delta

SPIS TREŚCI

W następnym numerze:

Esej o informacji

„Delta"
matematyczno-fizyczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i Polskiego Towarzystwa Fizycznego wydawany przy poparciu Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Adres Redakcji
ul. Hoża 69 pok. 151,
00-681 Warszawa

Zakład Narodowy im. Ossolińskich — Wydawnictwo Wrocław, Oddział w Warszawie
Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark. wyd.; 2,50 ark. druk.; papier offsetowy III kl. 80 g. 61 × 86
Wydrukowano w Drukarni im. Rewolucji Październikowej Warszawa, ul. Mińska 65.
Nr zam. 590/77 F-11

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60,— cena prenumeraty półrocznej zł 30,—

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch" oraz urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach:
— do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i cały rok następny
— do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego.
Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienie w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch".
Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW oraz prenumeratorzy indywidualni, zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.
Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch", Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTĘ":

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.
Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.
Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, konto PKO nr 1-6-100312

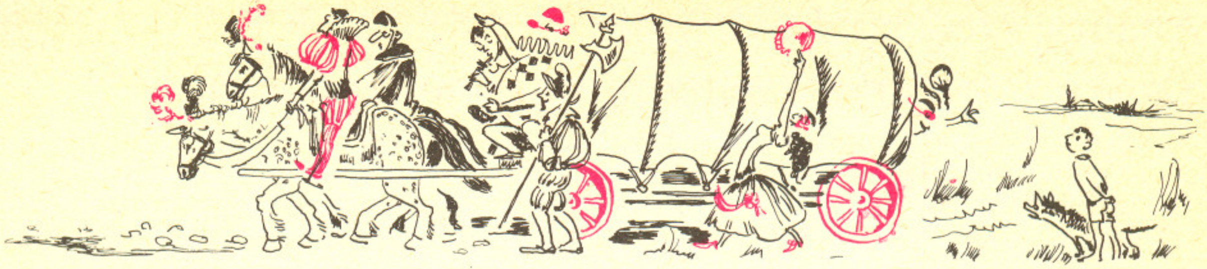
w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

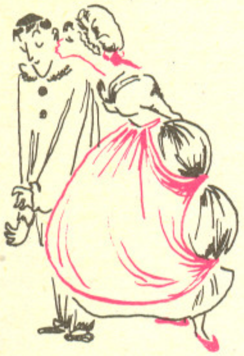
Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona" Krakowskie Przedmieście 7 00-068 Warszawa, Poland or with
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland.
— Earlscourt Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain,
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia.

Cena 1 egzemplarza zł 5.— nr indeksu 35723/35550



Atomista Demokryt i inni

Dr Marek KORDOS



Żyjący na przełomie V i IV w. p.n.e. grecki filozof (czyli uczony) Demokryt z Abdery był, jak wiadomo, twórcą teorii atomistycznej. „Mniej wiadomo" jednak, że teoria ta była pewną koncepcją matematyczną i o tyle tylko dotyczyła budowy materii, o ile matematyka materię (wówczas) opisywała. Chodziło mianowicie o to, że każda figura geometryczna (ewentualnie można w tym miejscu powiedzieć — obiekt materialny) ma się składać z drobnych, bardzo drobnych części niepodzielnych, która to niepodzielność w języku greckim określana jest słowem atomos (znamy je: *a* — to przedrostek używany do dziś w różnych językach jako synonim *nie*, zaś rdzeń słowa występuje powszechnie jako określenie podziału książki na oddzielnie zszyte części). Idea przyświecająca przyjęciu takiego założenia była następująca: jeżeli nasypiemy do powierzchni stożkowej piasku do pełna, a potem przesypiemy ten piasek do prostopadłościennego pudełka o podstawie będącej kwadratem 1×1, to wysokość piasku w pudełku będzie w przybliżeniu równa objętości stożka. Atomy Demokryta to hipotetyczny „piasek" dający dokładne wyniki. Trudniej może dać wyobrażenie o charakterze dwuwymiarowych czy jednowymiarowych atomów, ale i takie miały zdaniem Demokryta istnieć, dając możność ścisłego ustalania wielkości pól figur (kwadratura) i długości krzywych (rektyfikacja).

Idea Demokryta nie była popularna. Zarzucano jej niezgodność z koncepcjami Talesa — bo jeśli atom nie ma średnicy, to nie istnieje, jeśli zaś ma, to jak zmierzyć nim odcinek krótszy? Można zauważyć też, że jeśli wnętrze sfery o promieniu 1 napełnimy kulami o promieniu 1, to otrzymamy właściwą objętość. Jeśli jednak zmniejszymy promień (lepszy „piasek") do $\frac{4}{7}$, to otrzymamy jako objętość sfery $\frac{64}{343} < \frac{1}{5}$ objętości rzeczywistej. Potem przy $\frac{1}{2}$ będzie lepiej (choć bardzo źle) — $\frac{1}{4}$, potem znów trochę gorzej, potem znów lepiej — słowem należałoby dowieść, że przy zmniejszaniu promieni kul wypełniających otrzymujemy coraz lepsze przybliżenia. Ale i wówczas, gdybyśmy umieli to zrobić, pozostanie pytanie, czy nie lepiej byłoby jakoś tak po prostu i dokładnie, bez piasku.

Podobne idee wyznawał Archimedes. On jednak używał nie piasku, a wody, co do której natury w Starożytności nie było ustalonej opinii. Tu z kolei nasuwającym się zarzutem była „niematematyczność" metody.

Problem ustalenia dokładnej objętości, pola, długości w odniesieniu do dowolnej figury geometrycznej pozostał otwarty aż do XVII stulecia. Powstałe wówczas nowe metody matematyczne (geometria analityczna — Kartezjusz, rachunek różniczkowy i całkowy — Newton, a właściwie Leibniz) pozwoliły ustalać miary dla dość znacznej ilości figur — właściwie dla wszystkich praktycznie stosowanych. Równocześnie Cavalieri i Torricelli wykazali, że cały problem da się sprowadzić jedynie do rektyfikacji — gdybyśmy umieli znaleźć dla dowolnej krzywej odcinek prostej o tej samej co krzywa długości, umielibyśmy poradzić sobie z miarami w wyższych wymiarach (płaską, przestrzenną). Poszukiwano więc ciągle takiej metody, która pozwoliłaby zrektyfikować dowolną krzywą.

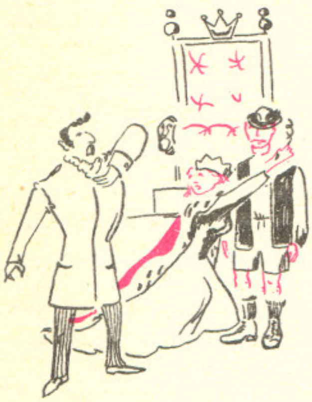
Dopiero jednak w XIX wieku sprawę postawiono „na głowie", co okazało się zabiegiem właściwym. Mianowicie zaczęto się zastanawiać nie nad tym, jakie własności powinna mieć krzywa, aby ją można było zrektyfikować, lecz nad tym, jakie własności powinna mieć prosta, aby można było znaleźć na niej potrzebne w rektyfikacji punkty. A właściwie punkt — bo jeden koniec odcinka możemy obrać dowolnie — sztuka polega tylko na znalezieniu drugiego. Ostatecznie tak postawiony problem znalazł rozwiązanie sto lat temu. Wygląda to tak: jeżeli długość jakiejś krzywej umiemy dowolnie przybliżyć długościami odcinków (i z dołu i z góry), to istnieje odcinek dokładnie tej długości, co krzywa. Taki postulat nazywany jest aksjomatem Dedekinda. Bywa on formułowany przeważnie nie geometrycznie, a arytmetycznie — linia prosta jest utożsamiana ze zbiorem liczb rzeczywistych.

Krótko nazywa się wyżej podaną własność prostej ciągłością. Słowo to jest mylące — kojarzy się z ciągłością funkcji. W poprawnej terminologii matematycznej należałoby nazwać tę własność zupełnością. Jednak we wszystkich językach nazywa się aksjomat Dedekinda aksjomatem ciągłości i tak już pewnie zostanie. Podobnie jak Demokryt pozostanie zapewne zawsze twórcą atomistycznej teorii budowy materii.

Analiza, Dedekind i Cantor
Sztuka w trzech aktach z prologiem i epilogiem

Doc. dr Piotr MANKIEWICZ

Prolog. Rzecz dotyczy pytania: na ile Dedekind jest potrzebny Analizie?
Akt I. Zawiązanie akcji, czyli co to jest Analiza i co ma z tym wspólnego Dedekind; pojawienie się Cantora.



Ciało $\mathscr{R}$ liczb rzeczywistych, które poznajemy (a raczej powinniśmy poznać) w szkole średniej jest opisane pewnym układem aksjomatów. Aksjomaty te można podzielić na dwie klasy; pierwszą klasę stanowią wszystkie aksjomaty z wyjątkiem jednego — tzw. *Aksjomatu Dedekinda.* Aksjomaty pierwszej klasy mają charakter arytmetyczno-porządkowy. Mówią one m.in., że działania arytmetyczne na liczbach rzeczywistych są łączne, przemienne, że odejmowanie jest wykonalne zawsze, a dzielenie — tylko przez liczby różne od 0; że mnożenie jest rozdzielne względem dodawania; że dodawanie i mnożenie przez liczby dodatnie zachowują porządek (tzn. nierówności) itd. Cechą wspólną tych aksjomatów jest to, że mówią one o własnościach liczb rzeczywistych. Zupełnie inny charakter ma Aksjomat Dedekinda. Opisuje on pewną własność podzbiorów liczb rzeczywistych.

Mianowicie:

Aksjomat Dedekinda. *Każdy ograniczony podzbiór liczb rzeczywistych ma kres górny.* (Definicja kresu górnego znajduje się na marginesie.)

Definicja kresu górnego zbioru: Kresem górnym zbioru A nazywamy najmniejszą liczbę rzeczywistą x taką, że dla każdego $a \in A$ zachodzi $a \leqslant x$. Kres górny zbioru A (o ile istnieje) oznaczamy zwykle przez $\sup A$.

Nieco trudniej jest powiedzieć, co to jest Analiza. Najlepsze określenie, jakie potrafię wymyślić, jest następujące: Analiza jest to zbiór twierdzeń, dających się wyprowadzić z aksjomatów ciała liczb rzeczywistych, opisujących pewne własności funkcji o wartościach rzeczywistych określonych na podzbiorach liczb rzeczywistych.

Najłatwiej wyjaśnić, o jakie własności tutaj chodzi, na przykładzie dwóch podstawowych twierdzeń Analizy.

Twierdzenie 1 (Darboux). *Jeżeli funkcja ciągła $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathscr{R}$ przyjmuje na końcach przedziału $\langle a, b\rangle$ wartości różnych znaków, to wewnątrz przedziału istnieje taka liczba c, że $f(c) = 0$.*

Twierdzenie 2 (Lagrange). *Jeżeli funkcja ciągła $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathscr{R}$ jest różniczkowalna wewnątrz przedziału $\langle a, b\rangle$, to wewnątrz tego przedziału istnieje punkt c taki, że $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.*

Zanotujmy jeszcze jedno twierdzenie Analizy.

Twierdzenie 3 (Cantor). *Ciało liczb rzeczywistych nie jest przeliczalne.* (Definicja zbioru przeliczalnego znajduje się na marginesie.)

Definicja zbioru przeliczalnego: Zbiór nieskończony A nazywa się przeliczalnym, jeżeli istnieje funkcja przekształcająca zbiór liczb naturalnych na ten zbiór.

Akt II. Czy wszystkie liczby rzeczywiste są rzeczywiście potrzebne, czyli tragiczny koniec Analizy.

Żeby zobaczyć, co się stanie z Analizą, kiedy zabraknie Aksjomatu Dedekinda, weźmy dowolne mniejsze podciało $\mathscr{P}$ ciała liczb rzeczywistych, tzn. taki zbiór liczb, w którym spełnione są wszystkie aksjomaty należące do pierwszej klasy. Ponieważ $\mathscr{P} \subset \mathscr{R}$, to istnieje $x_0 \in \mathscr{R} \setminus \mathscr{P}$. Niech a i b będą takimi liczbami rzeczywistymi należącymi do $\mathscr{P}$, że $a < x_0 < b$ (takie liczby muszą istnieć!). Niech $A = \{x \in \mathscr{P} : a < x < x_0\}$. A jest zbiorem ograniczonym. W ciele $\mathscr{P}$ nie jest spełniony Aksjomat Dedekinda, gdyż z tego, że $\sup A = x_0$ i $x_0 \notin \mathscr{P}$ wynika, że w ciele $\mathscr{P}$ zbiór A nie ma kresu górnego. Gdyby Twierdzenia Analizy nie zależały od Aksjomatu Dedekinda, tzn. dawały się wyprowadzić z aksjomatów należących do pierwszej klasy, to ponieważ $\mathscr{P}$ spełnia wszystkie aksjomaty należące do pierwszej klasy, byłyby one prawdziwe dla funkcji określonych na podzbiorach $\mathscr{P}$ o wartościach w $\mathscr{P}$. Tak jednak nie jest. Np. określmy funkcję $f\colon \langle a, b\rangle_{\mathscr{P}} \to \mathscr{P}$, gdzie $\langle a, b\rangle_{\mathscr{P}}$ oznacza odcinek domknięty w $\mathscr{P}$, tzn. $\langle a, b\rangle_{\mathscr{P}} = \{x \in \mathscr{P} : a \leqslant x \leqslant b\}$, wzorem

Takie podciało tworzą np. liczby wymierne.

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ dla } a \leqslant x < x_0, \\ \;\;\,1 \text{ dla } x_0 < x \leqslant b. \end{cases}$$

Łatwo można zauważyć, że spełnia ona założenia twierdzeń 1 i 2, natomiast tezy tych twierdzeń nie zachodzą. Z definicji f wynika, że $f(c) \neq 0$ dla każdego $c \in \langle a, b\rangle_{\mathscr{P}}$, także teza twierdzenia 2 nie może zachodzić, gdyż $f'(c) = 0$ dla każdego $c \in (a, b)$ i $f(b) - f(a) = 2$.

Ponieważ cała nasza konstrukcja wynikła z faktu, że istnieje $x_0 \notin \mathscr{P}$, z rozważań powyższych można wyciągnąć

Wniosek 1. *Każda liczba rzeczywista jest rzeczywiście potrzebna Analizie.*

Z drugiej strony można pokazać, że rezygnacja z Aksjomatu Dedekinda spowoduje nie tylko „zawalenie się” twierdzeń: 1 i 2. Rezygnacja taka spowoduje tragiczny koniec Analizy — zawali się w niej praktycznie wszystko. Zostaną tylko nieciekawe ruiny.

Akt III. Cudowne ocalenie Analizy, czyli liczby i funkcje definiowalne.

Całe nieszczęście wyniknęło z tego, że chcieliśmy z jednej strony zmniejszyć zbiór liczb w Analizie, a z drugiej strony — pozostawić zbiór funkcji praktycznie bez zmian. Zawalenia się Analizy można uniknąć, jeżeli odpowiedniemu zmniejszeniu zbioru liczb towarzyszy odpowiednie zmniejszenie zbioru funkcji. Oto jeden z takich sposobów. Niech $\mathscr{D}$ będzie podzbiorem liczb rzeczywistych, złożonym z liczb definiowalnych za pomocą działań arytmetycznych, liczb naturalnych, zbioru liczb naturalnych, indukcji i kresu górnego (tzn. z liczb, które można „konkretnie" zdefiniować za pomocą tych pojęć).

