



SPIS TREŚCI

O izomorfizmie <i>Dr Witold Więśław</i>	str.	1
Geometria algebraiczna — czyli jak sobie poradzić z nieciągłością w geometrii III <i>Dr Michał Szurek</i>	str.	4
Zadania <i>Dr Jan A. Gaj</i>	str.	5
Mała Delta	str.	6
Rozwiązanie zadania z wrześnieowej Radio-Delty <i>Dr Jan A. Gaj</i>	str.	9
Laboratorium w domu <i>Dr Jan A. Gaj</i>	str.	10
Fale eksplodujące <i>Doc. dr Antoni Kuszell</i>	str.	12
Promieniowanie Czerenkowa <i>Doc. dr Jerzy Bartke</i>	str.	15
Drobiazgi	str.	17

W następnym numerze:

Czy mechanika to
matematyka, czy fizyka

„Delta”
matematyczno-fizyczny miesięcznik
popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego i Polskiego
Towarzystwa Fizycznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny
doc. dr J. Bartke
prof. dr Grzegorz Białkowski —
przewodniczący
doc. dr A. Bączyński
doc. dr B. Gleichgewicht
doc. dr K. Goebel
doc. dr B. Iwaszkiewicz
doc. dr T. Iwiński
prof. dr A. Januszajtis
prof. dr Leon Jeśmanowicz —
wiceprzewodniczący
mgr H. Kaczorek
prof. dr B. Karczewski
prof. dr M. Kuczma
mgr A. Mąkowski
prof. dr Z. Pawlak
prof. dr A. Piekara

prof. dr Z. Semadeni
prof. dr J. Stankowski
prof. dr M. Subotowicz
doc. dr S. Turnau
doc. dr J. Wdowczyk

Redaguje Kolegium w składzie:
doc. dr T. Hofmokl — z-ca red. nac.
dr T. B. Iwiński
B. Jaworska-Kordos — ilustracje
dr M. Kordos — red. nac.
mgr K. Prażmowski — red. techn. graf.
mgr K. Szypcio — sekr. red.
doc. dr M. Święcki
Adres Redakcji
ul. Hoża 69 pok. 151,
00-681 Warszawa

Zakład Narodowy im.
Ossolińskich — Wydawnictwo
Wrocław, Oddział w Warszawie
Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.
wyd.; 2,50 ark. druk.;
papier offsetowy III kl. 80 g. 61 × 86
Wydrukowano w Drukarni im.
Rewolucji Październikowej
Warszawa, ul. Mińska 65.
Nr zam. 840/77 F-15

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60, — cena prenumeraty półrocznej zł 30 —

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach:
— do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i cały rok następny
— do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego.
Jednostki gospodarki społecznej instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienie w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”.
Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW, oraz prenumeratorzy indywidualni zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.
Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej

Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTA”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.
Sprzedż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.
Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, konto PKO nr 1-6-100312

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław
w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa
w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7 00-068 Warszawa, Poland or with
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland.
— Earls Court Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain,
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia.

Dr Witold WIĘSŁAW

Gdy przed kilkoma miesiącami Redakcja zaproponowała mi napisanie artykułu o izomorfizmie, pomyślałem sobie — nic prostszego, napiszę, wyślę.... O ludzka naiwności! Wydawałoby się, że nic prostszego, niż napisać artykuł popularny. Zaczniemy więc od początku. Jeżeli w trakcie wykładu okaże się, Drogi Czytelniku, że tempo wykładu jest zbyt szybkie, wróć do miejsca, od którego zacząłeś, i przeczytaj powtórnie.

Można by zacząć mniej więcej tak. Niech A będzie zbiorem niepustym. Każdą funkcję $f: A^n = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_n \rightarrow A$, która każdemu uporządkowanemu

układowi (a_1, \dots, a_n) elementów zbioru A przyporządkowuje element $f(a_1, \dots, a_n)$ zbioru A , nazywamy działaniem w zbiorze A . Zbiór A z wyróżnionymi działaniami f_1, f_2, \dots, f_m nazywamy algebrą i oznaczamy $\mathfrak{A} = \langle A; f_1, f_2, \dots, f_m \rangle$. Jeżeli $\mathfrak{B} = \langle B; g_1, g_2, \dots, g_m \rangle$ jest drugą algebrą, w której działania g_j zależą od tej samej liczby zmiennych, co f_j , dla każdego $j = 1, 2, \dots, m$, to funkcję różnowartościową $\varphi: A \rightarrow B$, odwzorowującą zbiór A na B , nazywamy izomorfizmem algebr \mathfrak{A} i \mathfrak{B} , jeżeli warunki

$$(1) \quad g_i(\varphi(a_1), \varphi(a_2), \dots, \varphi(a_{s_i})) = \varphi(f_i(a_1, a_2, \dots, a_{s_i})), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

spełnione są dla każdego układu a_1, a_2, \dots, a_{s_i} elementów zbioru A (s_i oznacza liczbę zmiennych działania f_i).

Przykłady

A. Niech \mathfrak{A} i \mathfrak{B} będą grupami, tzn. możemy przyjąć, że $\mathfrak{A} = \langle A; f_1, f_2 \rangle$, $\mathfrak{B} = \langle B; g_1, g_2 \rangle$, $f_1(a_1, a_2) = a_1 a_2$ (mnożenie w A), $f_2(a) = a^{-1}$, $g_1(b_1, b_2) = b_1 b_2$ (mnożenie w B), $g_2(b) = b^{-1}$. Wtedy warunki (1) odczytujemy jako „zwykłą” definicję izomorfizmu: $\varphi(a_1 a_2) = \varphi(a_1) \varphi(a_2)$, $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$, $\varphi: A \xrightarrow{\text{na}} B$ i φ jest funkcją różnowartościową.

B. Jeżeli \mathfrak{A} i \mathfrak{B} są pierścieniami, to jednym z działań jest dodawanie a drugim mnożenie, tzn. $\mathfrak{A} = \langle A; f_1, f_2 \rangle$, $\mathfrak{B} = \langle B; g_1, g_2 \rangle$, $f_1(a_1, a_2) = a_1 + a_2$, $f_2(a_1, a_2) = a_1 a_2$, $g_1(b_1, b_2) = b_1 + b_2$, $g_2(b_1, b_2) = b_1 b_2$. Stosując (1) w tym szczególnym przypadku, dostajemy znów klasyczną definicję izomorfizmu pierścieni.

Wyczuwam, że należy przerwać. W ten sposób na pewno nie wyjaśnię Czytelnikowi, czym jest izomorfizm, a już na pewno zniechęcę Go do matematyki. Zbyt to wszystko jest podręcznikowe.

Spróbujmy więc nieco inaczej. W tym celu przyjmijmy najpierw pojęcie grupy.

Grupą nazywamy niepusty zbiór G , wraz z ustaloną funkcją $G \times G \rightarrow G$, zwaną dalej działaniem, albo mnożeniem w grupie G , która każdej parze uporządkowanej (a, b) elementów z G przyporządkowuje element $ab \in G$, spełniającą następujące warunki:

1. działanie jest łączne, tzn. $a(bc) = (ab)c$ dla każdych $a, b, c \in G$;
2. istnieje element neutralny e w G , tzn. element spełniający warunek $ae = ea = a$ dla każdego $a \in G$;
3. każdy element $a \in G$ ma element odwrotny $a^{-1} \in G$, tzn. $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Grupa przemienna to grupa, w której każda para elementów a, b spełnia $ab = ba$.

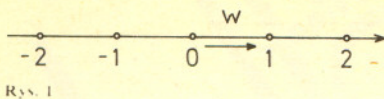
Jeżeli G jest grupą z działaniem $(a, b) \rightarrow ab$, a H — grupą z działaniem $(c, d) \rightarrow c * d$, to odwzorowanie $\varphi: G \rightarrow H$ zbioru G na zbiór H nazywamy izomorfizmem grup G i H , jeżeli warunek $\varphi(ab) = \varphi(a) * \varphi(b)$ spełniony jest dla każdego $a, b \in G$. Powyższy fakt zapisujemy krótko $G \simeq H$, co czytamy „grupa G jest izomorficzna z grupą H ”. Ażeby zdać sobie sprawę z istoty wprowadzonego pojęcia, rozważmy kilka przykładów.

Przykład I. Niech Z^+ będzie zbiorem liczb całkowitych, z dodawaniem. Jest to grupa przemienna — elementem neutralnym jest zero, bo $a+0 = 0+a = a$ dla każdego $a \in Z^+$, a przemierność dodawania liczb jest faktem wszystkim dobrze znanym (element odwrotny do a nazywany jest w tej grupie na ogół elementem przeciwnym do a).

Izomorficzny — słowo pochodzenia greckiego oznaczające: tak samo zbudowany. Pojęcie izomorfizmu (wskazywanie na taką samą budowę różnych struktur matematycznych) jest charakterystycznym dla matematyki XX wieku narzędziem badawczym. Obok podajemy pierwszy z serii artykułów poświęconych temu pojęciu.

Zob. też Sześć zadań — jedno rozwiązanie, Delta 1/1974





Przykład II. Zbiór P przesunięć prostej o całkowite wielokrotności niezerowego wektora w jest grupą względem składania przesunięć (rys. 1). Jeżeli p_v oznacza przesunięcie o wektor v , a $nw = w + w + \dots + w$ (n razy) gdy n jest liczbą naturalną, $(-n)w = (-w) + (-w) + \dots + (-w)$ (n razy), to

$$(2) \quad p_{kw} \circ p_{lw} = p_{(k+l)w}; \quad k, l \in \mathbb{Z}^+.$$

Grupa \mathbb{Z}^+ jest izomorficzna z P ; wystarczy zdać sobie sprawę z tego, że każda liczba całkowita k wyznacza przesunięcie p_{kw} i na odwrót. Reszty dopełnia wzór (2) wraz z uwagą, że funkcja $k \rightarrow p_{kw}$ ze zbioru \mathbb{Z}^+ na zbiór P jest różnowartościowa. Gdyby jednak ktoś chciał przeprowadzić drobiazgowy dowód, wystarczy określić $\varphi: \mathbb{Z}^+ \rightarrow P$ wzorem $\varphi(k) = p_{kw}$ i sprawdzić, że φ jest izomorfizmem.

Przykład III. Niech \mathbb{Z}_n^+ oznacza zbiór liczb $\{0, 1, \dots, n-1\}$, w którym za działanie przyjmujemy *dodawanie modulo n* , tzn. $s = a + b \pmod{n}$, jeżeli s jest nieujemną resztą z dzielenia $a + b$ przez n . Np. $3 + 4 \pmod{5} = 2$, bo $3 + 4 = 7 = 5 + 2$, a $8 + 12 \pmod{14} = 6$, bo $8 + 12 = 20 = 14 + 6$. Czytelnik sprawdzi, że \mathbb{Z}_n^+ jest grupą.

Przykład IV. Zbiór C_n obrotów n -kąta foremnego wokół jego środka jest grupą: elementem neutralnym jest obrót ϑ_0 o kąt 0, a elementem odwrotnym do ϑ_β jest obrót $\vartheta_{-\beta}$, tzn. $\vartheta_\beta^{-1} = \vartheta_{-\beta}$ (rys. 3). Tabelka (rys. 4) opisuje wyniki działań $\vartheta_{k\alpha} \circ \vartheta_{l\alpha}$ ($\vartheta_{k\alpha}$ w pierwszej kolumnie, $\vartheta_{l\alpha}$ w pierwszym wierszu).

Przykład V. (Czytelnik, który nie zna liczb zespolonych, może nie tracąc wiele, pominąć ten przykład). Niech E_n będzie zbiorem wszystkich rozwiązań równania $x^n - 1 = 0$ w zbiorze C liczb zespolonych. Można od razu zauważyć (bez znajdowania rozwiązań), że E_n jest grupą względem mnożenia. (Przy okazji: czy Czytelnik zna inny przykład wielomianu, którego pierwiastki tworzą grupę względem mnożenia?) Wynika to z poniższych równości: $(x_1 x_2)^n = x_1^n x_2^n = 1 \cdot 1 = 1$, $(x^{-1})^n = (x^n)^{-1} = 1$, jeżeli tylko $x_1, x_2 \in E_n$. Ponieważ każdy wielomian stopnia $n \geq 1$, o współczynnikach z C , ma n pierwiastków w C (fakt ten tradycyjnie nazywany jest „zasadniczym twierdzeniem algebry”, choć dawno już są w algebrze twierdzenia bardziej „zasadnicze”), więc grupa

E_n ma n elementów. Są to liczby $1, \varepsilon_n, \varepsilon_n^2, \dots, \varepsilon_n^{n-1}$, gdzie $\varepsilon_n = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$.

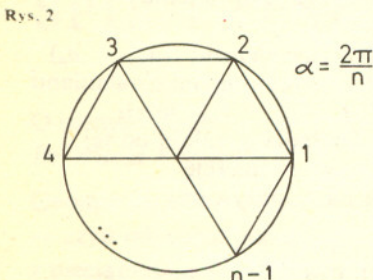
I tym razem można odwołać się do rys. 3, z tym jednak, że teraz koło leży na płaszczyźnie C liczb zespolonych, ma promień równy 1, a jego k -tym wierzchołkiem jest ε_n^{k-1} ($k = 1, 2, \dots, n$).

