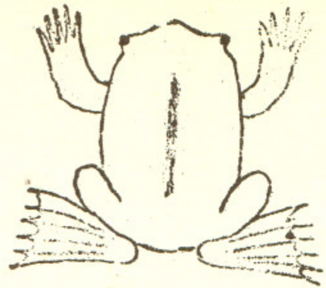
delta

$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$ $\pi = 3{,}141593$



SPIS TREŚCI

W następnym numerze:

O rozcinaniu i składaniu kwadratów i trójkątów

„Delta"
matematyczno-fizyczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i Polskiego Towarzystwa Fizycznego wydawany przy poparciu Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Adres Redakcji
ul. Hoża 69 pok. 151,
00-681 Warszawa

Zakład Narodowy im. Ossolińskich — Wydawnictwo Wrocław, Oddział w Warszawie
Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark. wyd.; 2,50 ark. druk.; papier offsetowy III kl. 80 g. 61 × 86
Wydrukowano w Drukarni im. Rewolucji Październikowej Warszawa, ul. Mińska 65.
Nr zam. 268/77 F-11

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60,— cena prenumeraty półrocznej zł 30,—

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch" oraz urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach:
— do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i cały rok następny
— do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego.
Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienie w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch".
Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW oraz prenumeratorzy indywidualni, zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.
Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch", Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTĘ":

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.
Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.
Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, konto PKO nr 1-6-100312

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

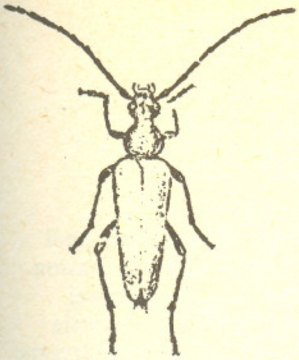
w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

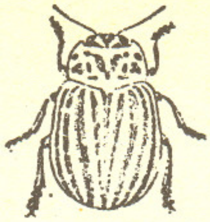
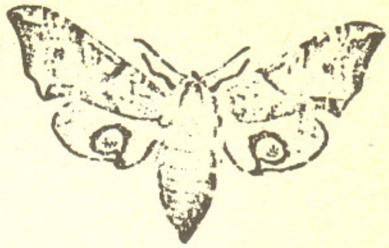
Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona" Krakowskie Przedmieście 7 00-068 Warszawa, Poland or with
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland.
— Earlscourt Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain,
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia.

Cena 1 egzemplarza zł 5.— nr indeksu 35723/35550

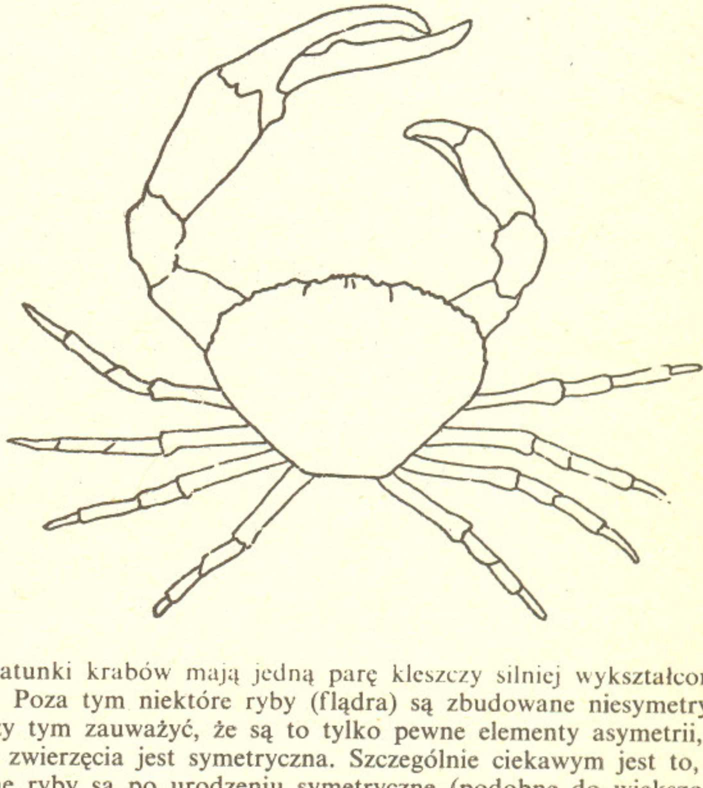
Symetrie w świecie ożywionym

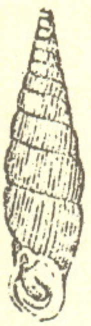
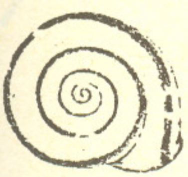
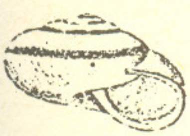
Doc. dr Jerzy BARTKE



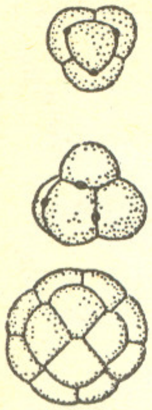



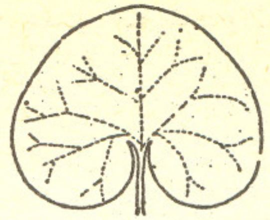
Zastanówmy się nad tym, jak dalece symetryczny jest świat istot żywych. Zacznijmy od popatrzenia na siebie. Jesteśmy zbudowani bardzo symetrycznie i jesteśmy tak do tego przyzwyczajeni, że lekko skrzywiony nos albo skośne ustawienie oka u drugiego człowieka zauważamy natychmiast — cechy te uderzają nas w pewien sposób jako wady urody. W naszym ubiorze dopuszczamy zresztą także tylko bardzo drobny element asymetrii.
Przyjrzyjmy się światu zwierzęcemu. Wszystkie prawie zwierzęta, niższe i wyższe, są symetryczne względem płaszczyzny przechodzącej przez ich środek. Trzeba tylko popatrzeć na nie wzdłuż tej płaszczyzny. Na rysunkach widzimy przykłady symetrii dwubocznej u stawonogów i kręgowców. Szkarłupnie (rozgwiazdy, jeżowce) mają pięciokrotną oś symetrii, głowonogi (ośmiornica) — ośmiokrotną. Niewiele jest zwierząt niesymetrycznych. Ślimaki mają niesymetryczną budowę — widać to najlepiej na muszlach — jest to zresztą jedyna gromada niesymetrycznych zwierząt.

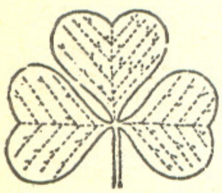


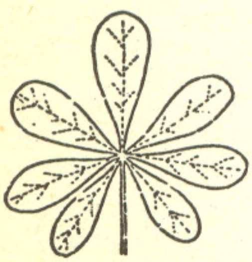





Niektóre gatunki krabów mają jedną parę kleszczy silniej wykształconą od drugiej. Poza tym niektóre ryby (flądra) są zbudowane niesymetrycznie. Należy przy tym zauważyć, że są to tylko pewne elementy asymetrii, duża część ciała zwierzęcia jest symetryczna. Szczególnie ciekawym jest to, że wyżej wspomniane ryby są po urodzeniu symetryczne (podobne do większości ryb) i dopiero w późniejszym okresie życia przekształcają się do postaci asymetrycznej. Jest to związane z przystosowaniem się do dennego trybu życia. Asymetria kleszczy kraba jest zapewne też wynikiem próby optymalnego przystosowania do zdobywania pożywienia. Do dziś nie wyjaśniono tylko jaki jest sens biologiczny asymetrii ślimaków, faktem jest jednak, że ślimaki symetryczne wymarły przed setkami milionów lat.
Na uwagę zasługują też wytwory pewnych zwierząt. Pająk tka symetrycznie pajęczynę, pszczoły budują plaster złożony z regularnych sześciobocznych komórek, elementy symetrii znajdujemy w budowlach termitów. Większość gniazd ptasich ma symetrię osiową.

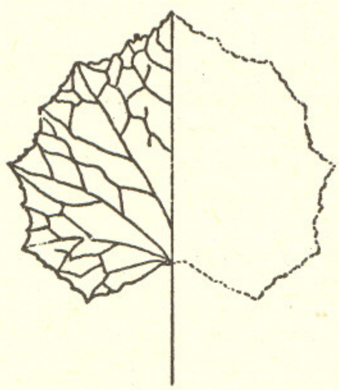


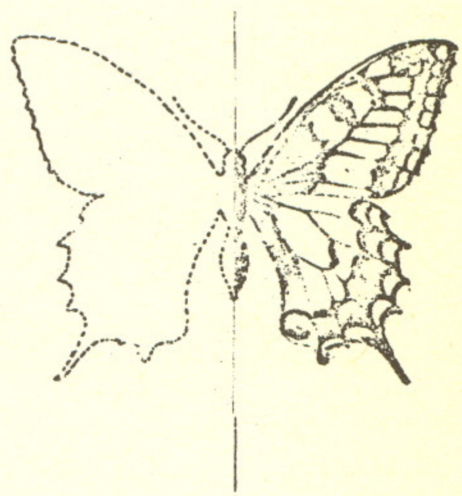






Z kolei popatrzmy na rośliny. Całe rośliny, lub ich części, wykazują na ogół symetrię, bardziej nawet zróżnicowaną niż u zwierząt. Wśród owoców, nasion i kwiatów znajdujemy przykłady pełnej symetrii sferycznej, symetrii osiowej trzykrotnej, czterokrotnej, pięciokrotnej, itd. Liście mają przeważnie symetrię dwuboczną. Nieliczne kwiaty i chyba tylko liść wiązu są istotnie niesymetryczne. Zauważmy także, że samotnie rosnące drzewa i krzewy formują się w przybliżeniu symetrycznie (o ile tylko nie działają na nie np. silne wiatry z jednego kierunku). Można zadać sobie pytanie dlaczego tak jest. Wykształcenie się u zwierząt jednakowych kończyn położonych symetrycznie po obu stronach ciała zapewnia regularność poruszania się zwierzęcia, jest wynikiem ewolucji. Ale dlaczego np. liście większości roślin są symetryczne? Można postawić hipotezę, że chodzi tu o oszczędność dziedzicznie przekazywanej informacji koniecznej do odtwarzania się danego gatunku. Do jednoznacznego określenia bryły geometrycznej o najwyższej symetrii — kuli — trzeba tylko podać jej promień (jedną liczbę!). Ze względów funkcjonalnych wszystkie twory żywe nie mogą oczywiście być kuliste, niemniej natura dąży w miarę możliwości do zredukowania potrzebnej informacji. Popatrzmy na ostatni rysunek. Mamy na nim przedstawione pół liścia i pół motyla (jak zresztą często spotyka się w książkach). Czy wystarczy nam to do zrekonstruowania całości? Wystarczy, ponieważ wiemy, że twory te są *symetryczne* i w myśli „dorysowujemy" drugą połowę.





Geometria zbudowana z symetrii

Dr Marek KORDOS

Termin „symetria" używany jest potocznie w różnych znaczeniach, co więcej, zakres tych znaczeń jest dla różnych ludzi różny. Najczęściej jednak myśli się o sytuacji, w której zamiana pewnych elementów miejscami nic nie zmieni.

W niektórych figurach można punkty połączyć w takie pary, że zamiana miejscami punktów w każdej parze nie zmienia figury. Jeśli jeszcze zażądać, aby ta zamiana była *automorfizmem*, to znaczy nie zmieniała żadnych zależności geometrycznych, to otrzyma się pojęcie symetrii używane w geometrii.