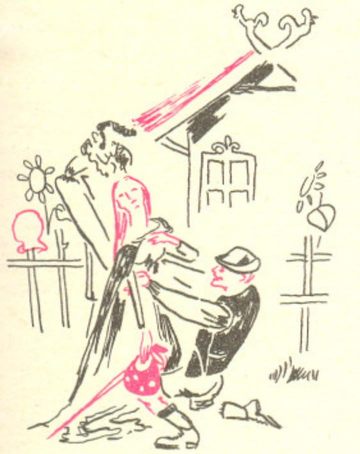
Każda taka definicja jest zdaniem zbudowanym ze skończonej ilości znaczków, a do dyspozycji mamy w ogóle skończoną ich ilość. Ciągów skończonych o wyrazach ze skończonego zbioru — a zatem i konkretnych definicji jest przeliczalna ilość.

Łatwo można pokazać, że $\mathscr{D}$ jest podciałem ciała liczb rzeczywistych. Np. żeby pokazać, że jeżeli $x \in \mathscr{D}$, to $z = \frac{1}{x} \in \mathscr{D}$; wystarczy zauważyć, że liczbę z można zdefiniować następująco:

„z jest jedyną liczbą taką, że $z \cdot x = 1$, gdzie x jest zdefiniowane przez ..."

Ponieważ zbiór wszystkich „konkretnych" definicji jest przeliczalny, zatem ciało $\mathscr{D}$ jest przeliczalne; a więc $\mathscr{D}$ jest istotnie mniejsze niż ciało liczb rzeczywistych (por. twierdzenie 3).

Umówmy się, że przez podzbiór ciała $\mathscr{D}$ będziemy rozumieli podzbiór $\mathscr{D}$ definiowalny za pomocą pojęcia „liczby definiowalne" i pojęć wymienionych wyżej. Można udowodnić, że dla ciała $\mathscr{D}$ i jego podzbiorów (definiowalnych) spełniony jest Aksjomat Dedekinda, tj. każdy ograniczony podzbiór definiowalny w $\mathscr{D}$ ma kres górny należący do $\mathscr{D}$.



Wniosek 2. *Ciało D spełnia wszystkie aksjomaty ciała liczb rzeczywistych* (przy interpretacji: podzbiór = podzbiór definiowalny).

Rozważmy wszystkie funkcje definiowalne z $\mathscr{R}$ w $\mathscr{R}$.

Twierdzenie 4. *Każda funkcja definiowalna przeprowadza liczby definiowalne w liczby definiowalne.*

Dowód: Jeżeli x jest liczbą definiowalną, a f jest funkcją definiowalną, to definicja $z = f(x)$ wygląda następująco:

„z jest jedyną liczbą rzeczywistą taką, że $z = f(x)$, gdzie f jest zdefiniowane przez ..., a x jest zdefiniowane przez ...".

Zatem jeżeli ograniczymy się do liczb, podzbiorów i funkcji definiowalnych, to w otrzymanym modelu spełnione będą wszystkie aksjomaty ciała liczb rzeczywistych, a więc prawdziwe będą wszystkie twierdzenia Analizy (bo można je z tych aksjomatów wyprowadzić).

Nazwijmy sobie tę teorię Analizą Definiowalną.

Wniosek 3. *Mimo zmniejszenia ciała liczb rzeczywistych Analizę udało się jednak uratować.*

Wniosek 4. *W obrębie Analizy Definiowalnej wszystkie twierdzenia Analizy są prawdziwe przy następującej interpretacji:*

liczby rzeczywiste	— liczby rzeczywiste definiowalne
podzbiory liczb rzeczywistych	— definiowalne podzbiory liczb definiowalnych
funkcje	— funkcje definiowalne
itd...	

Zbiór funkcji w Analizie Definiowalnej jest wystarczająco obszerny. Funkcji tych wystarczy inżynierom, by mogli budować domy, mosty a nawet pojazdy kosmiczne. Wystarczy ich także matematykom. Tak naprawdę to funkcji tych wystarczy wszystkim. Nikt z nas nie ma żadnej szansy spotkać się z funkcją niedefiniowalną w praktyce. Dlaczego?

W szczególności, w obrębie Analizy Definiowalnej prawdziwe jest twierdzenie 3 (porównaj Definicję zbioru przeliczalnego). To znaczy, że zachodzi

Twierdzenie 5 (Cantora dla Analizy Definiowalnej). *Ciało $\mathscr{D}$ nie jest przeliczalne.*

Epilog. Zaskakujące konsekwencje, czyli jak przeliczalność zbioru (i nie tylko ona) może zależeć od naszego obrazu świata.

Na początku aktu III stwierdziliśmy, że ciało $\mathscr{D}$ jest przeliczalne, na końcu zaś tego samego aktu podaliśmy twierdzenie Cantora mówiące, że ciało $\mathscr{D}$ nie jest przeliczalne. Sprzeczność! Chcieliśmy ocalić Analizę, a w efekcie utopiliśmy Matematykę. Sprawa domaga się wyjaśnienia!

Wyjaśnienie takie jest stosunkowo proste. To, czy pewien zbiór A jest przeliczalny, czy nie, nie jest własnością absolutną tego zbioru. Może to w pewnych wypadkach zależeć od przyjętego obrazu (modelu) „świata". Mianowicie, w naszym przykładzie

1° — w przypadku Analizy model zawierał dużo elementów i dużo funkcji — a więc nic dziwnego, że wśród nich znalazła się funkcja f odwzorująca zbiór liczb naturalnych na zbiór $\mathscr{D}$ — co spowodowało, że zbiór $\mathscr{D}$ z punktu widzenia Analizy jest przeliczalny (porównaj Definicję zbioru przeliczalnego),

2° — w przypadku Analizy Definiowalnej — model zawierał mniej elementów i mniej funkcji. Twierdzenie Cantora dla Analizy Definiowalnej orzeka, że tych funkcji jest tak mało, że nie znajduje się wśród nich żadna funkcja odwzorowująca liczby naturalne na $\mathscr{D}$.

Ponieważ dodawanie jest „efektywnie" wykonalne, więc w każdym modelu Analizy $2+2$ musi się równać 4. Natomiast przeliczalność zbioru nie jest efektywnie sprawdzalna. To znaczy — nie istnieje skończony algorytm pozwalający rozstrzygnąć, czy dany zbiór jest przeliczalny, czy nie. Zdarza się, że w przypadku takich nieefektywnych pojęć odpowiedź na pytanie zależy od przyjętego modelu świata. I tak właśnie jest z przeliczalnością zbioru $\mathscr{D}$.

Podobnym nieefektywnym postulatem jest używany w Geometrii Aksjomat Archimedesa: *Odkładając wielokrotnie na prostej dany odcinek a możemy uzyskać odcinek większy od danego odcinka b.*

I w tym wypadku odpowiedź na pytanie, czy tak jest naprawdę, zależy od przyjętego modelu Geometrii.

Ciągłość i nieciągłość w fizyce

Prof. dr Grzegorz BIAŁKOWSKI

W fizyce często spotyka się przykłady pojęć czy też rozumowań, które najwyraźniej nie są umotywowane doświadczeniem, mimo że zwyczajowo, całkiem zresztą słusznie, podkreśla się, iż właśnie eksperyment jest podstawą fizyki. Czyżby więc te „pozaeksperymentalne" elementy fizyki były „nienaukowe"? Czyżby były one pozostałościami dawnych etapów rozwojowych tej nauki, których nie zdołała ona z siebie jeszcze wyplenić? Czy też przeciwnie, są one uprawnioną częścią fizyki?

Aby na pytania te odpowiedzieć, rozpatrzmy najpierw kilka przykładów.

1. Jedną z podstawowych czynności fizyka jest pomiar. Mierząc cokolwiek, używa on określonych jednostek. Na pierwszy rzut oka oceniamy, że jest rzeczą obojętną, jak będą jednostki te wybrane. Jednakże, poniekąd wbrew temu oczekiwaniu, nie mierzymy czasu np. w uderzeniach serca lub zdrowaśkach, ani też odległości np. w stopach czy też łokciach, lecz odpowiednio w sekundach i metrach oraz w jednostkach pochodnych. Co więcej, z definicjami tych jednostek też dzieją się jakieś dziwne rzeczy. Metr na przykład odnoszono początkowo do obwodu Ziemi, potem wykonano wzorzec „ze stopu platynowo-irydowego", a teraz jednostkę tę wiąże się z długością fali światła odpowiadającej określonemu rodzajowi promieniowania określonego rodzaju atomów. Dlaczego?

2. „Wiadomo", że ciała przyciągają się siłą grawitacyjną odwrotnie proporcjonalną do drugiej potęgi ich wzajemnej odległości. Jest jednak rzeczą jasną, że wyniki eksperymentalne moglibyśmy w granicach błędu odtworzyć, zakładając, że potęga ta nie jest równa dokładnie 2, lecz 1,999...9 z dostatecznie dużą liczbą dziewiątek. Tymczasem w podręcznikach figuruje zawsze r^{-2}. Dlaczego?

3. Jak głosi znana anegdota, która w dodatku jest najprawdopodobniej prawdziwa, Newton powziął swoją ideę prawa powszechnego ciążenia pod wpływem widoku spadającego jabłka. Kolejny krok jego rozumowania polegał na zadaniu sobie pytania, czy ciało umieszczone tak daleko od Ziemi jak Księżyc także by na nią spadało. Co za pomysł! Biorąc pod uwagę, że jabłko tylko w niewielkim stopniu przypomina Księżyc, nie widać powodu, aby ruchem (i to tak odmiennym!) obu tych ciał rządziło to samo prawo. Jabłko np. składa się z substancji organicznych: czemu nie miałyby tu działać jakieś „siły witalne"?

4. Teoria Newtona dostarcza nam oszałamiająco pięknego wyjaśnienia ruchów planet. Jednakże w początku XIX wieku stało się jasne, że ruch najdalszej ze znanych wówczas planet, Urana, nie spełnia ściśle przewidywań wynikających z teorii Newtona. Oczywiście można by odrzucić tę teorię. Le Verrier i Adams zaryzykowali jednak inną hipotezę, zakładając, że poza Uranem krąży wokół Słońca jeszcze jedna planeta, której wpływ na ruch Urana wyjaśniałby odstępstwa od teorii Newtona. I rzeczywiście, w roku 1846 Galle wykrył tę planetę (Neptuna). Podobne rozważania doprowadziły do wykrycia kolejnej planety, tj. Plutona (1930). Warto jednak wiedzieć, że także ruch Merkurego nie stosuje się ściśle do przewidywań teorii Newtona. I tym razem Le Verrier w r. 1859 spróbował tego samego wyjaśnienia, postulując istnienie planety jeszcze bliższej Słońcu niż Merkury (Wulkana). Planeta ta, co więcej, pod wpływem potężnych, jak widać, sił psychologicznych, aż dwukrotnie została odkryta (1859, 1876); jak wiadomo, były to doniesienia błędne. Zaproponowano więc jeszcze inną hipotezę, w której niczego nie trzeba by już odkrywać, a mianowicie, że między Merkurym a Słońcem znajduje się smuga rozrzedzonej materii, która tłumaczyłaby odstępstwa ruchu Merkurego od przewidywań newtonowskich. Hipoteza ta jednak nie została zaakceptowana. Dlaczego? Poprawne rozwiązanie problemu Merkurego daje ogólna teoria względności. Dlaczego właśnie ta teoria znalazła uznanie wśród fizyków?

5. Przyspieszenie jest pochodną prędkości względem czasu. Pochodne, jak wiadomo, można obliczać tylko w tym obszarze argumentów, w którym funkcja różniczkowana jest ciągła. Znaczy to, że zakładamy, mniej lub bardziej milcząco, że prędkość jest funkcją ciągłą czasu. Na jakiej podstawie czynimy to założenie?

Wprawdzie tylko ostatni punkt nawiązuje wprost do tytułu niniejszego artykułu, jednakże warto przynajmniej przez chwilę rozpatrywać wszystkie punkty łącznie, gdyż rzucają one wspólnie światło na to, co w fizyce, a ogólniej w nauce, jest w gruncie rzeczy pozanaukowe.

Wróćmy do przykładu z jednostkami miary. Oczywiście każdy badacz mógłby wyrażać wyniki swoich pomiarów w dowolnych jednostkach, na przykład długość we własnych stopach. Gdyby jednak tak było, uzyskane przez niego wyniki nie mogłyby być sprawdzane przez innych badaczy. Co więcej, jednostki należące do układu takiego jak np. cal (grubość kciuka), stopa, łokieć, mila itd. pozostają w skomplikowanych stosunkach arytmetycznych, co utrudnia efektywne posługiwanie się nimi. Jest chyba oczywiste, że dziesiętny układ metryczny najlepiej służy sprawie kilku zasad przyjmowanych w fizyce, do których należy zaliczyć intersubiektywność wyników oraz wygodę w posługiwaniu się aparatem rachunkowym.

Rozwiązanie zadania M 132

Dowód ciągłości funkcji g względem każdej zmiennej jest standardowy i pozostawiamy go Czytelnikowi.

Dla dowodu nieciągłości funkcji g w punkcie (0, 0) zauważmy, że w dowolnym otoczeniu tego punktu znajdują się punkty o równych współrzędnych, np. $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, gdzie n jest dostatecznie dużą liczbą naturalną. Zachodzą równości $g\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$, $g(0, 0) = 0$.

Funkcja g nie jest więc ciągła w punkcie (0, 0), gdyż w dowolnie małym otoczeniu punktu (0, 0) znajdują się punkty, w których funkcja przyjmuje wartości różniące się od wartości funkcji w tym punkcie co najmniej o $\frac{1}{2}$.

