Na marginesach tego numeru Delty znajdziecie rysunki ponumerowane od 1 do 52. Każdy z nich (prócz pierwszego) został uzyskany z poprzedniego według tej samej reguły. Poprosiliśmy o to komputer. Jak wyglądają wobec tego rysunki 53 i 54? Wśród tych, którzy nadeślą do dnia 15.III.1977 roku prawidłowe rozwiązania, rozlosujemy nagrody książkowe.

SPIS TREŚCI

Nasza okładka:
Tablice SI

W następnym numerze:
O pewniku wyboru

„Delta"
matematyczno-fizyczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i Polskiego Towarzystwa Fizycznego wydawany przy poparciu Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Adres Redakcji
ul. Hoża 69 pok. 151,
00-681 Warszawa

Zakład Narodowy im. Ossolińskich — Wydawnictwo Wrocław, Oddział w Warszawie
Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark. wyd.; 2,50 ark. druk.; papier offsetowy III kl. 80 g. 61 × 86
Wydrukowano w Drukarni im. Rewolucji Październikowej Warszawa, ul. Mińska 65.
Nr zam. 1512/76 J-113

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60,— cena prenumeraty półrocznej zł 30,—

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch" oraz urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach:
— do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i cały rok następny
— do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego.
Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienie w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch".
Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW oraz prenumeratorzy indywidualni, zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.
Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch", Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTĘ":

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.
Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.
Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, konto PKO nr 1-6-100312

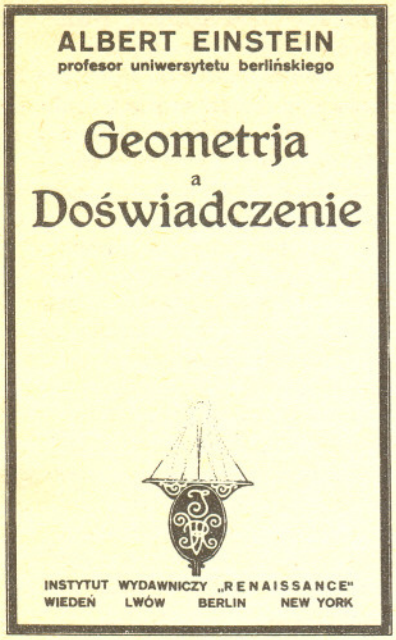
w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona" Krakowskie Przedmieście 7 00-068 Warszawa, Poland or with
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland.
— Earlscourt Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain.
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia.

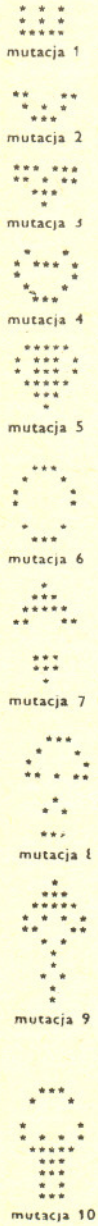
Cena 1 egzemplarza zł 5.— nr indeksu 35723/35550



ALBERT EINSTEIN
profesor uniwersytetu berlińskiego

Geometrja
a
Doświadczenie

INSTYTUT WYDAWNICZY „RENAISSANCE"
WIEDEŃ LWÓW BERLIN NEW YORK



Geometria a doświadczenie

Albert EINSTEIN

(*Artykuł napisany w latach dwudziestych naszego stulecia i przetłumaczony przez prof. dr Gottfryda. Dokonaliśmy jedynie drobnych zmian słownictwa i pisowni.* (*Red.*))

Spośród wszystkich innych nauk matematyka przede wszystkim z jednego powodu cieszy się szczególnym poważaniem: jej twierdzenia są bezwzględnie pewne i niezaprzeczalne, podczas gdy twierdzenia wszystkich innych nauk są do pewnego stopnia przedmiotem sporu i wciąż narażone na obalenie wskutek odkrycia nowych faktów. Mimo to badacz, pracujący na innych polach, nie miałby jeszcze powodu zazdrościć matematykowi, gdyby jego wywody nie odnosiły się do przedmiotów rzeczywistych, lecz tylko do tworów naszej wyobraźni. Nie można się przecież dziwić, że się dochodzi do zgodnych wniosków logicznych, jeżeli się zawarło umowę co do twierdzeń zasadniczych (pewników), jak też co do metod, którymi mamy posługiwać się, aby z owych twierdzeń zasadniczych wyprowadzać dalsze twierdzenia. Otóż tutaj zjawia się zagadka, która niepokoiła badaczy we wszystkich czasach. Jak to możliwe, że matematyka, która jest owocem ludzkiego myślenia niezawisłym od wszelkiego doświadczenia, tak doskonale stosuje się do przedmiotów rzeczywistych. Czyż rozum ludzki może badać własności przedmiotów rzeczywistych samym myśleniem, bez pomocy doświadczenia. Na to wedle mego zdania należy krótko odpowiedzieć: o ile twierdzenia matematyczne odnoszą się do rzeczywistości nie są one pewne, a o ile są pewne, to nie odnoszą się do rzeczywistości. Zdaje mi się, że ogół uzyskał w tej sprawie zupełną jasność dopiero dzięki owemu kierunkowi w matematyce, który nosi nazwę *aksjomatyzacji*. Postęp uzyskany przez aksjomatyzację polega na ścisłym oddzieleniu tego, co jest logiczne, formalne od tego, co jest rzeczowe i dostępne dla zmysłów: wedle zasad aksjomatyzacji tylko zagadnienia logiczno-formalne są przedmiotem matematyki, a nie związana z nimi treść zmysłowa lub jakakolwiek inna. Zastanówmy się z tego punktu widzenia nad jakimkolwiek pewnikiem geometrycznym, np. następującym: Przez dwa punkty w przestrzeni przechodzi jedna i tylko jedna prosta. Jak należy interpretować ten pewnik w myśl dawniejszych i w myśl nowoczesnych zasad.

Dawniejsza interpretacja. Każdy wie, co to jest prosta i co to jest punkt. Czy ta wiedza pochodzi z jakiejś własności ducha ludzkiego, czy też z doświadczenia, czy może z obu źródeł lub skądinąd, tego matematyk nie ma potrzeby roztrzygać, lecz pozostawia to filozofowi. Opierając się na tej wiedzy, danej przed wszelką matematyką, pewnik ten (jak zresztą wszystkie inne pewniki) jest oczywisty, to znaczy jest apriorycznym wyrazem części tej wiedzy.

Nowsza interpretacja. Geometria zajmuje się przedmiotami, które oznacza się wyrazami: prosta, punkt itd. Nie zakłada się, że istnieje uzmysłowienie tych przedmiotów lub wiedza o nich, przyjmuje się tylko prawdziwość pewników, jak wyżej przytoczonego, w sposób czysto formalny, to znaczy bez względu na jakąkolwiek treść poglądową lub doświadczalną. Te pewniki są wolnymi tworami ducha ludzkiego. Wszystkie inne twierdzenia geometryczne są logicznymi wnioskami, wyprowadzonymi z pewników (które należy pojmować czysto formalnie). Pewniki określają dopiero przedmioty, którymi zajmuje się geometria. Schlick dlatego bardzo trafnie w swej książce o teorii poznania nazwał je „definicjami uwikłanymi" (implizite Definitionen).

Takie pojmowanie pewników ze stanowiska aksjomatyki nowoczesnej uwalnia matematykę od składników obcych i usuwa mistyczną niejasność, która przedtem ciążyła na jej podstawach. Takie czyste przedstawienie przekonuje nas jednak w sposób oczywisty, że matematyka jako taka nie może niczego powiedzieć ani o przedmiotach poglądowego wyobrażenia, ani o przedmiotach rzeczywistych. W geometrii aksjomatycznej „punkt", „prosta" itd. są to tylko schematy beztreściowe. To, co im daje treść, nie należy już do matematyki.

Jednakowoż wiadomo, że matematyka w ogólności, a geometria w szczególności zawdzięczają swoje powstanie potrzebie dowiedzenia się czegoś o zachowaniu się przedmiotów rzeczywistych. Już samo słowo „geometria", które oznacza „mierzenie ziemi", świadczy o tym. Miernictwo zajmuje się bowiem możliwościami wzajemnego położenia pewnych ciał rzeczywistych, mianowicie części kuli ziemskiej, sznurów i płyt mierniczych. Oczywiście systemy pojęciowe aksjomatyki same przez się nie mogą niczego powiedzieć o zachowaniu się takich przedmiotów rzeczywistych, które będziemy nazywać ciałami praktycznie sztywnymi. Celem umożliwienia tego, należy geometrię ogołocić z jej szaty tylko logiczno-formalnej i pod beztreściowe układy pojęciowe geometrii aksjomatycznej podłożyć przedmioty rzeczywiste i dostępne dla zmysłów. Aby to uczynić, należy tylko dodać zdanie następujące: Co do swego wzajemnego położenia, ciała stałe zachowują się tak jak twory trójwymiarowe geometrii euklidesowej; wtedy twierdzenia geometrii euklidesowej zawierają już stwierdzenia o zachowaniu się ciał praktycznie sztywnych. Geometria tak uzupełniona jest oczywiście nauką przyrodniczą: możemy ją nawet uważać za najdawniejszą gałąź fizyki. Jej stwierdzenia polegają w istocie na indukcji z doświadczenia, a nie na wnioskach logicznych. Tak uzupełnioną geometrię będziemy nazywali „geometrią praktyczną" i będziemy ją odróżniali od geometrii czysto aksjomatycznej.

mutacja 11

mutacja 12

Równania współzmiennicze — równania, których obie strony zachowują się przy zmianach układu współrzędnych tak jak skalar lub wektor, albo ogólniej — tensor. (przyp. red.)

mutacja 13

mutacja 14

mutacja 15

mutacja 16

mutacja 17

mutacja 18

Przedział czasoprzestrzenny — odległość w czterowymiarowej przestrzeni (x, y, z, t). Dla dwóch zdarzeń przedział ten równa się pierwiastkowi z różnicy kwadratów zwykłej (zmierzonej linijką) odległości między miejscami zajścia tych zdarzeń oraz drogi, jaką przebyłoby światło w czasie równym odstępowi czasowemu między tymi zdarzeniami. (przyp. red.)