Ponieważ automorfizmy w geometrii euklidesowej to znane ze szkoły *podobieństwa*, więc ścisła definicja symetrii będzie następująca:

Funkcję φ, której argumentami i wartościami są wszystkie punkty przestrzeni, która spełnia dwa warunki: dla dowolnych punktów A, B, C, D

$$\text{jeśli } AB = CD, \quad \text{to} \quad \varphi(A)\varphi(B) = \varphi(C)\varphi(D),$$

$$\text{jeśli } \varphi(A) = B, \quad \text{to} \quad \varphi(B) = A,$$

i która nie jest tożsamością, nazywamy symetrią.

Pierwszy z podanych warunków można wysłowić:

φ jest podobieństwem,

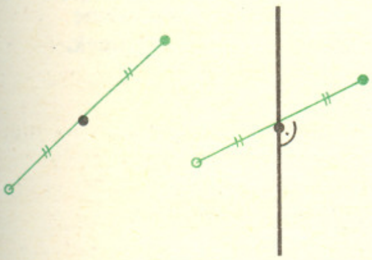
a drugi

φ jest inwolucją.

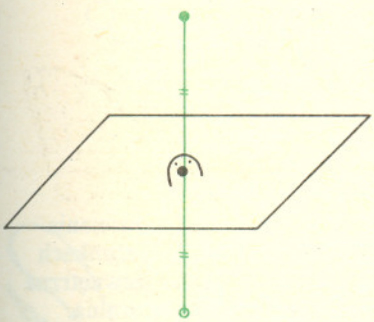
Można wykazać (polecamy to jako zadanie), że z definicji symetrii wynika, że jest ona *izometrią*, tzn. spełnia warunek

$$AB = \varphi(A)\varphi(B),$$

oraz, że ma co najmniej jeden punkt stały (jest nim środek odcinka $A\varphi(A)$). Co więcej, można wykazać, że w przestrzeni trójwymiarowej symetriami są tylko symetrie środkowe, osiowe i płaszczyznowe. W przestrzeni dwuwymiarowej, czyli na płaszczyźnie, symetriami są wyłącznie symetrie środkowe i osiowe. Dalej będzie mowa tylko o płaszczyźnie.



Na przełomie XIX i XX wieku matematyk duński Johannes Hjelmslev zauważył, że każde zdanie o symetriach środkowych i osiowych można interpretować jako zdanie o punktach i prostych — środkach i osiach tych symetrii. Idee te rozwinęli głównie matematycy niemieccy, Kurt Reidemeister, Arnold Schmidt, a w roku 1959 Friedrich Bachmann wydał monografię, w której o geometrii mówi się wyłącznie za pośrednictwem symetrii osiowych (Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff). Tak, wyłącznie symetrii osiowych, gdyż symetrie środkowe można za ich pomocą określić.



Dalej małe litery łacińskie oznaczać będą symetrie osiowe czyli proste. Przy tej umowie warunek

$$ab = ba \quad \text{i} \quad a \neq b$$

oznacza, że ab jest punktem. Istotnie — jest to złożenie dwu symetrii osiowych o osiach prostopadłych (dlaczego?), a więc symetria środkowa, czyli punkt. Oznacza to również, że $a \perp b$.

Jeśli ab jest punktem, to warunek

$$abc = cab \quad (\text{lub } abc = cba)$$

oznacza, że punkt ab leży na prostej c (dlaczego?), a dla dowolnych prostych a, b, c warunek

$$abc = cba$$

oznacza, że mają one wspólny punkt lub wspólną prostopadłą (to już trudniej uzasadnić, ale warto spróbować).

Bachmann podaje układ aksjomatów (warunków) wystarczających na to, aby na ich podstawie zbudować, wychodząc od pojęcia prostej (= symetrii osiowej), całą geometrię. Podamy tutaj ich treść, a nie formalny zapis:

Przez dowolne dwa punkty przechodzi prosta.

Dwie różne proste mają co najwyżej jeden punkt wspólny.

Dwie proste mają wspólny punkt lub wspólną prostopadłą.

Trzy proste mające wspólny punkt lub wspólną prostopadłą można zastąpić jedną (co to znaczy?).

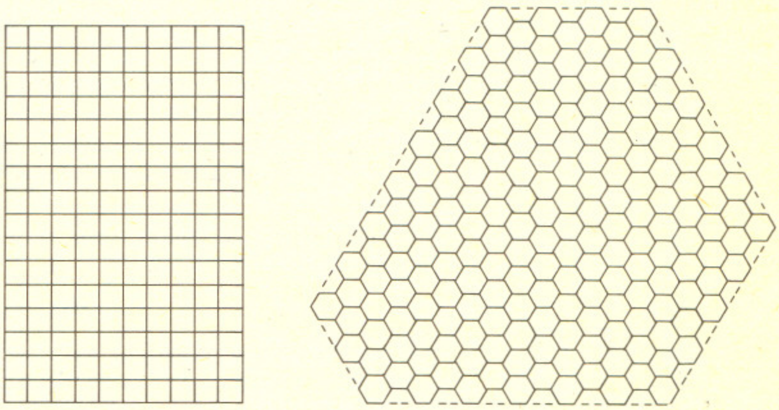
Istnieje prostokąt (jak to można by zapisać?).

Zauważmy ciekawą cechę tego sposobu uprawiania geometrii — można rachować na prostych (bo utożsamiamy je z symetriami, czyli funkcjami). W ten sposób Bachmann zrealizował postulat Leibniza, który 300 lat temu występował przeciwko wprowadzeniu przez Kartezjusza geometrii analitycznej twierdząc, że rachunek w geometrii jest rzeczą dopuszczalną jedynie wtedy, gdy rachuje się na obiektach geometrycznych, a nie na liczbach.

Symetrie w kryształach

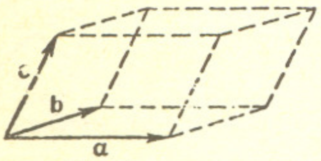
Doc. dr Jerzy BARTKE

Zapewne każdy z Czytelników miał okazję oglądać kryształy różnych minerałów. To, co nas uderza przy oglądaniu kryształów (poza piękną często barwą, którą jednak nie będziemy się tutaj zajmować) — to regularność ich kształtu. Np. kryształy soli kuchennej są prostopadłościanami, kryształy kwarcu natomiast są graniastosłupami o sześciokątnym przekroju. Długości poszczególnych krawędzi kryształu są na ogół różne, ale kąty pomiędzy jego ścianami są zawsze ściśle określone. W przypadku kryształu soli kuchennej kąty między ścianami wynoszą 90°, a w przypadku kryształu kwarcu 120°. Naturalnym wyjaśnieniem tych faktów jest, że kształt zewnętrzny (morfologia) kryształu odzwierciedla jego wewnętrzną strukturę. Kryształ składa się z wielkiej liczby tzw. komórek elementarnych o kształcie ściśle określonym dla danego rodzaju substancji. W przypadku soli kuchennej komórka elementarna jest sześcianem, a w przypadku kwarcu komórka elementarna ma przekrój regularnego sześciokąta. W procesie krystalizacji dopływ substancji krystalizującej bywa na ogół nierównomierny i dlatego szybkość wzrostu kryształu w różnych kierunkach jest niejednakowa. W wyniku tego zewnętrzne krawędzie kryształu mają na ogół różne długości, ale kąty między odpowiednimi ścianami są zawsze zachowane, ponieważ określone są one przez kształt elementarnej komórki. Wyjaśnia to poniższy rysunek.

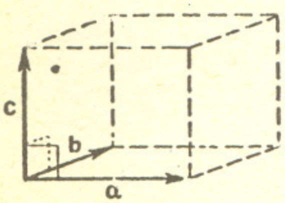


Przy równomiernym dopływie substancji krystalizującej szybkość powielania komórki elementarnej (czyli wzrostu kryształu) jest we wszystkich kierunkach jednakowa i w takich warunkach powstaje kryształ idealny. Postać zewnętrzna takiego kryształu ma te same elementy symetrii, co jego sieć strukturalna. Kryształy klasyfikuje się według występujących w nich kombinacji elementów symetrii, do których należą: środek symetrii, oś symetrii, płaszczyzna symetrii i tzw. oś inwersyjna. Dla osi symetrii określamy poza tym jej krotność $n = 360/\alpha$, gdzie α oznacza najmniejszy kąt obrotu względem osi, przy którym struktura kryształu się powtarza. Oś może być dwukrotna, trzykrotna, czterokrotna lub sześciokrotna. W zależności od rodzaju symetrii zalicza się kryształ do jednego z sześciu tzw. układów krystalograficznych. Rysunek na marginesie artykułu pokazuje komórki elementarne tych sześciu układów, ułożone w kierunku wzrastającej symetrii. Komórka układu *trójskośnego* jest równoległościanem i sieć krystaliczna jest jedynie symetryczna względem inwersji. W sieci *jednoskośnej* występuje dwukrotna oś symetrii, w sieci *heksagonalnej* sześciokrotna oś symetrii, w sieci *rombowej* trzy dwukrotne osie symetrii. W sieci *tetragonalnej* występuje jedna oś czterokrotna i dwie dwukrotne i wreszcie w najbardziej symetrycznej sieci *regularnej* występują trzy czterokrotne osie symetrii.

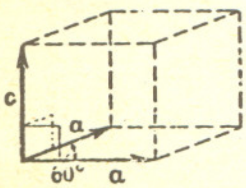
Współczesne badania struktury kryształów, dokonywane przez rozpraszanie promieni X, elektronów czy neutronów, pozwalają na dokładne określenie długości krawędzi komórki elementarnej (czyli tzw. stałych sieciowych) oraz kątów występujących w sieci krystalicznej. Badania te wykazały także, że atomy, jony, czy też cząsteczki tworzące kryształ mogą znajdować się nie tylko w wierzchołkach komórki elementarnej, ale także na jej ścianach lub w jej środku. Informacje te pozwalają na dalszy podział kryształów na większą liczbę tzw. klas.



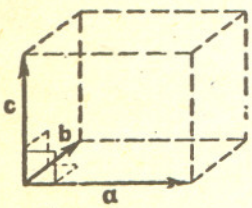
trójskośny



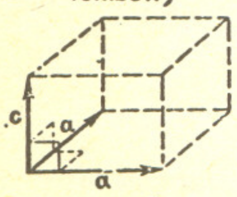
jednoskośny



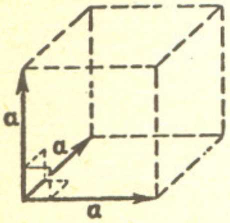
heksagonalny



rombowy

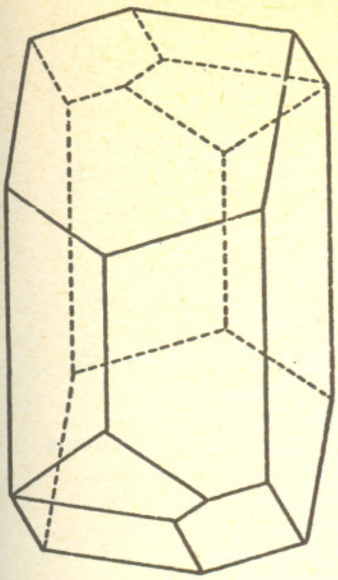


tetragonalny



regularny

Czasem wyróżnia się jeszcze siódmy układ — *trygonalny*, który można jednak włączyć do układu heksagonalnego (posiada on jedną trzykrotną oś symetrii).