Przykład z prawem Newtona (równie dobrze można by tu mówić o prawie Coulomba) świadczy, że w fizyce przyjmuje się założenie najprostsze do chwili ewentualnego wykazania, że nie jest to poprawne. Wprawdzie potęga „2" może być równie dobra z punktu widzenia doświadczenia jak „1,999999", lecz operacje na dwójce są znacznie prostsze. Chciałoby się powiedzieć, że 2 przełyka się gładko, a 1,999999 jak jeża. Co więcej, w wypadku „2" rozwiązanie problemu ruchu w układzie dwu ciał jest wyjątkowo piękne: otrzymujemy ruch po jednej z krzywych stożkowych, np. po elipsie, ustalonej w przestrzeni. Każde odstępstwo od 2 powoduje, że na ruch ten nakłada się ruch inny, ruch obrotu tej elipsy w jej płaszczyźnie, co powoduje, że ruch wypadkowy odbywa się po krzywej rozetkowej. Lecz cóż, natura jest przekorna. Okazuje się, że rzeczywisty ruch w polach Newtona i Coulomba jest właśnie ruchem rozetkowym. Mimo to jednak odrzucamy możliwość odstępstwa od 2, wyjaśniając istnienie obrotu elipsy efektami relatywistycznymi. Mianowicie, na tej części elipsy, która leży bliżej ogniska odpowiadającego centrum sił, ciało poruszające się (Ziemia czy też elektron) porusza się szybciej, a więc ma nieco większą masę, zgodnie z zasadami teorii względności, niż w tej części elipsy, która jest odległa od centrum sił. Pociąga to za sobą konsekwencje co najmniej kinematyczne (w polu Coulomba) lub nawet dynamiczne (w polu Newtona), co wpływa ostatecznie na zmianę ruchu eliptycznego na rozetkowy. Czemu jednak przemawia do nas to wyjaśnienie, a nie zdobyło naszej sympatii prawo „1,999...9"? Co najmniej z dwu powodów. Po pierwsze teoria względności poza ruchem rozetkowym wyjaśnia wiele innych zjawisk, istnieje więc tutaj wiele dodatkowych testów, które teoria ta zwycięsko „zaliczyła". Natomiast „1,999...9" jest wymyślone ad hoc do jednego zjawiska i trudno znaleźć inne mierzalne konsekwencje tego prawa. Po drugie zaś „1,999...9" jest po prostu brzydkie. Od czasów Pitagorasa, słusznie czy nie, przyjemniej zawsze jest obcować z liczbami całkowitymi. Tak więc ostatecznie prawo „1,999...9" odpada z konkurencji ze względu na kryterium prostoty, kryterium piękna, kryterium większej ogólności (a więc i lepszej sprawdzalności) teorii konkurencyjnych.

Kryterium większej ogólności tłumaczy nam też, dlaczego do ruchu jabłka i do ruchu Księżyca nie budujemy oddzielnych teorii. Każda z dwu teorii, „jabłkowa" i „księżycowa" miałaby mniejszy zakres stosowalności niż teoria jednolita. Teoria ta ujawnia nam poza tym uderzającą jedność przyrody, jest po prostu piękna.

Przygody teorii Newtona z układem planetarnym są równie pouczające. Obserwując zakłócenia w ruchu Urana wprowadzono dodatkową hipotezę o istnieniu dalszej planety. Hipoteza ta ma niezależny sprawdzian, a mianowicie po prostu przewiduje ona wykrycie tej nowej planety. Skoro odkrycie to nastąpiło, hipoteza została sprawdzona i przyjęta. Natomiast Wulkana po prostu nie ma, a przyjęcie smugi rzadkiej materii nie dostarcza dodatkowego sprawdzianu, skoro smugi tej nie można wykryć obserwacyjnie. Koncepcję tę należało więc odrzucić i czekać na inne rozwiązanie zagadki. Podał je Einstein dopiero w roku 1915.

No i wreszcie nasza ciągłość. Jest to problem ciekawy i znacznie bardziej skomplikowany niż mogłoby się wydawać. Jest przecież faktem, że w ogromnej większości przypadków posługujemy się w formalizmie fizyki funkcjami ciągłymi. Co nas do tego zmusza? Czy po prostu lubimy ciągłość?

Ze względów czysto rachunkowych ciągłość ma niewątpliwą przewagę nad nieciągłością. Posługując się funkcjami ciągłymi możemy korzystać z rachunku różniczkowego i całkowego. Znacznie łatwiej jest posługiwać się pochodną, a dokładniej różniczką, niż skończoną różnicą, wygodniej jest całkować niż sumować szeregi, prościej rozwiązywać równania różniczkowe niż różnicowe. Mamy więc dla ciągłości jeden punkt: prostotę i wygodę.

Należy jednak odróżnić ciągłość w przyrodzie od ciągłości funkcji służących do jej opisu. Czy wiemy coś o ciągłości przestrzeni i czasu? (Właściwym terminem matematycznym byłoby tu pojęcie zupełności, gdyż ciągłość jest cechą nie zbiorów lecz odwzorowań. Pozostanę jednak przy mniej dokładnym, lecz bardziej naocznym i potocznym terminie.)

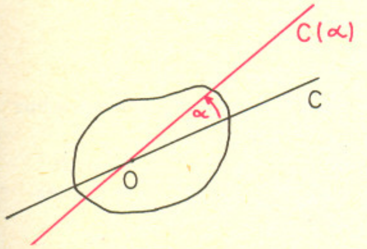
Na pierwszy rzut oka można by sądzić, że ciągłość przestrzeni i czasu przeżywamy bezpośrednio w doświadczeniu, czy to zmysłowym, czy też introspekcyjnym. Ciała, jak się nam wydaje, zajmują w kolejnych chwilach kolejne położenia w sposób ciągły. Jednakże, jak świadczy przykład kina, wniosek taki nie jest uprawniony, gdyż nasz układ nerwowy samodzielnie łączy bliskie chwile i bliskie punkty w ciągłe całości. Co więcej, badania nad tym układem (np. nad wzrokiem i widzeniem) wskazują, że w ogóle nie może on odbierać i przekazywać informacji w sposób ciągły. Informacja taka w nerwie jest pewną salwą wyładowań elektrycznych, do której dochodzi tylko wtedy, gdy bodziec jest dostatecznie silny. Dzieląc zaś ciągłe zjawisko na bardzo krótkie fazy, zbieralibyśmy z każdej z nich nikły bodziec o wartości podprogowej, w granicy nawet nieskończenie mały. Układ nerwowy dokonuje więc „całkowania" bodźców po skończonych odcinkach i nie może wewnątrz takich odcinków dostrzec żadnej struktury. Tak więc, mimo bezpośredniego przeżycia ciągłości, widzimy, że nie ma ona nic wspólnego z tym, co jest „naprawdę". W tej sytuacji możemy jeszcze szukać jakichś pośrednich dowodów ciągłości bądź nieciągłości czasu i przestrzeni. Na przykład, gdyby teorie fizyczne oparte na założeniu ciągłości napotykały jakieś zasadnicze trudności, z którymi byłaby za to zdolna sobie poradzić teoria dyskretnej przestrzeni lub czasu, byłby to właśnie taki pośredni dowód przemawiający za nieciągłością tych struktur. Jednakże, jak dotąd, sytuacja taka nie zachodzi.

Rozwiązanie zadania F 44

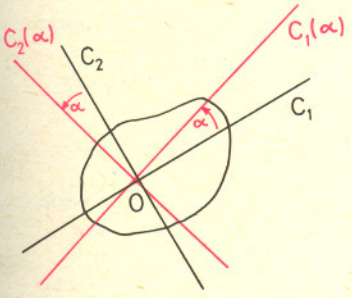
Niech I_C oznacza moment bezwładności płyty względem osi C, a $I_{C(\alpha)}$ — jej moment bezwładności względem osi $C(\alpha)$ tworzącej kąt α z osią C (rys. 1). $I_{C(\alpha)}$ jest ciągłą funkcją α (dlaczego?). Weźmy teraz pod uwagę płytę i dwie, dowolnie wybrane, wzajemnie prostopadłe osie C_1 i C_2 przechodzące przez zadany punkt O (rys. 2). Załóżmy, że $I_{C_1} \neq I_{C_2}$.
W przeciwnym bowiem wypadku same osie C_1 i C_2 spełniałyby warunki zadania.
Obracając osie C_1 i C_2 wokół punktu O możemy przeprowadzić C_1 w C_2 i jednocześnie C_2 w C_1. Przy tym I_{C_1} w sposób ciągły przechodzi w I_{C_2}, a I_{C_2} w I_{C_1}. Z własności Darboux (patrz artykuł P. Mankiewicza) dla funkcji $I_{C_1(\alpha)} - I_{C_2(\alpha)}$ wynika, że dla co najmniej jednej z wartości kąta α z przedziału $(0, 90°)$ musi zachodzić równość momentów bezwładności:

$$I_{C_1(\alpha)} = I_{C_2(\alpha)},$$

a to kończy dowód.
Czytelnik zechce zwrócić uwagę, że użyta tu metoda dowodu jest pewną odmianą metody użytej przez H. Steinhausa w dowodzie twierdzenia głoszącego, że na każdej zamkniętej krzywej ciągłej można opisać kwadrat (H. Steinhaus, Kalejdoskop Matematyczny, PZWS, Warszawa 1956, str. 105).



Rys. 1



Rys. 2

Rozwiązanie zadania M 130

Rozpatrzmy funkcję $G(x) = F(x) - x$.
Ponieważ dla każdego $x \in \langle a, b \rangle$ jest $a \leqslant F(x) \leqslant b$ (bo funkcja F przekształca $\langle a, b \rangle$ w przedział $\langle a, b \rangle$), więc

$$G(a) = F(a) - a \geqslant 0,$$
$$G(b) = F(b) - b \leqslant 0.$$

Funkcja G, jako różnica funkcji ciągłych, jest ciągła. Ponieważ $G(a) \geqslant 0$, $G(b) \leqslant 0$, więc istnieje w $\langle a, b \rangle$ liczba x, dla której $G(x) = 0$ (własność Darboux).

Zasada przekory: oddziaływanie zewnętrzne, zakłócające stan równowagi układu, wywołuje w nim procesy, które starają się osłabić skutki tego zaburzenia.

Rozwiązanie zadania M 131

Funkcje takie istnieją. Podamy teraz przykład funkcji ciągłej tylko w jednym punkcie, ale w tym punkcie nawet różniczkowalnej. Funkcją taką jest

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ dla } x \text{ wymiernych,} \\ -x^2 \text{ dla } x \text{ niewymiernych.} \end{cases}$$

Dowód nieciągłości tej funkcji w punktach różnych od 0 pozostawiamy Czytelnikowi.
Sprawdzimy, że funkcja ta jest różniczkowalna w punkcie 0:

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\pm h^2 - 0}{h} = \pm h \to 0$$

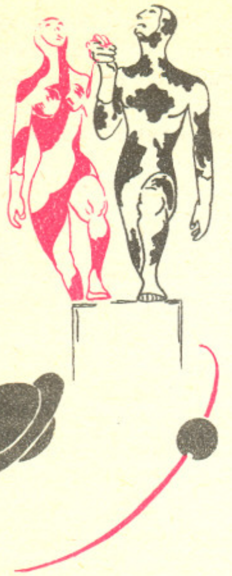
dla $h \to 0$,
a więc $f'(0) = 0$.
Ponieważ funkcja f jest różniczkowalna w punkcie 0, jest więc w nim również ciągła.

Wobec tego przyjmujemy ciągłość za normę, a nieciągłość za anomalię, wymagającą za każdym razem, gdyby się pojawiła, jakiegoś wyjaśnienia. Idziemy tu zarówno za prostotą i wygodą „ciągłościowego" aparatu matematycznego, jak i za „uciąglającą" działalnością naszego aparatu zmysłowego, która skłania nas do traktowania tego, co ciągłe, jako coś naturalnego. To przekonanie odbija się w takich powiedzeniach, jak np. „natura nie czyni skoków" lub, ogólniej, „każda zmiana ma swoją przyczynę".
Ostatniego sformułowania nie można brać dosłownie. Filozofowie greccy ze szkoły eleatów próbowali wejść na tę drogę i przeprowadzili następujące rozumowanie. „Przyczyna jest czymś zewnętrznym względem skutku. Poza tym, co jest, nie ma niczego. Każda zmiana musi mieć swoją przyczynę. A więc to, co jest, musi być absolutnie niezmienne, gdyż poza nim nie ma niczego, co by mogło być przyczyną zachodzących w nim zmian". Eleaci uznali konsekwentnie wszelki ruch i wszelką zmienność za złudzenie i wymyślili szereg pomysłowych a paradoksalnych argumentów świadczących ich zdaniem o tym, że ruch jest czymś wewnętrznie sprzecznym, a więc nie może naprawdę zachodzić.
Jeśli więc nie chcemy się posunąć tak daleko, musimy uznać, że pewna zmienność nie wymaga działania przyczyny. Przykładem może być ruch jednostajny prostoliniowy, który w układzie inercjalnym zachodzi bez działania żadnej siły. W tym przypadku oczywiście przyspieszenie także równe jest zeru.

Można sobie zadać pytanie, co w aparacie teoretycznym fizyki zapewnia nam ciągłość prędkości. Odpowiedź jest bardzo prosta. Zawdzięczamy to bezwładności materii, tkwiącemu w niej sprzeciwowi względem wprowadzanych do jej stanu zmian. Taka bezwładność w uogólnionym sensie występuje w różnych działach fizyki. Przykładowo można tu wymienić zjawisko samoindukcji, które sprzeciwia się skokowej zmianie natężenia prądu pod wpływem skokowej zmiany napięcia. Podobną rolę w termodynamice odgrywa znana zasada przekory Le Chatelier-Brauna. Wydaje się więc, że w samej materii tkwią mechanizmy „uciąglające", które nie dopuszczają do skokowych zmian pewnych wielkości fizycznych.
Koncepcja bezwładności wiąże się jednakże, co warto zauważyć, z infinitezymalną koncepcją związku skutkowo-przyczynowego. Przyczyna poprzedza skutek, mówiąc obrazowo, o dt. Aby tego rodzaju koncepcję zrealizować, potrzebna jest ciągła natura czasu (zupełność zbioru chwil), o której poprzednio mówiliśmy.
Skądinąd wspominając poprzednio o „skokowym" narastaniu siły pominęliśmy fakt, że w rzeczywistości włączenie siły może także nastąpić tylko w sposób ciągły. Wiąże się ono przecież z dostarczeniem do określonego punktu określonego źródła siły: masy, ładunku elektrycznego itp. To zaś, jak każdy ruch, zachodzi ze skończoną prędkością, a więc odpowiednia siła musi narastać stopniowo.
Mógłby ktoś argumentować, że fizyka klasyczna niejednokrotnie korzysta z pojęć nieciągłych. Mówi się o nieciągłości w przypadku zmiany stanu skupienia; zachodzi wtedy nieciągła zmiana gęstości. Innym przykładem mógłby być „skok" pola elektrostatycznego na powierzchni przewodnika. (Istnienie takiego skoku wynika z prawa Gaussa.) Pole bowiem wewnątrz naładowanego przewodnika znika, a na zewnątrz ma wartość niezerową. Wielkość skoku można powiązać z gęstością ładunku znajdującego się na powierzchni przewodnika.
Jednakże w obu przypadkach nie może być mowy o rzeczywistej nieciągłości. Nie jest przecież tak, że w pewnej chwili całe ciało jest stałe, a w następnej już ciekłe. Topnienie zajmuje pewien czas, a przebieg tego procesu w mikroskali określony jest przez mikrostruktury ciała topniejącego: rozmaite defekty, zanieczyszczenia itd. Dynamika procesu topnienia jest więc skomplikowana i często, z punktu widzenia efektu końcowego, zupełnie nieistotna. W takich przypadkach cały ten proces zastępujemy „skokiem", zwężając czas jego trwania do zera.