Pytanie, czy praktyczna geometria świata jest euklidesowa, czy nie, ma istotne znaczenie; tylko doświadczenie może na nie odpowiedzieć. Każde mierzenie długości w fizyce jest praktyczną geometrią w tym znaczeniu, podobnie jak pomiary geodetyczne i astronomiczne, jeżeli się weźmie do pomocy prawdę, opartą na doświadczeniu, że światło rozchodzi się po liniach prostych wedle określeń geometrii praktycznej. Do tak określonego pojmowania geometrii dlatego przywiązuję szczególną wagę, iż bez niego nie mógłbym stworzyć teorii względności. Bez niego mianowicie następujące rozumowanie byłoby niemożliwe: W układzie odniesienia, który znajduje się w ruchu obrotowym względem jakiegoś układu inercjalnego, prawa rozmieszczenia ciał sztywnych (z powodu skrócenia lorentzowskiego) nie odpowiadają regułom geometrii euklidesowej; jeżeli więc układom nieinercjalnym nadajemy równe prawa z układami inercjalnymi, należy opuścić geometrię euklidesową. Stanowcze posunięcie, jakim jest przejście do współzmienniczych równań ogólnej teorii względności, nie doszłoby do skutku, gdyby nie można było oprzeć się na powyższej interpretacji. Jeżeli odrzucimy związek między obiektami aksjomatycznej geometrii euklidesowej a ciałami praktycznie sztywnymi, które spotykamy w rzeczywistości, dochodzimy łatwo do następującego rozumienia rzeczy, któremu hołdował tak bystry i głęboki myśliciel, jak H. Poincaré: Spośród wszystkich możliwych geometrii aksjomatycznych euklidesowa odznacza się prostotą. Ponieważ geometria aksjomatyczna sama przez się nie zawiera żadnych stwierdzeń o rzeczywistości zmysłowej, lecz dopiero w połączeniu z prawami fizycznymi, to byłoby posunięciem możliwym i rozsądnym pozostanie przy geometrii euklidesowej bez względu na to, jaką jest w istocie rzeczywistość. Łatwiej bowiem będzie zdobyć się na zmianę praw fizycznych, niż na zmianę aksjomatycznej geometrii euklidesowej, gdyby wystąpiły sprzeczności między teorią a doświadczeniem. Jeżeli odrzucimy związek między ciałem praktycznie sztywnym a geometrią, to faktycznie niełatwo będziemy mogli oderwać się od umowy, że należy pozostać przy geometrii euklidesowej, jako najprostszej. Dlaczego Poincaré i inni badacze odrzucają nasuwającą się samą przez się równoważność ciał praktycznie sztywnych, znanych z doświadczenia, i brył geometrycznych? Po prostu dlatego, że praktycznie sztywne ciała przy ıody przy bliższym badaniu okazują się nie sztywnymi; możliwość względnych położeń ich elementów zależy od temperatury, sił zewnętrznych itd. Przez to pierwotny, bezpośredni związek między geometrią a fizyczną rzeczywistością wydaje się zniszczony i nasuwa się nam następujący, ogólniejszy sposób pojmowania, który charakteryzuje stanowisko Poincarégo. Geometria G nie wypowiada niczego o zachowaniu się przedmiotów rzeczywistych, czyni to dopiero w połączeniu z ogółem F praw fizycznych. Symbolicznie możemy powiedzieć, że tylko suma G + F podlega kontroli doświadczenia. Można więc dowolnie wybrać G, podobnie — część F. W celu uniknięcia sprzeczności należy tylko resztę F tak wybrać, aby G i całkowite F razem wzięte odpowiadały doświadczeniu. Przy takim pojmowaniu geometria aksjomatyczna i konwencjonalna część praw przyrody są dla teorii poznania równowartościowe. *Sub specie aeternitatis* Poincaré pojmując rzecz w ten sposób, ma wedle mego zdania rację. Pojęcie ciała pomiarowego i odpowiadające mu w teorii względności pojęcie zegara pomiarowego nie znajdują w świecie rzeczywistym ściśle odpowiadających im przedmiotów. Jest zresztą jasne, że ciała stałe i zegar w układzie pojęć fizycznych nie zajmują stanowiska elementów redukowalnych, lecz są tworami złożonymi, które w gmachu fizyki teoretycznej nie mają roli samodzielnej. Jestem jednak przekonany, że przy dzisiejszym stanie fizyki teoretycznej należy uważać je za pojęcia samodzielne; jesteśmy bowiem jeszcze bardzo daleko od tak ścisłej znajomości podstaw teoretycznych, abyśmy mogli podać dokładną konstrukcję teoretyczną owych tworów.

Co się tyczy zarzutu, iż w przyrodzie nie ma ciał faktycznie sztywnych, że więc własności, które im przypisujemy, nie odnoszą się do fizycznej rzeczywistości, to nie jest on tak głęboki, jak to się na pierwszy rzut oka wydaje. Nie jest bowiem trudno tak dokładnie oznaczać stan fizyczny ciała pomiarowego, żeby jego zachowanie ze względu na położenie wobec innych ciał pomiarowych było dostatecznie jednoznaczne; tak, żeby je można było zastąpić ciałem sztywnym. Do takich ciał będą odnosiły się nasze stwierdzenia o ciałach sztywnych.

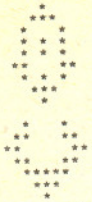
Cała geometria praktyczna polega na pewnej zasadzie dostępnej dla doświadczenia, nad którą zatrzymamy się. Zróbmy dwa znaki na ciele praktycznie sztywnym i zaznaczmy między nimi odcinek. Dwa takie odcinki zwać się będą równe, jeśli znaki jednego z nich można sprowadzić do stałego pokrycia ze znakami drugiego. Otóż zakładamy:

Jeśli dwa odcinki kiedykolwiek i gdziekolwiek okazały się równymi, to są zawsze i wszędzie równe.

Nie tylko praktyczna geometria euklidesowa, lecz także najbliższe jej uogólnienie, praktyczna geometria Riemanna, a przez to także ogólna teoria względności, polegają na tych założeniach. Z dowodów doświadczalnych, które przemawiają za prawdziwością tego założenia, przytoczę tylko jeden. Zjawisko rozchodzenia się światła w próżni przyporządkowuje każdemu przedziałowi czasoprzestrzennemu pewien odcinek, mianowicie odpowiednią drogę światła, i nawzajem. Stąd wynika, że powyższe założenie o odcinkach w teorii względności odnosić się musi także do przedziałów czasoprzestrzennych.

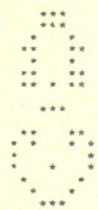
Można je wtedy tak sformułować: jeśli dwa idealne zegary kiedykolwiek i gdziekolwiek idą równie szybko (przy czym znajdują się w bezpośrednim sąsiedztwie), to idą zawsze i wszędzie jednakowo szybko, niezależnie od tego, gdzie i kiedy (chociaż stale będące w sąsiedztwie) je wzajemnie porównano.

Jeśli to twierdzenie nie stosowałoby się do zegarów rzeczywistych, to częstości własne pojedynczych atomów tego samego pierwiastka chemicznego nie zgadzałyby się ze sobą tak dokładnie, jak uczy doświadczenie. Istnienie ostrych linii widmowych jest przekonywającym dowodem doświadczalnym na korzyść wymienionej zasady geometrii praktycznej. Stąd to właśnie wynika fakt, że możemy bardzo trafnie mówić o mierzeniu czterowymiarowego riemannowskiego kontinuum czasoprzestrzennego.



mutacja 19

Pytanie, czy to kontinuum jest euklidesowe, czy ogólnie riemannowskie, czy też jeszcze inaczej zbudowane, jest wedle niniejszego rozumienia właściwie pytaniem fizycznym, na które doświadczenie musi dać odpowiedź, a nie kwestią samej konwencji, którą nalcży przyjąć ze stanowiska utylitarnego. Geometria riemannowska będzie ważna, jeśli prawa rozmieszczenia ciał praktycznie sztywnych tym dokładniej będą odpowiadały prawom geometrii euklidesowej, im mniejsze będą rozmiary upatrzonego obszaru czasoprzestrzennego.



mutacja 20

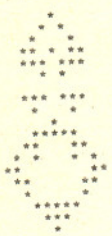
Niniejsza interpretacja fizyczna geometrii jest niemożliwa, gdybyśmy próbowali zastosować ją do przestrzeni rzędu poddrobinowego. Część swego znaczenia zachowuje jednakowoż także wobec kwestii budowy cząstek elementarnych. Można bowiem próbować nadać znaczenie fizyczne owym pojęciom, które są zdefiniowane dla zachowania się ciał wielkich w porównaniu z drobinami także i wtedy, gdy chodzi o opis elementarnych cząstek elektrycznych, tworzących materię.