Anortyt $CaAl_2Si_2O_3$

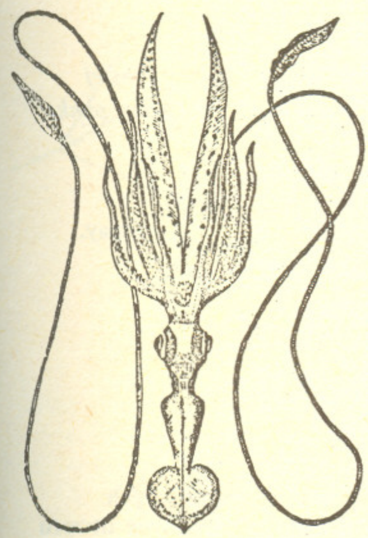
Podstawowe znaczenie zachowuje jednak podział na układy oparty na własnościach symetrii sieci krystalicznej. Wewnętrzne symetrie kryształów znajdują bowiem odzwierciedlenie w ich makroskopowych własnościach fizycznych. Przy pomiarach mechanicznych, elektrycznych, czy też optycznych kryształy wykazują własności anizotropowe. Wielkość mierzona zależy od kierunku dokonywanego pomiaru i w pewnych określonych kierunkach przyjmuje wartości ekstremalne. Nietrudno domyślić się, że kierunki te pokrywają się z osiami symetrii sieci krystalicznej. Jedynie kryształy należące do układu regularnego wykazują własności izotropowe.

Matematycznie opisuje się tę sytuację wprowadzając tzw. tensory. Np. dla opisania polaryzowalności elektrycznej kryształu musimy w najogólniejszym przypadku podać dziewięć liczb. Liczby te są współczynnikami występującymi w trzech równaniach liniowych wiążących składowe wektora polaryzacji $\boldsymbol{P}$ ze składowymi wektora pola elektrycznego $\boldsymbol{E}$ i tworzą tzw. tensor polaryzowalności elektrycznej. Dla kryształów o wyższej symetrii niektóre z tych współczynników są równe, zatem ich efektywna liczba ulega zmniejszeniu. W granicznym przypadku kryształu należącego do układu regularnego tensor redukuje się do jednej stałej.

Rozpoczęliśmy ten artykuł od stwierdzenia, że morfologia kryształu określona jest przez formę jego elementarnej komórki. Do tego wniosku można dojść metodą prostej dedukcji i właściwie można sobie zadać pytanie, dlaczego starożytni filozofowie już dwa tysiące lat temu nie rozważali różnych postaci sieci krystalicznej i jej symetrii. Najwidoczniej po prostu nie zainteresowali się sprawą wyjaśnienia regularności kształtu kryształów...

Dualność

Dr Marek KORDOS



Weźmy pod uwagę teorię, w której mówi się o obiektach dwojakiego rodzaju — mamy więc w niej dwa rodzaje zmiennych, niech będą to małe litery łacińskie: $a, b, c, \ldots$ dla oznaczenia obiektów jednego rodzaju i duże: $A, B, C, \ldots$ dla oznaczenia obiektów drugiego. Niech nasza teoria mówi o pewnej relacji między obiektami różnych rodzajów — oznaczmy tę relację znakiem $|$.

Jeżeli chcemy napisać, że dwa obiekty są w naszej relacji, musimy umieścić oznaczające je litery obok kreski. Który po której stronie? Aby nie dyskryminować ani pierwszego, ani drugiego rodzaju obiektów umówmy się, że

napis $a \mid A$ znaczy to samo, co napis $A \mid a$.

Teorię o takiej, jak podaliśmy wyżej, budowie nazywamy autodualną, jeżeli spełnia ona warunek:

Zasada dualności (syntaktyczna):

Jeżeli w twierdzeniu teorii zamienimy wszystkie litery małe na duże (różne na różne) *i odwrotnie, to otrzymane zdanie będzie również twierdzeniem teorii.*

Tak więc teoria samodualna jest bardzo przyjemna — każdy dowód daje nam od razu dwa twierdzenia.

Modele teorii autodualnej, czyli struktury, jakie ta teoria opisuje, też mają zalety. Każdy model teorii o budowie opisanej na wstępie jest postaci $\langle \mathbf{u}, \mathbf{U}, | \rangle$, czyli składa się z dwóch zbiorów i relacji między elementami tych zbiorów.

Jeżeli teoria jest autodualna, to prawdziwe jest zdanie:

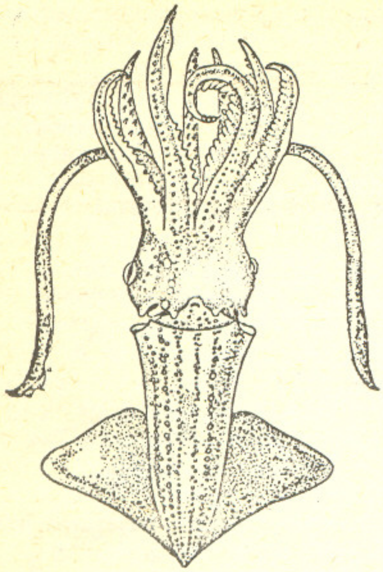
Zasada dualności (semantyczna):

Jeżeli struktura $\langle \mathbf{u}, \mathbf{U}, | \rangle$ jest modelem teorii, to również struktura $\langle \mathbf{U}, \mathbf{u}, | \rangle$ jest jej modelem.

A więc gdy znajdziemy jakiś model teorii autodualnej, „automatycznie” mamy i drugi.

Określenia „syntaktyczna” i „semantyczna” przy zasadach dualności podkreślały fakt, że za pierwszym razem mówiliśmy o napisach, a za drugim o ich znaczeniu.

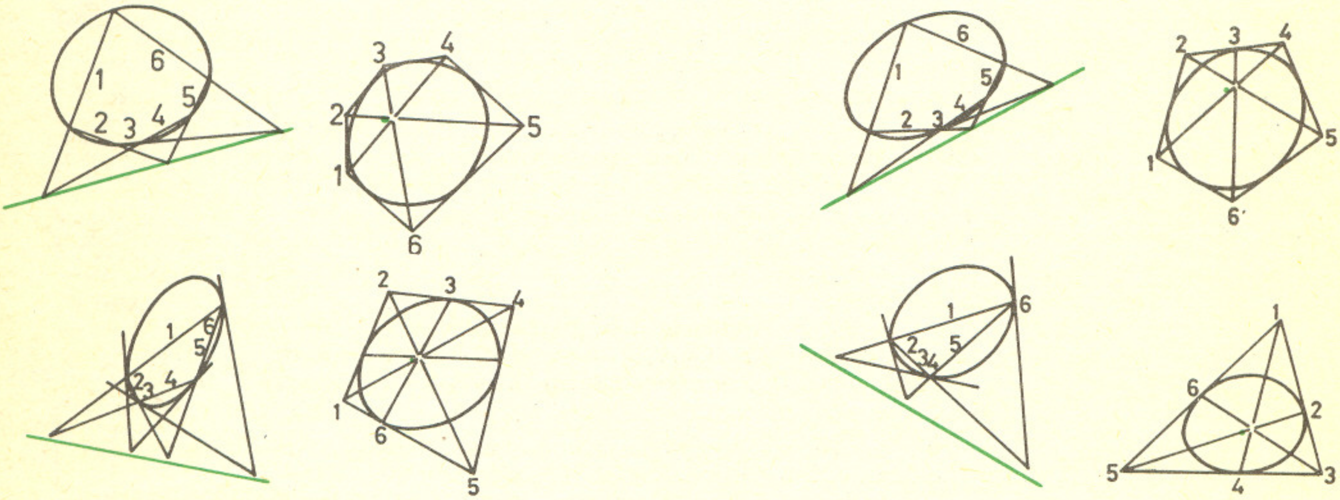
No dobrze, ale czy w ogóle istnieją teorie autodualne i czy mają one jakieś znaczenie?



Podamy przykład takiej teorii podając jej aksjomaty:
Aks. 1. Dla dowolnych a i b istnieje A, takie, że $a, b \mid A$.
Aks. 2. Dla dowolnych A i B istnieje a, takie, że $A, B \mid a$,
Aks. 3. Jeśli $a, b \mid A, B$, to $a = b$ lub $A = B$.
Aks. 4. Istnieją takie a, b, c, d, A, B, C, D, że równocześnie zachodzi

$a, b \mid D$ i $b, c \mid C$ i $c, d \mid B$ i $d, a \mid A$
oraz nie zachodzi ani $a \mid B$, ani $a \mid C$, ani $b \mid A$,
ani $b \mid B$, ani $c \mid A$, ani $c \mid D$, ani $d \mid C$, ani $d \mid D$.

Teoria ta ma wiele modeli. Między innymi model jej można uzyskać z płaszczyzny euklidesowej, uzupełniając każdą prostą dodatkowym „punktem" — jej kierunkiem, oraz wprowadzając dodatkową „prostą" złożoną z samych kierunków. Wówczas jako **u** bierzemy zbiór wszystkich punktów (zwykłych i dodatkowych), jako U — zbiór wszystkich prostych (zwykłych i dodatkowej), a jako | — relację leżenia punktu na prostej. Teoria o podanej aksjomatyce nazywa się *geometrią rzutową* i jest uprawiana szeroko od XVII wieku (pierwszy podręcznik w 1822 roku — Poncelet). Ale czy jest autodualna? Aby się o tym przekonać wystarczy sprawdzić, że zamiana liter małych na duże i odwrotnie przeprowadzi nasz układ aksjomatów na siebie (1 na 2, 2 na 1, 3 na 3 i 4 na 4 — to ostatnie tylko nie jest widoczne na pierwszy rzut oka). A więc i cała teoria, jako zbiór konsekwencji tego układu aksjomatów, nie zmieni się.
A jak wygląda model dualny do opisanego?



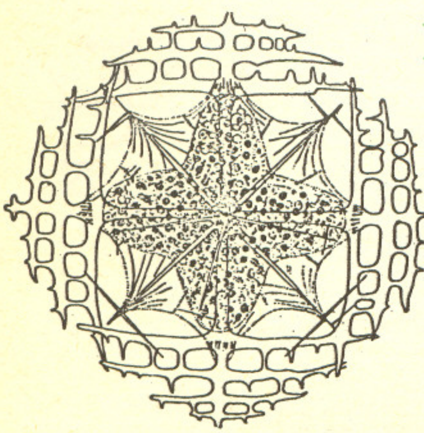
Przedstawione cztery pary rysunków ilustrują wzajemnie dualne twierdzenia Pascala i Brianchona.

<table><tr><td>Boki
Wierzchołki</td><td>sześciokąta</td><td>wpisanego w elipsę
opisanego na elipsie</td><td>mają tę własność, że</td><td>ich punkty przecięcia leżą na jednej prostej
łączące je proste przechodzą przez jeden punkt</td></tr></table>

Sytuację tę ilustruje pierwsza para rysunków.
Na następnych rysunkach mamy przedstawione sytuacje zdegenerowane, kiedy pewne sąsiednie

<table><tr><td>wierzchołki
boki</td><td>sześciokąta</td><td>wpisanego pokryły się
opisanego leżą na jednej prostej,</td><td>a</td><td>łączące je boki
ich wspólne końce</td><td>stały się</td><td>stycznymi do
punktami</td><td>elipsy.</td></tr></table>

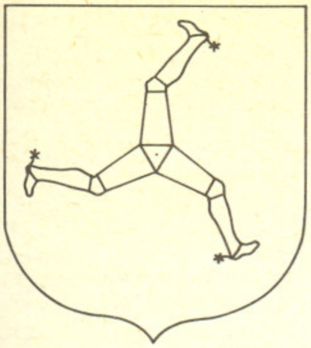
Twierdzenia pozostają w mocy również dla paraboli i hiperboli.



Przekształcenia zwane symetriami

Dr Ludomir WŁODARSKI

Słowo „symetria" w mowie potocznej używane bywa w najróżniejszych kontekstach. Mówi się np. o symetrii w obrazie, o symetrii w budowie utworu muzycznego, o symetrii we wzajemnych stosunkach między państwami.
Takie użycie tego słowa jest uzasadnione, gdyż w dosłownym tłumaczeniu „symetria" znaczy tyle co „współmierność". W geometrii symetriami nazywa się pewnego rodzaju przekształcenia. Przyjrzyjmy się symetriom w geometrii.
Niech $\mathscr{F}$ będzie dowolną figurą na płaszczyźnie lub w przestrzeni euklidesowej (figurą nazywamy każdy zbiór punktów). Wśród wszystkich wzajemnie jednoznacznych przekształceń figury $\mathscr{F}$ na siebie wyróżniamy *izometrie*, czyli takie przekształcenia, które nie zmieniają odległości między punktami.