Drugi z wymienionych wyżej przykładów „skoku" w fizyce zawiera w sobie przypuszczenie, że ładunki elementarne (np. elektrony) są obiektami punktowymi. Gdyby tak istotnie było, mogłyby one zajmować położenia wyłącznie na powierzchni przewodnika, zakładając, oczywiście, że powierzchnię tę da się rzeczywiście w mikroskali dokładnie określić. Wprawdzie nie wiemy jeszcze wiele o wewnętrznej budowie elektronu, ale wiemy na pewno, że nie jest to cząstka punktowa. Lepiej znamy budowę wewnętrzną protonu. Okazuje się, że ładunek elektryczny w tej cząstce rozłożony jest w sposób ciągły, a nie ma powodu przypuszczać, by w elektronie sprawy miały się inaczej. W takiej sytuacji elektrony nie zajmują samej tylko powierzchni przewodnika, lecz tworzą warstwę pewnej grubości na tej powierzchni, w której zachodzi ciągła zmiana pola. Dodać trzeba, że poza tym część elektronów jest emitowana z przewodnika do otaczającej go przestrzeni, co dodatkowo „uciągla" rozkład ładunku a więc i pola elektrycznego. Jednakże grubość tej warstwy z mikroskopowego punktu widzenia jest tak mała, że najczęściej opłaca się pominąć tę grubość i traktować problem „skokowo".

No, ale w zjawiskach kwantowych, powie ktoś, nieciągłość na pewno da się odnaleźć. Rzeczywiście, wydaje się, że tak jest istotnie. Weźmy atom wodoru, rozważmy jako układ proton-elektron. W stanie związanym (gdy składniki pozostają zawsze w skończonej odległości od siebie) układ ten może mieć, zgodnie z równaniem Schrödingera, jedynie ściśle określone, dyskretne wartości energii. A więc nieciągłość — nareszcie — wykryta! Ale uwaga! Wśród tych, jak mówimy, poziomów energetycznych jeden tylko jest trwały, ten który odpowiada najniższej energii. Wszystkie wyższe nie są trwałe, gdyż z emisją fotonu „rozpadają się" one, przechodząc do stanów niższych. Zgodnie zaś z zasadami tejże mechaniki kwantowej, układ fizyczny nietrwały nie może mieć dokładnie określonej energii (podobnie jak układ o określonym pędzie nie może mieć dokładnie określonego położenia), przy czym iloczyn średniego czasu życia przez nieokreśloność energii jest rzędu stałej Plancka $\hbar$. Dyskretne poziomy energii ulegają więc rozmyciu czy też poszerzeniu, i ciągłość zostaje przywrócona. Co prawda nie dotyczy to poziomu najniższego, ale tylko w przypadku pojedynczego odosobnionego atomu. W zwykłym gazie, choćby bardzo rozrzedzonym, przejścia między poziomami energii zachodzą nie tylko w wyniku emisji fotonów, ale też w wyniku zderzeń międzyatomowych, które powodują dwukierunkowy przepływ energii — od energii kinetycznej ruchu atomów do energii wewnętrznego ruchu elektronów w poszczególnych atomach i na odwrót. W rezultacie wszystkie poziomy energetyczne ulegają dodatkowemu poszerzeniu. A więc i tu mamy do czynienia z przebiegami ciągłymi.

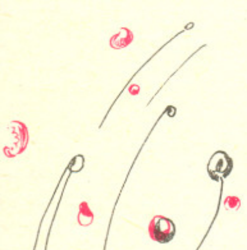


Właściwie jedyną rzeczą naprawdę nieciągłą w świecie mechaniki kwantowej jest to, czego w niej najbardziej nie rozumiemy. Mam na myśli akt pomiaru. Weźmy jako przykład elektron, poruszający się z ustalonym pędem, a więc mający całkowicie nie ustalone położenie. Wyobraźmy sobie teraz, że na elektronie tym wykonujemy pomiar jego położenia. W rezultacie sytuacja *skokowo* zmieni się: położenie elektronu zostanie ustalone, ale jego pęd utraci swą dotychczasową wartość, stając się wielkością mniej lub bardziej nieokreśloną, zależnie od tego, jak dokładnie określiliśmy położenie elektronu. W rzeczywistości akt pomiaru zajmuje jakiś czas i tkwi za tym jakiś efekt fizyczny. Nie jest on jednak ujmowany w formalizmie mechaniki kwantowej, co chyba należy uważać za jej najsłabszy punkt od strony pojęciowej.

Uwagi te można by jeszcze rozwinąć. Wydaje mi się jednak, że już to, co tu zostało powiedziane, wystarcza do sformułowania następujących wniosków. Po pierwsze, w fizyce, jak i w każdej innej nauce przyrodniczej, tkwi szereg założeń metodologicznych, nie usprawiedliwionych metodami uznawanymi za poprawne przez tę naukę. Wymienialiśmy tu wygodę, prostotę, piękno, intersubiektywność, ogólność (większa sprawdzalność), a listę tę można by przedłużyć. Zagadnienie ciągłości zwraca nam uwagę na dodatkowy kapitalny fakt: że w budowie aparatu pojęciowego nauki jesteśmy także uwarunkowani charakterem naszego aparatu zmysłowego. Niezależnie od złożoności formalizmu, gdzieś, kiedyś przychodzi moment, że chcemy sobie wyobrazić zjawiska formalizmem tym opisywane. I tu łatwiej przychodzi nam zdecydować się na rozwiązania „wyobrażalne" niż na te, które są sprzeczne ze strukturą naszego umysłu i aparatu zmysłowego. Tak właśnie postępujemy, przyjmując ciągłość za normę. Starałem się wykazać, że takie założenie w odniesieniu do przestrzeni i czasu niemal automatycznie pociąga za sobą ciągłość naszego obrazu zjawisk fizycznych. Pozostaje nierozstrzygnięte nieco może metafizyczne pytanie, czy „uciąglająca" natura naszego aparatu zmysłowego jest jakimś po prostu ułatwieniem technicznym, czy też jest genetycznie dostosowana do prawdziwej, głębokiej ciągłości natury.

Geometria algebraiczna — —czyli jak poradzić sobie z nieciągłością w geometrii

Dr Michał SZUREK



W tym artykule zastanawiamy się, czy można oprzeć geometrię o tak „nieciągłe" zbiory, jak na przykład zbiór liczb wymiernych lub zbiór skończony. Nie będą to rozważania pod hasłem: co by można..., lecz opis drogi, jaką rzeczywiście przebyto w matematyce; dokładniej — w geometrii algebraicznej — jednym z jej starszych działów.

§ 1. W XVII wieku dokonał się przełom w geometrii. Francuski matematyk René Descartes (Kartezjusz) odkrył, że linia prosta może być opisana na płaszczyźnie równaniem stopnia pierwszego, a w przestrzeni — układem dwóch równań. Dało to początek geometrii analitycznej. Metoda Kartezjusza umożliwiła — w połączeniu z rozwijanym równolegle rachunkiem różniczkowym — badania, które w euklidesowym wydaniu teorii były trudne a często i niewykonalne. Już w teorii najprostszych krzywych, jakimi są stożkowe, wiele zadań da się rozwiązać tylko metodami geometrii analitycznej. Przy badaniu bardziej skomplikowanych krzywych i powierzchni praktycznie posługujemy się wyłącznie metodami geometrii analitycznej i analizy matematycznej, wspieranymi wyobraźnią przestrzenną. Wszelkie zaś metody badawcze oparte na analizie matematycznej wykorzystują ciągłość zbioru liczb rzeczywistych. Na przykład takie punkty charakterystyczne krzywej jak ostrza, punkty nagłej zmiany krzywizny, punkty przegięcia, punkty styczności z prostymi — są określane analitycznie, a zatem wykorzystują (w ukrytej, lecz istotnej formie) tę ciągłość.

§ 2. W 1871 roku niemiecki matematyk Richard Dedekind nazwał ciałem każdy zbiór liczb, w którym wykonalne są cztery podstawowe działania arytmetyczne: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie (dzielenie przez 0 wykluczamy raz na zawsze). Ciało tworzą na przykład liczby wymierne, rzeczywiste, zespolone, ... W wyniku wymienionych działań na liczbach wymiernych (rzeczywistych, zespolonych, ...) dostajemy znów liczbę wymierną (rzeczywistą, Wykładnik potęgi należy rozumieć jako „zwykłą" liczbę naturalną (nie w ciele Z_p). Symbol ka należy więc rozumieć jako

$$\underbrace{a+\ldots+a}_{k\text{-razy}}$$

zespoloną, ...). Podane przez Dedekinda określenie potem nieco uogólniono i ciałem nazwano dowolny zbiór, w którym określone są działania *zwane* dodawaniem, mnożeniem, odejmowaniem i dzieleniem. Postulujemy tylko, by te działania miały podobne (tu wyliczamy, jakie) własności, które przysługują ich odpowiednikom w zbiorach liczbowych. Przykładowo, działanie nazwane mnożeniem ma zawsze być rozdzielne względem działania nazwanego dodawaniem. Ciało może mieć nawet skończoną liczbę elementów: rozpatrzmy zbiór Z_p złożony z liczb $0, 1, \ldots, p-1$. O liczbie p zakładamy, że jest pierwsza. Umówmy się, że sumą dwu liczb z Z_p będziemy nazywać resztę z dzielenia ich „zwykłej" sumy przez p. Przykładowo, w Z_{31} mamy $28+7 = 4$ (nic dziwnego, „35 maj" to „4 czerwiec"). Podobnie mnożymy i odejmujemy liczby z Z_p. Dzielenie zaś jest działaniem odwrotnym do mnożenia. W każdym ciele możemy badać i rozwiązywać równania algebraiczne takie, jak np. $ax^2+bx+c = 0$, a także interesować się wykresami funkcji $y = ax+b$, $y = x^2$ i podobnych. Możemy też badać zbiory określone równaniami algebraicznymi, np. „okrąg" $x^2+y^2 = 1$.

§ 3. Geometria algebraiczna bada własności zbiorów, określonych równaniami algebraicznymi (lub układami takich równań). Takie zbiory nazywamy *algebraicznymi*. Są nimi na przykład wszystkie stożkowe, krzywa otrzymana przez przecięcie dwóch walców, powierzchnia kuli, paraboloida i powierzchnia torusa. Zbiorami algebraicznymi są też proste, płaszczyzny i punkty. Na światowym kongresie matematyków w 1908 roku Henri Poincaré zwrócił uwagę, że w badaniu równań z dwiema niewiadomymi może być użyteczna teoria krzywych algebraicznych. Równanie z dwiema niewiadomymi może być przecież traktowane jako równanie pewnej krzywej na płaszczyźnie. Ale teoria takich krzywych przyda się tylko wtedy, gdy interesujemy się wszystkimi rozwiązaniami rzeczywistymi lub zespolonymi danych równań — a nie na przykład tylko rozwiązaniami wymiernymi, całkowitymi lub pochodzącymi z pewnego abstrakcyjnego ciała. W tym ostatnim przypadku całe bogactwo geometrii analitycznej, analizy matematycznej czy geometrii różniczkowej jest *a priori* tak samo użyteczne, jak żarówka, piła elektryczna lub elektryczna maszynka do golenia w afrykańskim buszu. Aby móc wykorzystać dobrodziejstwa elektryczności, należy postarać się o prądnicę, a do tego czasu musimy oświetlać świeczką, piłować ręcznie a golić się żyletką.
Geometria algebraiczna XIX wieku osiągnęła wiele interesujących wyników, posługując się „naturalną" geometryczną strukturą badanych zbiorów i podpierając się w trudniejszych momentach analizą matematyczną. W chwili, gdy zdano sobie sprawę, że polem badań mogą i powinny być zbiory algebraiczne określone nad dowolnymi ciałami (liczbowymi lub zupełnie abstrakcyjnymi), zaczęto poszukiwać innych sposobów badania takich zbiorów, bowiem urządzenia napędzane prądem dotychczasowej geometrii analitycznej i analizy matematycznej zdawały się bezużyteczne. Czy można bowiem sensownie mówić np. o ciągłości czy różniczkowalności funkcji określonych na ciałach $\mathbf{Z}_p$?
W 1882 roku Dedekind i Weber zauważyli, że pewne rezultaty teorii krzywych algebraicznych nie zależą od ciała, z którego pochodzą współczynniki równania (równań) opisującego krzywą. Przyporządkowali oni każdej krzywej ciało funkcji wymiernych, określonych na tej krzywej. Badanie krzywych zostało sprowadzone do badania ich ciał funkcji wymiernych i w ten sposób teoria krzywych (a wkrótce i cała geometria algebraiczna) stała się pewnym działem algebry abstrakcyjnej. Od metod „geometrycznych" oddalono się znacznie, nie mogąc ich stosować (a raczej: sensownie naśladować). Dopiero w początkach lat pięćdziesiątych pojawiły się propozycje, jak z powrotem „zgeometryzować geometrię algebraiczną", twórczo symulując te pojęcia, do których wprowadzenia jest (wydaje się) niezbędna ciągłość podstawowego ciała. To właśnie chcemy opisać.

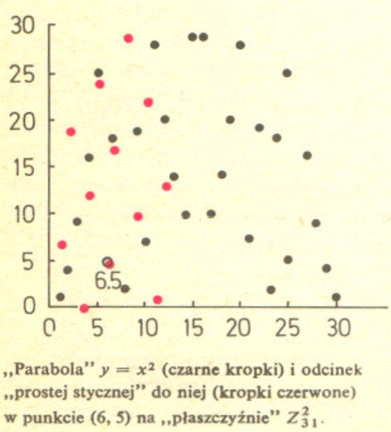
§ 4. Znamy wszyscy wzór na pochodną dowolnego wielomianu:

$$(a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0)' = n a_n x^{n-1} + \ldots + a_1 .$$

Nasuwa się myśl: przyjmijmy ten wzór za *określenie* pochodnej dowolnego wielomianu. Współczynniki jego mogą być elementami zupełnie dowolnego ciała. Nie interesuje nas, czy w tym ciele pojęcie granicy (niezbędne do analitycznego określenia pochodnej) ma sens, czy nie. Po prostu umawiamy się, że na przykład pochodną wielomianu $x^{34}+14x^4+7x^3+5x+1$ o współczynnikach z Z_{31} jest $3x^{33}+25x^3+21x^2+5$. Wiele wzorów różniczkowania (na przykład wzory na pochodną sumy, różnicy i iloczynu) zachowuje prawdziwość (zadanie dla Czytelników: jak to można prosto udowodnić?). Pojawiają się jednak pewne kłopoty. Musimy na przykład (w niektórych przypadkach) sztucznie odróżniać wielomian (*wyrażenie* $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$) od funkcji wielomianowej (funkcji $x \to a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$). Mimo to można odnieść wrażenie, że oto przed nami prosta droga do przeniesienia pojęć i metod analizy matematycznej na najbardziej nawet abstrakcyjne przypadki (jeżeli ograniczyć się do wielomianów). Przykładowo, styczną do krzywej $y = f(x)$ w punkcie (x_0, y_0) możemy określić jako zbiór rozwiązań równania

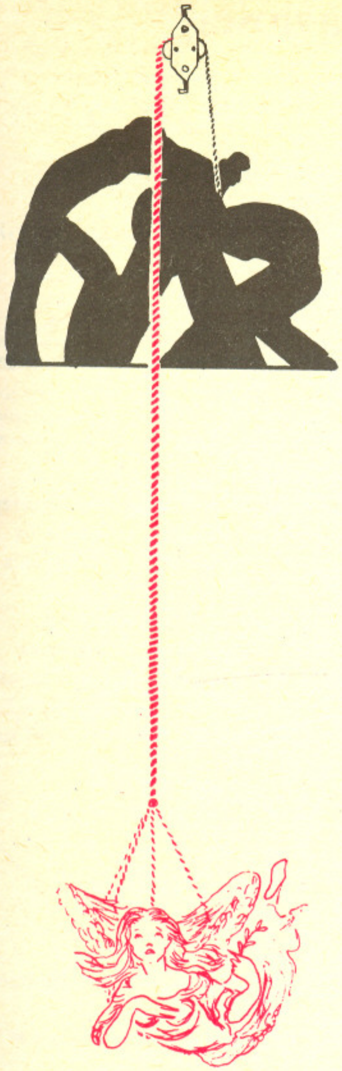
$$y = y_0 + (x - x_0) f'(x),$$

naśladując tym „zwykłe" pojęcie stycznej. Rysunek pokazuje „prostą styczną" do „paraboli" $y = x^2$ w punkcie $(6, 5)$ „płaszczyzny" Z_{31}^2. Nie wszystko da się jednak tak gładko sformalizować. Co gorsze, często taka formalizacja jest możliwa, ale niczemu nie służy. Napiszemy o tym w następnym numerze.



