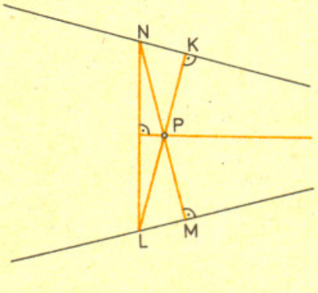
1) Model magnetyczny (kol. *Roman POMIANOWSKI, Pomarzany Fabryczne*)

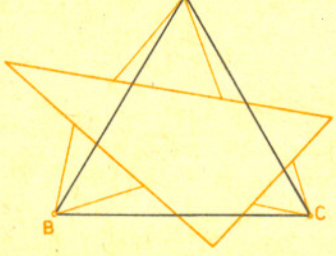
Układ: blacha cynkowa — elektrolit — węgiel tworzy ogniwo elektryczne. Drut miedziany łączący blachę cynkową z węglem zamyka obwód prądu. Oczywiście możemy przyjąć, że jony w elektrolicie poruszają się radialnie. Ponieważ elektrolit umieszczony jest w polu magnetycznym, takim że wektor $\vec{B}$ jest (w przybliżeniu) prostopadły do kierunku ruchu jonów, lub ogólniej — ma taką składową, więc na każdy taki jon działa siła $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. Ponieważ jony o przeciwnych znakach poruszają się w przeciwnych kierunkach, więc zwrot siły pozostaje taki sam (p. wzór). W efekcie jony zaczynają uzyskiwać pewną prędkość w kierunku stycznej do okręgu ze środkiem w okolicy pręta węglowego. Ponieważ mamy do czynienia z dużą ilością jonów, więc efekt uwidacznia się makroskopowo w tym, że ciecz wiruje. Oczywiście nie jest to perpetuum mobile, bo z chwilą rozładowania się tego ogniwa ruch cieczy ustaje.
Gdy całe urządzenie zasilimy bateryjką, jak to opisano, elektrolit przewodzi prąd i jony poruszają się jak poprzednio. Występuje więc analogiczne oddziaływanie pola magnetycznego na ciecz.

2) Model "parapsychologiczny" (kol. *Edmund PIERZCHAŁA, Warszawa*)

Model „parapsychologiczny" obraca się dzięki prądom powietrza, powstałym w wyniku przysunięcia ciepłej ręki. Ogrzane powietrze unosi się do góry, na jego miejsce napływa nowe, powodując obrót papierowego wiatraczka. Na rysunku w „Delcie" wiatraczek obraca się w zaznaczonym kierunku dlatego, że znajduje się bliżej końca odsłoniętej części ręki, powietrze zaś napływa ku środkowi tej części (ku środkowi każdego ciała ogrzewającego).

Kol. *Bogdan KRAUZE* z Grudziądza nawiązuje w swoim liście do notatki „Tylko linijką" z Delty 4/1974. Proponuje on następujące wykonanie konstrukcji prostej przechodzącej przez dany punkt i przechodzącej przez niedostępny punkt przecięcia danych prostych:
Przez punkt P kreślimy prostopadłe do obu ramion kątów. Jeśli otrzymane proste KL i MN tworzą kąty proste z ramionami kąta w punktach K i M, to prosta przez P prostopadła do LN jest szukaną prostą.
Dowód poprawności konstrukcji opiera się na twierdzeniu: *trzy wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.*
Podana konstrukcja dotyczy kąta ostrego. Łatwo ją uogólnić na kąt rozwarty (jak?). A jak sobie poradzić z kątem prostym? (Oczywiście konstrukcje wymagają użycia również cyrkla lub ekierki).





Kol. *Mariusz PISZCZEK* z Wieliczki proponuje Czytelnikom udowodnienie następującego twierdzenia: Jeżeli każdy bok trójkąta prostokątnego podzielimy na trzy równe części i na środkowych odcinkach zbudujemy trójkąty równoboczne, to wierzchołki otrzymanych trójkątów nie należące do boków trójkąta prostokątnego są wierzchołkami trójkąta równobocznego.
Czy założenie, że trójkąt jest prostokątny, jest istotne?