W trzech ostatnich przykładach rzuca się w oczy podobieństwo rozpatrywanych sytuacji. W każdym z przykładów wykonanie działania sprowadza się do dodania (modulo n) dwóch liczb. Mówiąc ściślej, wszystkie trzy grupy: \mathbb{Z}_n^+, C_n, E_n są izomorficzne. Czytelnika, którego moje sugestie nie przekonały, zachęcam do sprawdzenia, że funkcja $\varphi: \mathbb{Z}_n^+ \rightarrow C_n, \varphi(k) = \vartheta_{k\alpha}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) jest izomorfizmem grupy \mathbb{Z}_n^+ z grupą C_n , a $\psi: C_n \rightarrow E_n, \psi(\vartheta_{k\alpha}) = \varepsilon_n^k$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) jest izomorfizmem grupy C_n z grupą E_n .

Przykład VI. (rys. 5) Niech \mathbb{R}^+ oznacza grupę addytywną liczb rzeczywistych (zbiór \mathbb{R} z dodawaniem), a \mathbb{R}_+^* — póżość liczb dodatnich. Sprawdzenie, że \mathbb{R}^+ jest grupą względem dodawania, a \mathbb{R}_+^* grupą względem mnożenia liczb, wymaga znajomości jedynie najprostszycch własności liczb rzeczywistych. Ale fakt, że obie grupy są izomorficzne, jest (w pierwszej chwili) dość nieoczekiwany. Zamiast odwoływać się do intuicji, tym razem wspólnie przeprowadźmy dowód. Niech $\varphi(x) = 3^x$. Oczywiście $\varphi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ (rys. 5). Funkcja φ jest różnowartościowa, jako funkcja rosnąca i odwzorowuje \mathbb{R}^+ na \mathbb{R}_+^* , bo każda liczba dodatnia y ma logarytm $\log_3 y$. Wreszcie równość $\varphi(x+y) = 3^{x+y} = 3^x 3^y = \varphi(x) \varphi(y); x, y \in \mathbb{R}^+$ jest znaną własnością potęgowania liczb rzeczywistych, co równocześnie kończy dowód.

Przykład VII. Niech G oznacza zbiór wszystkich obrotów czworościanu foremnego. Bez trudu wskazujemy 12 obrotów: identycznościowy, 2 obroty wokół każdej osi P (rys. 6) przechodzącej przez wierzchołek czworościanu i środek przeciwległej ściany, tzn. $2 \cdot 4 = 8$ obrotów, 3 obroty wokół osi łączących środki nierównoległych krawędzi (np. oś Q na rys. 6). Wynika stąd, że grupa G ma co najmniej 12 elementów. Wykażemy teraz, że ma ich nie więcej niż 12, skąd wyniknie, że G jest zbiorem dwunastoelementowym. Niech $g \in G$ będzie dowolnym obrotem czworościanu i niech przeprowadza on pierwszy wierzchołek na j -ty, tzn. $g(1) = j$.

+	(mod n)	0	1	2	...	n-1
0		0	1	2	...	n-1
1		1	2	3	...	0
2		2	3	4	...	1
...	
n-1		n-1	0	1	...	n-2



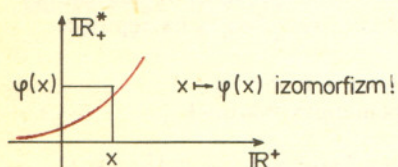
$$\vartheta_{k\alpha} \circ \vartheta_{l\alpha} = \begin{cases} \vartheta_{(k+l)\alpha} & 0 \leq k+l < n \\ \vartheta_{s\alpha} & n \leq k+l, k+l = nq+s, 0 \leq s < n \end{cases}$$

Rys. 3

	ϑ_0	ϑ_α	$\vartheta_{2\alpha}$...	$\vartheta_{(n-1)\alpha}$
ϑ_0	ϑ_0	ϑ_α	$\vartheta_{2\alpha}$...	$\vartheta_{(n-1)\alpha}$
ϑ_α	ϑ_α	$\vartheta_{2\alpha}$	$\vartheta_{3\alpha}$...	ϑ_0
...
$\vartheta_{(n-1)\alpha}$	$\vartheta_{(n-1)\alpha}$	$\vartheta_{(n-2)\alpha}$

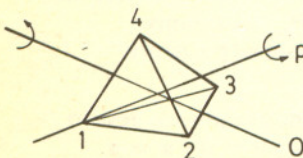
Rys. 4

Zob. też Urojony sprzymierzeniec, Delta 3/1974



$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$
 \mathbb{R}^+ - grupa addytywna liczb rzeczywistych

Rys. 5



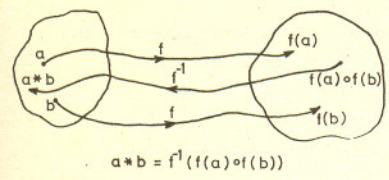
$$G = \{O_1, O_2, \dots, O_{12}\}$$

Rys. 6

a_1	a_2	a_3	a_4
a_5	a_6	a_7	a_8
a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}

Jeżeli $a \in G$ jest dowolnym obrotem przeprowadzającym pierwszy wierzchołek na j -ty, $a(1) = j$, to $b = a^{-1} \circ g$ pozostawia pierwszy wierzchołek na swoim miejscu: $b(1) = a^{-1} \circ g(1) = a^{-1}(g(1)) = a^{-1}(j) = 1$. Element G można zatem zapisać (co najmniej jednym sposobem) w postaci $g = a \circ b$, gdzie $a, b \in G$ i $a(1) = g(1)$, $b(1) = 1$. Wynika stąd, że liczba elementów zbioru G nie przekracza liczby wszystkich par uporządkowanych (a, b) . Ponieważ a przeprowadza pierwszy wierzchołek na któryś z pozostałych, więc są cztery możliwości na a . Podobnie, są trzy możliwości na b . Oznacza to, że wszystkich możliwych par jest 12, tzn. G jest zbiorem mającym nie więcej niż 12 elementów. Można przekonać się łatwo, że grupa obrotów czworoboku foremnego nie jest przemienne. Czytelnik odnotuje, że są co najmniej dwie nieizomorficzne grupy dwunastoelementowe: przemienne grupa C_{12} (Przykład IV, $n = 12$) i (nieprzemienne) grupa G .

Rys. 7



Rys. 8



Czy każdy zbiór może być grupą? Aby uniknąć zbyt zawyłych rozważań, przeformułujmy postawione pytanie na nieco mniej ogólne zadanie.

W klasie jest 12 ławek (rys. 7). Czy zbiór A tych ławek można przekształcić w grupę? Wyjaśnienie zawarte jest na rysunku 8. Ponieważ grupy izomorficzne są równoliczne (mają tę samą liczbę elementów), a znamy przykłady grup dwunastoelementowych (np. grupa G z przykładu VII), więc postaramy się przekształcić zbiór A w grupę izomorficzną z G . Niech a_1, a_2, \dots, a_{12} będzie jakąkolwiek numeracją ławek, a $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{12}$ — ustaloną numeracją elementów grupy G . Określmy funkcję $f: A \rightarrow G$, ustalając równoliczność tych zbiorów, wzorem $f(a_i) = \vartheta_i$ ($i = 1, 2, \dots, 12$). Aby znaleźć „iloczyn” $a * b$ dwóch ławek a i b , znajdujemy najpierw obroty $f(a), f(b)$ przyporządkowane tym ławkom, wykonujemy działanie $f(a) \circ f(b)$, a następnie odczytujemy, jakiemu elementowi zbioru A został przyporządkowany element $f(a) \circ f(b)$. Jest nim $f^{-1}(f(a) \circ f(b))$ (funkcja f jest różnowartościowa!). W ten sposób dowolny zbiór A , równoliczny z grupą G , można przekształcić w grupę izomorficzną z grupą G . Jeżeli bowiem przepisać otrzymany warunek, będący definicją działania w A : $a * b = f^{-1}(f(a) \circ f(b))$, w postaci równoważnej: $f(a * b) = f(a) \circ f(b)$, to odczytamy, że f jest izomorfizmem grupy A (z działaniem „ $*$ ”) z grupą G (z superpozycją „ \circ ” jako działaniem). Przypomnijmy, że f było dowolną funkcją ustalającą równoliczność zbiorów A i G . Ale możemy przecież w dowolny sposób przenumerać ławki i powtórzyć konstrukcję, już z nową numeracją. Zmiana numeracji ławek to nic innego, jak permutacja zbioru A (permutacją zbioru skończonego nazywamy każdą funkcję różnowartościową odwzorowującą ten wzór w siebie). Ponieważ zbiór dwunastoelementowy A ma $12! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 = 479001600$ permutacji, więc tym samym skonstruowaliśmy prawie pół miliarda izomorficznych, choć różnych grup!

Nasuwa się teraz spostrzeżenie, że izomorfizm pozwala zaniedbać własności fizyczne elementów grupy. Mówiąc poglądowo, grupy izomorficzne mają te same własności. Na przykład, jeżeli $\varphi: G \rightarrow H$ jest izomorfizmem grup G i H , oraz $g \in G$ jest elementem, który spełnia warunek $g^2 = e_G$ (e_G — element neutralny grupy G ; podobne znaczenie ma e_H), $g \neq e_G$, to $\varphi(g) \neq e_H$ i $\varphi(g)^2 = e_H$. Istotnie, ponieważ $g \neq e_G$, więc $\varphi(g) \neq \varphi(e_G) = e_H$ (dlaczego?), bo φ jest funkcją różnowartościową; ponadto $\varphi(g)^2 = \varphi(g^2) = \varphi(e_G) = e_H$.

W sposób podobny do opisanego można mówić o izomorfizmie pierścieni, czy też izomorfizmie ciał, ale o tym może innym razem.

Zadania

1. Wykazać, że grupa n -elementowa nie może być izomorficzna z grupą m -elementową, jeśli $m \neq n$.
2. Podać przykład dwóch nieizomorficznych grup, które mają tę samą liczbę elementów.
3. Czy zbiór obrotów kuli wokół jej środka (będący grupą względem składania obrotów) jest grupą izomorficzną z grupą obrotów koła ze składaniem obrotów, jako działaniem?
4. Udowodnić, że relacja „być izomorficznym” jest zwrotna, symetryczna i przechodnia: $G \simeq G$; $G \simeq H \rightarrow H \simeq G$; $G \simeq H$ i $H \simeq N \Rightarrow G \simeq N$.
5. Wykazać, że grupa izomorficzna z grupą przemienne jest przemienne.
6. Podzbiór H grupy G nazywamy podgrupą grupy G , jeżeli jest grupą względem tego samego działania. Wykazać, że $\{1\}$, $\{-1, 1\}$ są jedynymi skończonymi podgrupami grupy \mathbb{R}^* niezerowych liczb rzeczywistych (względem mnożenia liczb).
7. Wykazać, że $\{0\}$ jest jedyną skończoną podgrupą grupy \mathbb{R}^+ .

Geometria algebraiczna — czyli jak sobie poradzić z nieciągłością w geometrii (część III)

Dr Michał SZUREK

W poprzednich numerach Deltę opisaliśmy, jak sensownie naśladować niektóre geometryczne i analityczne pojęcia w geometrii algebraicznej, to jest dziale matematyki, zajmującym się badaniem zbiorów określonych równaniami wielomianowymi. Istotne trudności biorą się stąd, że ciało K , z którego pochodzą współczynniki wielomianów, nie musi być ciałem liczbowym, a wtedy badane zbiory nie mają „naturalnej” struktury geometrycznej. Jej namiastkę otrzymaliśmy, definiując zbiory domknięte w przestrzeni K^n jako zbiory algebraiczne, a zbiory otwarte — jako dopełnienia domkniętych. Wzbogaciliśmy tę strukturę przez wprowadzenie snopów funkcji. Interesują nas teraz nie same przestrzenie topologiczne Zariskiego, ale te przestrzenie wraz ze snopami funkcji wymiernych określonych na podzbiorach otwartych. „Krzywe” $x^2 + y^2 = 1$ i $x^3 + y^3 = 1$ są takie same jako przestrzenie topologiczne, lecz mają różne snopy funkcji. W geometrii duże znaczenie ma lokalne badanie krzywej czy powierzchni, to znaczy badanie jej własności wokół ustalonego punktu (a to z kolei znaczy: ... w dowolnie małym otoczeniu tego punktu). W naszym abstrakcyjnym przypadku jest to znacznie utrudnione, gdyż te „dowolnie małe” otoczenia są i tak bardzo duże: w topologii Zariskiego na krzywej (opisanej przez wielomian nierozkładalny) otoczenie dowolnego punktu zawiera prawie wszystkie punkty tej krzywej. Wykorzystując fakt, że ograniczamy się do badania tylko funkcji wielomianowych (a co najwyżej ilorazów takich funkcji), możemy w sensowny i użyteczny sposób wprowadzić pojęcie „nieskończenie małego” otoczenia punktu i stosunkowo łatwo badać własności interesujących nas obiektów na tych „malutkich” otoczeniach. Rozważmy najpierw punkt x_0 na prostej liczbowej R . Rozpatrujemy tylko te funkcje, które są nieskończenie wiele razy różniczkowalne (w zwykłym sensie, znanym ze szkoły) w pewnym otoczeniu punktu x_0 . Takimi funkcjami są wielomiany, funkcje trygonometryczne, wykładnicze i logarytmiczne, a także funkcje wymierne, określone w x_0 . Wszystkie wymienione funkcje są przykładami tzw. funkcji analitycznych. Rozpatrzmy dwie nieskończenie wiele razy różniczkowalne funkcje f i g . Pojęcie nieskończenie małego otoczenia n -tego rzędu punktu x_0 jest tak dobrane, że jest prawdziwe następujące twierdzenie: funkcje f i g są równe na nieskończenie małym otoczeniu n -tego rzędu punktu x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x_0) = g(x_0)$, $f'(x_0) = g'(x_0)$, ..., $f^{(n-1)}(x_0) = g^{(n-1)}(x_0)$. Można by to przyjąć za pewnego rodzaju definicję takiego otoczenia. Im większy jest rząd nieskończenie małego otoczenia, na którym dwie funkcje f i g są równe, tym „gładsze” jest przejście w punkcie $(x_0, f(x_0)) = (x_0, g(x_0))$ z krzywej $y = f(x)$ na $y = g(x)$.