Problem ten do dzisiaj nie doczekał się zadowalającego rozwiązania. (przyp. red.)

Tylko doświadczenie roztrzygnąć może czy jesteśmy uprawnieni do takiej próby zakładającej ważność fizyczną geometrii riemannowskiej poza jej właściwym zakresem fizycznym. Mogłoby się okazać, że to uogólnienie jest równie niedopuszczalne, jak rozszerzenie pojęcia temperatury na części ciała wielkości rzędu drobinowego. Mniej problematyczne okazuje się rozszerzenie pojęć geometrii praktycznej na obszary wielkości kosmicznej. Wprawdzie można zarzucić, że konstrukcja utworzona ze sztywnych sztab tym bardziej oddala się od ideału sztywności, im większe są jej rozmiary, ale trudno przypisywać temu zarzutowi znaczenie zasadnicze. Dlatego pytanie czy Wszechświat jest w swych rozmiarach skończony, czy nie, wydaje mi się, w myśl geometrii praktycznej, bardzo uzasadnione. Nie wydaje mi się nawet wykluczone, że w niezbyt dalekiej przyszłości astronomia da na nie odpowiedź. Uprzytomnijmy sobie, czego uczy tu ogólna teoria względności. Wedle niej istnieją dwie możliwości:

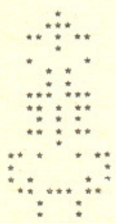
Ta sprawa również nie została do dzisiaj rozstrzygnięta. (przyp. red.)

1. Wszechświat jest w swych rozmiarach nieskończony. To jest tylko możliwe, jeśli przeciętna gęstość przestrzenna materii skoncentrowanej w gwiazdach znika w całej przestrzeni, to znaczy, jeżeli stosunek całkowitej masy gwiazd do wielkości przestrzeni, w której są rozsiane, zbliża się nieograniczenie do zera, jeśli bierze się pod uwagę coraz większe przestrzenie.



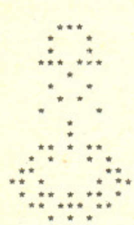
mutacja 21

2. Wszechświat jest skończony. To musi zachodzić, jeżeli we Wszechświecie istnieje gęstość średnia materii ważkiej, różna od zera. Objętość Wszechświata jest tym większa, im mniejsza jest owa gęstość średnia.
Muszę zauważyć, że istnieje powód teoretyczny, przemawiający za skończonością Wszechświata. Ogólna teoria względności uczy, że bezwładność danego ciała jest tym większa, im więcej mas ciężkich znajduje się w jego sąsiedztwie; nasuwa się zatem myśl przypisania całej bezwładności ciała wzajemnemu oddziaływaniu między nim a resztą ciał Wszechświata, gdyż ciężkość od czasów Newtona sprowadzono do wzajemnego oddziaływania między ciałami. Z równań ogólnej teorii względności można wyprowadzić, że takie zupełne sprowadzenie bezwładności do wzajemnego oddziaływania między masami — jak tego np. żądał E. Mach — tylko wtedy jest możliwe, jeśli Wszechświat jest skończony.



mutacja 22

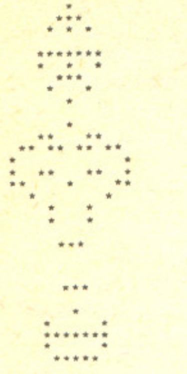
Na wielu fizyków i astronomów argument ten nie wywiera wrażenia. Ostatecznie tylko doświadczenie może roztrzygnąć, która z obu możliwości jest w Przyrodzie zrealizowana. Jak doświadczenie może na to odpowiedzieć? Najpierw można by sądzić, że gęstość średnią można oznaczyć przez obserwację części Wszechświata dostępnej naszym badaniom. Ta nadzieja jest zwodnicza. Rozmieszczenie gwiazd widzialnych jest ogromnie nieregularne, tak że nie mamy prawa przypuszczać, iż średnia gęstość materii gwiazdowej w przestrzeni równa się mniej więcej średniej gęstości Drogi Mlecznej. W ogóle można by zawsze — bez względu na wielkość zbadanej przestrzeni — podejrzewać, że poza tą przestrzenią nie ma gwiazd. Ocenienie średniej gęstości jest zatem wykluczone.

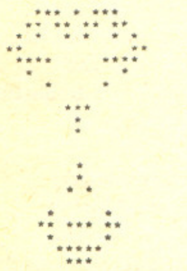


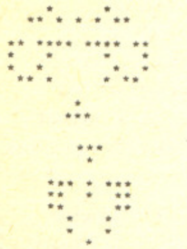
mutacja 23

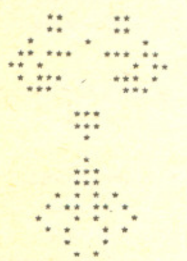
Istnieje jednak druga droga, która wydaje mi się skuteczniejsza, chociaż i ta przedstawia wielkie trudności. Jeżeli bowiem pytamy się o odstępstwa, jakie przedstawiają wnioski wysnute z ogólnej teorii względności w porównaniu z wynikami teorii Newtona, to przede wszystkim spotykamy odstępstwa objawiające się w bliskości ciężkich mas, które można stwierdzić na przykładzie Merkurego. Jeśli Wszechświat jest w swych rozmiarach skończony, to istnieje jeszcze drugie odstępstwo od teorii Newtona, które w języku tej teorii tak można wyrazić: Pole grawitacyjne newtonowskie byłoby wtedy takie, jak gdyby było wywołane nie tylko przez klasyczne masy, lecz także przez masę ujemną, równomiernie rozmieszczoną w przestrzeni.
Ponieważ gęstość tej fikcyjnej masy musiałaby być ogromnie mała, to można by było spostrzec ją tylko w układach grawitacyjnych o bardzo wielkich rozmiarach.

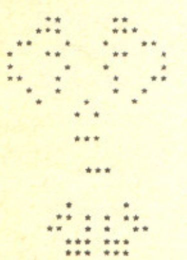
Chodzi tu o tzw. ruch rozetkowy Merkurego. Orbita Merkurego (jak i innych planet) jest elipsą, która powoli obraca się. Szybkość tego obrotu (w dużym stopniu związanego z zaburzającym wpływem innych planet) może być całkowicie wyjaśniona dopiero po uwzględnieniu poprawek wynikających z ogólnej teorii względności. (przyp. red.)

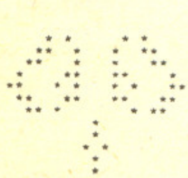

mutacja 24

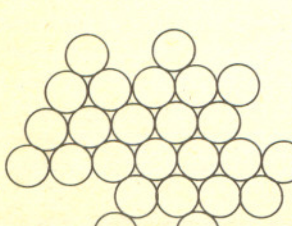

mutacja 25


mutacja 26


mutacja 27


mutacja 28


mutacja 29



Przypuśćmy, że znamy rozmieszczenie gwiazd w Drodze Mlecznej, jak też ich masy. Wtedy możemy na podstawie praw Newtona obliczyć pole grawitacyjne, jak też średnią prędkość, jaką gwiazdy muszą posiadać, aby Droga Mleczna wskutek wzajemnego oddziaływania gwiazd nie zapadła się w sobie, lecz zachowała swoją rozciągłość. Gdyby więc rzeczywiste prędkości gwiazd, które przecież można mierzyć, były mniejsze niż obliczone, to byłoby udowodnione, że rzeczywiste przyciąganie na wielkich odległościach jest mniejsze niż wedle prawa Newtona. Z takiego odstępstwa można by pośrednio dowieść skończoność Wszechświata, a nawet oszacować jego rozmiary.

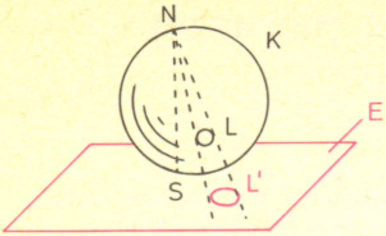
Czy możemy wyobrazić sobie Wszechświat trójwymiarowy, skończony, a przecież bez granic? Na to pytanie odpowiada się zwykle przecząco, ale niesłusznie. Następujące wywody będą miały za zadanie uzasadnić to. Okażę, że bez zbytecznego trudu możemy sobie utworzyć poglądowy obraz teorii skończoności Wszechświata, który po niejakiej wprawie wydaje się nam nawet swojski.