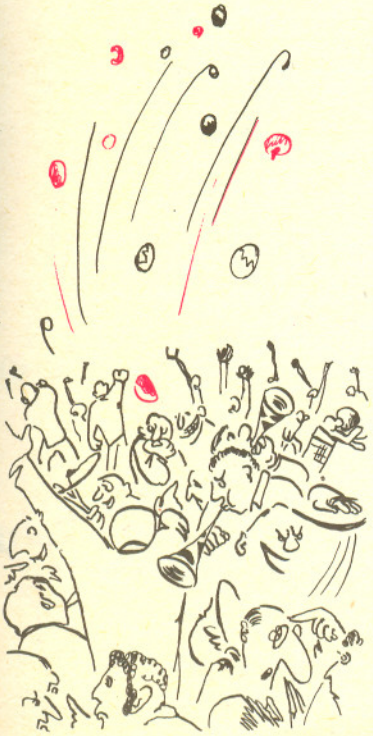
„Parabola" $y = x^2$ (czarne kropki) i odcinek „prostej stycznej" do niej (kropki czerwone) w punkcie $(6, 5)$ na „płaszczyźnie" Z_{31}^2.

Jak to jest naprawdę



Doc. dr Michał ŚWIĘCKI

Czy jednak wszystkie wielkości występujące w fizyce są ciągłe? Wiemy na pewno, że, przynajmniej w granicach dokładności współczesnych doświadczeń, tak nie jest. Dobrym przykładem jest ładunek elektryczny, który składa się z elementarnych, niepodzielnych fragmentów równych ładunkowi elektronu. Niepodzielnych, a więc punktowych, bez struktury. W żadnym bowiem doświadczeniu nie udało się wyprodukować cząstki elementarnej o ładunku będącym częścią ładunku elektronu. Wiemy na podstawie doświadczeń, że ładunek ten zajmuje obszar o rozmiarach nie większych niż 10^{-14} cm. Ładunki elektryczne są więc punktowe, dyskretne i podobnie ma się sprawa z wieloma innymi wielkościami, które przypisujemy cząstkom elementarnym. I tak, dyskretne są ładunki barionowe (liczba barionów minus liczba antybarionów), ładunki leptonowe, a nawet takie wydawałoby się typowo makroskopowe wielkości, jak moment pędu. Oczywiście na skalę makroskopową wielkości te praktycznie zmieniają się w sposób ciągły — nie ma bowiem znaczenia zmiana wynosząca np. 10^{-23} mierzonej wielkości. Gdy jednak zaczniemy wykonywać doświadczenia z udziałem pojedynczych cząstek, wszystkie te parametry okażą się dyskretne. Jest to fakt doświadczalny i nie ma na to żadnej rady. Burzy się nasza wyobraźnia na takie nieciągłości. Czy można sobie na przykład wyobrazić, że cząstka może kręcić się dokoła własnej osi tylko z określoną częstością — częstością niezależną od rodzaju sił zewnętrznych, w których polu działania umieścimy tę cząstkę? A jednak własny moment pędu cząstek, spin (zresztą moment pędu względem innych cząstek również) jest skwantowany i zawsze równa się wielokrotności $\frac{1}{2}\hbar$. Trudno to sobie wyobrazić. Podobnie ma się sprawa ze stanem podstawowym *izolowanego* atomu wodoru, o czym pisał w swym artykule G. Białkowski. Czy wszystko musimy umieć sobie wyobrazić? Fizyka nie jest przecież nauką o wyobrażeniach, a nauką opisującą wyniki doświadczeń. Dlatego parapsychologia nie jest (przynajmniej na razie) nauką ścisłą. Często mówi się o tzw. wyobraźni matematycznej. Znaczy to chyba, że wspomniane wyniki doświadczeń opisujemy za pomocą modeli matematycznych. W ten właśnie sposób fizycy opisują tzw. rzeczywistość — poprzez sprawozdanie z przeprowadzonych doświadczeń i przewidywanie nowych. Reszta nie należy do fizyki. Jakże jednak często usiłujemy wyobrażać sobie elektrony w postaci kuleczek, kółek zębatych itp. Zapominamy przy tym, że posługujemy się tu intuicją wykształconą wprawdzie w wielu doświadczeniach, tyle tylko, że przeprowadzanych na skalę makroskopową. Nie możemy przeto się dziwić, że intuicja ta zawodzi w mikroświecie. Czy jednak nie możemy wykonać doświadczeń, które odpowiedziałyby na pytanie: gdzie jest elektron i jaki jest jego kształt? Weźmy atom wodoru. Elektron w tym atomie znajduje się, zgodnie z prawami mechaniki kwantowej, gdzieś wewnątrz kuli o promieniu rzędu 10^{-8} cm. Dokładne położenie elektronu nie jest znane — możemy mówić jedynie o prawdopodobieństwie jakiegoś określonego położenia. Ale przecież położenie można zmierzyć i przekonać się, gdzie jest elektron. Co otrzymamy? Otóż okazuje się, że każdy taki pomiar przeprowadzony z dokładnością lepszą niż 10^{-8} cm wywoła natychmiast rozbicie, jonizację atomu. Dowiemy się więc, gdzie jest elektron, ale nie będzie to już elektron w atomie. Położenia elektronu wewnątrz atomu nie można określić żadnymi metodami. Nic więc dziwnego, że wszystkie modele atomu, w rodzaju modelu Bohra, w których położenie to było apriorycznie określone, mają obecnie jedynie wartość historyczną. Mechanika kwantowa natomiast nie wypowiada się kategorycznie o żadnych wielkościach, których pomiar i tak nie jest możliwy. W teorii tej obowiązuje m.in. tzw. zasada nieoznaczoności, która twierdzi (zgodnie z doświadczeniem), że nie jest możliwe dowolnie dokładne określenie pędu i położenia cząstki. Tak więc tor cząstki też nie jest określony: jeżeli znamy jej położenie w pewnej chwili, to zupełnie nie znamy pędu (czyli prędkości) i nic nie możemy powiedzieć o położeniu za chwilę. Nie ma więc żadnego sensu mówienie o orbicie elektronu w atomie. Opis kwantowy okazał się wyjątkowo skuteczny i został potwierdzony przez wiele doświadczeń. Jeżeli potrafimy teraz pogodzić się z faktem, że jakiekolwiek makroskopowe wyobrażenia o wnętrzu atomu są prawie z definicji zawodne (zamiast tego mechanika kwantowa wprowadza jakby prawdopodobieństwo różnych wyobrażeń), to już stosunkowo łatwo przyjmiemy dyskretności i nieciągłości występujące w mikroświecie. Wynikają one jednoznacznie z aparatu matematycznego, jakim posługuje się mechanika kwantowa, a mianowicie z tzw. procedury kwantowania. Nie wnikając w szczegóły tej dość złożonej matematycznie teorii, powiemy tylko, że np. procedura kwantowania zastosowana do pola elektromagnetycznego prowadzi do pojawienia się punktowych cząstek elementarnych tego pola — fotonów, które mają określony spin, ładunek (zero) i inne liczby kwantowe, a różnią się jedynie pędem (czyli częstotliwością). Podobnie możemy mówić o kwantach pola elektronowego — elektronach itd. Na zakończenie spróbuję odpowiedzieć na pytanie osób szczególnie upartych, które chcą dalej wiedzieć, jak „naprawdę" wygląda świat, choć pytanie to nie jest naukowe. Otóż, zgodnie z prawami mechaniki kwantowej, świat nie jest precyzyjnym tworem, który powoli odkrywamy. Raczej możemy powiedzieć, że jest on zbudowany w szczegółach niedokładnie, chaotycznie. A jednak da się go opisać piękną teorią matematyczną.



Czego nie byłoby w topologii bez aksjomatu ciągłości?

Doc. dr Maria MOSZYŃSKA

Jesteśmy przyzwyczajeni utożsamiać otaczającą nas przestrzeń z trójwymiarową przestrzenią kartezjańską $\mathscr{R}^3$ nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathscr{R}$, tzn. traktować punkt jako trójkę uporządkowaną liczb rzeczywistych (x_1, x_2, x_3), a odległość dwóch takich punktów (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) mierzyć według wzoru Kartezjusza

$$\varrho((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = \sqrt{(x-y)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (x_i - y_i)^2}.$$

Kwadrat punktu z jest to iloczyn skalarny $z \cdot z$, tzn. jest to suma kwadratów współrzędnych punktu z.
Ogólnie, iloczyn skalarny:
$x \cdot y = (x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) =$
$= x_1 \cdot y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$

Nasuwa się pytanie, czy musimy mieć do dyspozycji wszystkie liczby rzeczywiste, czy nie możemy „gospodarować oszczędniej"?

Ważne jest, żeby zbiór liczb, którymi się posługujemy, F, zawierał 0 i 1 i żeby było w nim wykonalne dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie. To znaczy chcemy, by struktura $\mathscr{F} = (F, 0, 1, +, \cdot)$ była ciałem. Czy może to być np. najmniejsze ciało liczbowe zawarte w ciele liczb rzeczywistych, tzn. ciało liczb wymiernych? Widać, że nie moglibyśmy wtedy mierzyć odległości dowolnych dwóch punktów, bo np. odległość punktu (1, 1, 1) od (0, 0, 0) jest liczbą niewymierną. A więc dla celów geometrii metrycznej istotna jest wykonalność pierwiastkowania sumy kwadratów, tj. ciało $\mathscr{F}$ powinno być pitagorejskie. Zażądamy więcej: aby $\mathscr{F}$ było euklidesowe, tzn. aby było w nim wykonalne pierwiastkowanie dowolnej liczby nieujemnej.

W tytule tego artykułu mowa jest o topologii. Chodzi więc o to, czy zastąpienie ciała $\mathscr{R}$ przez dowolne ciało euklidesowe $\mathscr{F}$ wpłynie na własności topologiczne przestrzeni. Okazuje się, że tak.

Topologia (por. artykuł M. Skwarczyńskiego) w przestrzeni (R^3, ϱ) (jak w każdej przestrzeni metrycznej) wyznaczona jest przez kule otwarte, tj. zbiorami otwartymi są sumy takich kul.

W twierdzeniach topologicznych istotną rolę odgrywa własność ciała uporządkowanego $(R, \leqslant)$ zwana ciągłością (lub zupełnością) porządku $\leqslant$ (nie mylić z pojęciem ciągłości funkcji!!!). Można ją opisać tak:

Jeżeli zbiór R podzielimy na dwa niepuste rozłączne podzbiory A, B tak, by

$$a \leqslant b \text{ dla każdego } a \in A,\ b \in B,$$

to istnieje liczba $x \in R$, która spełnia nierówność

$$a \leqslant x \leqslant b$$

dla każdego $a \in A$, $b \in B$.

Zdanie to, zwane *aksjomatem ciągłości*, mówi, że w zbiorze R „nie ma luk".

Żeby zdać sobie sprawę z tego, co tracimy w topologii przestrzeni kartezjańskiej zastępując ciało liczb rzeczywistych uporządkowane w sposób ciągły dowolnym ciałem euklidesowym $\mathscr{F}$, przytoczymy dwa twierdzenia o przestrzeni $\mathscr{R}^3$ i zastanowimy się, czy można je uogólnić na $\mathscr{F}^3$.

Ustalmy terminologię i oznaczenia.

Niech $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$. Niech $K^3_{\mathscr{F}}$ będzie kulą jednostkową w przestrzeni $\mathscr{F}^3$:

$$K^3_{\mathscr{F}} = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathscr{F}^3 : \varrho(x, \mathbf{0}) \leqslant 1\};$$

Sferą jednostkową w przestrzeni $\mathscr{F}^3$ będziemy nazywać zbiór

$$S^2_{\mathscr{F}} = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathscr{F}^3 : \varrho(x, \mathbf{0}) = 1\}.$$

W szczególności, jeśli $\mathscr{F} = \mathscr{R}$, otrzymujemy zwykłą trójwymiarową kulę i jej brzeg — dwuwymiarową sferę.

Niech $K^3 = K^3_{\mathscr{R}}$ i $S^2 = S^2_{\mathscr{R}}$.

Twierdzenie 1 — o punkcie stałym (L. E. J. Brouwer):
Dla każdej funkcji ciągłej

$$f: K^3 \to K^3$$

istnieje punkt stały, tj. taki punkt $x_0 \in K^3$, dla którego

$$f(x_0) = x_0.$$

Twierdzenie 2 — o tym, że sfera nie jest retraktem kuli (K. Borsuk):
Nie istnieje funkcja ciągła

$$r: K^3 \to S^2$$

spełniająca warunek

$$r(x) = x \quad \text{dla każdego } x \in S^2$$

(tj. nie istnieje *retrakcja kuli K^3 na sferę S^2*).

Żadne z tych dwu twierdzeń nie da się uogólnić na przestrzeń kartezjańską nad dowolnym ciałem euklidesowym $\mathscr{F}$, tzn. nie można w tych twierdzeniach zastąpić K^3 przez $K^3_{\mathscr{F}}$ i S^2 przez $S^2_{\mathscr{F}}$.
Żeby tego dowieść, wystarczy wskazać takie ciało euklidesowe $\mathscr{F}$, dla którego zachodzą następujące dwa twierdzenia

Twierdzenie 1*. *Istnieje funkcja ciągła*

$$f: K^3_{\mathscr{F}} \to K^3_{\mathscr{F}}$$

bez punktu stałego, tj. spełniająca warunek

$$f(x) \neq x \quad \text{dla każdego } x \in K^3_{\mathscr{F}}.$$

Twierdzenie 2*. *Sfera $S^2_{\mathcal{F}}$ jest retraktem kuli $K^3_{\mathcal{F}}$, tzn. istnieje funkcja ciągła*

$$r\colon K^3_{\mathcal{F}} \to S^2_{\mathcal{F}}$$

spełniająca warunek

$$r(x) = x \qquad dla\ x \in S^2_{\mathcal{F}}.$$

Niech $\mathcal{F}$ będzie ciałem liczb algebraicznych rzeczywistych. Można wykazać, że nie spełnia ono aksjomatu ciągłości. Jest to ciało euklidesowe przeliczalne, a więc zbiór $\mathcal{F}^3$ jest również przeliczalny.