Ta własność pary funkcji f i g nazywana bywa w innych teoriach stycznością n -tego rzędu

Przykład. Niech $f(x) = 0$ dla wszystkich $x \in R$, zaś

$$g(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{gdy } x > 0, \\ 0 & \text{gdy } x \leq 0. \end{cases}$$

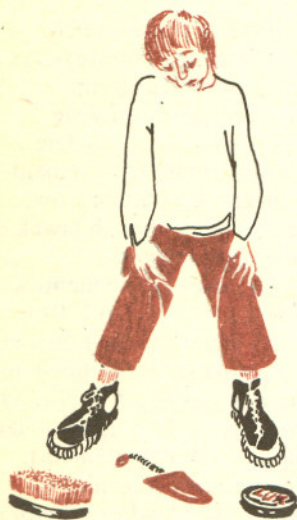
Funkcje f i g są równe na każdym nieskończenie małym otoczeniu liczby 0 (wszystkie pochodne funkcji g w 0 są równe 0), jednak nie są równe na żadnym „prawdziwym” otoczeniu 0.

W przedstawionym opisie pojęcia nieskończenie małego otoczenia punktu używaliśmy tylko pojęcia „otoczenia” oraz zwrotu „różniczkować”. Przedtem zaś wyjaśniliśmy, co rozumiemy przez „otoczenie” (ogólniej: zbiór otwarty) w abstrakcyjnych przestrzeniach Zariskiego oraz wytłumaczyliśmy, co rozumiemy przez „pochodną”. Jesteśmy tym samym w stanie sformułować „uwikłaną” definicję nieskończenie małego otoczenia n -tego rzędu na każdym zbiorze algebraicznym. Okazuje się następnie, że przez swego rodzaju „przejście graniczne” (przy $n \rightarrow \infty$) po tych nieskończenie małych otoczeniach otrzymujemy coś pośredniego między „dużym” otoczeniem w przestrzeni Zariskiego a „malutkim” otoczeniem nieskończenie małym. Daje to nową metodę lokalnego badania zbiorów algebraicznych. Jest ona możliwa tylko dzięki temu, że w klasie rozpatrywanych przez nas funkcji możemy twierdzić, że jeżeli dwie funkcje są takie same na każdym nieskończenie małym otoczeniu pewnego punktu, to są takie same na pewnym „prawdziwym” otoczeniu. Opisany wyżej przykład pokazuje, że w ogólnym przypadku istnieją funkcje, które tej własności nie mają.

Jednym z częściej wykorzystywanych twierdzeń geometrii różniczkowej (opartej na zwykłej geometrii prostej liczbowej) jest twierdzenie o funkcjach uwikłanych. W bardzo szczególnym przypadku mówi ono, że jeżeli funkcja $y = f(x)$ jest ciągła i różniczkowalna (w zwykłym

sensie) w pewnym otoczeniu punktu x_0 i pochodna $y' = \frac{df}{dx}$ jest różna od zera w punkcie x_0 ,

to istnieje otoczenie U tego punktu, na którym f jest funkcją odwracalną, to znaczy zmienna x da się wyrazić jako funkcja zmiennej y na pewnym otoczeniu V punktu $y_0 = f(x_0)$.



W przestrzeniach Zariskiego (w ich ubogiej topologii) twierdzenie to nie jest prawdziwe, o czym można się łatwo przekonać już na przykładzie funkcji $y = x^2$. Wynikającą stąd trudność związaną z niemożnością lokalnego „rozwikłania” funkcji udało się pokonać przez wprowadzenie tak zwanej *topologii étale*. Nie jest to topologia w poprzednio (i powszechnie) używanym sensie tego słowa — *otoczenie étale* punktu x zbioru algebraicznego X jest dość skomplikowanym obiektem algebraiczno-geometrycznym i posługiwanie się *topologią étale* wymaga już pewnej specjalizacji w geometrii algebraicznej. Przy określeniu tej „topologii” jeszcze raz dochodzi do głosu praktyczny formalizm, cechujący dziś wiele działów matematyki. W matematyce jest dość łatwo wprowadzać nowe pojęcia, zwłaszcza właśnie drogą formalnego przeniesienia pojęć już istniejących na nieco inny zakres obiektów. Jednak często jest to tylko niczemu nie służąca zabawa. Jedną z cech, jakie musi mieć dobry matematyk, jest umiejętność odróżnienia, które pojęcia są warte uwagi, a które nie, które teorie będą służyć faktycznemu rozwojowi nauki, a które są marginesową ciekawostką. Że nie jest to łatwe, świadczy dobitnie historia geometrii nieeuklidesowych — nie docenianych w XIX wieku, a dziś stanowiących podbudowę teorii (np. teorii względności) opisujących rzeczywistość fizyczną. Gdyby porównać zdobywanie nowych obszarów matematyki do wspinaczki górskiej, nasunie się następująca analogia. Dobry wspinacz musi mieć opanowaną technikę pokonywania ścianek, płyt, rys, kominów i przewieszek — ale musi mieć również wyczucie: ta rysa doprowadzi mnie na szczyt, a tędy dojdę pod niemożliwy do przejścia okap. Od matematyka wymagamy nie tylko pomysłowego i sprawnego rozwiązywania zadanych zadań, ale (co z biegiem lat staje się ważniejsze) wyczucia oraz opartej na intuicji i doświadczeniu orientacji w nieznanym terenie.

Opisana przez nas metoda wprowadzenia pojęć analizy matematycznej i geometrii różniczkowej tam, gdzie jest to z pozoru niemożliwe, jest owocem wysiłku kilku pokoleń matematyków. Droga, którą oni szli, jest krętą i wydaje się, że można ją uprościć, aby następni mogli pójść jeszcze dalej.



Zadania

Redaguje mgr Andrzej MAKOWSKI

M 136. Udowodnić, że jeżeli obwoły ścian czworościanu są równe, to ściany są trójkątami przystającymi.

Rozwiązanie na str. 16

M 137. Wyznaczyć wszystkie pary niepustych podzbiorów A i B zbioru liczb całkowitych Z mające następujące własności:

- 1) $Z = A \cup B$ i co najmniej jeden ze zbiorów $Z - A$ i $Z - B$ jest niepusty,
- 2) suma dwóch liczb należących do tego samego podzbioru należy do A , suma dwóch liczb należących do różnych podzbiorów należy do B .

Rozwiązanie na str. 16

M 138. Na okręgu wybrano pięć różnych punktów P, P_1, P_2, P_3, P_4 , dla których zachodzą równości

$$\ast P_1PP_2 = \ast P_2PP_3 = \ast P_3PP_4 = \frac{\pi}{4}.$$

Udowodnić, że punkty P_1, P_2, P_3, P_4 są wierzchołkami kwadratu.

Rozwiązanie na str. 14

Redaguje dr Waldemar GORZKOWSKI

F 46. W poprzednim zadaniu istotną rolę odgrywała analiza wymiarowa. Metodami analizy wymiarowej można udowodnić wiele zależności, jednak czasami — przy nieumiejętnym jej stosowaniu — można popaść w tarapaty. Oto przykład rozumowania prowadzącego na manowce. Weźmy pod uwagę nieskończoną, cienką, prostoliniową nici naładowaną w ten sposób, że liniowa gęstość ładunku (czyli ładunek przypadający na jednostkę długości) η jest stała. Interesuje nas pole elektryczne E w przestrzeni wokół nici, a konkretnie w punkcie oddalonym od nici o r . Dla ustalenia uwagi rozważania będziemy przeprowadzać w układzie CGS. Najpierw wyznaczmy potencjał. Jedynymi parametrami charakteryzującymi nasz układ są: gęstość ładunku η o wymiarze pierwiastka kwadratowego z dyny oraz odległość r o wymiarze cm. Można by więc sądzić, że wielkości te powinny wystarczyć do wyznaczenia potencjału $V(r)$. Innymi słowy, można by sądzić, że $V(r)$ powinno być sumą wyrażeń postaci: stała $\cdot \eta^i \cdot r^j$. Wymiarem potencjału jest pierwiastek kwadratowy z dyny. Jedynym wyrażeniem podanej postaci mającym właściwy wymiar, jak łatwo sprawdzić, jest po prostu stała $\cdot \eta^1 \cdot r^0$ czyli stała $\cdot \eta$. Zatem $V(r) = \text{stała} \cdot \eta$. Widzimy więc, że potencjał $V(r)$ w ogóle nie zależy od r . Wynika stąd, że pole elektryczne wokół nici jest równe zero, co jest oczywistą nieprawdą, gdyż dobrze wiadomo, że pole elektryczne pochodzące od jednorodnie naładowanej nici jest odwrotnie proporcjonalne do r .

Sprawdźcie, czy podane wyżej rozumowanie również w układzie SI prowadzi do paradoksu i spróbujcie wyjaśnić, gdzie został popełniony błąd.

Rozwiązanie na str. 11



mała delta

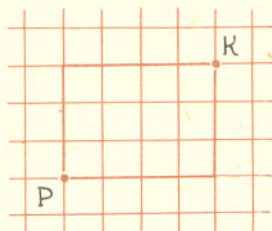
Spacerowy po siatce kwadratowej

Zwykła kartka kratkowanego papieru może służyć za planszę do wielu popularnych gier, na przykład do gry w kółko i krzyżyk, w szewca, w piłkę nożną czy w okręty. Na kratkach można także uczyć się matematyki. Zaczniemy od ustalenia kilku prostych reguł. Oto Regulamin, jaki nas będzie odąd obowiązywał:

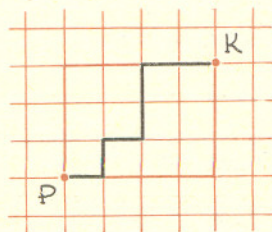
- § 1. *Kratki służą do spacerów.*
- § 2. *Po kratkach chodzi się krokami, od węzła do węzła (węzeł to punkt przecięcia się dwóch linii).*
- § 3. *W jednym kroku wolno przejść tylko do jednego z dwóch następujących węzłów: albo najbliższego w górę, albo najbliższego w prawo.*
- § 4. *Należy ustalić, gdzie zaczynać i gdzie kończyć spacer.*
- § 5. *Należy ustalić, przez jakie węzły siatki wolno przechodzić po drodze.*
- § 6. *Należy ustalić sposób zapisywania odbytych spacerów.*
- § 7. *Należy odpowiedzieć na postawione pytania.*

Przykład 1

Zgodnie z § 4 Regulaminu zaznaczyliśmy na rysunku dwa węzły: węzeł *P* to początek spacerów, węzeł *K* to ich koniec.



Ustalamy, że wolno chodzić po wszystkich węzłach. Jednak oczywiście w grę wchodzi tylko węzły wewnątrz pogrubionej linii na rysunku (i na niej). Dlaczego? Spacerowy zapisywać będziemy w ten sposób. Notujemy po kolei każdy krok pisząc 1, gdy jest to krok w prawo, lub 0, gdy jest to krok w górę. Przykładowo, spacer przedstawiony na rysunku zapiszemy jako 1010011.



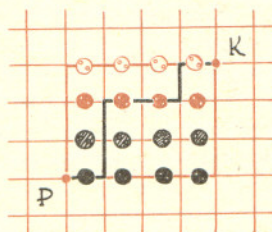
Teraz pora na pytanie: ile jest różnych takich dróg? Łatwo zauważyć, że różne (dozwolone w tym przykładzie) spacerowy będą zapisane w różny sposób. Sprawdźcie dla pewności, że na przykład tylko jeden spacer może być zapisany jako 0011101. Jaki to spacer?

Nietrudno także zauważyć, że dozwolonym w tym przykładzie spacerom odpowiadają napisy zero-jedynkowe złożone z trzech zer i czterech jedynek.

A więc różnych dróg jest tyle samo, co różnych napisów zero-jedynkowych złożonych z trzech zer i czterech jedynek.

Przykład 2

Początek spacerów i ich koniec takie, jak w poprzednim przykładzie. Wolno chodzić po wszystkich węzłach. Objasnimy sposób zapisywania spacerów. Zaczynamy od ułożenia na siatce kolorowych guzików, tak jak pokazuje rysunek. Spacerując zbieramy napotkane po drodze guziki. Dla przykładu, idąc drogą zaznaczoną na rysunku podniesiemy jeden guzik czarny, dwa brązowe i jeden biały. Zapiszemy to po prostu: 1 czarny, 2 brązowe, 1 biały.



A oto pytania:

1. Ile guzików możemy znaleźć na spacerze?
2. Czy mogą być wszystkie jednakowe?
3. Czy może być każdy inny?
4. Czy mając zebrane przez kogoś guziki (i złośliwie pomieszane) możemy odnaleźć jego drogę?

Przykład 3

W przykładzie 1 zmieniamy brzmienie §§ 4 i 5 Regulaminu. Kończyć spaceru można nie w jednym, lecz w kilku różnych węzłach. Dozwolony obszar spacerów jest taki, jak na rysunku. Zmienimy też § 7: postawcie kilka sprytnych pytań dotyczących takich spacerów (np. dla kolegi).