Najpierw uwaga z teorii poznania: Każda teoria geometryczno-fizyczna jest jako taka z natury niewyobrażalna; stanowi tylko system pojęć. Jednak te pojęcia służą do tego, aby w szereg doświadczeń czy to faktycznie przeżytych, czy tylko pomyślanych, wprowadzić związek logiczny. Teorię uczynić poglądową, znaczy więc wywołać wyobrażenie owych mnogich faktów, przeżytych przez nas, których uporządkowania schematycznego dokonuje dana teoria. W naszym przypadku musimy pytać się: Jak można sobie wyobrazić zachowanie się ciał sztywnych ze względu na ich wzajemne położenie, które odpowiada teorii skończoności Wszechświata? Wszystko, co mam tu do przytoczenia, jest pozbawione nowości; ale niezliczone, postawione mi pytania dowodzą, że pod tym względem nie zaspokojono jeszcze całkowicie potrzeb ludzi żądnych wiedzy. Znający rzecz zechce mi więc wybaczyć, że przypomnę rzeczy po części już dawno znane.

Co chcemy powiedzieć, gdy twierdzimy, że nasza przestrzeń jest nieskończona? Nic innego, jak to, iż moglibyśmy w niej pomieścić obok siebie dowolnie dużo ciał równej wielkości, a nigdy jej nie wypełnimy. Pomyślmy sobie mnogość skrzyń sześciennych równej wielkości, to wedle geometrii euklidesowej możemy je tak układać ponad sobą, obok siebie i za sobą, iż zapełnią dowolnie wielką część przestrzeni; ale ta budowa nie skończy się nigdy; zawsze będzie można przykładać nowe sześciany, a nigdy nie zabraknie miejsca. To jest treścią powiedzenia: przestrzeń jest nieskończona ze względu na ciała praktycznie sztywne, przy założeniu, że prawa wzajemnego położenia tych ostatnich dane są przez geometrię euklidesową.

Drugim przykładem nieskończonego kontinuum jest płaszczyzna. Na płaszczyźnie możemy kwadratowe płytki z kartonu tak umieszczać obok siebie, iż każdy kwadrat ma po każdej stronie inny, taki sam kwadrat. Budowa nie kończy się nigdy; coraz nowe kwadraty z kartonu można przykładać, jeśli prawa rządzące wzajemnym ich położeniem, dane są przez geometrię euklidesową. Płaszczyzna jest więc nieskończona ze względu na kwadraty z kartonu. Mówi się więc, że płaszczyzna jest kontinuum dwuwymiarowym, przestrzeń zaś jest kontinuum trójwymiarowym: co należy rozumieć przez liczbę wymiarów, uznaję za znane.

Otóż dajmy przykład kontinuum dwuwymiarowego, skończonego, ale bez granic. Pomyślmy sobie powierzchnię wielkiego globu i bardzo dużo okrągłych tarcz papierowych. Kładziemy takie kółko gdziekolwiek na powierzchnię globu. Gdy je przesuwamy dowolnie palcem po powierzchni globu, nigdzie na tej powierzchni nie spotykamy granicy. Powiadamy dlatego, że powierzchnia globu jest nieograniczonym kontinuum. Powierzchnia kuli jest przy tym kontinuum skończonym. Jeżeli bowiem nalepiamy takie kółeczka na globus, nie nalepiając nigdzie dwóch kółek na siebie, to powierzchnia globu staje się wreszcie tak pełna, że żadne nowe kółko nie znajdzie tam miejsca; oznacza to właśnie, że powierzchnia globu jest skończona ze względu na kółka papierowe. Powierzchnia kuli jest kontinuum dwuwymiarowym, nieeuklidesowym, to znaczy — prawa wzajemnego położenia ciał sztywnych w niej leżących nie zgadzają się z prawami płaszczyzny euklidesowej. Można to stwierdzić w sposób następujący: Połóżmy dokoła jednego takiego kółka sześć nowych kółeczek itd. Jeżeli wykonujemy tę konstrukcję na płaszczyźnie, to powstaje konglomerat bez luki, w którym każde kółko, nie leżące na granicy styka się z sześcioma innymi. Na powierzchni kuli z początku konstrukcja także się udaje, tym lepiej, im mniejszy jest promień takiego kółka w porównaniu z promieniem kuli. Im dalej konstrukcja postępuje, tym jawniej okazuje się, że ugrupowanie kółek w sposób wskazany i to bez luk nie jest możliwe, jakby to musiało być wedle zasad geometrii euklidesowej. W ten sposób nawet istoty nie mogące opuszczać powierzchni kulistej, ani spoglądać stamtąd w przestrzeń trójwymiarową, mogłyby przez samo eksperymentowanie owymi kółkami stwierdzić, że ich „przestrzeń" dwuwymiarowa nie jest euklidesowa, lecz sferyczna. Wedle najnowszych wyników teorii względności jest prawdopodobne, że nasza przestrzeń trójwymiarowa jest w przybliżeniu sferyczna, to znaczy, że prawa wzajemnego położenia leżących w niej ciał sztywnych dane są nie przez geometrię euklidesową, lecz w przybliżeniu sferyczną, jeżeli bierze się pod uwagę dostatecznie wielkie obszary. W tym to miejscu buntują się myśli Czytelnika. „Tego sobie żaden człowiek nie może wyobrazić" — mówi oburzony. „To można mówić, ale nie myśleć. Mogę sobie pomyśleć powierzchnię kulistą, ale nie jej analogon trójwymiarowy".



Tę przeszkodę należy pokonać, a cierpliwy Czytelnik zobaczy, że nie jest to rzecz zbyt trudna. W tym celu zajmijmy się znowu badaniem dwuwymiarowej powierzchni kulistej. Niech na rysunku $\mathcal{K}$ będzie powierzchnią kuli, $\mathcal{E}$ płaszczyzną styczną w punkcie S, którą na rysunku — dla łatwiejszego uzmysłowienia — przedstawiono ograniczoną. Niech L będzie kołową tarczą na powierzchni kuli. Pomyślmy sobie punkt świetlny, umieszczony w punkcie N, leżącym diametralnie naprzeciwko punktu S. Kółko L rzuca wtedy na płaszczyznę $\mathcal{E}$ cień kołowy L'. Każdemu punktowi na kuli odpowiada jego cień na płaszczyźnie. Gdy kółko L porusza się po kuli $\mathcal{K}$, to cień L' posuwa się po płaszczyźnie $\mathcal{E}$. Gdy tarcza L jest w S, to nakrywa się ze swoim cieniem. Gdy od S porusza się ku górze, to cień L' oddala się na płaszczyźnie $\mathcal{E}$ od S i rośnie coraz bardziej. Gdy kółko L zbliża się do punktu świetlnego N, to L' dąży ku nieskończoności i staje się nieskończenie wielkie.

Pytamy się, jakie są prawa, normujące położenie cieni L' na płaszczyźnie $\mathcal{E}$? Oczywiście takie same, jak dla kółek L na kuli $\mathcal{K}$, gdyż każdej figurze pierwotnej na $\mathcal{K}$ odpowiada cień jej na $\mathcal{E}$. Geometria cieni na płaszczyźnie zgadza się z geometrią kółek na kuli. Jeżeli owe cienie nazwiemy figurami sztywnymi, to rządzi nimi na płaszczyźnie $\mathcal{E}$ geometria sferyczna. W szczególności ze względu na te cienie płaszczyzna jest skończona, gdyż cienie te na niej zmieścić się mogą tylko w skończonej liczbie. Otóż powie się: „To nonsens; owe cienie nie są figurami sztywnymi; wystarczy posuwać podziałkę po płaszczyźnie, aby się przekonać, że cienie stają się coraz większe w miarę, jak wędrują od S do nieskończoności". Cóż jednak, jeśli na płaszczyźnie $\mathcal{E}$ podziałki tak się zachowują, jak cienie L'. Wtedy nie można by stwierdzić, że cienie rosną, oddalając się od S; wtedy to powiedzenie jest bezprzedmiotowe. W ogóle o cieniach na płaszczyźnie to jedynie można powiedzieć, iż geometrycznie zachowują się dokładnie tak, jak sztywne kółka na powierzchni kuli, w myśl geometrii euklidesowej.

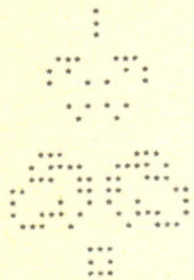
Należy dokładnie sobie zdać sprawę z faktu, iż nasze powiedzenie o rośnięciu cieni kółek w miarę oddalania się od S ku nieskończoności nie ma samo w sobie znaczenia obiektywnego, jak długo dla porównania nie możemy posługiwać się ciałami sztywnymi w znaczeniu euklidesowym, które można by było przesuwać po płaszczyźnie $\mathcal{E}$. Ze względu na prawa rządzące położeniem cieni L' punkt S jest na płaszczyźnie tak samo nieuprzywilejowany, jak na kuli. Podane powyżej uzmysłowienie geometrii sferycznej na płaszczyźnie jest dla nas dlatego ważne, że można wygodnie przenieść je na przestrzeń trójwymiarową.