Czytelnik z łatwością sprawdzi, że zarówno przestrzeń $K^3_{\mathcal{F}}$, jak i przestrzeń F (z metryką kartezjańską) są w sobie gęste, tzn. nie mają punktów izolowanych — każdy punkt jest punktem skupienia.

Punkt x jest punktem skupienia przestrzeni X, jeśli w dowolnej kuli o środku x istnieje punkt $x' \neq x$.

Dwie przestrzenie są homeomorficzne, jeżeli istnieje homeomorfizm jednej z nich na drugą (por. art. M. Skwarczyńskiego).

Otóż wiadomo, że każde dwie przestrzenie przeliczalne w sobie gęste są homeomorficzne, a zatem mamy

Lemat 1. *Przestrzenie $K^3_{\mathcal{F}}$ i F są homeomorficzne.*

Dowód **Twierdzenia 1***. Na mocy **Lematu** istnieje homeomorfizm

$$h\colon K_{\mathcal{F}} \to F.$$

Niech $g\colon F \to F$ będzie przesunięciem o 1:

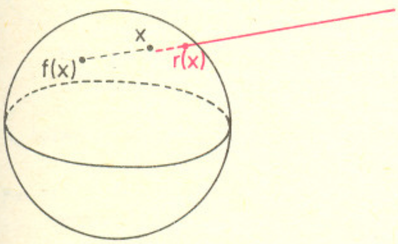
$$g(x) = x+1 \quad \text{dla} \quad x \in F.$$

Weźmy pod uwagę funkcję

$$f = h^{-1}gh\colon K^3_{\mathcal{F}} \to K^3_{\mathcal{F}}.$$

Funkcja f jest ciągła, jako superpozycja (złożenie) funkcji ciągłych. Gdyby jakiś punkt x_0 był punktem stałym funkcji f, to punkt $y_0 = h(x_0)$ byłby punktem stałym funkcji g, bo

$$g(y_0) = gh(x_0) = hf(x_0) = h(x_0) = y_0.$$



Ale funkcja g nie ma punktów stałych. A więc f też nie ma punktów stałych, co kończy dowód.

Dowód **Twierdzenia 2***. Na mocy **Twierdzenia 1*** istnieje funkcja ciągła

$$f\colon K^3_{\mathcal{F}} \to K^3_{\mathcal{F}}$$

bez punktu stałego. Przy jej pomocy skonstruujemy retrakcję r kuli na sferę,

$$r\colon K^3_{\mathcal{F}} \to S^2_{\mathcal{F}}.$$

Weźmy dowolny punkt $x \in K^3_{\mathcal{F}}$. Ponieważ $f(x) \neq x$, więc punkty x i $f(x)$ wyznaczają półprostą w $\mathcal{F}^3$:

$$L_{\mathcal{F}}(x) = \{x+t(f(x)-x)\colon t \in F \wedge t \leqslant 0\}.$$

(Zauważmy, że półprosta ta nie przechodzi przez $f(x)$.)

Pokażemy, że półprosta $L_{\mathcal{F}}(x)$ przecina sferę $S^2_{\mathcal{F}}$ w jednym punkcie, tzn. w zbiorze F istnieje dokładnie jedna liczba $t \leqslant 0$, dla której

(1) $$x+t(f(x)-x) \in S^2_{\mathcal{F}}.$$

Warunek (1) równoważny jest warunkowi

(2) $$\varrho(\mathbf{0},\ x+t\cdot(f(x)-x)) = 1,$$

który można (przyjmując $y = f(x)$) zapisać w postaci

$$(x+t(y-x))^2 = 1.$$

Stosując prawo rozdzielności iloczynu skalarnego względem dodawania punktów, otrzymujemy stąd równanie kwadratowe względem t:

$$t^2(y-x)^2+2t\cdot x\cdot(y-x)+(x^2-1) = 0.$$

Można obliczyć, że równanie to ma wyróżnik Δ_x dodatni, oraz że z dwóch jego pierwiastków rzeczywistych dokładnie jeden jest niewiększy od 0. Ten pierwiastek ma postać

$$t_x = x\cdot(x-y)-\frac{1}{2}\sqrt{\Delta_x}$$

więc — jak łatwo sprawdzić — wyraża się w zależności od współrzędnych punktów x i $f(x)$ za pomocą działań, które nie wyprowadzają poza zbiór $\mathcal{F}$. Zatem $t_x \in F$.

Wartość funkcji r w punkcie x określamy jako ten jedyny punkt wspólny półprostej $L_{\mathcal{F}}(x)$ i sfery $S^2_{\mathcal{F}}$:

$$r(x) = x+t_x\cdot(f(x)-x).$$

Tak zdefiniowana funkcja

$$r\colon K^3_{\mathcal{F}} \to S^2_{\mathcal{F}}$$

jest ciągła, oraz spełnia warunek

$$r(x) = x \qquad \text{dla } x \in S^2_{\mathcal{F}},$$

ponieważ

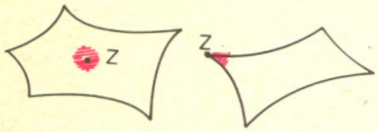
$$x \in S^2_{\mathcal{F}} \Rightarrow t_x = 0.$$

A więc r jest retrakcją kuli $K^3_{\mathcal{F}}$ na sferę $S^2_{\mathcal{F}}$, co kończy dowód **Twierdzenia 2***.

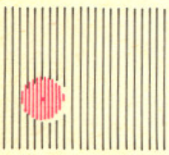
Warto wspomnieć, że zarówno Twierdzenia 1 i 2, jak Twierdzenia 1* i 2* przenoszą się na kulę n-wymiarową i sferę $(n-1)$-wymiarową w przestrzeni n-wymiarowej (dla dowolnego $n \geqslant 2$).

Continuum

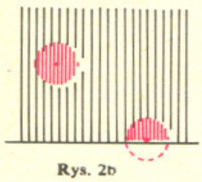
Dr Maciej SKWARCZYŃSKI



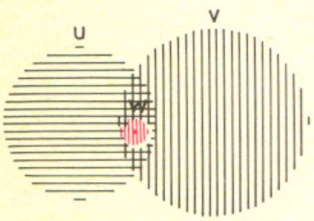
Rys. 1a. To jest Rys. 1b. To nie jest okolica miejscowości Z



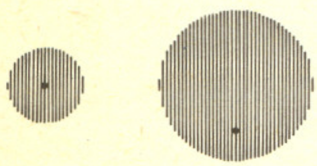
Rys. 2a



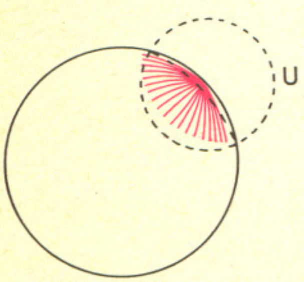
Rys. 2b



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Tytuł tego artykułu jest zapożyczony z łaciny. Słowo *continuum* oznacza twór położony w przestrzeni, rozpościerający się bez przerw, złożony z części złączonych ze sobą w jedną całość. Spróbujemy zastąpić to określenie definicją matematyczną. W tym celu sformalizujemy nasze intuicje związane z pojęciem przestrzeni.

Punktem wyjścia dla naszych rozważań jest analogia geograficzna, w której płaszczyzna mapy odgrywa rolę przestrzeni dwuwymiarowej. Rozważmy dowolną miejscowość Z oraz pewną okolicę tej miejscowości. Obrazem miejscowości Z na mapie jest punkt, który w dalszym ciągu będziemy oznaczać literą z, a obrazem okolicy jest pewna figura płaska zawierająca punkt z. Dwie różne osoby będą miały z reguły odmienne zdania w kwestii, jakie tereny składają się na okolicę miejscowości Z i w związku z tym wskażą na mapie dwie różne figury płaskie. Zawsze jednak wskazana figura będzie zawierać jakieś koło o środku w punkcie z, por. rys. 1a i 1b.

Niech teraz $\mathscr{F}$ będzie dowolną figurą płaską, a z dowolnym punktem płaszczyzny. Jeżeli figurę $\mathscr{F}$ można uważać za „okolicę" punktu z, lub mówiąc bardziej precyzyjnie, jeśli figura $\mathscr{F}$ zawiera pewne koło o środku w punkcie z, to punkt z nazywa się *wewnętrznym* punktem tej figury. Figura, która składa się wyłącznie z punktów wewnętrznych, nazywa się *zbiorem otwartym*. Dla przykładu, półpłaszczyzna rozważana bez ograniczającej linii prostej jest zbiorem otwartym, podczas gdy półpłaszczyzna uzupełniona ograniczającą linią już zbiorem otwartym nie jest, por. rys. 2a i 2b.

Przykładem zbioru otwartego jest również koło otwarte, tj. koło rozważane bez ograniczającego okręgu. Zauważmy, że rodzina złożona z wszystkich kół otwartych pokrywa całą płaszczyznę, oraz że dwa koła otwarte zawierające punkt z zawierają wraz z tym punktem pewne koło otwarte, por. rys. 3.

Jest interesujące, że intuicje odnoszące się do płaszczyzny są przydatne również przy badaniu dowolnego „abstrakcyjnego" zbioru X, pod warunkiem, że w zbiorze X zostały wyróżnione podzbiory zwane *otoczeniami*, a rodzina Θ złożona z wszystkich otoczeń ma własności analogiczne do własności rodziny złożonej z wszystkich kół otwartych na płaszczyźnie. Mówiąc dokładniej, zakładamy, że rodzina Θ ma następujące własności

i. każdy punkt $z \in X$ należy do pewnego otoczenia $U \in \Theta$,

ii. jeżeli punkt $z \in X$ należy do otoczenia $U \in \Theta$, oraz do otoczenia $V \in \Theta$, to istnieje otoczenie $W \in \Theta$ takie, że $z \in W \subset U \cap V$.

Jeżeli punkt z należy do otoczenia U, to mówimy, że U jest *otoczeniem punktu* z. Jeśli zbiór $G \subset X$ wraz z punktem z zawiera pewne otoczenie punktu z, to mówimy, że z jest *wewnętrznym punktem* zbioru G. Zbiór G, który składa się wyłącznie z punktów wewnętrznych, nazywa się *zbiorem otwartym* w X. Rodzina τ złożona z wszystkich zbiorów otwartych w X nazywa się *topologią* zbioru X, określoną przez rodzinę otoczeń Θ. Zbiór X z ustaloną topologią nazywa się *przestrzenią topologiczną*. Jeżeli każde dwa różne punkty przestrzeni topologicznej X mają rozłączne otoczenia (por. rys. 4), to mówimy, że X jest przestrzenią topologiczną Hausdorffa.

Oto kilka najprostszych przykładów przestrzeni Hausdorffa: linia prosta z topologią określoną przez rodzinę otoczeń złożoną z wszystkich odcinków otwartych; płaszczyzna z topologią określoną przez rodzinę otoczeń złożoną z wszystkich kół otwartych; przestrzeń trójwymiarowa z topologią określoną przez rodzinę otoczeń złożoną z wszystkich kul (punkty ograniczającej sfery nie są zaliczane do punktów kuli).

W każdej przestrzeni topologicznej X rodzina złożona z wszystkich zbiorów otwartych ma następujące własności, wynikające natychmiast z własności rodziny otoczeń

j . zbiór pusty $\emptyset$ i zbiór X są otwarte

jj . część wspólna dwu zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym

jjj. suma każdej liczby zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

Zauważmy, że w każdym podzbiorze E przestrzeni topologicznej X można w naturalny sposób wyróżnić pewną rodzinę otoczeń. W istocie, jeśli Θ jest rodziną otoczeń w przestrzeni X, to rodzina Θ_E złożona z wszystkich zbiorów postaci $U \cap E$, gdzie $U \in \Theta$, ma własności rodziny otoczeń w zbiorze E. Tak więc podzbiór przestrzeni topologicznej sam jest przestrzenią topologiczną. Można wykazać, że każdy zbiór otwarty w E ma postać $G \cap E$, gdzie G jest pewnym zbiorem otwartym w X.

W szczególnym przypadku, gdy X jest przestrzenią trójwymiarową, a S sferą położoną w tej przestrzeni, rodzina otoczeń w przestrzeni X składa się z kul, a rodzina otoczeń na sferze S składa się z czasz sferycznych, por. rys. 5.

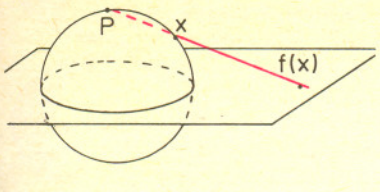
Przy badaniu przestrzeni topologicznych ważną rolę odgrywają funkcje określone w przestrzeni topologicznej i przyjmujące wartości w przestrzeni topologicznej, lub jak mówimy, odwzorowania przestrzeni topologicznych. Niech X będzie przestrzenią z topologią α i niech Y będzie przestrzenią z topologią β. Mówimy, że odwzorowanie

$$f\colon X \to Y$$

jest *ciągłe w punkcie* $z \in X$, jeżeli dla każdego otoczenia V punktu $f(z)$ w przestrzeni Y można znaleźć otoczenie U punktu z w przestrzeni X, o tej własności, że każdy punkt $x \in U$ jest odwzorowany na punkt $f(x)$ należący do otoczenia V. Własność tę można również sformułować bardziej poglądowo, stwierdzając że punkt $f(x)$ jest bliski punktowi $f(z)$, jeśli tylko punkt x jest bliski punktowi z. Mówimy, że odwzorowanie f jest ciągłe jeżeli jest ciągłe w każdym punkcie $z \in X$. Czytelnik sprawdzi z łatwością, że odwzorowanie f jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru G otwartego w Y jego przeciwobraz $f^{-1}(G)$ zdefiniowany wzorem

$$f^{-1}(G) = \{x \in X: \quad f(x) \in G\}$$

jest zbiorem otwartym w X.



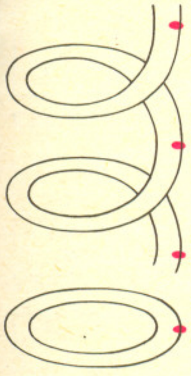
Rys. 6

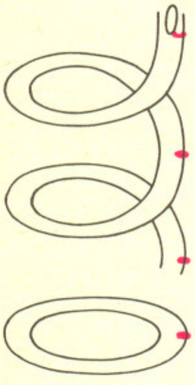
Rozważmy następujący przykład. Niech X będzie sferą S z usuniętym biegunem północnym P i niech Y będzie płaszczyzną równika, por. rys. 6.

Każdemu punktowi $x \in X$ możemy przyporządkować punkt $f(x)$, w którym prosta wyznaczona przez punkty x i P przecina płaszczyznę Y. Nietrudno zauważyć, że f jest odwzorowaniem ciągłym. Można stwierdzić więcej, a mianowicie że f jest wzajemnie jednoznacznym odwzorowaniem ciągłym, mającym ciągłe odwzorowanie odwrotne. Takie odwzorowania nazywamy *homeomorfizmami*. Jeżeli istnieje homeomorfizm $f: X \to Y$, to mówimy, że *przestrzenie X i Y są homeomorficzne*. W tym przypadku zbiór $f^{-1}(G)$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór G jest otwarty. Wynika stąd, że przestrzenie homeomorficzne mają takie same własności topologiczne.