Pora jednak odpowiedzieć na pytanie zasadnicze: jak obliczać, ile jest różnych dróg po siatce?

Odpowiedź daje następująca reguła dodawania dróg. „Drogi zaczynające się w ustalonym węźle siatki przeliczać można stopniowo: najpierw drogi do węzłów r.ajbliższych początku, później do coraz dalszych. Liczba dróg do danego węzła zawsze jest sumą: liczba dróg do węzła o krok w lewo plus liczba dróg do węzła o krok w dół”.

A oto zastosowanie tej reguły do obliczeń: Teraz fraszka będzie dla Czytelnika rozwiązaniem następującego zadania.

Zadanie

Oto przykład rosnącego ciągu liczb naturalnych:

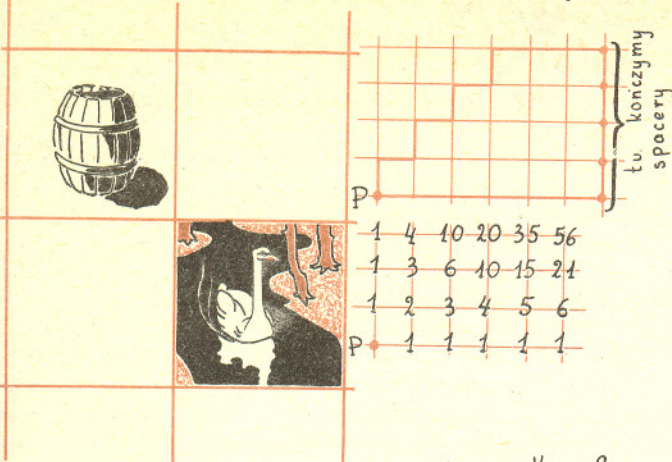
1, 5, 6, 9, 10, 12, 14, 16

(każda kolejna liczba ciągu jest większa od poprzedniej).

Z kolei, o ciągu 1, 1, 2, 3, 4, 4, 4

powiemy, że jest niemalejący (żadna kolejna liczba nie jest mniejsza od poprzedniej).

Ile jest rosnących ciągów liczb naturalnych zaczynających się od 1, kończących na 9 i złożonych z 5 liczb? A ile jest takich ciągów niemalejących? (Wskazówki na rysunkach.)



P	1	4	10	20	35	56
	1	3	6	10	15	21
	1	2	3	4	5	6
P	1	1	1	1	1	

	8	8	8	8	K
	7	7	7	7	
	6	6	6	6	
	5	5	5	5	
	4	4	4	4	
	3	3	3	3	
P	2	2	2	2	

	5	6	7	8	K
	4	5	6	7	
	3	4	5	6	
P	2	3	4	5	

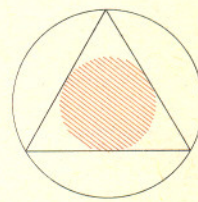
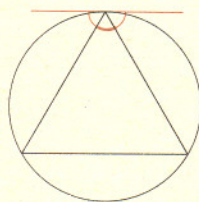
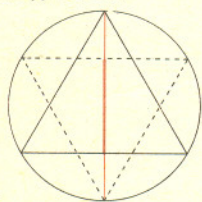
czajny

CO MOŻE MATEMATYKA

W kole poprowadzono przypadkową cięciwę. Na ile prawdopodobne jest, że będzie ona dłuższa od boku trójkąta równobocznego wpisanego w to koło?

Rozwiązanie

Problem charakteryzuje się symetrią obrotową (rozwiązanie nie może się zmienić, jeśli dokonamy obrotu koła wokół jego środka), zatem



kierunek cięciwy nie jest istotny. Możemy więc przyjąć, że cięciwa jest prostopadła do pionowej średnicy i jest wobec tego jednoznacznie wyznaczona przez punkt przecięcia z tą średnicą. Cięciwa będzie dłuższa od boku trójkąta, jeśli ten punkt będzie oddalony od środka koła o mniej niż $1/2$ promienia. Punkty takie wypełniają odcinek o długości równej połowie średnicy. Ponieważ zaś punkty odpowiadające wszystkim cięciwom wypełniają całą średnicę, to szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$\frac{1}{2}$$

nie jest istotne położenie jednego z końców cięciwy. Możemy więc przyjąć, że cięciwa wychodzi z ustalonego punktu okręgu i jest wobec tego jednoznacznie wyznaczona przez kąt, jaki tworzy ze styczną do okręgu w tym punkcie. Cięciwa będzie dłuższa od boku trójkąta, jeśli kąt ten będzie leżał w przedziale $\langle \pi/3, 2\pi/3 \rangle$, którego długość wynosi $\pi/3$. Kąty odpowiadające wszystkim możliwym cięciwom wypełniają zaś przedział o długości π — zatem szukane prawdopodobieństwo wynosi

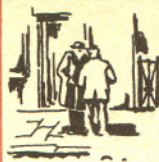
$$\frac{1}{3}$$

cięciwa będzie dłuższa od boku trójkąta wtedy i tylko wtedy, gdy jej środek będzie leżał wewnątrz koła wpisanego w dowolny taki trójkąt. Obszar zajmowany przez środki cięciw dłuższych od boku trójkąta jest więc kołem otwartym o promieniu o połowę mniejszym od promienia danego koła, zatem ma pole równe $1/4$ pola koła. Ponieważ zaś środki wszystkich możliwych cięciw wypełniają całe koło, to szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$\frac{1}{4}$$

TYLE MOŻE MATEMATYKA,

gdy stosuje się ją do niesprecyzowanego zagadnienia: co to jest bowiem „przypadkowa cięciwa”?



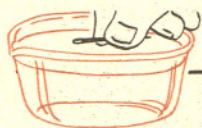
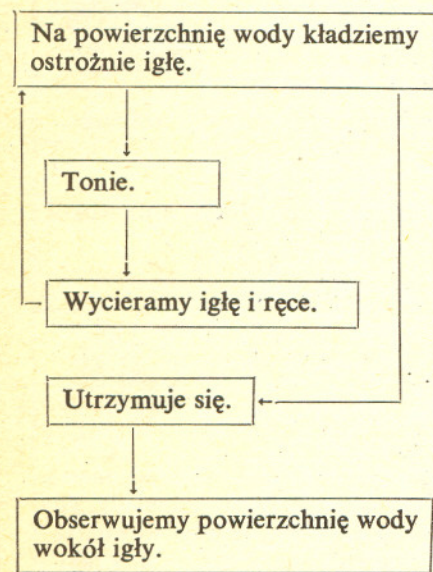
ZROBIMY ODKRYCIE

Przewodnik, w którym płynie prąd elektryczny, zachowuje się jak magnes. Nie będziemy niestety pierwsi. O 157 lat wyprzedził nas Hans Christian Oersted (czytaj: Ersted), fizyk duński. Nie powinno nas to zrażać, tym bardziej że robienie odkryć jest zawsze świetną zabawą. Na wstępie musimy się odpowiednio zaopatrzyć w przenikliwe spojrzenie na otaczający nas świat, podniosły nastrój oraz parę drobiazków. Oto one.

1. Głęboki talerz napełniony wodą. Ze względu na konsekwencje nie związane bezpośrednio z eksperymentem radzimy między talerzem a stołem, na którym go postawimy, umieścić ceratę.
2. Zwykła igła do szycia — raczej z tych mniejszych.
3. Kawałek cienkiego drutu — w terminologii naukowej ma to być przewodnik jednożyłowy o długości około 30 cm. Możemy go uzyskać, rozdzielając stary przewodnik dwużyłowy.
4. Co najmniej jedna płaska bateryjka 4,5 V. Dwie baterie rozszerzają możliwości badawcze.
5. Zwykły ołówek. Może być obgryziony.

Można uzupełnić zestaw aparatury zwykłym magnesem sztabkowym oraz, ale to tylko osoby wyjątkowo sumienne, zaopatrzyć się w zeszyt do notatek czyli w dziennik laboratoryjny. W dzienniku zanotujemy, co nas w doświadczeniu zdziwiło.

A oto schemat postępowania i rady nad czym warto się zastanowić.



Dlaczego ostrożnie, czy nie można rzucić?



Kiedy tonie?



Dlaczego igła i ręce muszą być suche?



Dlaczego nie tonie? Przecież jest cięższa od wody.

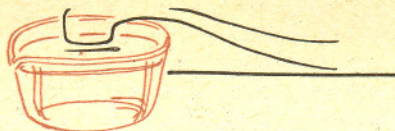
Czy na powierzchni wody jest jakaś błonka?

Igła leży (a nie pływa, bo jest cięższa od wody) na wodzie i najlżejsze tchnienie może ją poruszyć. O to właśnie chodziło — chcemy mieć coś (obiekt), co reaguje nawet na bardzo małe siły. Jeżeli masz magnes, zbliż go z daleka do igły, a zobaczysz jak żywo zareaguje. Chcemy zrobić odkrycie stwierdzając, że igła zareaguje również na przepływ prądu elektrycznego.

Przystępujemy do drugiej części doświadczenia.

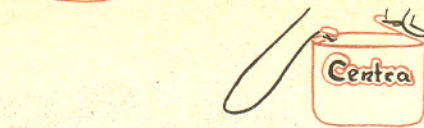


Równoległe do igły zbliżamy przewodnik nie połączony z baterią.



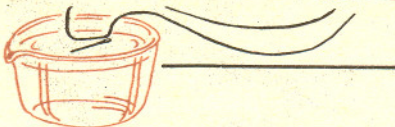
Czy igła reaguje na obecność przewodnika?

Przewodnik łączymy z baterijką (tylko na krótko).



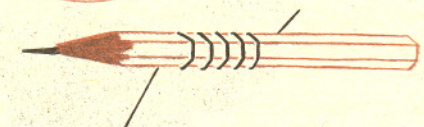
Dlaczego nie na stałe? Przecież to wygodniej.

Obserwujemy ruch igły.



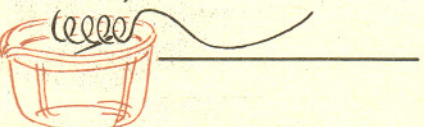
Pod jakim kątem ustawiła się igła do przewodnika?

Nawijamy drut na ołówek — tworzymy małą cewkę o kilku zwojach.



Czy można tak nawinąć, aby mimo przepływu prądu igła nie reagowała?

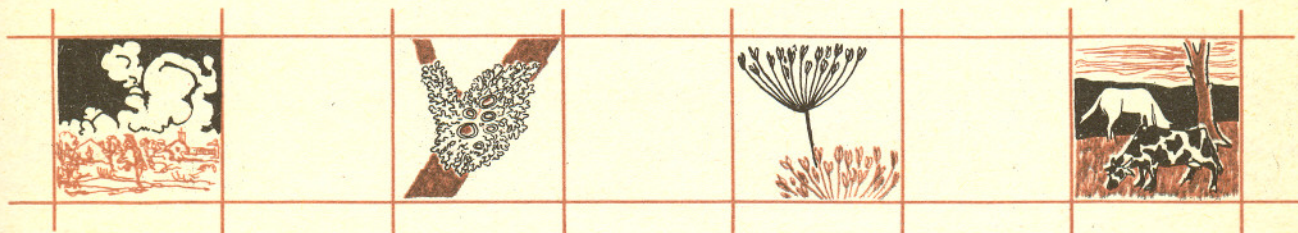
Zbliżamy cewkę, przez którą płynie prąd, do igły.



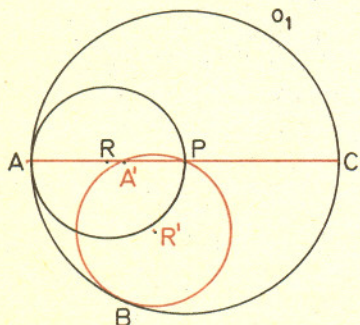
Czy igła reaguje teraz silniej niż poprzednio?

Doświadczenie możemy kontynuować, używając dwóch baterijek połączonych o tak zamiast jednej. Siłę oddziaływania na igłę można ocenić z szybkości ruchu igły. Możliwości doświadczeń są bardzo duże i równie dużo jest do zrozumienia i do przemyślenia. Nie dajemy odpowiedzi na postawione pytania? Znaleźć je można w szkolnym podręczniku fizyki do klasy 8-ej. Doświadczenie, w którym igła wychyla się pod wpływem prądu przepływającego w pobliskim przewodniku, było pierwszym, w którym wykazano własności magnetyczne prądu stałego. Ruch igły jest najprostszym przykładem pracy mechanicznej wykonanej przez prąd. Stąd już tylko krok do budowy silników elektrycznych. Dokonałiśmy rzeczywiście wielkiego odkrycia — czy szkoda, że spóźnieni?

Małą Deltę przygotowali: T. HOFMOKL, T. B. IWIŃSKI, P. NOWICKI



Rozwiązanie zadania z wrześnieowej Radio-Delta.



Zadanie: Po wewnętrznej stronie okręgu O_1 toczy się okrąg O_2 . Średnica okręgu O_2 jest dwukrotnie mniejsza niż średnica okręgu O_1 . Wykazać, że każdy punkt okręgu O_2 porusza się po pewnej średnicy okręgu O_1 .