Pomyślmy sobie punkt S w naszej przestrzeni i wielką ilość małych kul L', które wszystkie można sprowadzić do wzajemnego nakrycia. Niech te kule nie będą jednak sztywne w znaczeniu euklidesowym, lecz niech ich promień rośnie (widziany ze stanowiska geometrii euklidesowej) w miarę poruszania się od S ku nieskończoności i niech ów wzrost odbywa się wedle tego samego prawa, jak wzrost promieni cieni L' na płaszczyźnie.

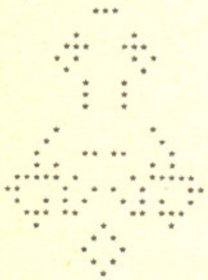
Po żywym uprzytomnieniu sobie geometrycznego zachowania się naszych kul przyjmiemy, że w naszej przestrzeni nie ma w ogóle ciał sztywnych w myśl geometrii euklidesowej, a są tylko ciała zachowujące się, jak nasze kule L'.

Wtedy posiadamy żywy obraz trójwymiarowej przestrzeni sferycznej czy też raczej trójwymiarowej geometrii sferycznej. Przy tym musimy nasze kule nazywać kulami „sztywnymi". Ich wzrastania w miarę oddalania się od S tak samo nie można zauważyć przy pomocy podziałek, jak tego nie można zauważyć na cieniach, na płaszczyźnie $\mathcal{E}$, gdyż podziałki zachowują się tak, jak kule. Przestrzeń jest jednorodna, to znaczy — w otoczeniu każdego punktu możliwe są te same konfiguracje kul. Bez rachunku można to zrozumieć tylko dla dwóch wymiarów, gdy znowu wracamy do kółek na powierzchni kulistej. Nasza przestrzeń jest skończona, gdyż z powodu „wzrastania" kul tylko skończona ich liczba może zmieścić się w przestrzeni.

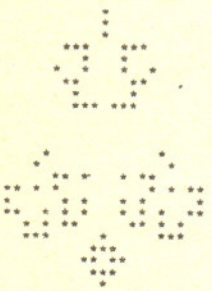
Tak uzyskaliśmy poglądowy obraz geometrii sferycznej, posługując się swą wprawą w myśleniu i wyobrażaniu jako narzędziem. Nietrudno pogłębić i ożywić tak uzyskane wyobrażenia przez wykonanie specjalnych konstrukcji. Nietrudno byłoby zresztą uzmysłowić sobie w sposób analogiczny tak zwaną geometrię eliptyczną. Tutaj chciałem tylko okazać, że ludzka zdolność wyobrażania wcale nie ma potrzeby kapitulować przed geometrią nieeuklidesową.



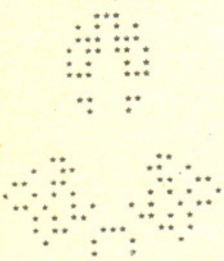
mutacja 30



mutacja 31

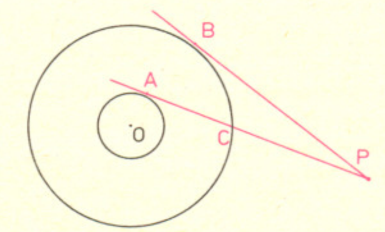


mutacja 32



mutacja 33

mutacja 34



Rozwiązanie zadania M 112
Niech O będzie środkiem danych okręgów. Ponieważ $OA \perp PA$ i $OB \perp PB$, więc

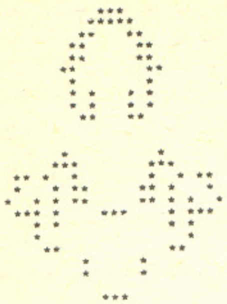
$$OA^2+PA^2=OP^2=OB^2+PB^2,$$

skąd

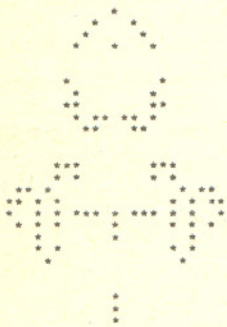
$$PA^2-PB^2=OB^2-OA^2=OC^2-OA^2=AC^2$$

Rozwiązanie zadania M 114
Nierówność tę można udowodnić przez indukcję. Jest jednak dowód bardziej elegancki:

$$4^n=2^{2n}=(1+1)^{2n}=\binom{2n}{0}+\binom{2n}{1}+\ldots+\binom{2n}{n}+$$
$$+\ldots+\binom{2n}{2n}>\binom{2n}{n}.$$



mutacja 35



mutacja 36

Aby liczba 2^n-1 była liczbą pierwszą potrzeba, żeby n było liczbą pierwszą, bowiem $2^{n_1 n_2}-1$ jest podzielne przez $2^{n_1}-1$

Cataldi zauważył to w 1603 roku i sprawdził, że 2^p-1 jest pierwsze dla $p = 13$, 17 i 19.

Rozwiązanie zadania M 113

Zauważmy, że liczby 2^n i 2^{n+3} dają przy dzieleniu przez 7 takie same reszty, gdyż różnica $2^{n+3}-2^n = 2^n(2^3-1) = 7 \cdot 2^n$ jest podzielna przez 7. Podobnie liczby n^2 i $(n+7)^2$ dają przy dzieleniu przez 7 takie same reszty, co wynika z równości $(n+7)^2-n^2 = 7(2n+7)$. Ciąg reszt z dzielenia przez 7 liczb 2^n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ jest zatem okresowy i okres wynosi 3, jest to więc ciąg

(*) 2, 4, 1, 2, 4, 1, ...

Ciąg reszt z dzielenia przez 7 liczb n^2 $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ jest też okresowy i okres wynosi 7, jest to więc ciąg

(**) 0, 1, 4, 2, 2, 4, 1, 0, 1, 4, 2, 2, 4, 1, ...

Reszta, jaką daje przy dzieleniu przez 7 liczba 2^n+n^2, jest sumą reszt, jakie dają liczby 2^n i n^2 (być może zmniejszoną o 7). Łatwo jednak sprawdzić, że liczba 7 nie jest sumą liczb wziętych po jednej ze zbiorów $\{1, 2, 4\}$ i $\{0, 1, 2, 4\}$, tj. ze zbiorów wartości ciągów (*) i (**).
Wykazaliśmy w ten sposób twierdzenie ogólniejsze:
Dla żadnych liczb naturalnych m i n liczba 2^m+n^2 nie dzieli się przez 7.

O największej znanej liczbie pierwszej

Dr hab. Andrzej ROTKIEWICZ

Wielki polski matematyk, twórca polskiej szkoły matematycznej i genialny badacz, znakomity popularyzator matematyki, autor pięćdziesięciu książek i 720 prac naukowych, doctor honoris causa wielu uniwersytetów, zmarły przed ponad siedmiu laty Profesor dr Wacław Sierpiński w przedmowie do II części swej Teorii Liczb napisał:
„Jako przykład postępu, jaki dokonał się w teorii liczb w ostatnim czasie, wystarczy podać, że największą znaną w roku 1950 liczbą pierwszą była liczba $2^{127}-1$, mająca 39 cyfr, dziś zaś największą znaną liczbą pierwszą jest liczba $2^{3217}-1$, mająca 969 cyfr. Wówczas znaliśmy tylko 12 liczb doskonałych, dziś zaś znamy ich 18". Te słowa były pisane w roku 1958. Liczby pierwsze są to liczby naturalne, które mają dokładnie dwa dzielniki naturalne. Są to więc liczby 2, 3, 5, 7, 11, ... Liczby doskonałe są to liczby, które są równe sumie swych dzielników naturalnych, mniejszych od nich samych. Najmniejszą liczbą doskonałą jest, jak łatwo widzieć, liczba $6 = 1+2+3$. Następną po niej jest liczba $28 = 1+2+4+7+14$.

Można dowieść, że na to, aby liczba parzysta n była liczba doskonałą, potrzeba i wystarcza, by była ona postaci $2^{s-1}(2^s-1)$, gdzie 2^s-1 jest liczbą pierwszą. Zatem wszystkie liczby doskonałe parzyste są zawarte we wzorze $2^{p-1}(2^p-1)$ z warunkiem, że liczby p oraz 2^p-1 są pierwsze.
Już Euklides podał następującą metodę wyznaczania liczb doskonałych:
„Obliczamy kolejne sumy składników szeregu

$$1+2+4+8+16+32+\ldots$$

Jeżeli suma taka okaże się liczbą pierwszą, to pomnóżmy ją przez ostatni składnik. Otrzymamy liczbę doskonałą".
Na podstawie przytoczonego poprzednio twierdzenia widzimy, że metoda Euklidesa wyznacza wszystkie parzyste liczby doskonałe. Dla $p = 2, 3, 5, 7$ liczby 2^p-1 odpowiednio równe 3, 7, 31, 127 są pierwsze, zatem 6, 28, 496, 8128 są liczbami doskonałymi, co zostało zauważone już przez Nicomachusa około 100 roku naszej ery.