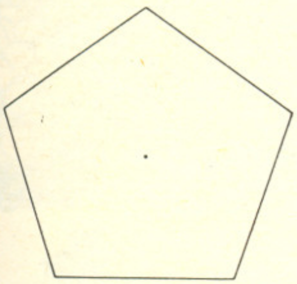


Rodzinę takich izometrii oznaczmy przez $S(\mathscr{F})$. Łatwo się przekonać, że rodzina ta ma następujące własności:

1° — przekształcenie tożsamościowe figury $\mathscr{F}$ należy do rodziny $S(\mathscr{F})$,
2° — jeżeli przekształcenie φ należy do $S(\mathscr{F})$, to i przekształcenie φ^{-1} (odwrotne do φ) również należy do $S(\mathscr{F})$,
3° — złożenie dowolnych przekształceń z rodziny $S(\mathscr{F})$ należy do $S(\mathscr{F})$.

Rodzina $S(\mathscr{F})$ nazywa się *grupą izometrii własnych* figury $\mathscr{F}$. W przypadku, gdy $\mathscr{F}$ jest zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny euklidesowej, niektóre izometrie z rodziny $S(\mathscr{F})$ noszą nazwę *symetrii*. Są to symetrie osiowe i symetrie środkowe. Wśród nietożsamościowych izometrii płaszczyzny wyróżniają się tym, że są *inwolucjami*, tzn. są identyczne z przekształceniami odwrotnymi do siebie. Podobnie wśród izometrii całej przestrzeni symetrie osiowe, środkowe i płaszczyznowe wyróżniają się jako inwolucje. Jeżeli figura $\mathscr{F}$ jest właściwym podzbiorem płaszczyzny euklidesowej (przestrzeni), to rodzina $S(\mathscr{F})$ bywa nazywana *grupą symetrii* figury $\mathscr{F}$. Jeżeli przy tym $S(\mathscr{F})$ zawiera choć jedno przekształcenie różne od tożsamościowego, to o figurze $\mathscr{F}$ mówi się, że *ma* ona *symetrię*.

Zarówno płaszczyzna jak i przestrzeń euklidesowa są *doskonale jednorodne*. Oznacza to, że gdy φ jest izometrią pewnej figury $\mathscr{F}$ (niekoniecznie izometrią własną), to istnieje izometria ψ całej płaszczyzny (przestrzeni) identyczna z φ na całej figurze $\mathscr{F}$. Dzięki temu można zastąpić badanie grupy symetrii figury $\mathscr{F}$ badaniem tych izometrii płaszczyzny (przestrzeni) na siebie, które zachowują figurę $\mathscr{F}$ (ewentualnie przemieszczając jej punkty). Tak więc i izometrie własne figury nazywają się tak samo, jak odpowiednie izometrie płaszczyzny czy przestrzeni: obroty, przesunięcia, symetrie środkowe, symetrie osiowe, symetrie płaszczyznowe itd.



Jeżeli w grupie symetrii figury $\mathscr{F}$ znajduje się symetria o osi l, to prosta l nazywa się osią symetrii figury $\mathscr{F}$. O takiej figurze mówi się, że ma *symetrię osiową*. Podobnie określa się środek symetrii oraz płaszczyznę symetrii figury. Może się zdarzyć, że grupa symetrii figury płaskiej składa się z samych obrotów. Łatwo udowodnić, że wszystkie te obroty mają wspólny środek. O takiej figurze mówi się, że ma *symetrię obrotową*. Klasycznym przykładem jest złowrogi znak swastyki. Taką symetrię ma również herb brytyjskiej wyspy Man.
Punkt, który jest środkiem jakiegokolwiek obrotu należącego do $S(\mathscr{F})$, nazywa się *środkiem* figury $\mathscr{F}$ — nie musi on być wcale środkiem symetrii tej figury — tak jest np. ze środkiem wielokątów foremnych o nieparzystej liczbie wierzchołków.

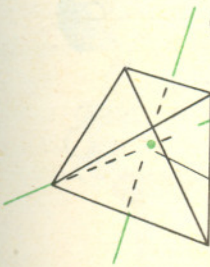
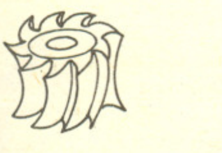
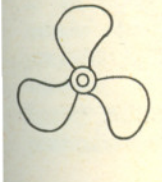


Figura przestrzenna (trójwymiarowa) oprócz środków symetrii, osi symetrii i płaszczyzn symetrii może mieć tzw. osie obrotowe i osie inwersyjne:
— prosta l nazywa się *osią obrotową* figury $\mathscr{F}$ jeżeli w grupie symetrii tej figury znajdują się obroty o osi l,
— prosta l nazywa się *osią inwersyjną* figury $\mathscr{F}$, jeżeli do grupy symetrii figury $\mathscr{F}$ należy tzw. symetria obrotowa o osi l, tzn. przekształcenie będące złożeniem obrotu o osi l i symetrii względem płaszczyzny prostopadłej do l.
Środek figury przestrzennej to punkt, w którym przecinają się różne osie tej figury (osie symetrii, osie obrotowe, osie inwersji) — nie musi on być środkiem symetrii — vide czworościan foremny.
O figurze przestrzennej w krystalografii mówi się, że ma *symetrię obrotową*, jeżeli pewna jej oś obrotowa nie leży w żadnej płaszczyźnie symetrii tej figury.

Grupę symetrii figury przestrzennej charakteryzuje się zwykle przez opisanie wszystkich środków symetrii, osi symetrii, osi obrotowych, osi inwersyjnych i płaszczyzn symetrii figury. W ten sposób postępują np. krystalografowie, klasyfikując kryształy ze względu na ich grupy symetrii.



W geometrii termin „symetria" bywa używany również w zastosowaniu do przekształceń, które nie są izometriami. Mamy tu na myśli tzw. symetrię skośną i symetrię względem okręgu.
Symetrię skośną φ o osi l i kierunku prostej $k \nparallel l$ określają warunki:



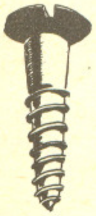

dla dowolnego punktu A
— środek odcinka $A\varphi(A)$ leży na prostej l,
— przez A i $\varphi(A)$ przechodzi prosta równoległa do k.
Natomiast symetrie względem okręgu nazywają się inaczej przekształceniami inwersyjnymi. Można o nich przeczytać w Delcie 7/1976.
Zainteresowanym polecamy książkę H. Weyla zatytułowaną „Symetria".

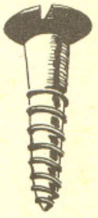
mała delta

„Czy chciałbyś mieszkać w Domu po Drugiej Stronie Lustra, Kiciu? Ciekawa jestem, czy dawaliby ci tam mleko? Może to Lustrzane mleko nie nadaje się do picia...”

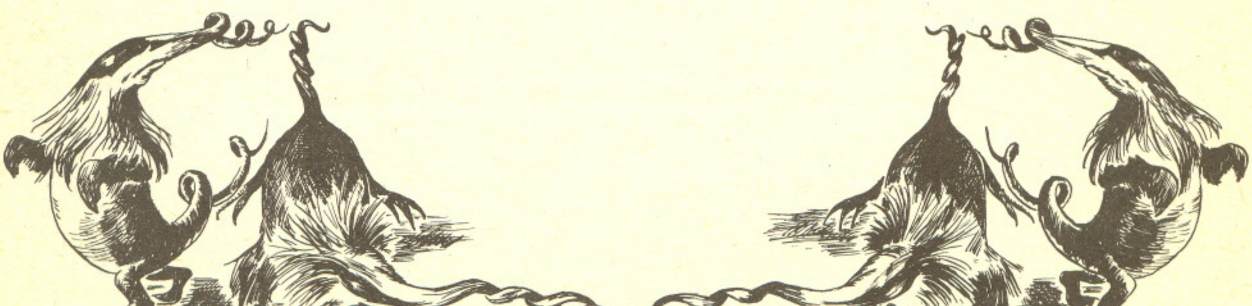
(L. Carroll, „O tym, co Alicja odkryła po drugiej stronie lustra”.)

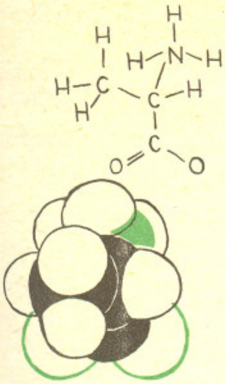
Stań przed lustrem i popatrz na swój obraz. Czy tam, „w zwierciadle” stoisz Ty, czy ktoś całkiem odmienny? Nie spiesz się z odpowiedzią. Zawsze warto przedtem chwilę pomyśleć. Poobserwuj Jego ruchy. Którą ręką pisze? Po której stronie ma serce? To przecież całkiem inny człowiek. Nie tylko Ciebie zwierciadło tak odmienia. Poszukaj w domu zwykłego wkrętu do drewna i przypatrz się uważnie jego odbiciu w lustrze. Wkręt tam, w lustrze, jest inny. Aby go wkręcić, należałoby go obracać w przeciwnym kierunku niż wkręty normalnie spotykane, czyli — patrząc z góry — w lewą stronę. Powiemy, że wkręt, ten w lustrze, ma budowę lewoskrętną w odróżnieniu od zazwyczaj używanych prawoskrętnych.



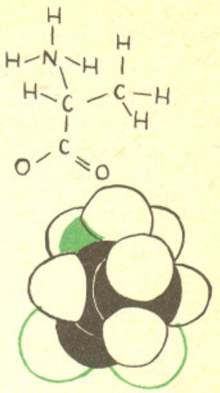


Dla stolarza jest w zasadzie obojętne, czy używa lewo- czy prawoskrętnych wkrętów. Oczywiście nie byłby zadowolony, gdyby dać mu i jedne i drugie. Często myliłby się i zamiast wykręcać dokręcałby jeszcze mocniej, co nie ułatwiałoby mu pracy. Zapewne zdecydowałby się na jeden rodzaj wkrętów, a resztę powyrzucał.

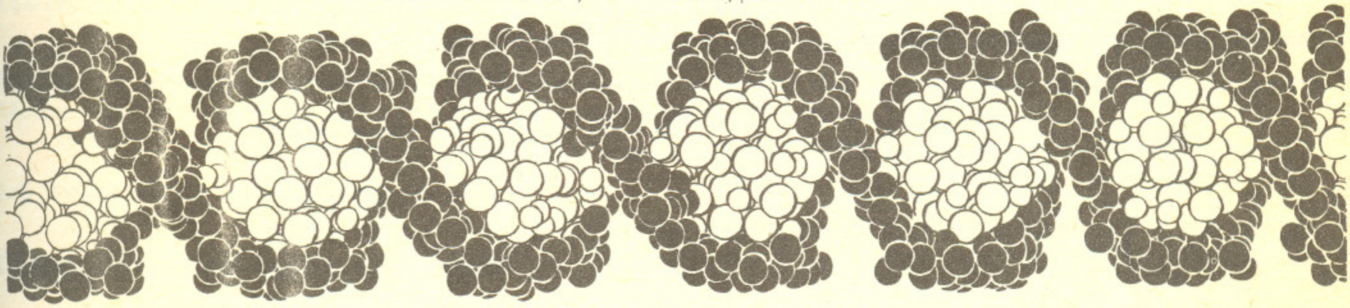




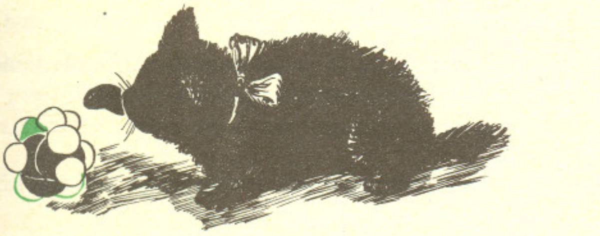
Coś podobnego zdarzyło się wśród związków chemicznych wchodzących w skład organizmów żywych. Cząsteczki niektórych z tych związków, chemicy nazywają je aminokwasami, można przyrównać do śruby — oczywiście tylko pod względem kształtu. Można więc powiedzieć, czy cząsteczka jest lewo-, czy prawoskrętna. W tym miejscu zaczyna się dziwna historia. Cząsteczki wytworzone w laboratoriach, chemicy mówią: zsyntetyzowane, w połowie są lewoskrętne, w połowie prawoskrętne. Wytworzone biologicznie, a więc przez organizmy żywe, mają zawsze budowę lewoskrętną. Można to zrozumieć, jeżeli założymy, że wczesne formy życia na Ziemi wywodziły się ze związków chemicznych zarówno lewoskrętnych jak i prawoskrętnych. Organizmy złożone ze związków jednej odmiany powinny być niestrawne i prawdopodobnie trujące dla istot żywych złożonych ze związków drugiej odmiany. Ostatecznie zwyciężyliśmy my — lewoskrętni. Być może gdzieś indziej, we Wszechświecie, zwyciężyli prawoskrętni. Ten inny świat mógłby być właśnie czarodziejskim światem ze zwierciadła i mleko w tym świecie z pewnością byłoby dla nas niestrawne, jeżeli nie trujące.