Rozwiązanie:

Niech P będzie środkiem okręgu O_1 , a R środkiem okręgu O_2 . R' niech będzie środkiem O_2' — obrazu okręgu O_2 po przetoczeniu się po łuku \widehat{AB} . Punkt A' jest różnym od P punktem przecięcia średnicy \widehat{AC} okręgu O_1 z okręgiem O_2' . Dowód sprowadza się do wykazania, że długości łuków \widehat{AB} i $\widehat{A'B}$ są równe. Policzmy:

$$\widehat{AB} = AP \cdot \sphericalangle APB$$

$$\widehat{A'B} = BR' \cdot \sphericalangle A'R'B = 1/2 AP \cdot 2 \cdot \sphericalangle A'PB = AP \cdot \sphericalangle APB.$$

A oto terminy następnych audycji:

W październiku — 6 o godzinie 10⁰⁰ i 8 o godzinie 13⁰⁰

W listopadzie — 3 o godzinie 10⁰⁰ i 5 o godzinie 13⁰⁰

W grudniu — 1 o godzinie 10⁰⁰ i 3 o godzinie 13⁰⁰

Audycje są nadawane w programie IV PR.

Nasz adres: Polskie Radio

skrytka pocztowa 46

00-950 Warszawa

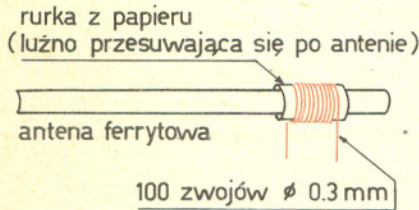
Radio-Delta

Laboratorium w domu

Dr Jan A. GAJ

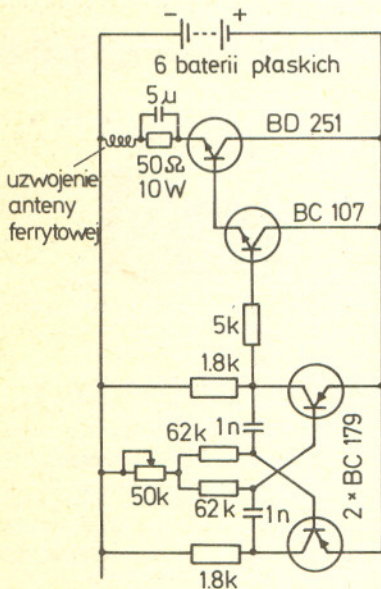
Uczymy się u nietoperza: ultradźwięki

Ultradźwięki: fale sprężyste o częstotliwości przekraczającej górną granicę słyszalności człowieka. Przeciętny człowiek słyszy dźwięki o częstotliwościach 16 Hz—16 kHz. Fale akustyczne o częstotliwościach niższych niż dolna granica noszą nazwę infradźwięków.

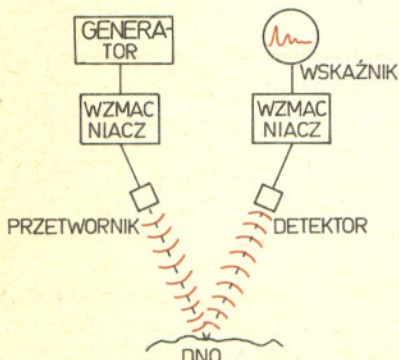


Rys. 1

Magnetostrykcja: zmiana wymiarów ciała pod wpływem pola magnetycznego. Typowymi materiałami magnetostrykcyjnymi są nikiel oraz ferryty.



Rys. 2



Rys. 3

Wiesz z pewnością, że sympatyczne to zwierzątko stosuje echosondę od czasów niepamiętnych, co znakomicie ułatwia mu omijanie przeszkód w czasie nocnych lotów. Nie możemy więc pretendować do oryginalności; mimo to warto popробować naśladownictwa i wytworzyć ultradźwięki samemu. Jaki będziemy mieli z nich pożytek? Zastrzegam się od razu, że echosondy nie zbudujemy. Wykonamy jednak kilka interesujących doświadczeń, związanych między innymi z zastosowaniami praktycznymi tych fal. Ale do rzeczy — zabieramy się do pracy, czyli

Wytwarzamy ultradźwięki

Wykorzystamy w tym celu zjawisko magnetostrykcji w pręcie ferrytowym. Znakomicie nadaje się do tego antena ferrytowa o rozmiarach ołówka. Do pobudzenia jej do drgań należy nawinąć na nią około 100 zwojów drutu miedzianego, w emalii lub innej izolacji, o średnicy 0,3 mm (rys. 1). Przez to uzwojenie będziemy przepuszczać prąd zmienny wytworzony przez generator składający się z czterech tranzystorów, paru oporników i kondensatorów, którego schemat przedstawia rys. 2. Jeżeli nie przeraża Cię perspektywa zmontowania dość prostego obwodu (a także — co nieraz może być główną trudnością — zdobycia części), otwiera się przed Tobą świat dźwięków niesłyszalnych. Czy rzeczywiście? No, przynajmniej dla człowieka — na przykład psy słyszą drgania o wyższej częstotliwości niż ludzie. I my potrafimy jednak znaleźć sposób na wykrycie ultradźwięków. Najprościej, trzymając pionowo pręcik ferrytowy nanieść na jego koniec kropelkę wody. Następnie (uprzednio włączyliśmy generator) zmieniamy częstotliwość potencjometrem P dopóki nie natrafimy na rezonans. Poznamy go po wrzeniu wody. W temperaturze pokojowej? — zapytasz z niedowierzaniem. Dlaczego nie — ultradźwięki biegnąc przez wodę wytwarzają na przemian obszary zgęszczenia i rozrzedzenia. W tych ostatnich (przy odpowiednim natężeniu ultradźwięków) ciśnienie spada poniżej ciśnienia pary nasyconej — a więc woda wrze. Drugim objawem silnych drgań ultradźwiękowych jest wrażenie śliskości pręta ferrytowego, gdy go trzymamy w ręce. Możemy też dotknąć jego końcem zawieszoną na nitce piłeczki pingpongowej — odskoczy ona pod wpływem drgań. Zapytasz pewnie mimo wszystko

A gdzie te zastosowania praktyczne?

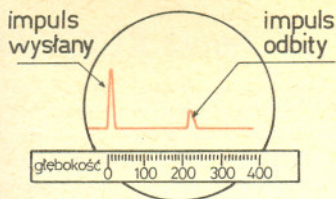
Z szeregu zastosowań ultradźwięków możesz spróbować wykonania płuczki ultradźwiękowej — zanurzając koniec oscylującego ferrytu do wody w probówce wprawiamy ciecz w silne drgania. W ten sposób można czyścić bardzo skomplikowane przedmioty z zakamarkami, do których trudno byłoby dostać się w inny sposób.

Być może, Czytelniku, zechcesz wybiec poza ograniczenia, jakie narzucają nam praktyczne możliwości laboratorium w domu i zapytasz o praktyczne zastosowania ultradźwięków, które byłoby trudno zrealizować w warunkach domowych.

Pierwszym urządzeniem, o którym była mowa już na wstępie, jest

ECHOSONDA

Urządzenie to służy, jak wiadomo, do pomiaru głębokości wody przez statki, a także do określania położenia różnych obiektów pod wodą: na przykład ławic ryb lub — w marynarce wojennej — okrętów podwodnych nieprzyjaciela. Zasadę działania echosondy ilustruje rysunek 3. Fale ultradźwiękowe są wysyłane przez zasilany z generatora przetwornik jako krótkie impulsy. Po odbiciu od dna lub innej przeszkody ultradźwięki powracają do statku. Teraz zostają zamienione przez detektor (często bywa nim ten sam przetwornik, który je wysłał) na drgania elektryczne i po wzmacnieniu doprowadzane są do wskaźnika, określającego na podstawie czasu, który upłynął od wysłania do powrotu impulsu ultradźwiękowego, odległość przeszkody od statku. Wskaźniki takie bywają różnej konstrukcji, między innymi stosuje się urządzenia rejestrujące wskazania echosondy na taśmie papierowej.



Ekran oscyloskopowego wskaźnika echosondy

Rys. 4

Rozstrzygnięcie konkursu samych zwycięzców z „Delty” 3/1977

Zadaniem konkursu było wykonanie i przysłanie działającego modelu pompki wodnej. Zadanie to zostało wykonane przez 5 uczestników. Niestety większość pompek działała w zasadzie symbolicznie, nie wytwarzając znaczącej różnicy ciśnień. Zdecydowanie na korzyść wyróżniła się pompka nadesłana przez kol. Zbigniewa Kamieniaka z Oleśnicy, która dawała podciśnienie około 0,2 at (co w przeliczeniu na obowiązujące jednostki wynosi około 20 kPa kilopaskali). Pompka wykonana była z rurek szklanych i korków polietylenowych. Pozostałe pompki wykonane były z różnych materiałów: szkła, metali i tworzyw sztucznych. Niektóre pompki przedstawiono na fotografiach. A oto pełna lista nagrodzonych:

- Zbigniew Kamieniak, 56-400 Oleśnica, ul. 22 Lipca 15 m. 4, zestaw do doświadczeń chemicznych
 - Tomasz Pawlus, 39-200 Dębica, ul. Głowackiego 13 m. 20,
 - Maciej Kaczmarczyk, 81-310 Gdynia, ul. Śląska 50 m. 3,
 - Jacek Pacholczyk, 00-927 Łódź ul. Limanowskiego 174/76 m. 1066,
 - Adam Kordaszewski, 32-300 Olkusz, ul. Skłodowskiej 29.
- nagrody książkowe.

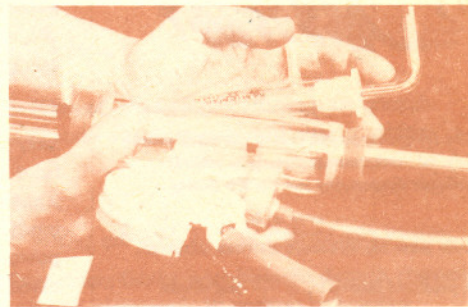
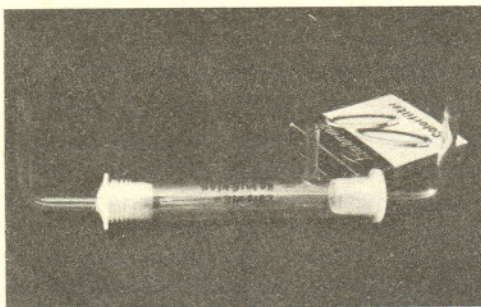
Jednym z pojęciowo najprostszymi rozwiązań jest użycie oscyloskopu, do którego doprowadza się zarówno impuls z generatora, jak i impuls odbiciowy z detektora. Przy określonej prędkości podstawy czasu, to jest poziomego ruchu plamki na ekranie oscyloskopu, odległość między impulsem wysłanym a odbitym na ekranie jest miarą głębokości wody, można więc zaopatrzyć ekran w skalę w metrach jak na rysunku 4.

Istnieje jeszcze jedno zastosowanie ultradźwięków bardzo bliskie opisanemu wyżej, a mianowicie

DEFEKTOSKOPIA ULTRADŹWIĘKOWA

Z pewnością słyszałeś, że przy pomocy ultradźwięków „prześwietla” się nieprzezroczyste przedmioty dla wykrycia w nich niewidocznych z zewnątrz defektów lub na przykład w celu dokonania pomiaru grubości blachy. Metoda echa, w której działanie defektoskopu jest najbardziej zbliżone do działania echosondy, jest tylko jedną z metod stosowanych w defektoskopii. Można też przepuszczać ultradźwięki przez badany przedmiot — obecność defektów objawi się w postaci zmniejszenia amplitudy odbieranego z przeciwnej strony przedmiotu sygnału. Metoda ta nosi nazwę metody cienia. Z pozostałych metod wymienię jeszcze metodę drgań własnych, w której uderzony przedmiot sam wytwarza drgania, a ich widmo jest analizowane przez defektoskop. Wymieniam ją dlatego, że każdy z nas jest w taki defektoskop wyposażony, z tą różnicą, że działa on w obszarze częstości dźwiękowych. Oczywiście, jest to nasze ucho! Kiedy kupujemy szklanki, sprzedawczyni stuka w każdą z nich dla upewnienia się, czy nie jest pęknięta. W ten sposób stosuje ni mniej ni więcej tylko metodę drgań własnych defektoskopii dźwiękowej.

Czy to już wszystko? — zapytasz. Zastosowań ultradźwięków jest jeszcze wiele, w szczególności zastosowań badawczych w fizyce i diagnostycznych w medycynie, zapewne jednak, zamiast o nich czytać, będziesz wolał zająć się doświadczeniami.