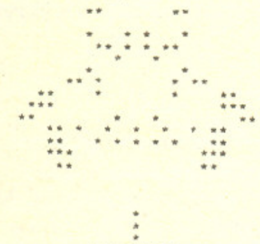
Manuskrypt z roku 1456 podaje poprawnie jako piątą liczbę doskonałą liczbę 33550336, która równa się $2^{12}(2^{13}-1)$.

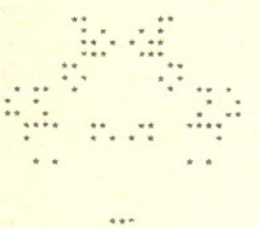
Fermat w 1640 roku zauważył, że $2^{23}-1$ ma dzielnik 47, zaś $2^{37}-1$ ma dzielnik 223, zaś Euler w 1732 r. zauważył, że 1103 jest dzielnikiem liczby $2^{29}-1$. Euler w 1772 roku stwierdził, że liczba $2^{31}-1 = 2147483647$ jest pierwsza i — co za tym idzie — że liczba $2^{30}(2^{31}-1) = 2305843008139952128$ jest doskonała. Jest to ósma z kolei liczba doskonała parzysta. Dziewiąta z kolei liczba doskonała parzysta odpowiada wykładnikowi $p = 61$. Jest to liczba $2^{60}(2^{61}-1)$. Pierwszość liczby $2^{61}-1$ mającej 19 cyfr została stwierdzona przez Pierwuszyna w 1883 r., Seelhoffa w 1886 r. i Hudelota w 1887 r.

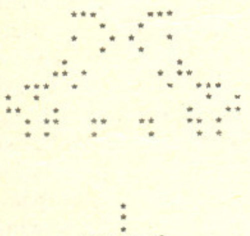
Powers w 1911 r. znalazł następną liczbę doskonałą $2^{88}(2^{89}-1)$. Tenże wraz z Fauquemberguem znalazł w 1914 r. liczbę doskonałą $2^{106}(2^{107}-1)$, a Fauquembergue również w 1914 r. znalazł dwunastą liczbę doskonałą $2^{126}(2^{127}-1)$ mającą 77 cyfr. Drugi czynnik tej liczby, $2^{127}-1$, był największą liczbą pierwszą do roku 1950. Ze względów historycznych ważna jest uwaga, że Mersenne w 1644 r. twierdził, że 2^p-1 jest pierwsze tylko dla 11 wartości p, a mianowicie dla $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127$, i 257.

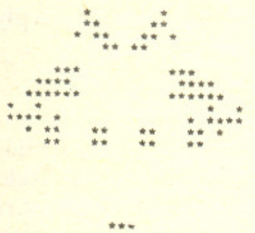
Lehmer dowiódł jednak, że liczba $2^{257}-1$ nie jest pierwsza i przeto liczba $2^{256}(2^{257}-1)$ nie jest doskonała. Tak więc w ciągu Mersenne'a należy skreślić 257 i 67 a dopisać 61, 89 i 107. Poza tym istnieją dla $n > 257$ liczby Mersenne'a M_n, które są pierwsze. W styczniu 1952 r. przy użyciu maszyny matematycznej SWAC, oraz twierdzenia Lucasa-Lehmera udowodniono, że liczby Mersenne'a $M_{521} = 2^{521}-1$ i $M_{601} = 2^{601}-1$ są pierwsze. Pierwsza z tych liczb ma 157 cyfr, druga 183 cyfry. W tym samym roku, w czerwcu, udowodniono, że liczba $M_{1279} = 2^{1279}-1$ jest pierwsza. Ma ona 376 cyfr. We wrześniu 1952 r. znaleziono, że liczby M_{2203} i M_{2281} są pierwsze. Pierwsza ma 664 cyfry, druga 687 cyfr. Praca maszyny elektronowej dla stwierdzenia, że liczba M_{2281} jest pierwsza, trwała 66 minut.

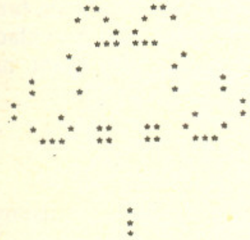

mutacja 37

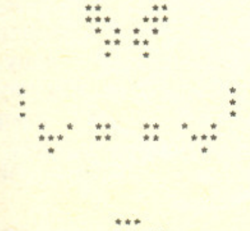

mutacja 38


mutacja 39


mutacja 40


mutacja 41


mutacja 42


mutacja 43

W 1958 roku na szwedzkiej maszynie elektronowej BESK stwierdzono, że liczba $M_{3217} = 2591170 \ldots 09315071$, mająca 969 cyfr jest pierwsza. Praca maszyny trwała $5\frac{1}{2}$ godzin. Następnie w 1964 r. znaleziono liczby pierwsze M_{9689}, M_{9941} i M_{11213}. Używano maszyny ILLAC II na uniwersytecie w Illinois. M_{11213} ma 3381 cyfr. Czas pracy maszyny dla udowodnienia, że jest ona pierwsza wynosił 2 godziny i 14 minut.
Dziś znamy 24 liczby Mersenne'a, które są pierwsze i tyle samo znamy liczb doskonałych.
Największa znana liczba pierwsza wynosi $2^{19437}-1 = 4315424797 \ldots 0968041471$ i ma 6002 cyfry.
Największą znaną liczbą doskonałą jest obecnie $(2^{19937}-1)2^{19936} = 9311445590 \ldots 0271942656$ i ma 12003 cyfry.
Tak więc obecnie znamy 24 liczby Mersenne'a M_n, które są pierwsze.
Otrzymujemy je dla $n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 617, 1279, 2203, 2281, 3217, 4219, 4423, 9689, 9941, 11213, 19937$.
Największa znana liczba pierwsza M_{19937} i największa znana liczba doskonała zostały znalezione 4 marca 1971 roku na maszynie elektronowej IBM 360/91 w Stanach Zjednoczonych Ameryki przez Tuckermanna przy pomocy twierdzenia Lucasa-Lehmera. Czas pracy maszyny wynosił 35.01 min. Dokładniejsze dane można znaleźć w artykule Tuckermanna w 68 tomie czasopisma *The Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* na stronach 2319–2320 w artykule pt. „The 24th Mersenne Prime".
Twierdzenie Lucasa-Lehmera można sformułować tak: Liczba 2^p-1, gdzie p jest liczbą pierwszą > 2, jest liczbą pierwszą wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(1) \qquad (2^p-1) \mid (1+\sqrt{3})^{2^{p-1}}+(1-\sqrt{3})^{2^{p-1}} = V_{2^{p-1}}.$$

Aby więc stwierdzić, że liczba $2^{19937}-1$ jest dzielnikiem liczby $(1+\sqrt{3})^{2^{19936}}+(1-\sqrt{3})^{2^{19936}}$ można poglądowo powiedzieć, że twierdzenie Lucasa-Lehmera zastępuje biliony, biliony, biliony ... dzieleń jednym dzieleniem.
Z kolei łatwo dowieść, że podzielność (1) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $(p-1)$-szy wyraz ciągu

$$S_1 = 4,\ S_2 = 14,\ S_3 = 194, \ldots, S_k, \ldots,$$

gdzie

$$S_1 = 4 \text{ zaś } S_k = S_{k-1}^2-2 \text{ dla } k = 2, 3, \ldots,$$

jest podzielny przez $M_p = 2^p-1$.
Rzeczywiście, przez indukcję łatwo dowieść, że

$$(2) \qquad V_{2^{n-1}} = 2^{2^{n-2}} S_{n-1}$$

W samej rzeczy, jeżeli $n = 2$ to $V_{2^{n-1}} = V_{2^1} = (1+\sqrt{3})^2+(1-\sqrt{3})^2 = 8$ oraz $2^{n-2}\, S_{n-1} = 2^{2^0} \cdot S_1 = 2 \cdot 4 = 8$.
Jeśli zaś zachodzi (2) dla liczby naturalnej $n \geqslant 2$ to

$$S_{n-1} = \frac{V_{2^{n-1}}}{2^{2^{n-2}}}, \text{ skąd } 2^{2^{n-1}} \cdot S_n = 2^{2^{n-1}} \cdot (S_{n-1}^2-2) = 2^{2^{n-1}}\left(\frac{V_{2^{n-1}}^2}{2^{2^{n-1}}}-2\right) =$$

$$= V_{2^{n-1}}^2 - 2 \cdot 2^{2^{n-1}} = [(1+\sqrt{3})^{2^{n-1}}+(1-\sqrt{3})^{2^{n-1}}]^2 - 2 \cdot 2^{2^{n-1}} =$$

$$= (1+\sqrt{3})^{2^n}+(1-\sqrt{3})^{2^n} = V_{2^n}$$

i na mocy indukcji stwierdzamy, że wzór (2) zachodzi dla każdego $n \geqslant 2$.
Oznaczmy teraz przez $\bar{t}$ resztę jaką otrzymamy dzieląc t przez $M_p = 2^p-1$. Wtedy twierdzenie Lucasa-Lehmera można wypowiedzieć tak: Liczba $M_p = 2^p-1$, gdzie p jest liczbą pierwszą > 2, jest liczbą pierwszą wtedy i tylko wtedy, gdy $(p-1)$-szy wyraz ciągu określonego rekurencyjnie przez

$$r_1 = 4,\ r_2 = 14, \ldots, r_{k+1} = \overline{r_k^2-2} \text{ dla } k = 1, 2, \ldots$$

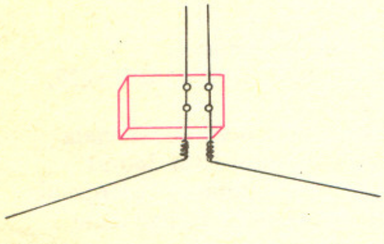
jest podzielny przez $M_p = 2^p-1$.
Aby obliczyć r_{p-1} potrzeba więc wykonać $p-2$ podnoszeń do kwadratu liczb będących resztami z dzielenia przez M_p, a więc mających nie więcej cyfr niż liczba $M_p = 2^n-1$, a następnie znajdować resztę z dzielenia przez M_p tych kwadratów zmniejszonych o liczbę 2. Te mnożenia i dzielenia wykonują właśnie maszyny matematyczne.
Do tej pory nie wiemy jednak, czy istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych Mersenne'a.