To my!



Jaki też może być ten świat lustrzany, do którego Alicja zapraszała kotka? Czy kotek, przeniesiony do niego, potrafiłby wykryć za pomocą doświadczeń fizykalnych, że został zaczarowany? Innymi słowy, czy obserwując doświadczenie fizykalne w lustrze i nie wiedząc o tym, możemy na podstawie jego wyników rozstrzygnąć, czy obserwujemy lustrzane odbicie, czy nie? Do niedawna kotek byłby bezradny. Wszystkie znane procesy fizyczne nie rozróżniały, co to strona prawa i lewa. Fizycy ujęli to w formie zasady. *Zwierciadlany obraz zjawiska fizycznego jest również zjawiskiem fizycznym.* Nazwali tę zasadę, z sobie znanych powodów, zasadą zachowania parzystości.
Spróbujcie ją sprawdzić obserwując znane, proste zjawiska fizyczne w lustrze. Odpowiedzcie na pytanie, czy przebieg zjawiska obserwowany w lustrze jest sprzeczny z tym, co znamy z fizyki. Np. swobodny spadek ciał, topienie się lodu w wodzie itp. Na pewno zgodzicie się z zasadą zachowania parzystości.

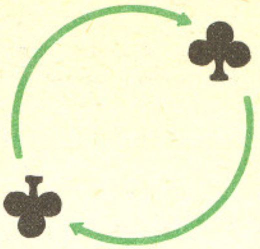


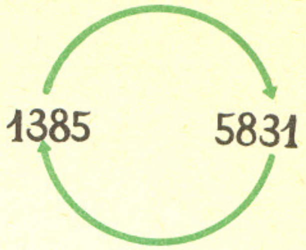
Kotek nie ma możliwości sprawdzenia fizycznego, czy jest w zwierciadle. Może oczywiście napić się mleka, które mu zaszkodzi, ale to nie jest sposób fizyka, lecz czarnoksiężnika. Spróbujcie bowiem skosztować odbicia zwierciadlanego mleka — ja nie potrafię. Jeżeli kotek uczyłby się fizyki jądrowej, sytuację miałby ułatwioną.
21 lat temu odkryto bowiem procesy, które naruszają zasadę zachowania parzystości. Ale o tym ani autor przygód Alicji, ani żaden czarnoksiężnik nie mógł wiedzieć.
Lepiej jednak nie pić mleka niewiadomego pochodzenia.

OTO DWA NAPISY:

125S7I i 125521

Który z nich jest symetryczny? Geometrycznie tylko ten pierwszy. Widoczne jest jednak, że i drugi z napisów odznacza się pewną symetrią budowy. Na czym jednak ta symetria polega? Odpowiedź jest prosta: czytany od przodu jest taki sam, jak czytany od tyłu. Ponieważ jednak matematyk lubi określenia dokładniejsze, zastanówmy się, w jaki sposób wyrazić to ściślej. Zróbmy takie porównanie.





* * *

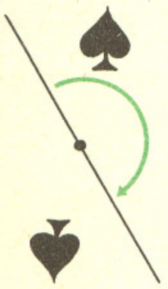
Tu zajmiemy się figurami na płaszczyźnie:

Tu zajmiemy się napisami takiej postaci:

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_n,$$

przy czym zamiast liter a_1, a_2, a_3 itd. trzeba wstawić cyfry.

Tu zbadamy obrót wokół środka o kąt 180°:



Tu zbadamy przekształcenie:

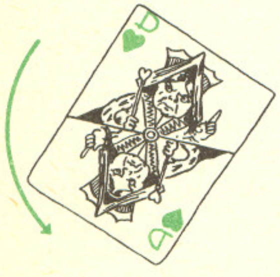
$$a_1 a_2 \dots a_n \to a_n \dots a_2 a_1 .$$

Oto jak zmienia ono różne napisy:

1385 → 5831
2200 → 0022
3113 → 3113
4200524 → 4250024 itd.

Ważna własność obu przekształceń:
wykonane dwa razy po kolei niczego nie zmieniają,
wszystko wraca do pierwotnego położenia.

Tu figury symetryczne to takie figury, które nie zmieniają się przy pewnym obrocie o 180°:



Tu napisy symetryczne to takie napisy, które nie zmieniają się po zastosowaniu naszego przekształcenia:

2005002 → 2005002

* * *

Po tym eksperymencie zaproponuję następującą definicję symetrii:
symetria to własność, której nie zmienia przekształcenie specjalnego rodzaju — takie, które wykonane dwa razy po kolei staje się identycznością.
Powróćmy do naszych napisów.
Przekształcać można nie tylko pojedyncze napisy, lecz także całe ich zbiory

$$\{223, 850, 3222, 4, 33\} \to \{322, 058, 2223, 4, 33\}.$$

Umówmy się co do następującej definicji.
Jeśli pewne przekształcenie ma tę własność, że wykonane dwa razy po kolei daje identyczność i jeśli przekształca ono zbiór A na zbiór B, wówczas parę zbiorów: A i B nazwiemy parą zbiorów wzajemnie symetrycznych ze względu na to przekształcenie.
Interesować nas będzie jedna własność takiej pary: oba zbiory wzajemnie symetryczne mają zawsze po tyle samo elementów.

Podamy kilka przykładów.

Przykład 1

Przekształćmy każdą liczbę całkowitą na liczbę do niej przeciwną:

$$a \to -a.$$

Przykładowo:

$$6 \to -6, \quad 0 \to -0, \quad -2 \to 2 \quad \text{itd.}$$

A oto pary zbiorów wzajemnie symetrycznych przy tym przekształceniu

$$\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\} \text{ i } \{-1, -2, -3, -4, -5, \ldots\},$$
$$\{-2, -1, 0, 1, 2\} \text{ i } \{-2, -1, 0, 1, 2\},$$
$$\{100, -10, 1, 0, -1\} \text{ i } \{1, 0, -1, 10, -100\}.$$

Przykład 2

Bilety autobusowe oznaczone są sześciocyfrowymi numerami, np. 005839, 998277, 555555 itp. Sprawdźmy, czy bilet, który kupiliśmy, nie jest czasem szczęśliwym „oczkiem", to znaczy takim, że sumą jego cyfr jest 21. Oto kilka szczęśliwych numerów: 209613, 007815, 333336, 707070.

Numery biletów będziemy przekształcać w taki sposób:

$$209613 \to 790386$$
$$007815 \to 992184$$
$$333336 \to 666663$$
$$707070 \to 292929.$$

Zasadę, według której przekształcamy numery, opisuje wzór:

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \to (9-a_1)\,(9-a_2)\,(9-a_3)\,(9-a_4)\,(9-a_5)\,(9-a_6).$$

Pojawiła się interesująca nas własność: przekształcenie to wykonane dwa razy po kolei staje się identycznością. Możemy zatem badać pary zbiorów wzajemnie symetrycznych. A więc do dzieła.

$$A = \text{zbiór szczęśliwych oczek} = \{209613, 007815, 333336, \ldots\}$$

Jak wygląda zbiór B symetryczny do A?

$$B = \{790386, 992184, 666663, \ldots\}$$

Okazuje się, że nietrudno ten zbiór określić:

$$B = \text{zbiór numerów z sumą cyfr 33}.$$

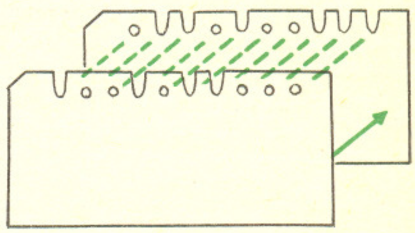
(Uzasadnijcie dlaczego!)

Nie obliczyliśmy wprawdzie, ile jest różnych numerów ze szczęśliwą sumą 21 — udowodniliśmy natomiast, że jest ich dokładnie tyle, ile numerów z sumą cyfr 33.

Przykład 3

Kartoteka kart z perforowanym brzegiem zawiera karty podziurkowane dziesięcioma dziurkami.

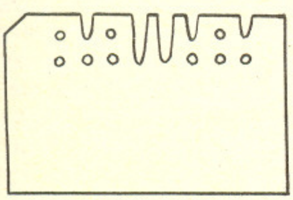
Przekształcenie, jakie zbadamy, opisuje rysunek:



Dziurki nacięte zastępujemy nie naciętymi i na odwrót.

Bez trudu stwierdzicie, że poniższe pary zbiorów to pary zbiorów wzajemnie symetrycznych:

karty nacięte raz	i	karty nacięte dziewięciokrotnie,
karty nacięte czterokrotnie	i	karty nacięte sześciokrotnie, itp.



Na zakończenie, jak zwykle, zadania.

Zadanie 1. Czy kart naciętych parzystą ilość razy (w tym karta nie nacięta ani razu) jest tyle samo, co kart naciętych nieparzystą ilość razy? (Cała sztuka polega na znalezieniu odpowiedniego przekształcenia, pomyślcie jakiego!)

Zadanie 2. W pewnej kartotece kart z perforowanym brzegiem karty dziurkowane są dwoma rzędami dziurek, a nacinać je można dwoma sposobami: płytko lub głęboko.

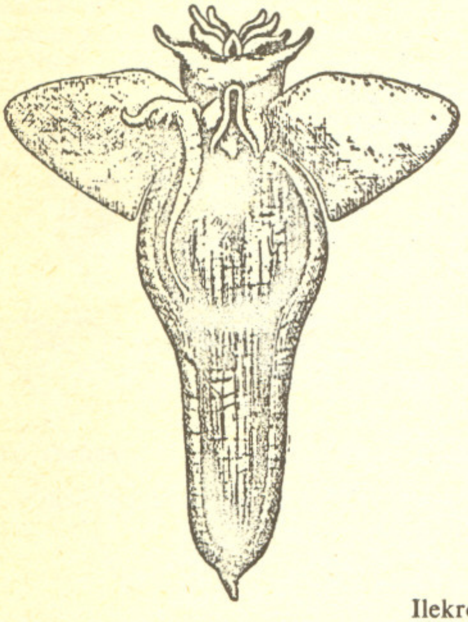
Dobierzcie kilka odpowiednich przekształceń i odpowiedzcie, jakie mogą być zbiory symetryczne do następującego:

karty nacięte w dwóch miejscach głęboko, w trzech płytko i w pięciu miejscach nie nacięte.