Rozwiązanie zadania F 46

Analizę wymiarową można stosować do wielkości mierzalnych, tj. takich, dla których istnieje sposób porównywania z pewną wielkością uznaną za jednostkę. Potencjał taką wielkością nie jest. Potencjał, podobnie jak energia potencjalna, jest określony z dokładnością do stałej addytywnej. Oznacza to, że sens fizyczny mają (czytaj: dają się zmierzyć) jedynie różnice potencjału, a nie sama wartość potencjału. Dodanie do wszystkich występujących w problemie potencjałów tej samej, dowolnej stałej nie zmienia żadnej mierzalnej wielkości fizycznej. Wprawdzie zdarza się, że czasami mówimy o potencjale nie podkreślając, że chodzi o różnice potencjałów, jednakże jest to tylko pewien skrót myślowy, który możemy stosować wtedy, gdy wiemy, względem czego ten potencjał mierzymy. Często przyjmuje się, że potencjał jest równy zeru w nieskończoności (np. dla ładunku punktowego), w środku układu współrzędnych (np. dla siły odśrodkowej) lub na powierzchni Ziemi (np. w radiotechnice). W rzeczywistości mówiąc o potencjale mówimy wtedy o różnicy potencjałów w rozważanym punkcie i w punkcie, którego potencjał — korzystając z możliwości dodawania dowolnej stałej — przyjęto za równy zeru. W związku z tym założenie, że w układzie CGS potencjał V pochodzący od naładowanej nici zależy tylko od η i r , jest nieprawdziwe. O potencjale w rozważanym układzie możemy mówić jedynie w znaczeniu omówionym wyżej, mając na myśli różnicę potencjałów w punkcie odległym od nici o r i w punkcie odległym od nici o r_0 , takie, że $V(r_0) = 0$. Tak rozumiany potencjał w układzie CGS powinien zależeć od η , r i r_0 . Najogólniejsza postać V , jaką można z tych parametrów zbudować, jest następująca

$$V = \text{stała} \cdot \eta \cdot f(r/r_0),$$

gdzie f jest bezwymiarową funkcją stosunku r/r_0 . Widzimy, że teraz nie dostajemy paradoksu. Wprawdzie nie dostajemy też konstruktywnej odpowiedzi, jeżeli chodzi o potencjał V , bo przecież nie znamy funkcji f , ale to już inna sprawa (w celu wyznaczenia postaci funkcji f należałoby skorzystać z addytywności potencjału — otrzymanie konkretnej postaci funkcji f przy użyciu jedynie metod analizy wymiarowej, bez wykorzystania wspomnianej wyżej addytywności potencjału lub innej własności równoważnej, jest niemożliwe).

W układzie SI oprócz rozważanych parametrów należałoby uwzględnić jeszcze przenikalność dielektryczną próżni ϵ_0 , która w SI nie jest wielkością bezwymiarową. Poza tym rozważania w układzie SI nie różnią się od rozważań w CGS. Koncepcja niniejszego zadania pochodzi od dra hab. Andrzeja Szymachy. Czytelników, którzy odkryją szczególnie ciekawe paradoksy, do jakich może prowadzić niefrasobliwe stosowanie analizy wymiarowej, prosimy o podzielenie się swymi uwagami z Redakcją.



Dla fal spełniających proste równanie falowe (np. fale elektromagnetyczne w próżni) związek dyspersyjny jest bardzo prosty

$$\omega = c \cdot k.$$

Fale takie nie wykazują zjawiska dyspersji,

a prędkość fazowa $v_f = \frac{\omega}{k}$ jest równa

prędkości grupowej $v_g = \frac{d\omega}{dk}$. Podobny

jest związek dyspersyjny dla fal dźwiękowych.

Jednakże te same fale elektromagnetyczne w ośrodku materialnym mają już związek dyspersyjny bardziej złożony i $v_f \neq v_g$.

Zjawiska nazywamy rezonansowymi, gdy zachodzą dla pewnych, ściśle określonych związków między częstościami drgań fal. Na przykład, w układach liniowych na pewno następuje rezonans przy częstościach pobudzenia równych częstości własnej układu. W układach nieliniowych relacje rezonansowe są bardziej złożone, a formuła (2) przedstawia najprostszą z nich.

W poprzednim artykule (Delta 4/1976) omawialiśmy podstawowe różnice pomiędzy własnościami rozwiązań równań liniowych i nieliniowych, a zwłaszcza analizowaliśmy szczegółowo dziwne własności rozwiązań równania Kortewega — de Vriesa. Teraz, kontynuując naszą dyskusję, zapoznamy się z pewnymi niecodziennymi własnościami układu oddziałujących fal. Rozważmy fale pewnego rodzaju (np. fale dźwiękowe, elektromagnetyczne, plazmowe, spinowe itd.) rozchodzące się w jakimś ośrodku. Jeśli fale te mają małą amplitudę, to mogą rozchodzić się niezależnie. Każda z fal opisywana jest wtedy pewnym równaniem liniowym (np. równaniem falowym). Jeśli możemy zaniedbać procesy przekazywania energii od fali do ośrodka, to fala o określonej częstości może być zapisana w postaci

$$(1) \quad a_k^\alpha \cos(\omega^\alpha(k)t - xk),$$

gdzie α — oznacza typ fali, a_k^α jest stałą w czasie amplitudą fali, zaś częstość $\omega^\alpha(k)$ zależy od

wektora falowego (długość fali $\lambda = \frac{2\pi}{k}$). Uwzględnienie przekazywania energii od fali do ośrodka

(np. zamiana drgań na ciepło) prowadzi do pojawienia się efektu tłumienia. Istnieją jednak układy fizyczne, w których energia przechodzi od ośrodka do pewnego typu fal. Fale takie narastają w czasie i są nazywane falami niestabilnymi. Wprowadziliśmy tutaj bardzo ważne pojęcie stabilności. Dla fizyka (matematycy oczywiście wprowadza to pojęcie inaczej, bardziej precyzyjnie) jakieś rozwiązanie (stan) będzie stabilne, jeśli małe zaburzenie stanu początkowego nie doprowadzi w czasie ewolucji do narastania różnicy między rozwiązaniem zaburzonym a niezaburzonym.

Wracając do naszych fal, oddziaływanie liniowe fal o małej amplitudzie z ośrodkiem można opisać równaniem

$$(2) \quad \frac{d}{dt} a_k^\alpha = -\gamma a_k^\alpha,$$

gdzie amplituda a_k^α oczywiście zależy teraz od czasu. Jeśli $\gamma > 0$, to mamy tłumienie, a gdy $\gamma < 0$ — niestabilność.

Związek pomiędzy częstością a wektorem falowym

$$(3) \quad \omega = \omega^\alpha(k)$$

nazywamy związkiem dyspersyjnym. W danym ośrodku może jednocześnie rozchodzić się wiele fal o różnych związkach dyspersyjnych.

Zupełnie inaczej wygląda sytuacja, gdy co najmniej jedna z fal ma dużą amplitudę. Fala taka modyfikuje ośrodek, w którym się rozchodzi. Na przykład fala dźwiękowa o dużej amplitudzie powoduje powstanie lokalnych (poruszających się z falą) zgęszczeń i rozrzedzeń, a więc do ośrodka jednorodnego wprowadza niejednorodności. W tak zmodyfikowanym ośrodku druga fala może poruszać się inaczej niż w ośrodku, w którym pierwsza fala nie istnieje. Zjawisko to nazywamy oddziaływaniem fal. Modyfikacja ośrodka jest w przybliżeniu proporcjonalna do amplitudy odpowiedniej fali. A więc w pierwszym przybliżeniu przyczynek do członu opisującego szybkości zmian amplitudy, pochodzący od oddziaływania fal, jest formą kwadratową amplitud oddziałujących fal.

Zajmiemy się tutaj bardzo specjalnym, tak zwanym rezonansowym, oddziaływaniem fal. Wyobraźmy sobie ośrodek, w którym rozchodzące się fale mają następującą własność: dla pewnych wektorów falowych k, k_1 spełniony jest warunek:

$$(4) \quad \omega^\alpha(k) = \omega^\beta(k_1) + \omega^\gamma(k - k_1),$$

gdzie indeksy α, β, γ oznaczają fale o różnych związkach dyspersyjnych (bądź fale mogą być identyczne). Takie częstości i odpowiadające im wektory falowe będziemy nazywać rezonansowymi. Istnienie rezonansu trzech fal pociąga za sobą głębokie konsekwencje. Jak zobaczymy, sprzężenie nieliniowe może całkowicie zmienić zachowanie amplitud fal w czasie. Dla uproszczenia naszych rozważań wyobraźmy sobie, że w naszym układzie istnieją jedynie trzy fale oznaczone odpowiednio indeksami $(\alpha, k), (\beta, k_1)$ oraz (γ, k_2) , gdzie α, β i γ oznaczają typ fali, zaś k, k_1 oraz k_2 odpowiednie wektory falowe. Ponieważ założyliśmy, że w układzie istnieją tylko trzy fale, możemy opuścić bez możliwości pomyłki indeksy wektorów falowych. Będziemy wtedy mogli napisać następujące równania różniczkowe opisujące amplitudy tych fal:

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} a_\alpha &= -\gamma_\alpha a_\alpha + A_\alpha^{\beta\delta} a_\beta a_\delta \\ \frac{d}{dt} a_\beta &= -\gamma_\beta a_\beta + A_\beta^{\alpha\delta} a_\alpha a_\delta \\ \frac{d}{dt} a_\delta &= -\gamma_\delta a_\delta + A_\delta^{\alpha\beta} a_\alpha a_\beta. \end{aligned}$$

Przyjmijmy na początek dalsze uproszczenie, a mianowicie połączmy wszystkie $\gamma_\alpha = 0$, co oznacza, że fale nie są tłumione liniowo. Zauważmy teraz, że przez proste podstawienie

$$(6) \quad a_\alpha = \frac{x}{\sqrt{|A_\beta^{\alpha\delta}| |A_\delta^{\alpha\beta}|}}, \quad a_\beta = \frac{y}{\sqrt{|A_\alpha^{\beta\delta}| |A_\delta^{\alpha\beta}|}}, \quad a_\delta = \frac{z}{\sqrt{|A_\beta^{\alpha\delta}| |A_\alpha^{\beta\delta}|}}$$

równania (5) przekształcimy do dużo prostszej postaci. W podstawieniu (6) symbolem $|A|$ oznaczyliśmy wartość bezwzględną liczby A . Układ równań można teraz zapisać w postaci:

$$(7) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \sigma_1 yz \\ \dot{y} &= \sigma_2 xz \\ \dot{z} &= \sigma_3 xy, \end{aligned}$$

gdzie kropka nad odpowiednią amplitudą oznacza pochodną względem czasu, a współczynniki σ_i ($i = 1, 2, 3$) mogą przyjmować jedynie wartości ± 1 . Zauważmy tutaj, że (dla dodatnich amplitud x, y, z) $\sigma = +1$ oznacza narastanie, zaś $\sigma = -1$ tłumienie. Istnieją jedynie dwa istotnie różne przypadki, gdy wszystkie σ_i są tego samego znaku oraz gdy jedna z nich jest innego znaku. Zachowanie się rozwiązań jest w obu tych przypadkach diametralnie różne.

Zobaczmy teraz, że pewne funkcje naszych amplitud są stałe w czasie. Aby to zauważyć, pomnożmy stronami równania (7) odpowiednio przez x, y i z . Otrzymamy wówczas następujący układ równań:

$$(8) \quad \begin{aligned} x\dot{x} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} x^2 = \sigma_1 xyz \\ y\dot{y} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} y^2 = \sigma_2 xyz \\ z\dot{z} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} z^2 = \sigma_3 xyz. \end{aligned}$$

Zauważmy, że lewe strony równań są proporcjonalne. Kombinując odpowiednio równanie pierwsze z drugim oraz pierwsze z trzecim, otrzymujemy dwa związki:

$$(9) \quad \begin{aligned} \sigma_2 \frac{d}{dt} x^2 - \sigma_1 \frac{d}{dt} y^2 &= 0 \\ \sigma_3 \frac{d}{dt} x^2 - \sigma_1 \frac{d}{dt} z^2 &= 0. \end{aligned}$$

Związki te można scałkować i wtedy otrzymamy dwie zasady zachowania (funkcje zmiennych dynamicznych — w naszym przypadku amplitud — są stałe w trakcie ewolucji). Nasze zasady zachowania zapiszemy następująco:

$$(10) \quad \begin{aligned} \sigma_2 x^2 - \sigma_1 y^2 &= C_1, \\ \sigma_3 x^2 - \sigma_1 z^2 &= C_2, \end{aligned} \quad \text{gdzie } C_1 \text{ i } C_2 \text{ są stałymi całkowania.}$$

Znalezienie i zbadanie stałych ruchu jest pierwszą czynnością fizyka przy badaniu danych równań. Badania takie dostarczają dużo informacji o własnościach rozwiązań. W naszym przypadku widać, że jeśli σ_1 jest innego znaku niż σ_2 i σ_3 , to związki (10) możemy przepisać

$$(11) \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= C_1' \\ x^2 + z^2 &= C_2' \end{aligned}$$

Łatwo teraz wywnioskować, że jeżeli amplitudy x, y, z w chwili $t = 0$ były ograniczone, to będą ograniczone dla każdej chwili czasu $t > 0$ i wtedy modyfikacja ewolucji liniowej nie jest dramatyczna.