Laboratorium w domu

Dr Jan A. GAJ

Prąd elektryczny w szkle

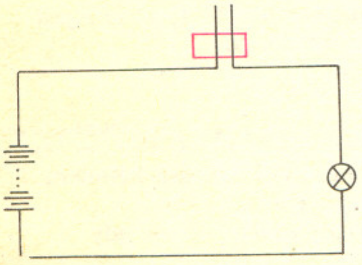
Z góry zastrzegam, że nie będzie mowy o żadnym nowym wynalazku. Będziemy przepuszczać prąd przez najzwyklejsze szkło, które — jak wiadomo — używane jest nieraz jako izolator, chociażby w pierwowzorze kondensatora — butelce lejdejskiej. Nie będziemy się też posługiwać żadnymi wyrafinowanymi przyrządami, które byłyby w stanie mierzyć znikome natężenia prądu, jakie mogą płynąć przez izolator. Postaramy się zmusić szkło, aby przewodziło zupełnie łatwo wykrywalne prądy.



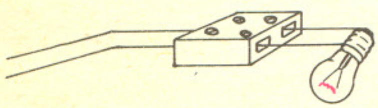
Rys. 1.

Jak to zrobić?

Trzeba szkło ogrzać i to dosyć mocno. Zrobimy to w płomieniu gazowym kuchenki domowej lub turystycznej. Z góry ostrzegam, że pierwsze nasze doświadczenie będzie bardzo trudno wykonać przy użyciu gazu ziemnego. Musimy zaopatrzyć się w pięć lub sześć baterii płaskich, które połączymy szeregowo otrzymując źródło prądu o napięciu dwudziestu kilku woltów. Do stwierdzenia przepływu prądu użyjemy żaróweczki o możliwie małym nominalnym natężeniu prądu (najwyżej 0,2 A). Jako elektrody do szkła będą nam potrzebne dwa kawałki niezbyt cienkiego (ok. 0,5 mm) drutu stalowego (mogą być wyprostowane spinacze biurowe), które musimy zamocować tak, aby ich końce znajdowały się w stałej odległości 1–2 mm i nie groziły zwarciem, co spowodowałoby zniszczenie żaróweczki. Wymagane zamocowanie można osiągnąć na przykład przybijając druty gwoździkami do kawałka drewna. Do przeciwnych końców drutów dołączamy przewody miedziane (rys. 1). Wystająca część drutów musi być dostatecznie długa, aby przy ogrzewaniu ich w płomieniu deseczka nie paliła się. Można się też posłużyć kostką porcelanową, jakiej używa się do łączenia lamp elektrycznych z przewodami zasilającymi. Źródło prądu, elektrody i żaróweczkę łączymy szeregowo (rys. 2). Następnie w płomieniu gazowym rozgrzewamy silnie kawałek szkła — na przykład z małej buteleczki lub rurki szklanej. Kiedy szkło zmięknie, nabieramy go trochę na elektrody tak, aby utworzyło „perełkę" łączącą końce drutów i dalej ogrzewamy ją w płomieniu. Żaróweczka powinna zacząć się żarzyć, wskazując przepływ prądu. Gdyby posiadany przez nas przedmiot szklany był za duży, aby zmięknąć w płomieniu kuchenki, możemy odłupać kawałek szkła, położyć go na końcach elektrod i tak ogrzewać. Szkło powinno być zwykłe łatwotopliwe (nie jenajskie).



Rys. 2.

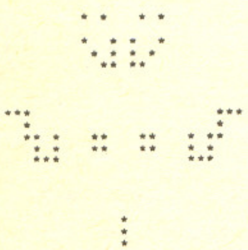


Rys. 3.

Przekonawszy się w ten sposób doświadczalnie, że prąd przez szkło może płynąć, stajemy wobec problemu:

Dlaczego szkło przewodzi?

Najprostsza nasuwająca się odpowiedź brzmi: bo elektrony przenoszą się do pasma przewodnictwa pod wpływem energii cieplnej. Niestety jest ona błędna. Szkło przewodzi na tej samej zasadzie co elektrolity, a nie półprzewodniki: przez ruch jonów. W wysokiej temperaturze, kiedy szkło zaczyna mięknąć, a nawet nieco wcześniej, drgania cieplne ułatwiają ruch makroskopowy jonów, które się tam znajdują. Najłatwiej będzie poruszać się jonom najmniejszym jak na przykład Na^+, które też w głównej mierze przyczyniają się do przewodzenia prądu. Mam nadzieję, że nie dasz się, Czytelniku, zbyć gołosłownymi zapewnieniami i zapytasz:

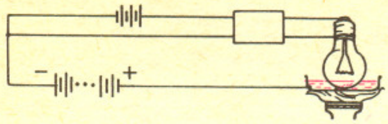


mutacja 44

A skąd wiadomo, że to jony?

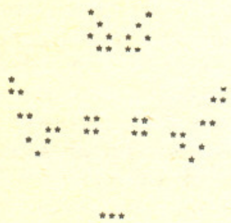
Z doświadczenia oczywiście i to bardzo ciekawego. Żeby je wykonać, musimy zdobyć pewną ilość dwóch związków: azotanu sodu $NaNO_3$ i azotynu sodu $NaNO_2$. Można próbować posłużyć się tylko jednym z nich (zapewne łatwiej będzie zdobyć azotan sodu, czyli saletrę sodową), utrudni to jednak wykonanie doświadczenia. Ale do rzeczy: równe ilości azotanu i azotynu sodu stapiamy na małym płomieniu w pudełku po paście do butów, uprzednio dokładnie wymytym szczotką i mydłem. Można użyć płytki azbestowej. W stopionej soli zanurzamy częściowo bańkę żaróweczki, trzymanej gwintem w górę. Żaróweczkę należy zamocować w tym położeniu tak, aby ją można było zasilać. Można to zrobić przy pomocy wspomnianej już kostki porcelanowej i drutu, jak na rys. 3, a następnie kostkę oprzeć na brzegu pudełka zanurzając jednocześnie żaróweczkę.

bardzo ważne: pozostawienie resztek pasty lub innych zanieczyszczeń może spowodować wybuch. Doświadczenie wykonywać w okularach.


Rys. 4.

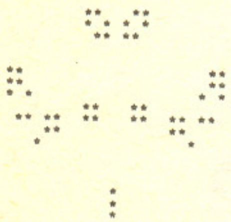
Żaróweczkę zasilamy z jednej bateryjki, a pięć lub sześć baterii połączonych szeregowo łączymy pomiędzy włókno żarówki (minus) a ogrzewane na gazie pudełko (plus) — patrz rys. 4. I teraz zacznie się najciekawsze: dołączone do ujemnego bieguna rozgrzane włókno będzie emitowało elektrony i odpychało je w stronę bieguna dodatniego czyli stopionej soli. Po przejściu przez gaz w żarówce elektrony dotrą do wewnętrznej powierzchni szkła, gdzie będą zobojętniać docierające tam poprzez szkło dodatnie jony sodu. W efekcie na wewnętrznej powierzchni żaróweczki powstanie już po kilku minutach cienka warstwa metalu, głównie sodu. Jest to bezpośredni dowód jonowego charakteru prądu elektrycznego w szkle. Aby doświadczenie się udało, podaję jeszcze

Kilka rad praktycznych


mutacja 45

1. Należy użyć żarówki 3,5 V — włókno będzie miało temperaturę wyższą od nominalnej i silniej będzie emitować elektrony. Dobrze jest mieć kilka żaróweczek na zapas.
2. Bardzo przydatny jest czuły miernik natężenia prądu płynącego przez szkło o zakresie 100 μA, a w każdym razie nie więcej niż 1 mA — na przykład opisany w „Delcie" nr 5/75 miernik własnej roboty ze wzmacniaczem tranzystorowym.
3. Nie należy dopuścić do zbyt silnego rozgrzania się cieczy — szkło żaróweczki może zmięknąć. Najlepiej kontrolować miernikiem natężenie prądu i utrzymywać je w okolicy 100 μA przez regulowanie płomienia — w przeciwnym razie trzeba grzać bardzo ostrożnie metodą prób i błędów — przy którejś żaróweczce powinno się udać.
A teraz rzecz bez precedensu, a mianowicie

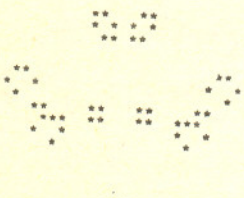
Konkurs samych zwycięzców


mutacja 46

Każdy, kto do 1.III.1977 r. przyśle pod adresem redakcji żaróweczkę pokrytą wewnątrz do połowy metalem oraz dane dotyczące wykonania doświadczenia, *otrzyma nagrodę książkową.* Ponadto między uczestników zostanie rozlosowana nagroda specjalna — *silniczek elektryczny.* Powodzenia!