Małą Deltę opracowali: Tomasz HOFMOKL i Przemysław NOWICKI

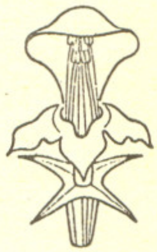
O obrocie gwiazdek śniegowych i co z tego wynika

Mgr Wiesław A. KAMIŃSKI



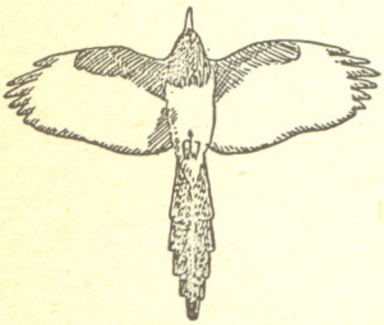
„Wśród milionów czarownych gwiazdek, w ich skrytym przepychu, niedostępnym dla nieuzbrojonego oka ludzkiego, nie ma dwu podobnych do siebie; bezgraniczna pomysłowość kierowała powstawaniem i nieograniczonym różnicowaniem jednego i tego samego zasadniczego schematu, równoznacznego, równokątnego sześciokąta; a każda z nich jest absolutnie symetryczna, lodowato regularna w swym kształcie..."

Tomasz Mann



Ilekroć patrzymy na greckie wazy, czy idziemy jak Hans Castrop, bohater „Czarodziejskiej Góry", wśród śniegu, narzuca się nam ich harmonia i piękno jako wyraz symetrii. Równocześnie rodzi się chęć wyjaśnienia takiego porządku, chęć zrozumienia roli symetrii w otaczających nas rzeczach i zjawiskach. Postaram się przybliżyć Tobie, Czytelniku, te zagadnienia, zatrzymując się na symetrii narzucającej się w podanych przykładach, na symetrii obrotowej.

Zauważymy bez kłopotu, że w wyniku obrotu powstaje sytuacja, której nie potrafimy odróżnić od sytuacji wyjściowej. Obraz „heksagonalnego" stworu śnieżnego otrzymany przez obrót o 60°, 120°, 180°, 240°, 360°, ... nie różni się od pierwowzoru. Także obrazów wazy o powtarzającym się ornamencie, powstałych po operacji obrotu, nie jesteśmy w stanie między sobą rozróżnić. Podobne stwierdzenia możemy odnieść do obiektów, które dostrzegamy w najnowocześniejszych laboratoriach, lub o których własnościach sądzimy na podstawie pośrednich danych doświadczalnych. Wiele związków chemicznych (np. benzen) ma opisywaną symetrię. Jeżeli przypiszemy „kształt" jeszcze mniejszym obiektom, to także jądra atomowe wykazują zadziwiające i egzotyczne formy (dysku, gruszki, elipsoidy) mające określone własności symetrii. Co więcej, możemy dyskutować, w obecnej fazie rozwoju fizyki, nad symetrią jeszcze drobniejszych okruchów materii, np. nukleonów.

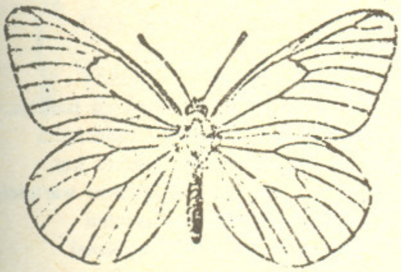


W każdym z podanych przykładów występuje określona cecha układu fizycznego (kształt, rozkład ładunku, rozkład masy), która mimo wykonania transformacji obrotu nie ulega zmianie. Możemy mówić w każdym takim przypadku o występowaniu symetrii obrotowej. (Analogicznie powiemy o innych symetriach. Zastanów się, proszę, Czytelniku, nad przykładami takich symetrii.) Występowanie tej symetrii w układzie fizycznym zawsze prowadzi do ograniczenia możliwych odróżnialnych położeń w przestrzeni, do uprzywilejowania tylko określonych połączeń międzyatomowych czy do ograniczenia dostępnych układowi energii. Ma to szczególne znaczenie w takich układach, w których ze względu na wielość możliwych zachowań układu i sytuacji fizycznych wprowadzane przez symetrię ograniczenia są użyteczne i pożądane.

To, co dotychczas powiedzieliśmy, nie wyczerpuje zagadnienia symetrii obrotowej i stanowi marginalną jej manifestację.

W dalszym ciągu dotkniemy pewnych fundamentalnych związków, które są charakterystyczne dla nowoczesnego podejścia w fizyce. Niestety, teoria ta nie jest zbyt poglądowa i dlatego nie pretendując do ścisłości wywodów zawierzam Twojej intuicji.

Dla fizyka, który bada zjawiska, mniej lub bardziej rygorystycznie opisując je w terminach przestrzeni i czasu, podstawowego znaczenia nabierają własności symetrii czasoprzestrzeni, o której powiedzieć możemy obrazowo, że staje się areną dla zachodzących zjawisk, ale też ma w nich swój udział. Dokonajmy obrotu układu odniesienia w przestrzeni. Wynikiem tej transformacji jest zmiana współrzędnych punktów przestrzeni. Uzasadniony wydaje się pogląd, że w wyniku tej operacji nie powinny ulec zmianie własności przestrzeni określone przez zjawiska fizyczne w niej zachodzące. Ponieważ z obrotem wiąże się zmiana wybranych kierunków w przestrzeni, poprzednie stwierdzenie jest równoważne z nadaniem przestrzeni izotropowości, tzn. równouprawnienia w niej wszystkich kierunków. Jest intuicyjnie oczywiste, że wobec tego żadne ciało nie może zmienić stanu ruchu bez ingerencji czynników zewnętrznych; nie mogą też w tych warunkach wystąpić zmiany momentu pędu ciała poruszającego się ruchem obrotowym. W ten sposób, intuicyjnie, zasada zachowania momentu pędu odniesiona zostaje do podstawowej własności przestrzeni, jej izotropowego charakteru. Zawartą w przedstawionym rozumowaniu myśl można sformułować bardziej elegancko.



Powiedzieliśmy, że w wyniku operacji obrotu ulegają zmianie współrzędne punktów materialnych układu fizycznego. Czy zatem prawa fizyki wyrażone w tych przekształconych współrzędnych mają taką samą formę jak poprzednio? Czy są one *niezmiennicze* względem takiej transformacji?

Jeżeli odpowiedź jest twierdząca, to poddając układ współrzędnych transformacji obrotu otrzymujemy taki sam opis zjawisk. Odpowiada to, zgodnie z przyjętą definicją, symetrii obrotowej przestrzeni. W ten sposób rozszerzamy ilość podstawowych pojęć do trzech, wiążąc je między sobą w następujący łańcuch

niezmienniczość ze względu na obroty — *symetria* obrotowa —
— *zasada zachowania* momentu pędu.

Łańcuch taki nie jest jedynym w fizyce. Inne symetrie i niezmienniczości prowadzą także do odpowiednich praw zachowania (pędu, energii, parzystości). Uogólniając ten wniosek wypowiemy twierdzenie należące do Emmy Noether, stanowiące jeden z najelegantszych środków badawczych współczesnego fizyka:

Jeżeli jakikolwiek izolowany układ fizyczny jest niezmienniczy ze względu na określone transformacje, to obowiązują w nim pewne prawa zachowania.

E. Noether udowodniła to twierdzenie w 1916 roku. Znaleźć je można także w pracach D. Hilberta i F. Kleina.

Chcę podkreślić, że fizycy w ostatnich dziesiątkach lat w pełni zdali sobie sprawę z fundamentalnego znaczenia tego prawa. Dzięki swojej ogólności ma ono zastosowanie w mechanice klasycznej i kwantowej i stanowi piękny przykład postępującej unifikacji różnych gałęzi fizyki.

Zadania

Redaguje mgr Andrzej MĄKOWSKI

M 124. Udowodnić, że jeżeli czworokąt wypukły ma oś symetrii, to albo można na nim opisać okrąg, albo można weń wpisać okrąg. Rozwiązanie na str. 16

M. 125. Niech X będzie dowolnym zbiorem niepustym. Udowodnić, że jeżeli funkcja f: $X \times X \times X \to R$ spełnia warunek

$$\bigwedge_a \bigwedge_b \bigwedge_c f(a, b, c) \leqslant f(b, a, c) \leqslant f(b, c, a),$$

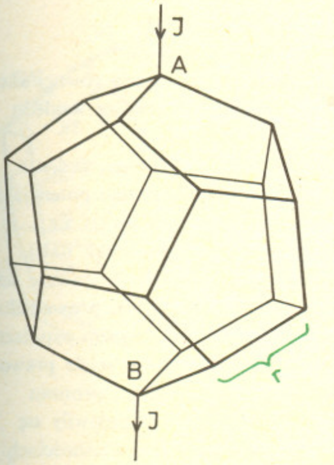
to dla dowolnej permutacji σ zbioru $\{1, 2, 3\}$ zachodzi równość

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}).$$

Rozwiązanie na str. 17

M 126. Niech $\varphi(n)$ będzie liczbą liczb naturalnych względnie pierwszych z n i nie przekraczających n. Udowodnić, że jeżeli $n > 2$, to $\varphi(n)$ jest liczbą parzystą. Rozwiązanie na str. 17

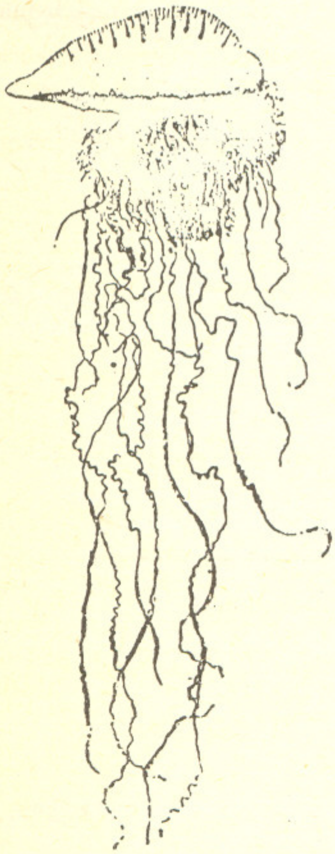
Redaguje dr Waldemar GORZKOWSKI



F 42. Dwadzieścia jednakowych odcinków drutu oporowego połączono w „dwunastościan" pokazany na rysunku. Opór każdego odcinka drutu wynosi r. Do przeciwległych wierzchołków A i B podłączono źródła prądu. Wyznaczyć opór zastępczy R_{AB} dwunastościanu. Rozwiązanie na str. 15

O symetriach w fizyce

Doc. dr Michał ŚWIĘCKI



W artykule tym zajmiemy się symetriami oddziaływań z nieco ogólniejszego punktu widzenia Okazuje się bowiem, że symetrie obowiązujące wśród oddziaływań są pewnie ich najważniejszą własnością. Nie na darmo mówi się, że praca fizyka polega na sprawdzaniu odkrytych poprzednio symetrii, wykrywaniu odstępstw od tych symetrii, a następnie postulowaniu nowych.

Wprowadźmy na początek pojęcie niezmienniczości funkcji. Mówimy, że funkcja jest niezmiennicza ze względu na jakieś przekształcenie jej argumentów, jeżeli po tym przekształceniu jej liczbowa wartość nie zmienia się. Łatwo sobie wyobrazić, że każda niezmienniczość wiąże się z występowaniem pewnej symetrii dla funkcji. Na przykład funkcja, której argumentami są współrzędne pewnego punktu materialnego, może być niezmiennicza ze względu na obroty układu współrzędnych. Jej zależność od współrzędnych punktu jest wtedy zależnością jedynie od promienia wodzącego tego punktu i przybiera ona równe wartości na powierzchni każdej kuli o środku w początku układu. Istnienie takich powierzchni kulistych, na których funkcja nie zmienia się, jest właśnie wyrazem symetrii w opisanej sytuacji. Fizycy często mówią o symetrii oddziaływań (np. symetrii obrotowej) mając na myśli, że pewne funkcje opisujące te oddziaływania są niezmiennicze ze względu na odpowiednie przekształcenia ich argumentów. Jak dowiedzieliśmy się z artykułu W. Kamińskiego, we wszystkich teoriach fizycznych obowiązuje twierdzenie Emmy Noether. Mówi ono o związku między niezmienniczościami i prawami zachowania dla układów izolowanych, a więc takich, dla których zachowuje się energia.