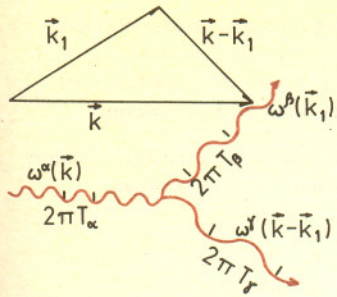
Natomiast w sytuacji, gdy wszystkie σ_i ($i = 1, 2, 3$) są tego samego znaku, obraz będzie całkowicie różny. Nasze zasady zachowania można przepisać w postaci:

$$(12) \quad \begin{aligned} |x|^2 - |y|^2 &= C_1'' \\ |x|^2 - |z|^2 &= C_2''. \end{aligned}$$

Teraz nie tylko nasze stałe ruchu nie muszą być dodatnie, ale nie możemy już dłużej wnioskować o ograniczoności amplitud. Można sobie bowiem doskonale wyobrazić, że amplitudy rosną nieograniczenie, a ich kombinacje (12) są ograniczone. Jak za chwilę się przekonamy, nasze równania (7) opisują właśnie taki wzrost. Można skorzystać z zasad zachowania do wyeliminowania zmiennych y i z . Otrzymamy wtedy równanie pierwszego rzędu o zmiennych rozdzielonych, które łatwo można scałkować. Wtedy jednakże otrzymamy rozwiązanie w postaci uwikłanej i wystąpią tam całki tak zwane eliptyczne. Dyskusja takiego rozwiązania jest trudna i zawiła. Dlatego podamy tutaj rozwiązanie szczególne, które jest bardzo proste i ma wszystkie własności rozwiązania problemu w przypadku ogólnym. Dla ustalenia uwagi połączmy $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 1$. Łatwo sprawdzić, że funkcje

$$(13) \quad x(t) = y(t) = z(t) = \frac{1}{t_0 - t}$$

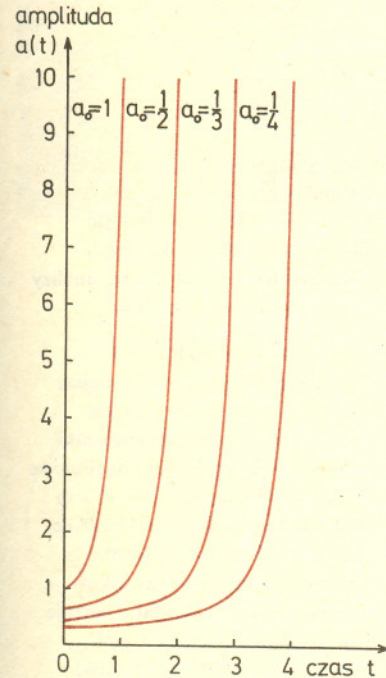
są rozwiązaniami naszych równań (6), z bardzo specjalnym warunkiem początkowym:



Przykład relacji rezonansowej

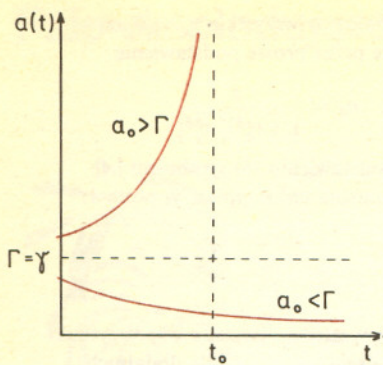
$$\begin{aligned} \omega^\alpha(k) &= \frac{2\pi}{T_\alpha} = \frac{1}{6} \\ \omega^\beta(k_1) &= \frac{2\pi}{T_\beta} = \frac{1}{10} \\ \omega^\gamma(k-k_1) &= \frac{2\pi}{T_\gamma} = \frac{1}{15} \end{aligned}$$

T oznacza okres



Zależność amplitud od czasu opisana wzorem (13) dla

$$a_0 = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}.$$



Zależność amplitud od czasu w obecności tłumienia

$$a = e^{-\gamma t} \frac{1}{\tau_0 - \tau}$$

$$\tau = \frac{1}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t})$$

$$\tau_0 = \frac{1}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t_0})$$

$$(14) \quad x(0) = y(0) = z(0) = \frac{1}{t_0},$$

co odpowiada równym zero stałym C_1'' , C_2'' we wzorze (12). Jak więc widzimy, nasze równanie ma rozwiązanie, które staje się nieograniczone dla skończonej chwili czasu $t = t_0$. Jak już mówiliśmy, zachowanie takie jest możliwe jedynie dla układu nieliniowego. Ze względu na ten nieograniczony wzrost w chwili t_0 , zachowanie takie nosi nazwę niestabilności eksplozyjnej.

Wróćmy teraz do sytuacji, w której istnieje tłumienie liniowe. Znow dla uproszczenia przyjmijmy, że wszystkie współczynniki (dekrementy) tłumienia są równe. Rozpatrzmy układ równań:

$$(15) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= -\gamma x + yz \\ \dot{y} &= -\gamma y + xz \\ \dot{z} &= -\gamma z + xy \end{aligned}$$

Łatwo możemy zauważyć, że przez zamianę zmiennych:

$$(16) \quad \tau = \frac{1}{\gamma} \{1 - e^{-\gamma t}\} \text{ oraz } \begin{aligned} x(\tau) &= e^{-\gamma t} X(\tau) \\ y(\tau) &= e^{-\gamma t} Y(\tau) \\ z(\tau) &= e^{-\gamma t} Z(\tau) \end{aligned}$$

układ można zapisać w postaci:

$$(17) \quad \begin{aligned} \frac{d}{d\tau} X(\tau) &= Y(\tau) Z(\tau) \\ \frac{d}{d\tau} Y(\tau) &= X(\tau) Z(\tau) \\ \frac{d}{d\tau} Z(\tau) &= X(\tau) Y(\tau). \end{aligned}$$

Równania te są identyczne z układem (7), którego rozwiązania uprzednio badaliśmy. Możemy więc rozwiązania napisać w postaci:

$$(18) \quad X(\tau) = Y(\tau) = Z(\tau) = \frac{1}{\tau_0 - \tau} \quad \tau = \frac{1}{\gamma} \{1 - e^{-\gamma t}\}.$$

Zwróćmy tu uwagę na istotną różnicę w stosunku do rozwiązań (13) diskutowanych uprzednio.

A mianowicie zauważmy, że zmienna τ zmienia się w skończonych granicach $(0, \frac{1}{\gamma})$. Tak więc, jeśli wartości początkowe, które wyznaczają czas eksplozji

$$(19) \quad X(0) = Y(0) = Z(0) = \frac{1}{\tau_0}$$

są mniejsze od wartości progowej

$$(20) \quad |X(0)| = |Y(0)| = |Z(0)| \leq \gamma,$$

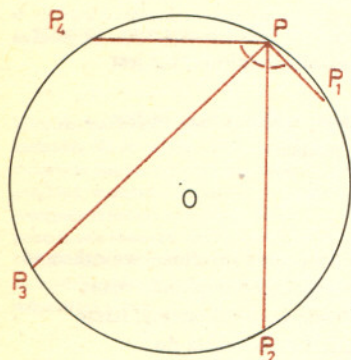
to rozwiązanie jest ograniczone dla wszystkich czasów. Dopiero gdy wartości początkowe amplitud przekroczą wartość progową (20), rozwiązanie eksploduje. Warto tu dodać, że podstawowe wnioski, takie jak: istnienie rozwiązania nieograniczonego oraz pojawienie się efektu progowego przy obecności tłumienia zostało potwierdzone w przypadkach ogólnych (różne dekrementy tłumienia lub szersza klasa warunków początkowych) bądź na drodze analizy numerycznej, bądź też w niektórych przypadkach przez analizę rozwiązań analitycznych.

Wydawać by się mogło, że omawiany problem jest problemem czysto akademickim. Jest przecież sprawą oczywistą, że można pisać równania o rozwiązaniach mających najdziwniejsze własności. Jednak w naszym wypadku nie jest aż tak źle. Istnieje szereg zjawisk fizycznych, w których oddziaływania nieliniowe fal odgrywają decydującą rolę. Omówimy tutaj jeden taki przykład, który odgrywa ważną rolę we współczesnej fizyce plazmy. Chodzi mi tutaj o nieliniowe oddziaływanie silnej fali elektromagnetycznej (mam tu na myśli np. wiązkę lasera dużej mocy) z falami plazmowymi. Takie oddziaływanie można sobie wyobrazić w ten sposób, że silne pole elektromagnetyczne fali polaryzuje plazmę i fale plazmowe będą się rozchodziły w ośrodku zmodyfikowanym w stosunku do plazmy bez pola. Uwzględniając tę modyfikację warunków propagacji fal plazmowych, znajdujemy współczynniki nieliniowego oddziaływania fal. Okazuje się, że w tym szczególnie ważnym wypadku również jest możliwy rezonans, tyle tylko, że czterech, a nie trzech fal. Równania są podobne, a co najważniejsze, występuje niestabilność eksplozyjna. Nie należy jednak zapominać, że w przyrodzie występują fale różnych długości, które ze sobą jednocześnie oddziałują. Dlatego rozważania o oddziaływaniu jedynie trzech (czterech) fal są daleko idącą idealizacją sytuacji fizycznej, a pojawienie się niestabilności eksplozyjnej — jedynie wskazówką, że oddziaływania nieliniowe mogą prowadzić do nowych ciekawych efektów.



Rozwiązanie zadania M 138

Zauważmy, że z założenia, iż wymienione w zadaniu punkty są różne, wynika, że rozłożone są one na okręgu w podanej kolejności. Niech O będzie środkiem okręgu.



Z twierdzenia o kącie wpisanym wynika,

$$\text{że } \angle P_1OP_2 = \angle P_2OP_3 = \angle P_3OP_4 = \frac{\pi}{2}.$$

Trójkąty P_1OP_2 , P_2OP_3 , P_3OP_4 a także P_4OP_1 są więc przystającymi trójkątami prostokątnymi, skąd $P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_4$, $\angle P_1P_2P_3 = \angle P_1P_2O + \angle OP_2P_3 =$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ i podobnie } \angle P_1P_3P_4 = \frac{\pi}{2}$$

zatem $P_1P_2P_3P_4$ jest kwadratem.

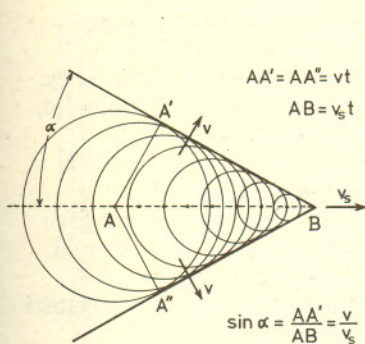
Tak na przykład badając nieliniowe oddziaływanie fali lasera z falami plazmowymi (o różnych długościach fal) dochodzimy do wniosku o istnieniu efektywnego mechanizmu przekazywania energii od fali lasera do plazmy. Na podstawie skomplikowanych rachunków mechanizm ten można sobie wyobrazić jako tworzenie się obszarów o obniżonej gęstości, które podczas ewolucji kurczą się gwałtownie. Zaburzenia zaś o małych wymiarach (krótkie fale) szybko się rozpadają (dysypują), a ich energia przechodzi w energię termiczną plazmy. Omówiliśmy tutaj ten przykład dosyć szczegółowo ze względu na jego znaczenie przy próbach otrzymania kontrolowanej reakcji termojądrowej na drodze grzania plazmy laserem. Jednak niestabilności omawianego typu odgrywają istotną rolę i w innych działach fizyki. Wydaje się, że zjawiska takie jak turbulencja i przejścia fazowe są wywołane podobnym mechanizmem. Widzimy więc, że omawiane oddziaływanie rezonansowe jest z jednej strony pięknym przykładem dziwnego zachowania układów nieliniowych, a z drugiej strony występuje w wielu zjawiskach fizycznych.

Promieniowanie Czerenkowa

Doc. dr Jerzy BARTKE



Promieniowanie noszące obecnie nazwę promieniowania Czerenkowa ma bardzo interesującą historię. Maria Skłodowska-Curie i inni badacze promieniotwórczości zaobserwowali już na początku naszego stulecia, że roztwór soli radu oraz różne substancje przezroczyste umieszczone w pobliżu silnych preparatów promieniotwórczych emitują niebieskawe światło. Wiedzano już wtedy, że pod wpływem promieniowania ciał radioaktywnych wiele substancji świeci (zjawiska fluorescencji i fosforescencji), toteż nie przywiązywano do tego świecenia specjalnej wagi. Dopiero w 1934 r. P.A. Czerenkow rozpoczął systematyczne badanie tego zjawiska i odkrył szereg interesujących jego własności. Stwierdził on, że świecenie powstaje we wszystkich przezroczystych cieczach i ciałach stałych i że jest silnie asymetryczne — emitowane w kierunku promieniowania padającego. Własności te oraz polaryzacja badanego świecenia wskazywały na to, że nie jest to żaden ze znanych rodzajów luminescencji. Ponadto Czerenkow dowiódł, że świecenie powodowane jest przez elektrony wybijane z atomów przez promieniowanie gamma — tzw. elektrony komptonowskie (od nazwiska angielskiego fizyka Comptona), i natężenie świecenia jest proporcjonalne do długości przebiegu elektronów w ośrodku. I.M. Frank i I.E. Tamm podali w 1937r. teorię tego zjawiska opartą na klasycznej elektrodynamice. Pokazali oni, że mamy tu do czynienia z nowym rodzajem promieniowania, które jest emitowane w przypadku, gdy cząstka naładowana porusza się w ośrodku z prędkością większą niż prędkość rozchodzenia się światła (a więc fali elektromagnetycznej) w tym ośrodku. Z podobną sytuacją, w której również źródło zaburzenia porusza się w ośrodku szybciej niż powodowane przezeń zaburzenie, spotkaliśmy się już w aerodynamice, na przykładzie ruchu ciała w powietrzu z prędkością większą od prędkości dźwięku (pociski, samoloty ponaddźwiękowe). Była o tym mowa w numerze 10/1975 Delt. Sytuację wyjaśnia rys. 1.



Rys. 1

W aerodynamice stożek ten nosi nazwę stożka Macha.

Oznaczmy przez v_s prędkość ruchu źródła, a przez v prędkość rozchodzenia się fali. Po upływie pewnego czasu t źródło fali przemieści się z A do B (odcinek $AB = v_s \cdot t$), a fala emitowana w punkcie A dojdzie do punktu A' (odcinek $AA' = v \cdot t$). Obwiednią wszystkich kolejno emitowanych fal jest stożek, którego oś pokrywa się z trajektorią źródła, a kąt rozwarcia spełnia zależność:

$$\sin \alpha = \frac{AA'}{AB} = \frac{v \cdot t}{v_s \cdot t} = \frac{v}{v_s}$$

Przenosząc te rozważania do przypadku cząstki poruszającej się z prędkością $v_s = \beta c$ w ośrodku optycznym o współczynniku załamania światła n , mamy $v = c/n$, $\sin \alpha = 1/\beta n$. Kąt emisji promieniowania względem kierunku ruchu cząstki wynosi $\vartheta = 90^\circ - \alpha$, mamy zatem

$$\cos \vartheta = \frac{1}{\beta n}$$

Wzór ten nosi nazwę wzoru Czerenkowa.