Z kolei rozważmy otwarty pierścień Y położony na płaszczyźnie, oraz powierzchnię X w kształcie obustronnie nieskończonego ślimaka, leżącą nad pierścieniem Y, por. rys. 7a. Każdemu punktowi $x \in X$ przyporządkowujemy jego rzut $f(x)$ na pierścień Y. Zwróćmy uwagę na następującą własność odwzorowania f. Każdy punkt $y \in Y$ ma takie otoczenie V, że przeciwobraz $f^{-1}(V)$ jest sumą parami rozłącznych zbiorów otwartych, przy czym jeśli U jest jakimkolwiek z tych zbiorów, to odwzorowanie

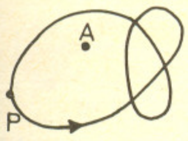
$$f: U \to V$$


Rys. 7a

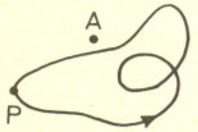

Rys. 7b

jest homeomorfizmem. Odwzorowanie f o powyższej własności nazywa się nakryciem. Każde nakrycie jest przykładem odwzorowania ciągłego. Przykład odwzorowania ciągłego, które nie jest nakryciem, został przedstawiony na rys. 7b.

Odwzorowanie ciągłe $f: \langle a, b\rangle \to X$ odcinka w przestrzeń topologiczną X nazywa się *krzywą* w tej przestrzeni. Jest to nic innego, jak „opis podróży" po przestrzeni X w czasie od a do b. Tak więc, jeśli w okresie czasu od a do b będziemy mazać ołówkiem po kartce papieru, nie odrywając ostrza od kartki, to określimy pewną krzywą płaską. Powstały przy tej okazji rysunek nazywa się *obrazem krzywej*. Rozważmy punkt A nie należący do obrazu zamkniętej krzywej f. Liczba określająca, ile razy krzywa f obiega punkt A, nazywa się *indeksem* punktu A względem krzywej f. Rysunki 8a i 8b przedstawiają obrazy krzywych płaskich, których indeks względem punktu 0 wynosi odpowiednio 1 i 0. (Strzałka odnosi się do krzywej, a nie do obrazu!)

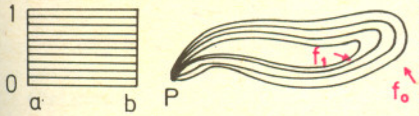


Rys. 8a



Rys. 8b

Ciągłe odwzorowanie prostokąta $f: \langle a, b\rangle \times \langle 0, 1\rangle \to X$ pozwala określić rodzinę krzywych $f_s: \langle a, b\rangle \to X$ danych wzorami $f_s(t) = f(t, s)$. Załóżmy, że wszystkie te krzywe zaczynają i kończą się w tym samym punkcie P, por. rys. 9.



Rys. 9

Możemy uważać, że rodzina f_s opisuje proces, w którym krzywa f_0 pozostając w przestrzeni X zostaje zdeformowana do krzywej f_1. Mówimy, że krzywe f_0 i f_1 są *homotopijne* w przestrzeni X. Aby bliżej omówić to pojęcie, wyróżnimy pewną klasę przestrzeni topologicznych. Mówimy, że przestrzeń topologiczna X jest *spójna*, jeśli nie istnieją zbiory U i V otwarte w X, niepuste, rozłączne i takie, że $X = U \cup V$. W szczególności zbiór $E \subset X$ jest spójny wtedy, gdy nie istnieją zbiory U i V otwarte w X, dla których

$$U \cap E \neq \emptyset, \quad V \cap E \neq \emptyset, \quad U \cap E \cap V = \emptyset \text{ oraz } E \subset U \cup V.$$

Można łatwo zauważyć, że każdy spójny podzbiór E osi liczbowej musi być przedziałem. Wystarczy w tym celu pokazać, że jeśli $a \in E$, $b \in E$ oraz $a < c < b$, to $c \in E$. Rozumując nie wprost przypuśćmy, że $c \notin E$ i połóżmy $U = (-\infty, c)$, $V = (c, \infty)$. Wówczas $E \subset U \cup V$, $a \in U \cap E$, $b \in V \cap E$ oraz $U \cap V \cap E = \emptyset$, a więc E nie jest zbiorem spójnym. Na odwrót, wykorzystując tzw. aksjomat ciągłości dla zbioru R liczb rzeczywistych można udowodnić, że każdy przedział jest zbiorem spójnym.

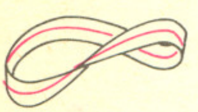
Bezpośrednio z definicji spójności wynika, że przy przekształceniu ciągłym obraz przestrzeni spójnej jest spójny. W szczególności obraz każdej krzywej jest zbiorem spójnym. Innym natychmiastowym wnioskiem z definicji zbioru spójnego jest twierdzenie, że suma dowolnej liczby spójnych zbiorów w X, zawierających wspólny punkt P, jest spójnym zbiorem w X. Suma wszystkich spójnych podzbiorów przestrzeni X, do których należy punkt P (tj. największy zbiór spójny, do którego należy ten punkt), nazywa się *składową* tej przestrzeni wyznaczoną przez punkt P. Czytelnik zechce przekonać się, że zbiór otwarty na płaszczyźnie jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy każde dwa punkty P, Q można połączyć krzywą w tym zbiorze, oraz że każda składowa otwartego zbioru na płaszczyźnie jest zbiorem otwartym. Każda przestrzeń topologiczna jest sumą swoich parami rozłącznych składowych.

Jeżeli f_0 i f_1 są krzywymi homotopijnymi w płaszczyźnie bez punktu A, to indeks krzywej f_s względem A jest ciągłą funkcją zmiennej s w przedziale $\langle 0, 1\rangle$ i wobec tego zbiór wszystkich wartości tej funkcji jest przedziałem. Z drugiej strony indeks przyjmuje tylko wartości całkowite, a więc rozważany zbiór wartości musi składać się tylko z jednego punktu. Wynika stąd, że krzywe przedstawione na rys. 8a i 8b nie są homotopijne w płaszczyźnie z usuniętym punktem 0.

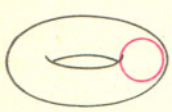
Rozważmy teraz dowolny zbiór otwarty i spójny Y na płaszczyźnie (czyli obszar). Jeżeli każda zamknięta krzywa w Y o początku w punkcie P jest homotopijna w Y z krzywą stałą (jest ściągalna do punktu P), to mówimy, że Y jest obszarem jednospójnym. Prawdziwe (i ważne) jest następujące *twierdzenie o monodromii*, charakteryzujące obszary jednospójne:
Na to, aby obszar Y był jednospójny, potrzeba i wystarcza, aby każde nakrycie odwzorowujące dowolną przestrzeń spójną X na Y było odwzorowaniem różnowartościowym.
Inną ważną klasę przestrzeni topologicznych tworzą *przestrzenie zwarte*. Mówimy, że przestrzeń topologiczna X jest *zwarta*, jeśli dla każdej rodziny $\mathcal{U}$ złożonej z otwartych zbiorów w X i takiej, że suma wszystkich zbiorów tej rodziny równa jest X, istnieje skończona liczba takich zbiorów $U_i \in \mathcal{U}(i = 1, 2, \ldots, k)$, że $X \subset U_1 \cup U_2 \ldots \cup U_k$. Podzbiór E dowolnej przestrzeni topologicznej X jest zwarty, jeśli dla każdej rodziny $\mathcal{U}$ złożonej z otwartych zbiorów w X, takiej że E zawiera się w sumie zbiorów tej rodziny istnieje skończona liczba takich zbiorów $U_i \in \mathcal{U}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, że $E \subset U_1 \cup \ldots \cup U_k$.
Mówimy, że E jest *domkniętym* podzbiorem przestrzeni topologicznej X, jeżeli zbiór $X \setminus E$ jest otwarty. Udowodnimy, że jeżeli X jest przestrzenią Hausdorffa, to każdy jej podzbiór zwarty X jest domknięty. Rozważmy dowolny punkt $z \in X \setminus E$. Dla każdego $x \in E$ można na mocy założenia znaleźć rozłączne otoczenia U_x i V_z, takie że $x \in U_x$, oraz $z \in V_z$. Zbiór E jest zwarty i jest pokryty przez rodzinę $\mathcal{U} = \{U_x, x \in E\}$. Istnieje więc skończona liczba takich otoczeń U_{x_i}, $x_i \in E$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, że $E \subset U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \ldots \cup U_{x_k}$. Niech V będzie otoczeniem punktu z zawartym w zbiorze otwartym $V_{x_1} \cap V_{x_2} \cap \ldots \cap V_{x_k}$. Oczywiście $z \in V \subset X \setminus E$, a więc z jest wewnętrznym punktem zbioru $X \setminus E$, co kończy dowód.
Zauważmy, że oś liczbowa R nie jest zbiorem zwartym, gdyż można ją pokryć nieskończoną rodziną otwartych przedziałów $(j, j+2)$ (j całkowite), podczas gdy żadna skończona ilość tych przedziałów nie pokrywa R. To samo rozumowanie pokazuje, że każdy zwarty zbiór na prostej jest zbiorem ograniczonym. Można udowodnić (ale nie będziemy tego robić), że podzbiór linii prostej jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony. To samo twierdzenie pozostaje prawdziwe dla podzbiorów płaszczyzny, a także dla podzbiorów przestrzeni trójwymiarowej.
Powróćmy teraz do zagadnienia postawionego na wstępie i zastanówmy się, jakie podzbiory zasługują na nazwę *continuum*. Niewątpliwie na nazwę tę zasługuje odcinek domknięty na prostej, por. rys. 10.

Rys. 10

Jak widzieliśmy, podzbiór prostej jest odcinkiem domkniętym wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbiorem zwartym i spójnym. Będziemy więc w zgodzie z intuicją, jeśli te własności topologiczne przyjmiemy za podstawę naszej definicji. Tak więc przez *continuum* będziemy rozumieć dowolną przestrzeń topologiczną zwartą i spójną. Aby ocenić przydatność tej definicji, zapoznamy się z przykładami continuów położonych na sferze.
Zauważmy przede wszystkim, że sfera S jest zwartą przestrzenią Hausdorffa. Rzeczywiście, południowa hemisfera wraz z równikiem jest zwarta, gdyż jest homeomorficzna z kołem domkniętym na płaszczyźnie (por. rys. 6). Ponieważ suma dwu zwartych podzbiorów przestrzeni jest, jak łatwo sprawdzić, zbiorem zwartym, więc sfera jest zwarta jako suma dwu hemisfer.
Czytelnik sprawdzi z łatwością, że każdy domknięty podzbiór przestrzeni zwartej jest zbiorem zwartym. Wynika stąd, że podzbiór $K \subset S$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty, oraz że podzbiór $K \subset S$ jest continuum wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i spójny.
Załóżmy, że $K \subset S$ jest zbiorem domkniętym. Można udowodnić (ale dowód jest bardzo trudny), że zbiór K jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy każda składowa otwartego zbioru $S \setminus K$ jest homeomorficzna z obszarem jednospójnym. W szczególnym przypadku, gdy K jest krzywą Jordana (tj. homeomorficznym obrazem okręgu), ma miejsce twierdzenie Jordana, które mówi, że zbiór $S \setminus K$ ma dokładnie dwie składowe.

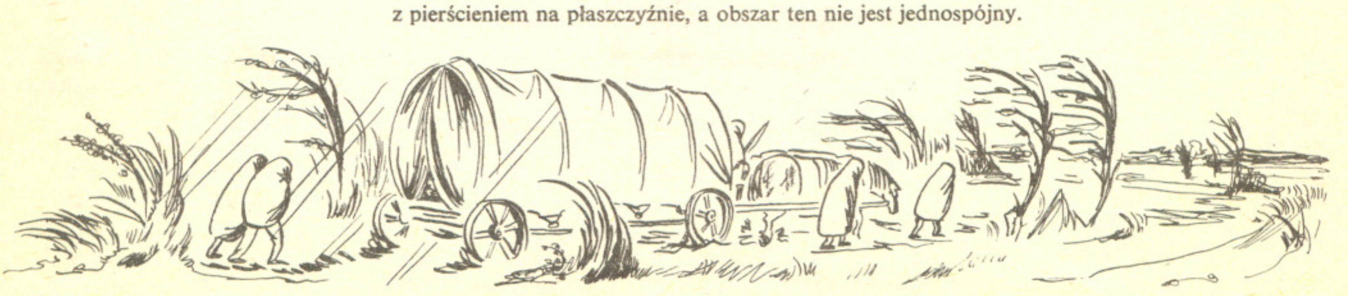


Rys. 11a

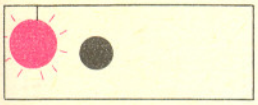


Rys. 11b

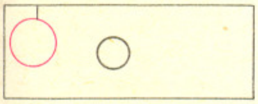
Powyższe twierdzenia należą do dziedziny matematyki zwanej topologią płaszczyzny (a właściwie sfery). Tematyka ta była bardzo bliska twórcom polskiej szkoły matematycznej. Czytelnik bliżej zainteresowany przedstawionymi tu zagadnieniami powinien sięgnąć po oryginalne prace Zygmunta Janiszewskiego (1888—1920) i jego współpracowników.
Na zakończenie dodajmy, że na powierzchniach innych niż sfera własności continuów są zgoła odmienne. I tak na przykład krzywa Jordana na ogół nie rozcina wstęgi Möbiusa (rys. 11a) ani torusa (rys. 11b). Co więcej, dopełnienie krzywej Jordana na rys. 11b jest homeomorficzne z pierścieniem na płaszczyźnie, a obszar ten nie jest jednospójny.



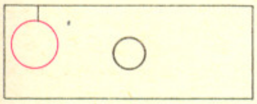
mała delta



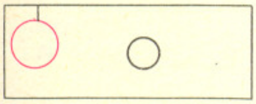
Jasno — widać kulkę



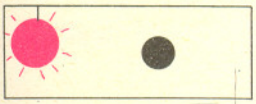
Ciemno — nic nie widać



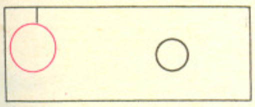
Ciemno — nic nie widać



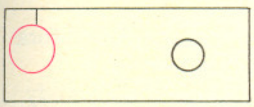
Ciemno — nic nie widać

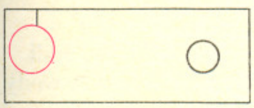


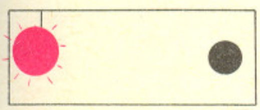
Jasno — widać kulkę



Ciemno — nic nie widać

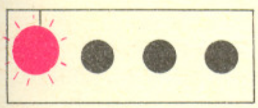






Jasno — widać kulkę

....



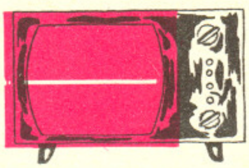
Tak widzimy

Nie ufaj własnym oczom.