Prześledzimy dowód tego twierdzenia na przykładzie symetrii translacyjnej, która wiąże się z niezmienniczością oddziaływań ze względu na przesunięcia układu współrzędnych. Ograniczymy się przy tym do przypadku nierelatywistycznej mechaniki klasycznej. Rozpatrzmy układ dwóch dowolnie oddziałujących ze sobą cząstek. Układ jest izolowany i energia, z założenia, zachowuje się podczas jego ewolucji. Wprowadźmy, jak to zwykle się robi w takiej sytuacji, energię potencjalną układu. Jest ona oczywiście funkcją współrzędnych obu cząstek: $E_p(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$. Przyrost tej funkcji odpowiadający przyrostowi argumentu np. x_1 o Δx_1 równa się, z definicji energii potencjalnej, pracy jaka musi być wykonana środkami zewnętrznymi nad układem na to, żeby cząstkę pierwszą odsunąć od drugiej wzdłuż osi x o odcinek Δx_1.

$$\Delta x_1 E_p = -F_{1x} \Delta x_1,$$

gdzie F_{1x} jest x-ową składową siły, z jaką cząstka druga działa na pierwszą, a znak minus oznacza, umownie, pracę wykonywaną nad układem. Jest rzeczą oczywistą, że obserwator zewnętrzny nie oddziałujący (praktycznie) z układem może swobodnie przechadzać się po pokoju i nie wpłynie to w żaden sposób na energię potencjalną naszej pary cząstek. Fakt ten (dość oczywisty) oznacza tylko to, że energia potencjalna jest niezmiennicza ze względu na dowolne przesunięcia układu współrzędnych, np. w kierunku osi x o odcinek a:

$$E_p(x_1+a, y_1, z_1, x_2+a, y_2, z_2) = E_p(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$$

i podobnie dla osi y oraz z. Ponieważ a jest dowolnym przesunięciem, więc związek powyższy oznacza, że energia potencjalna zależy jedynie od różnic współrzędnych cząstek

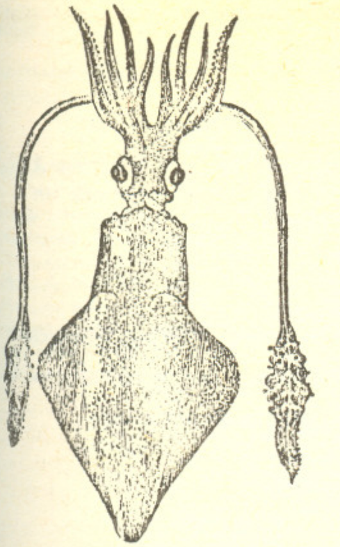
$$E_p = E_p(x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2).$$

Stąd siły działające na obie cząstki

$$F_{1x} = -\frac{\Delta_x E_p}{\Delta x_1} = +\frac{\Delta_x E_p}{\Delta x_2} = -F_{2x}$$

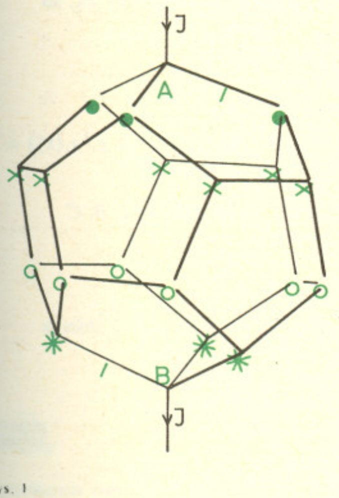
są równe co do wartości, ale przeciwnie skierowane. Otrzymaliśmy więc zasadę równej akcji i reakcji, wychodząc z dość oczywistej niezmienniczości energii oddziaływania ze względu na przesunięcia układu współrzędnych.

A zasada ta jest, jak wiemy, równoważna zasadzie zachowania pędu. Podobnie, żądanie (równie oczywiste) niezmienniczości ze względu na obroty wymaga, żeby energia potencjalna zależała jedynie od odległości między cząstkami (siły o takiej własności nazywają się centralnymi), a to z kolei prowadzi do zasady zachowania momentu pędu. I tak dalej. Widzimy już chyba, jak potężnym narzędziem fizyka są symetrie oddziaływań. Zawsze też, ilekroć w świecie oddziaływań natrafiano na nową symetrię (niezmienniczość), prowadziło to do zupełnie przełomowych odkryć. Chciałbym tu przytoczyć przykład całkiem współczesny, dotyczący fizyki cząstek elementarnych. Wiedziano od dawna, że obowiązuje ścisłe prawo zachowania ładunku elektrycznego. Po odkryciu pierwszych cząstek: elektronu, protonu i neutronu rozróżniano je za pomocą ładunku elektrycznego. Szybko potem pojawiły się nowe cząstki o takich samych ładunkach elektrycznych, lecz niejednakowych własnościach.



W celu ich rozróżnienia wprowadzono pewne nowe wielkości („ładunki") i to w taki sposób, żeby dla tych nowych ładunków (nie elektrycznych) zachodziły prawa zachowania we wszystkich obserwowanych reakcjach zachodzących między cząstkami. I tak okazało się w latach pięćdziesiątych, że w silnych, jądrowych, oddziaływaniach cząstek elementarnych zachowuje się, oprócz ładunku elektrycznego, kilka innych ładunków. Zwróćmy tu uwagę, że energia potencjalna układu cząstek może zależeć nie tylko od współrzędnych cząstek. W opisanej sytuacji oddziaływań silnych trzeba było założyć, że zależy ona od pewnych nowych (nie przestrzennych, a ładunkowych) zmiennych, następnie znaleźć taką symetrię, która prowadziłaby do prawa zachowania wszystkich ładunków. Nie było to sprawą łatwą, ale wreszcie symetrię taką znaleziono. I wtedy okazało się, że najprostszym układem mającym tę symetrię jest układ trzech cząstek (kwarków), których oddziaływania silne powinny być nierozróżnialne. W ten właśnie sposób powstała hipoteza kwarków, których śladów wprawdzie nikt nie zaobserwował, ale mało kto dzisiaj wątpi, że z nich zbudowane są wszystkie silnie oddziałujące cząstki elementarne.

Na zakończenie być może ktoś z Was chciałby wiedzieć, dlaczego zachowuje się sama energia, prawem zachowania której cały czas posługiwaliśmy się. Prawo to również wynika z pewnej symetrii, a mianowicie z niezmienniczości oddziaływań względem przesunięć w czasie. Jest przecież oczywiste (choć niekoniecznie musi być prawdziwe), że wszystkie znane obecnie oddziaływania wyglądały tak samo miliony lat temu. Ponieważ trzymamy się ciągle (jedynie dla prostoty wykładu) fizyki nierelatywistycznej, więc wszędzie biegnie ten sam uniwersalny czas. Warunek $E_p(t+b, t+b) = E_p(t, t)$ wymaga więc, żeby $E_p = E_p(t-t) = E_p(0)$, czyli żeby energia nie zależała od czasu. Jest to właśnie zasada jej zachowania. Teraz chyba już wszyscy zaczniemy doceniać specjalną i ważną rolę, jaką w Przyrodzie grają symetrie i niezmienniczości.



Rys. 1

Rozwiązanie zadania F 42

Podobnie jak w zadaniu z poprzedniego numeru skorzystamy z symetrii rozważanego układu. Oczywiście istotna jest tu symetria płynących prądów, a nie symetria samych przewodników, które możemy dowolnie pogiąć bez zmiany warunków zadania. Układ ten przechodzi sam w siebie pod wpływem następujących operacji symetrii:

a) obrotów o kąty $n \cdot 120°$ (n — liczba naturalna) względem prostej AB,

b) odbić względem każdej z trzech płaszczyzn zawierających prostą AB i jedną z trzech krawędzi wychodzących z punktu A.

Inne operacje symetrii samego dwunastościanu nie są operacjami symetrii układu, gdyż zmieniają położenie punktów dopływu i odpływu prądu.

Po podłączeniu źródła prądu potencjał w poszczególnych punktach naszego obwodu jest wyznaczony jednoznacznie. Wynika stąd, że potencjał wszystkich trzech wierzchołków oznaczonych pełnym kółkiem jest taki sam (rys. 1). Gdyby bowiem tak nie było, to po obrocie wokół prostej AB o kąt 120° układ przeszedłby sam w siebie, a rozkład potencjału byłby inny niż przed obrotem wbrew stwierdzeniu, że jest on wyznaczony jednoznacznie.

Podobnie dowodzi się, że potencjał dowolnych dwóch wierzchołków oznaczonych na rys. 1 jednakowym znaczkiem jest taki sam. Zatem rozkład prądów będzie taki, jak na rys. 2 (skorzystaliśmy tu z I prawa Kirchhoffa). Napięcie U_{AB} wzdłuż każdej z możliwych dróg łączących A z B jest takie samo (II prawo Kirchhoffa). Biorąc pod uwagę drogę zaznaczoną na rys. 2, możemy napisać

$$U_{AB} = \frac{1}{3} Ir + \frac{1}{6} Ir + \frac{1}{6} Ir + \frac{1}{6} Ir + \frac{1}{3} Ir = \frac{7}{6} Ir.$$

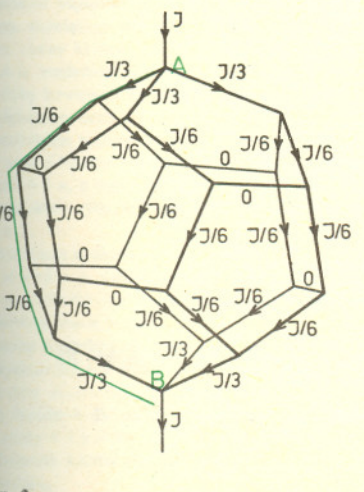
Z określenia oporu zastępczego R_{AB} mamy

$$U_{AB} = IR_{AB},$$

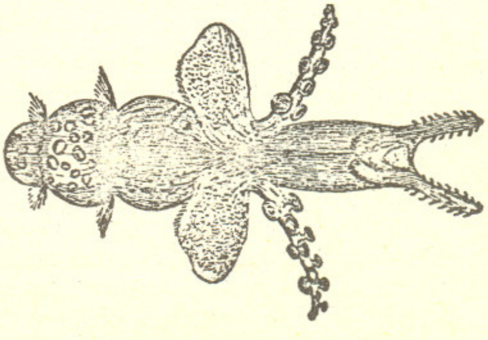
a więc

$$R_{AB} = \frac{7}{6} r.$$

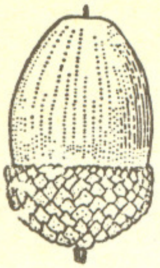
Zadanie można rozwiązać i bez odwoływania się do symetrii układu, jednakże postępując w sposób tradycyjny, znany ze szkoły, otrzymujemy układ wielu równań z wieloma niewiadomymi. Ułożenie i rozwiązanie tego układu nie należy do rzeczy miłych, o czym Czytelnik może się sam łatwo przekonać.



Rys. 2



Inwolucje



Mgr Krzysztof Prażmowski

Niech I oznacza przekształcenie tożsamościowe (tzn. $I(x) = x$). Funkcję f o dziedzinie X i o wartościach w X nazywamy *inwolucją* jeśli spełnia ona warunek $ff = I$. Warunek ten można zapisać też w następujący sposób:

dla dowolnego $x \in X$ $\quad f(f(x)) = x$

lub

dla dowolnych $x, y \in X$ $\quad f(x) = y \rightarrow f(y) = x$.