Rozwiązanie zadania M 137

Łatwo zauważyć, że jako zbiór A można przyjąć zbiór liczb parzystych P , jako B zaś zbiór liczb nieparzystych N .

Wykażemy teraz, że dla każdej pary zbiorów A, B spełniającej warunki zadania jest $A \cap B = \emptyset$. Gdyby bowiem istniała liczba całkowita c należąca do $A \cap B$, to dla ustalonej dowolnej liczby całkowitej x byłoby $x - c \in A$ lub $x - c \in B$. W każdym jednak przypadku $(x - c) + c = x \in A \cap B$. Byłoby więc $Z \subset A \cap B$, a więc $A = B = Z$, skąd wynikałoby, że $Z - A = Z - B = \emptyset$, co przeczy warunkom zadania.

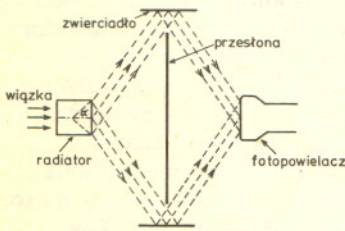
Niech teraz p będzie dowolną liczbą parzystą.

Ponieważ $p = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}p$ i $\frac{1}{2}p$ jest liczbą całkowitą, więc p jako suma liczb należących do tego samego zbioru należy do A .

Wykazaliśmy więc, że zawsze jest $P \subset A$.

Gdyby do A należała jakaś liczba nieparzysta n_0 , to ponieważ dla dowolnej liczby nieparzystej n istnieje taka liczba parzysta p , że $n = n_0 + p$, więc wobec $n_0 \in A, p \in A$ byłoby $n \in A$, czyli $N \subset A$, a zatem $Z = N \cup P \subset A$.

Wykazaliśmy więc, że $A = P$, a ponieważ $A \cap B = \emptyset, A \cup B = Z$, zatem $B = N$.



Rys. 2



Rozwiązanie zadania M 136

Oznaczmy wierzchołki czworokąta literami A, B, C, D . Niech $BC = a, CA = b, AB = c, DA = d, DB = e, DC = f$. Wspólną wartością obwodów ścian niech będzie x . Mamy więc

- (1) $a + b + c = x,$
- (2) $b + d + f = x,$
- (3) $c + d + e = x,$
- (4) $a + e + f = x.$

Z równań (1) i (2) oraz (3) i (4) wynika

$$\begin{aligned} a + c &= d + f, \\ c + d &= a + f, \end{aligned}$$

skąd odejmując stronami otrzymujemy równość $a - d = d - a$, a więc $a = d$. Postępując podobnie z równaniami (1) i (3) oraz (2) i (4) otrzymujemy $b = e$, a następnie z równań (1) i (4) oraz (2) i (3) wynika, że $c = f$.

Udowodniliśmy więc, że przeciwległe krawędzie czworokąta mają równe długości, skąd natychmiast wynika, że ściany są trójkątami przystającymi.

Istnienie takich cząstek nie jest sprzeczne ze szczególną teorią względności pod warunkiem, że cząstki te poruszają się zawsze szybciej niż światło w próżni.

Teoria Franka i Tamma podaje także rozkład widmowy promieniowania i wyjaśnia jego polaryzację (całkowita polaryzacja w płaszczyźnie zawierającej tor cząstki i kierunek emitowanego kwantu światła). Teoria ta została w pełni potwierdzona przez dalsze badania doświadczalne. Czerenkow, Frank i Tamm otrzymali w roku 1958 nagrodę Nobla.

Fakt, że promieniowanie Czerenkowa zachodzi tylko dla cząstek poruszających się z prędkością większą od pewnej prędkości granicznej (równej prędkości rozchodzenia się fali świetlnej w ośrodku, $v = c/n$), sugeruje możliwość wykorzystania tego zjawiska do detekcji szybkich cząstek. Zbudowany na tej zasadzie licznik będzie przy tym zupełnie nieczuły na ogromne nawet tło cząstek o prędkościach mniejszych niż $v = c/n$. Kawalek jakiegokolwiek przezroczystej substancji lub naczynie z cieczą lub gazem „ogładane” przez fotopowielacz będzie stanowić najprostszy typ licznika Czerenkowa — tzw. licznik progowy. Próg licznika będzie oczywiście określony przez współczynnik załamania światła zastosowanej substancji „radiatora”. Zauważmy, że za pomocą kilku liczników progowych o różnych własnościach możemy liczyć osobno cząstki różnego rodzaju w wiązce „mieszanej”. Jest to typowa sytuacja spotykana w fizyce wysokich energii. Spośród produkowanych w zderzeniach w tarczy akceleratora cząstek można, stosując odchylenie w polu magnetycznym, wydzielić „wiązkę” o określonym pędzie p . Wiązka taka zawierać będzie cząstki różnych rodzajów — np. mezony π^+ , mezony K^+ i protony. Ze względu na różne masy tych cząstek ich prędkości będą jednak się różnić: mezony π będą najszybsze, protony najwolniejsze. Zastosowanie trzech progowych liczników Czerenkowa o tak dobranych własnościach, że jeden będzie czuły tylko na mezony π , drugi na mezony π i K , a trzeci na wszystkie trzy rodzaje cząstek, pozwala na określenie składu wiązki, a w połączeniu z innymi detektorami (np. licznikami scyntylacyjnymi czy też komorami iskrowymi) — np. na badanie oddziaływań cząstek jednego określonego typu w takiej „mieszanej” wiązce bez konieczności budowy kosztownych układów separacji według mas.

Korzystając z własności kierunkowych promieniowania Czerenkowa (porównaj rys. 1) można zbudować licznik czuły na cząstki, których prędkości zawarte są w pewnym określonym przedziale, $\beta_{\min} < \beta < \beta_{\max}$. W tym celu należy rejestrować jedynie promieniowanie emitowane w przedziale kątów $\vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2$, gdzie ϑ_1, ϑ_2 określone są warunkami

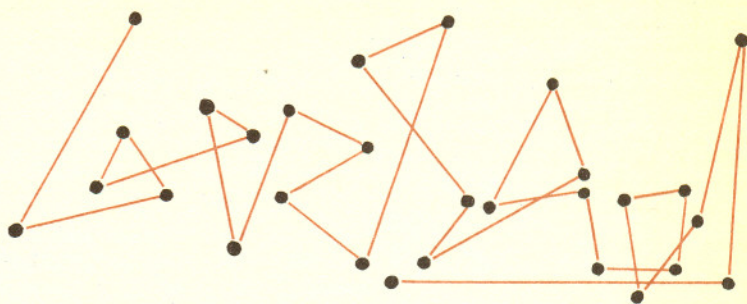
$$\cos \vartheta_1 = \frac{1}{\beta_{\min} \cdot n}, \quad \cos \vartheta_2 = \frac{1}{\beta_{\max} \cdot n}.$$

Rysunek 2 pokazuje najprostszy typ takiego licznika, zwanego różnicowym. Centralna przesłona i cylindryczne zwierciadło powodują, że do fotopowielacza dochodzi jedynie promieniowanie Czerenkowa emitowane w pewnym przedziale kątów. Liczniki z ogniskowaniem światła za pomocą zwierciadeł wklęsłych i układów soczewek pozwalają na osiągnięcie bardzo wysokiej zdolności rozdzielczej, dochodzącej w najlepszych konstrukcjach do $\Delta\beta/\beta \cong 10^{-5}$. Istnieje jeszcze trzeci typ licznika Czerenkowa — tzw. licznik całkowitego pochłaniania. Takie liczniki używane są do pomiaru całkowitej energii kwantów gamma lub elektronów przez rejestrację promieniowania Czerenkowa pochodzącego od wtórnych elektronów. Jeżeli wszystkie elektrony wtórne zostaną w liczniku zatrzymane, to wielkość obserwowanego impulsu będzie proporcjonalna do całkowitej energii pierwotnego kwantu czy też elektronu.

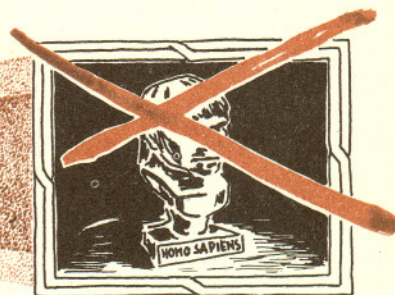
Licznik całkowitego pochłaniania może więc służyć jako spektrometr energii. Jednym z pierwszych eksperymentów, w którym zastosowano liczniki Czerenkowa, był sławny eksperyment przy akceleratorze „Bevatron” w Berkeley, w którym wykazano istnienie antyprotonów (1955 r.). Warto może przypomnieć, że w badanej wiązce na 1 antyproton przypadało aż 50 000 mezonów π^- ! W chwili obecnej licznik Czerenkowa stał się jednym z ważnych narzędzi fizyki wysokich energii. Ze względu na prędkości cząstek bliskie prędkości światła ($\beta \cong 1$) stosuje się przeważnie liczniki gazowe. Zmieniając ciśnienie gazu w liczniku można w dogodny sposób zmieniać jego własności. Niektóre liczniki tego typu są bardzo duże — np. w Europejskim Ośrodku Badań Jądrowych CERN w Genewie zainstalowano ostatnio gazowy licznik Czerenkowa o objętości 50 m³, czyli o rozmiarach średniego pomieszczenia mieszkalnego.

Na zakończenie ciekawostka. Niektórzy teoretycy dopuszczają możliwość istnienia cząstek, tzw. tachionów, poruszających się szybciej niż światło w próżni. Cząstki takie emitowałyby promieniowanie Czerenkowa także w próżni! To właśnie zjawisko postanowiono wykorzystać w eksperymencie mającym na celu wykrycie tachionów, wynik eksperymentu był jednak negatywny.

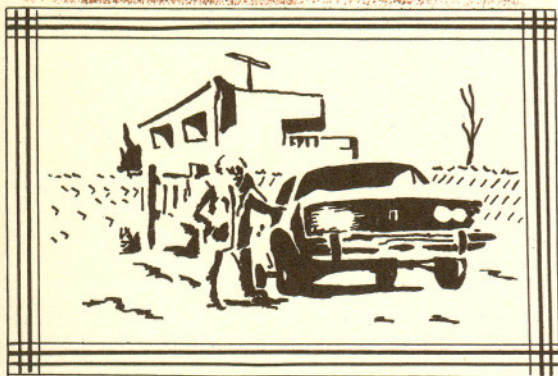
Ciało, na które nie działa siła, porusza się ruchem jednostajnym, prostoliniowym. Tak brzmi pierwsza zasada dynamiki klasycznej, zwana zasadą bezwładności. Czy nieklasyczne, kwantowe cząstki elementarne również są bezwładne i nie zmieniają swego ruchu przy braku sił zewnętrznych? Zbiór wyników bardzo dokładnych pomiarów położenia elektronu wykonanych w jednakowych odstępach czasu może wyglądać tak.



Pomiary dla cząstki klasycznej układałyby się na linii prostej i leżałyby w równych odstępach. A tu nie dostajemy ani ruchu jednostajnego, ani prostoliniowego. Mało tego — pomiary powtórzone dla drugiego takiego samego elektronu układałyby się na zupełnie innej linii łamanej. Tak chce mechanika kwantowa, a właściwie fundamentalna w niej zasada nieoznaczoności. Dokładny pomiar położenia elektronu wprowadza dużą nieokreśloność jego pędu, czyli prędkości. Prawdopodobieństwo tego, że pęd elektronu będzie miał wartość zmieniającą się w szerokim zakresie, staje się stosunkowo duże. Tak więc pojęcie toru elektronu nie ma w mechanice kwantowej sensu. Nie ma też sensu np. model atomu Bohra, w którym elektrony poruszają się po torach kołowych. A co to jest tor klasyczny? Dostajemy go, gdy mierzymy położenie niezbyt dokładnie — średnio bowiem elektron porusza się bezwładnie po prostej. Warto na zakończenie zauważyć, że opisanego wyżej doświadczenia nikt nie przeprowadził, a wyniki jego przewidzieliśmy jedynie na podstawie teorii świetnie opisującej inne fakty doświadczalne.



$$c^2 = a^2 + b^2$$



Słynne twierdzenie Pitagorasa obowiązujące w geometrii euklidesowej. Wszyscy znają jego dowód. Podamy jeszcze jeden dowód prostszy od powszechnie cytowanego. Skorzystamy przy tym z analizy wymiarów. W geometrii płaskiej trójkąt prostokątny ABC jest całkowicie wyznaczony przez jeden z boków (np. c) i kąt α . Pole takiego trójkąta musi więc być dane wzorem

$$S_{ABC} = c^2 f(\alpha),$$

gdzie $f(\alpha)$ jest pewną bezwymiarową funkcją bezwymiarowego parametru α . Podobnie $S_{ADC} = b^2 f(\alpha)$, $S_{BDC} = a^2 f(\alpha)$ z tą samą funkcją f . Ale $S_{ABC} = S_{ADC} + S_{BDC}$ i dzieląc stronami przez $f(\alpha)$ dostajemy nasze twierdzenie (porównaj Delta 2/1976).