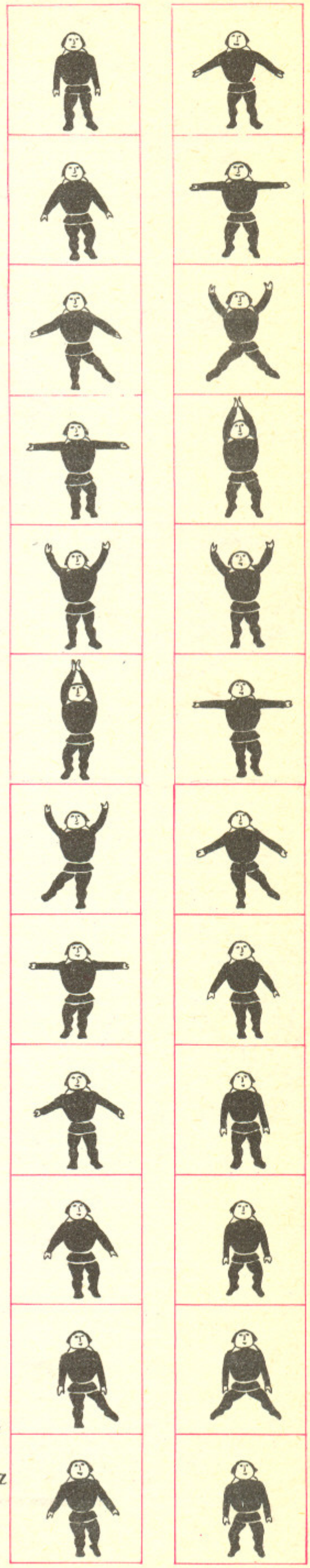
Są tak zbudowane, że możemy sztucznie wywołać wrażenie ruchu tam, gdzie go nie ma i wrażenie spoczynku tam, gdzie ruch jest. W kinie poza taśmą filmową nic się nie rusza. Operator wyświetla szybko po sobie następujące nieruchome obrazy. Oko odbiera ten zalew obrazków różniących się każdy nieznacznie jeden od drugiego jako ruch na ekranie. To samo zjawisko zwane efektem stroboskopowym możesz zbadać za pomocą jakiejkolwiek, byle dość grubej książki, lepsza jest książka z miękkimi okładkami. Na marginesie „Delty" narysowano szereg obrazków. Możesz je wyciąć i nakleić w górnym lewym rogu kolejnych parzystych stron książki. Przewertuj teraz bardzo szybko karty książki. Mądrzej by było, gdybyś narysował kolejne rysunki sam i bezpośrednio w książce, gdyż dodatkowa warstwa papieru i kleju utrudnia obserwowanie efektu. Efekt stroboskopowy to także zjawisko odwrotne. Szybki proces ciągły możemy zamienić na serię oddzielnych nieruchomych obrazów. Wykonaj doświadczenie.

Badamy spadanie kropel wody

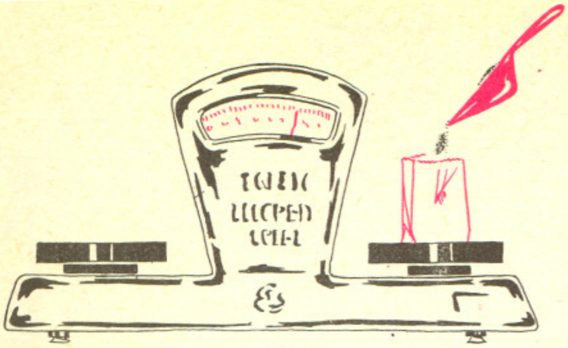
Jak dobrze wiesz, kropla swobodnie puszczona spada tak szybko, że okiem nie można prześledzić jej ruchu. Można to jednak zrobić, stosując tzw. lampę błyskową.
Lampa taka zapala się bardzo często, np. 50 razy w ciągu sekundy, na bardzo krótką chwilę, np. 1/1000 s. Co będziemy widzieć, jeżeli w jej świetle szybko porusza się jakieś ciało, np. kulka z dużą prędkością toczy się po stole? Przedstawia to rysunek. Oko nie rozróżnia tak krótkich błysków, jak te, które omawiamy. Zamiast poruszającej się kulki widzimy więc pozornie równocześnie kilka nieruchomych kulek — w tych położeniach, w których kulka znajdowała się wtedy, kiedy lampa świeciła. Jeżeli lampa błyska równomiernie, z odległości pomiędzy obrazami możemy wnioskować, czy ciało porusza się ze stałą prędkością, czy zwalnia, czy przyspiesza.
Skąd wziąć lampę błyskową? Prawie każdy z nas ma ją w domu — jest nią po prostu ekran telewizora. Dla zwiększenia efektu dobrze jednak przesłonić go (np. ciemnym papierem) tak, aby światło wydostawało się z poziomego paska o szerokości 2–3 cm. Należy przy tym nastawić jasność na maksimum, a doświadczenie robić w ciemnym pokoju, żeby nie było żadnych innych źródeł światła.



Możesz już teraz obejrzeć spadanie kropel wody w świetle błyskowym. Krople najłatwiej uzyskasz, mocząc kawałek szmatki i pozwalając wodzie swobodnie spływać (nie mocz za bardzo — żeby woda nie leciała ciurkiem). Nie zapomnij podstawić miednicy albo chociaż talerza, żeby nie zalać podłogi!

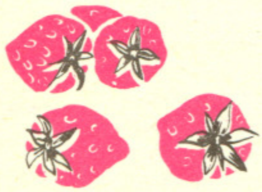


Na długim podjeździe kierowca redukuje bieg. Autobus pnie się powoli do góry. Wyższego biegu wrzucić nie sposób — nie starczy mocy silnika. Na niskim biegu jazda jest denerwująco powolna. Przydałby się bieg pośredni, a najlepiej taka konstrukcja skrzyni biegów, która pozwoliłaby na ciągłą regulację przełożenia.
Zjawiska przebiegające w sposób ciągły mają zalety, z których chętnie korzystamy. Oto kilka przykładów.



Ważenie cukru

Trzeba odważyć kilogram cukru. Nic prostszego. Sypiemy cukier do torebki ustawionej na szalce i obserwujemy wskazówkę wagi. W miarę jak zbliża się ona do podziałki oznaczającej kilogram sypiemy cukier coraz mniejszym strumieniem. Przy wprawie osiągniemy zamierzony cel szybko i bez potrzeby odsypywania z torebki nadmiaru cukru.
O wiele trudniej odważyć kilogram jabłek, toteż często kupujemy nieco mniej lub nieco więcej, niż to pierwotnie zaplanowaliśmy.

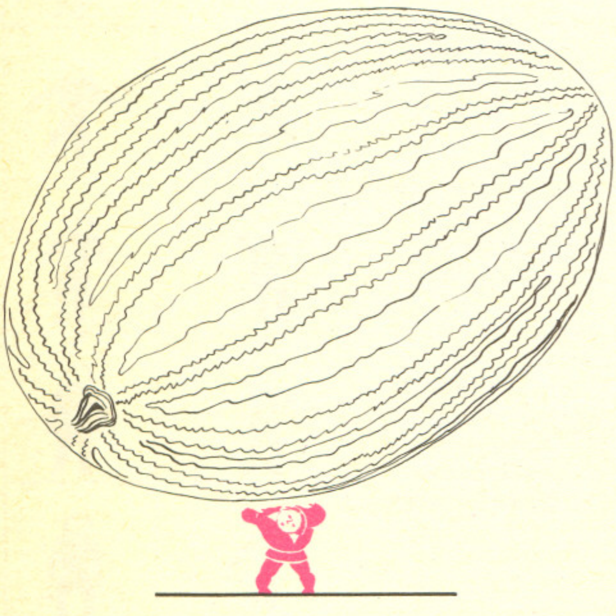


Podlewanie ogródka

Podlewamy wężem ogrodniczym drzewko rosnące 15 metrów od miejsca, gdzie stoimy. Teraz chcemy podlać krzak rosnący 5 metrów bliżej. Nic trudnego. Stopniowo zmniejszamy kąt, pod jakim podniesiony jest wylot węża, i bez trudu trafiamy do celu. Łatwo się przekonać, że na przykład trafić kamieniem jest o wiele trudniej.

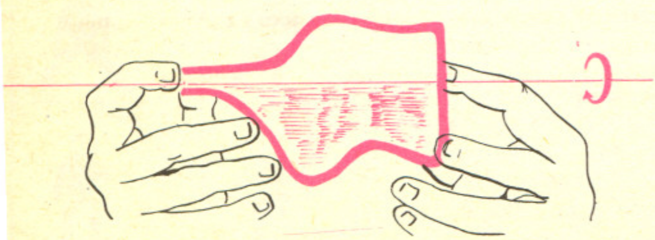
Regaty

Po zwrocie sternik ustalił kurs łodzi i manewruje żaglem szukając takiego ustawienia, żeby łódź płynęła jak najszybciej. Oczywiście wiele zależy od zręczności i doświadczenia jednakże ogólna zasada jest taka sama, jak w poprzednich przykładach. Metodą małych zmian poszukujemy optymalnego położenia.



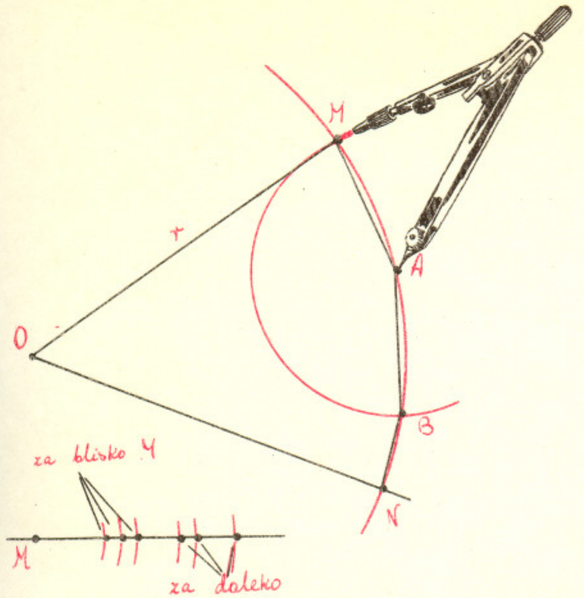
Jak odlać połowę zawartości butelki

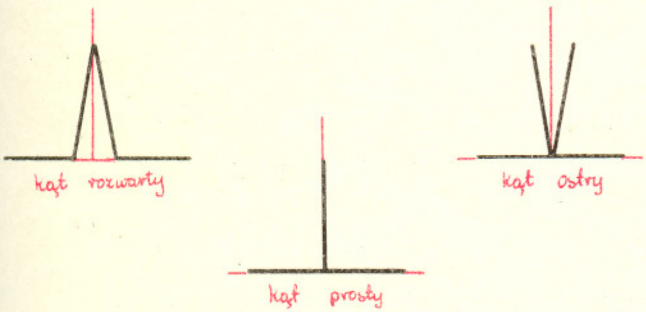
Butelka o bardzo nieregularnym kształcie jest pełna wody. Trzeba odlać połowę jej zawartości.
Ilość odlanej wody można porównać z ilością wody, która pozostała w butelce w taki sposób:
Ustawiamy butelkę poziomo tak, aby powierzchnia wody przechodziła przez środek otworu butelki. Palcem drugiej ręki zaznaczamy poziom wody po przeciwnej stronie, to jest na denku. Następnie obracamy butelkę o 180° wokół osi wyznaczonej przez położenie obu palców. Jeśli wylaliśmy mniej niż połowę zawartości, powierzchnia wody po obrocie butelki będzie powyżej palców (dlaczego?). Co robić dalej, już wiadomo.
Te proste przykłady ilustrują praktyczne pożytki płynące z tego, że pewne zjawiska mają charakter ciągły.
Przenieśmy się teraz na grunt matematyki.



Dzielimy kąt na trzy równe części

Znawcy geometrii odpowiedzą, że podział kąta na trzy równe części jest konstrukcją niewykonalną (cyrklem i linijką).
Zgoda. Ponieważ jednak płaszczyzna ma własność ciągłości, półproste takiego podziału potrafimy przybliżyć z dowolną dokładnością stosując odpowiednie metody. Są one zresztą bardzo proste.





Oto przepis.
Kreślimy okrąg o środku w wierzchołku dzielonego kąta i o dowolnym promieniu r. Punkty przecięcia się tego okręgu z ramionami kąta oznaczmy literami M i N. Każdy podział kąta na trzy (niekoniecznie równe) części wyznacza trzy cięciwy:

$$\overline{MA}, \quad \overline{AB}, \quad \text{i} \quad \overline{BN}.$$

Za pomocą cyrkla obierzmy na łuku MN punkt A dowolnie, a punkt B w taki sposób, żeby cięciwy MA i AB były równe. Jeśli trzecia cięciwa BN jest mniejsza od pozostałych, oznacza to, że punkt A trzeba przesunąć bliżej punktu M.

Wypróbujmy różne długości dla cięciwy $\overline{MA}$ i notujmy otrzymane wyniki na pomocniczym rysunku. Zręczne ręce, dokładny cyrkiel i odrobina wprawy wystarczą, żeby otrzymany podział kąta był dobrym przybliżeniem podziału na trzy równe części.

Zadania

1. Mamy trzy pręty i zaciski do ich łączenia. Jesteśmy na boisku, nie mamy żadnych przyrządów. Możemy jednak rysować na ziemi. Jak zbudować z prętów dostatecznie dobre przybliżenie kąta prostego? Może pomoże rysunek?

2. Jak zbudować siedmiokąt foremny (dobre przybliżenie tej figury)?

3. Mamy rozregulowaną poziomnicę (ze śrubkami do regulacji) oraz stół z regulowanym nachyleniem blatu. Oto dwa zadania: po pierwsze, wyregulować poziomnicę, po drugie, ustawić blat stołu poziomo.

4. Zadanie tylko na minikalkulator
Wiadomo, że równanie

$$2x^3-8x^2+8x-1 = 0$$

ma dokładnie trzy pierwiastki. Pierwszy z nich jest zawarty między 0 a 1, drugi między 1 a 2 i trzeci między 2 a 3.
Wyznaczcie z dokładnością do 4 miejsc po przecinku jeden z nich.

Małą Deltę opracowali: Jerzy GINTER, Tomasz HOFMOKL i Przemysław NOWICKI

Zadania

Redaguje mgr Andrzej MĄKOWSKI

M 130. Udowodnić, że jeżeli funkcja F przekształcająca przedział $\langle a, b\rangle$ w przedział $\langle a, b\rangle$ jest ciągła, to ma punkt stały (tzn. istnieje $x \in \langle a, b\rangle$, dla którego $F(x) = x$).
Rozwiązanie na str. 6

M 131. Czy istnieje funkcja f: $R \to R$ ciągła w jednym tylko punkcie?
Rozwiązanie na str. 6

M 132. Wykazać, że funkcja g: $R\times R \to R$ określona wzorami

$$g(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ dla } (x, y) \neq (0, 0), \qquad g(0, 0) = 0$$

jest ciągła względem każdej zmiennej (przy ustalonej wartości pozostałej zmiennej), ale jako funkcja dwóch zmiennych jest nieciągła w punkcie (0, 0).
Rozwiązanie na str. 4

Redaguje dr Waldemar GORZKOWSKI

F 44. Rozważmy cienką, płaską płytę dowolnego kształtu, niekoniecznie jednorodną. Niech O oznacza określony punkt tej płyty. Wykaż, że spośród osi leżących w płaszczyźnie płyty i przechodzących przez punkt O zawsze można wybrać takie dwie osie wzajemnie prostopadłe, że moment bezwładności płyty względem tych osi będzie taki sam.
Rozwiązanie na str. 5