A więc inwolucje są „symetriami wśród funkcji". Inwolucją w zbiorze liczb rzeczywistych jest np. funkcja $f_1(x) = 1-x$, w zbiorze liczb rzeczywistych różnych od zera np. $f_2(x) = \frac{1}{x}$.

Tę ostatnią funkcję można przedłużyć na cały zbiór liczb rzeczywistych przyjmując

$$f_2^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x = 0, \\ f_2(x) & \text{gdy } x \neq 0. \end{cases}$$

Zauważmy, że

1. *Inwolucja jest funkcją różnowartościową.*

Istotnie, mamy

$$f(x) = f(y) \rightarrow x = f(f(x)) = f(f(y)) = y.$$

2. *Zbiór wartości inwolucji pokrywa się z jej dziedziną.*

Dowolny element x zbioru X jest bowiem obrazem należącego do X elementu $f(x)$.
Funkcję różnowartościową ze zbioru X w zbiór Y, której zbiór wartości pokrywa się ze zbiorem Y, nazywamy *wzajemnie jednoznaczną*.
Zatem

3. *Inwolucja jest funkcją wzajemnie jednoznaczną.*

4. *Jeżeli zbiory X_1 i X_2 są rozłączne, g_1 jest inwolucją na X_1, g_2 jest inwolucją na X_2, to*

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{gdy } x \in X_1, \\ g_2(x) & \text{gdy } x \in X_2 \end{cases}$$

jest inwolucją na $X_1 \cup X_2$.

Wystarczy zauważyć, że dla dowolnego x istnieje takie i ($i = 1, 2$), że $g(g(x)) = g_i(g_i(x)) = x$.
A teraz inne określenie inwolucji:

5. *Funkcja f jest inwolucją na X wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie zbiory A, B, C i taka funkcja h, że*

$$A \cup B \cup C = X,$$
$$A \cap B = B \cap C = C \cap A = \emptyset,$$

h jest funkcją wzajemnie jednoznaczną o dziedzinie A i zbiorze wartości B

oraz

$$(*) \qquad f(x) = \begin{cases} h(x) & \textit{gdy } x \in A \\ h^{-1}(x) & \textit{gdy } x \in B \\ x & \textit{gdy } x \in C \end{cases}$$

Sprawdzenie twierdzenia **5** wygląda następująco:
Jeśli istnieją odpowiednie zbiory A, B, C i funkcja h, to mamy

gdy $x \in A$
$$f(f(x)) = f(h(x)) = h^{-1}(h(x)) = x,$$
gdy $x \in B$
$$f(f(x)) = f(h^{-1}(x)) = h(h^{-1}(x)) = x,$$
gdy $x \in C$
$$f(f(x)) = f(x) = x.$$

Jeśli z kolei mamy daną inwolucję f, to najpierw znajdujemy zbiór C:

$$C := \{x \in X\colon f(x) = x\}.$$

Następnie zbiór X—C ustawiamy w pary $\langle a, b\rangle$ spełniające dwa warunki

(1) $\qquad f(a) = b$

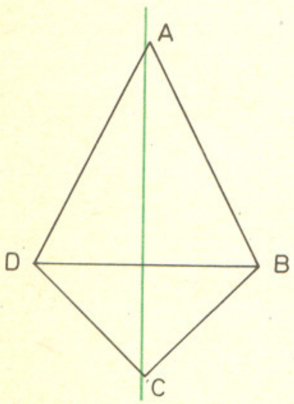
(2) każdy z elementów zbioru X—C występuje w dokładnie jednej parze (obojętnie na którym miejscu).

Jako A bierzemy zbiór wszystkich pierwszych elementów utworzonych par, jako B — zbiór wszystkich drugich elementów. Funkcję h definiujemy jako

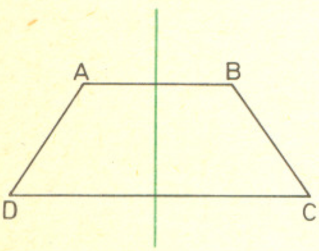
$$h = f|_A.$$

Rozwiązanie zadania M 124

Możliwe są dwa przypadki:
1° na osi symetrii leży co najmniej jeden wierzchołek czworokąta, 2° na osi symetrii nie leży żaden wierzchołek czworokąta.
W pierwszym przypadku na osi symetrii leżą dokładnie dwa wierzchołki czworokąta, który wobec tego jest deltoidem.
$AB = AD$, $DC = BC$, skąd $AD+BC = AB+DC$, a więc w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg.



W drugim przypadku czworokąt jest trapezem równoramiennym. Mamy wtedy $\sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD = 180°$, wobec czego czworokąt można wpisać w okrąg.



h^{-1} oznacza funkcję odwrotną do h.

W tym miejscu (oraz w dowodzie twierdzenia 7) korzystamy z pewnika wyboru — patrz artykuł K. Wiśniewskiego, Delta 3/1977.

$f|_A$ oznacza funkcję f ograniczoną do zbioru A.

Na mocy warunku (2) zbiory A i B są rozłączne. Ponieważ $A \cup B = X - C$, więc są oba rozłączne ze zbiorem C. Wreszcie warunek (1) gwarantuje, że

$$h(A) = B,$$

a więc także

$$h^{-1}(B) = h^{-1}(h(A)) = h^{-1}h(A) = A.$$

Złożenie dwóch inwolucji może inwolucją być, a może też nie być inwolucją. Np. jeśli f_1, f_2 to funkcje wprowadzone wyżej, a $f_3(x) = -x$, to $f_1 f_2$ nie jest inwolucją, zaś $f_3 f_2$ jest inwolucją — proszę sprawdzić.

Ogólnie

6. *Jeśli h_1, h_2 są inwolucjami na X, to $h_2 h_1$ jest inwolucją na X wtedy i tylko wtedy, gdy $h_2 h_1 = h_1 h_2$.*

Istotnie, jeśli $h_1 h_2$ i $h_2 h_1$ są inwolucjami, to

$$h_2 h_1 h_2 = h_2 h_1 h_2 I = (h_2 h_1 h_2)(h_2 h_1)(h_2 h_1) =$$
$$= (h_2(h_1(h_2 h_2)h_1)h_2)h_1 = h_1,$$

a więc

$$h_1 h_2 = (h_2 h_1 h_2)h_2 = h_2 h_1 (h_2 h_2) = h_2 h_1.$$

Jeśli z kolei h_1 i h_2 są inwolucjami oraz $h_2 h_1 = h_1 h_2$, to

$$(h_2 h_1)(h_2 h_1) = (h_2 h_1)(h_1 h_2) = (h_2(h_1 h_1)h_2) = I.$$

Przegląd własności inwolucji zakończymy twierdzeniem

7. *Dla dowolnej wzajemnie jednoznacznej funkcji f zbioru X na X istnieją takie inwolucje g i h na X, że $f = hg$.*

Dowód (nieco trudniejszy od dotychczasowych):

Określamy indukcyjnie ciąg funkcji $k^{(i)}$:

$$k^{(0)} = I_X,$$
$$k^{(i+1)} = f k^{(i)},$$

oraz przyjmujemy umowę

$$k^{(-i)} = (k^{(i)})^{-1}.$$

Weźmy pod uwagę relację $\sim$ na elementach zbioru X:

$a \sim b$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba całkowita n, taka, że $k^{(n)}(a) = b$.

Jak łatwo sprawdzić $\sim$ jest relacją równoważności.

Jej klasy abstrakcji to zbiory

$$D_a = \{k^{(n)}(a) \colon n \text{ jest liczbą całkowitą}\},$$

gdzie a jest dowolnie ustalonym elementem X.

Określimy funkcje g i h oddzielnie na każdym ze zbiorów D_a — można tak zrobić z uwagi na twierdzenie **4** (uogólnione oczywiście). Zauważmy najpierw, że

$$x \in D_a \to f(x) \in D_a,$$

a dokładniej

$$f(k^{(n)}(a)) = k^{(n+1)}(a).$$

Mamy więc zastąpić dwiema inwolucjami funkcję, która każdemu $k^{(n)}(a)$ przyporządkowuje $k^{(n+1)}(a)$.

Będą to funkcje g_a i h_a określone przez warunki:

$$g_a(k^{(n)}(a)) = k^{(-n)}(a),$$
$$h_a(k^{(n)}(a)) = k^{(1-n)}(a).$$

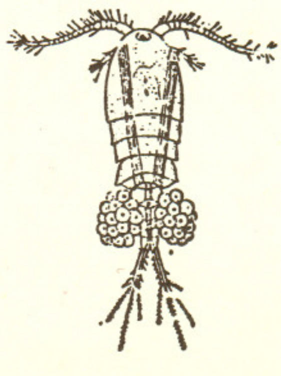
Mamy

$$h_a g_a(k^{(n)}(a)) = h_a(k^{(-n)}(a)) = k^{(1-(-n))}(a) =$$
$$= k^{(n+1)}(a) = f(k^{(n)}(a)).$$

Pozostaje jeszcze sprawdzić, że g_a i h_a są inwolucjami na D_a:

$$g_a g_a(k^{(i)}(a)) = g_a(k^{(-i)}(a)) = k^{(-(-i))}(a) = k^{(i)}(a),$$
$$h_a h_a(k^{(i)}(a)) = h_a(k^{(1-i)}(a)) = k^{(1-(1-i))}(a) = k^{(i)}(a).$$

I w ten sposób dowód został zakończony.



Rozwiązanie zadania M 125

Z założenia wiemy, że

(1) $\quad f(a,b,c) \leqslant f(b,a,c),$

(2) $\quad f(b,a,c) \leqslant f(b,c,a),$

skąd wynika

(3) $\quad f(a,b,c) \leqslant f(b,c,a).$

Stosując kolejno (1), (3), (3), (1), (3), (3) otrzymujemy $f(x_1,x_2,x_3) \leqslant f(x_2,x_1,x_3) \leqslant f(x_1,x_3,x_2) \leqslant f(x_3,x_2,x_1) \leqslant f(x_2,x_3,x_1) \leqslant f(x_3,x_1,x_2) \leqslant f(x_1,x_2,x_3)$.

Ponieważ pierwsze i ostatnie wyrażenie w tym ciągu nierówności są równe, więc wszystkie wyrażenia są równe, c.n.d.

Jest to twierdzenie udowodnione specjalnie dla Delty. W literaturze można znaleźć analogiczny wynik tylko przy dodatkowym założeniu, że X jest zbiorem skończonym.

Rozwiązanie zadania M 126

Niech $n > 2$. Zauważmy, że jeżeli k i n są liczbami względnie pierwszymi (tzn. największy wspólny dzielnik liczb k i n jest równy 1) oraz $1 \leqslant k \leqslant n$, to liczby $n-k$ i n są względnie pierwsze i $1 \leqslant n-k \leqslant n$. Gdyby bowiem d było wspólnym dzielnikiem liczb $n-k$ i n, to d byłoby dzielnikiem różnicy tych liczb, tj. liczby k, a więc d byłoby wspólnym dzielnikiem liczb k i n, a jedynym wspólnym dzielnikiem tych liczb jest 1, musi więc być $d = 1$.

Oczywiście zachodzą nierówności $0 \leqslant n-k \leqslant n$. Gdyby było $0 = n-k$, to $k = n$ i liczby k i n nie byłyby względnie pierwsze (bo $n > 1$).

Liczby względnie pierwsze z n i nie przekraczające n można więc pogrupować w pary $\{k, n-k\}$, gdyż nie jest możliwe, by $k = n-k$ (wówczas $n = 2k > 2$, $k > 1$, i liczby k i $n = 2k$ nie byłyby względnie pierwsze). Liczba $\varphi(n)$ jest więc (dla $n > 2$) parzysta.