Zadania

Redaguje mgr Andrzej MĄKOWSKI

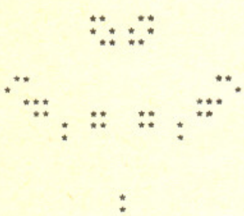

mutacja 47

M 112. Na płaszczyźnie dane są dwa okręgi współśrodkowe i punkt P na zewnątrz nich. Przez punkt P poprowadzono styczne do tych okręgów; punktem styczności z mniejszym okręgiem jest A, z większym — B. Odcinek PA przecina większy okrąg w punkcie C. Udowodnić, że $PA^2-PB^2 = AC^2$.
Rozwiązanie na str. 5
M 113. Udowodnić, że dla żadnej liczby naturalnej n liczba 2^n+n^2 nie dzieli się przez 7.
Rozwiązanie na str. 6
M 114. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n}{n} < 4^n.$$

Rozwiązanie na str. 5

Redaguje dr hab. Andrzej SZYMACHA

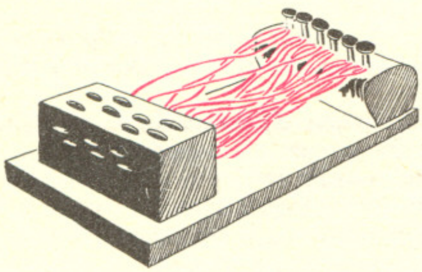

mutacja 48

F 38. Pewnej ekspedycji naukowej przebywającej na bezludnej wyspie wyczerpały się wszystkie źródła energii. Na wyspie tej nie wieją żadne wiatry, nie płyną strumienie, niebo pokryte jest grubą warstwą chmur, ciśnienie atmosfery jest stałe, a temperatura atmosfery i wody w otaczającym niezwykle spokojnym oceanie jest dniem i nocą stale jednakowa. Na wyspie odkryto źródło obojętnego chemicznie gazu sączącego się ze stałą wydajnością z pewnej groty. Wydobywający się gaz ma zarówno ciśnienie jak i temperaturę równą ciśnieniu i temperaturze atmosfery. Członkowie ekspedycji dysponują dwiema półprzepuszczalnymi błonami, z których jedna przepuszcza swobodnie cząsteczki gazu będąc jednocześnie całkowicie nieprzepuszczalną dla cząsteczek powietrza, druga błona na odwrót, przepuszcza cząsteczki powietrza, a nie przepuszcza cząsteczek owego gazu. Mając ponadto możliwości skonstruowania prostych urządzeń mechanicznych w rodzaju cylindrów z tłokiem, czy zaworów, członkowie ekspedycji postanowili zbudować silnik. Wykaż, że nie istnieje teoretyczne ograniczenie na moc idealnego silnika pracującego z wykorzystaniem tego gazu.
Rozwiązanie na str. 14

mała delta

Metoda kresek — czyli jak wykorzystać relacje do obliczeń

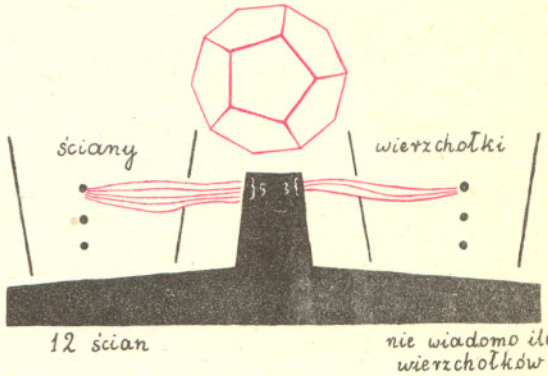
POPLĄTANE PRZEWODY

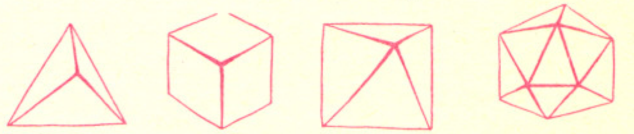


Wyobraźmy sobie fragment pewnego urządzenia o następującej konstrukcji. Na wieczku jednego pudełka umocowano 6 końcówek i do każdej z nich podłączono 3 przewody prowadzące do wnętrza drugiego, zakrytego pudełka. W pokrywie zakrytego pudełka są otwory. Zaglądając przez nie do środka można sprawdzić, że wewnątrz znajdują się końcówki. Nie da się ich wprawdzie policzyć, lecz widać, że do każdej z nich podłączono dwa przewody. Ile końcówek jest wewnątrz tego pudełka? Zadanie jest oczywiście dziecinnie łatwe, ale ilustruje pewien schemat powtarzający się w wielu ciekawych zadaniach kombinatorycznych. Rozwiążmy je zatem. Najpierw liczymy przewody. Jest ich 18, bo $6 \cdot 3 = 18$. Wobec tego w zakrytym pudełku musi być 9 końcówek, bo $18:2 = 9$.

WIELOŚCIANY PLATOŃSKIE

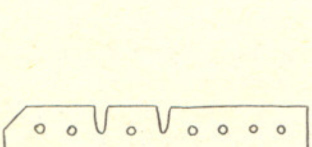
Dwunastościan foremny zbudowany jest w ten sposób. Wszystkie ściany (jest ich 12) to pięciokąty foremne, przy czym w każdym wierzchołku bryły stykają się 3 takie pięciokąty. Ile wierzchołków liczy ten wielościan? Zwykle liczymy tak. Dwanaście ścian po pięć wierzchołków to 60 wierzchołków. Ponieważ jednak każdy wierzchołek policzyliśmy trzykrotnie, wobec tego bryła liczy 20 wierzchołków (bo $60:3 = 20$). Ktoś pedantyczny mógłby zarzucić nam nieścisłość w wysławianiu się. Raz twierdzimy że wierzchołków jest 60, później okazuje się, że tylko 20. Nasuwa to podejrzenie, że całe rozumowanie było wątpliwe. Odwołajmy się wobec tego do rysunkowego schematu. Rysunek przypomina nasze poplątane przewody. Wyjaśnić należy w jaki sposób poprowadzone są kreski. Otóż każdą ścianę łączymy kreską z tymi wierzchołkami, do których ona przylega. Nie trzeba jednak wnikać w szczegóły. Wystarczy zauważyć, że z każdej ściany musi wychodzić 5 kresek, a z każdego wierzchołka 3 kreski. Wiedząc, że ścian jest 12, liczymy wierzchołki w ten sam sposób jak liczyliśmy końcówki w zakrytym pudełku.
A gdzie tutaj są wspomniane w tytule relacje? W tym przykładzie była mowa o relacji przylegania wierzchołka i ściany wielościanu. Graficzną ilustracją tej relacji są kreski.
W podobny sposób da się policzyć, ile wierzchołków liczą pozostałe wielościany platońskie. Krawędzie tych wielościanów i przekątne wielokątów wypukłych przeliczamy według identycznego schematu.
A oto zupełnie inny przykład.



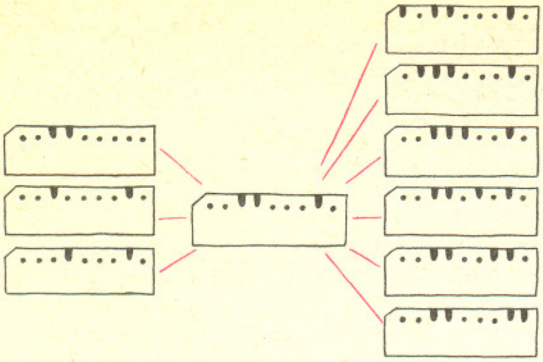


czworościan foremny | sześcian | ośmiościan foremny | dwudziestościan foremny

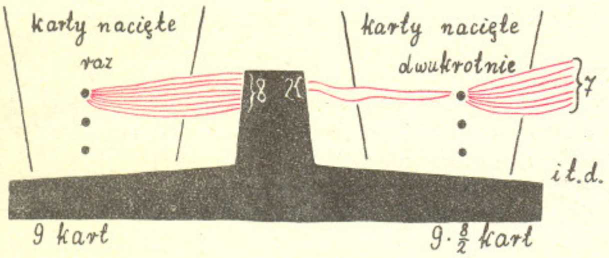
DZIURKOWANIE KART Z PERFOROWANYM BRZEGIEM ALBO PODZBIORY

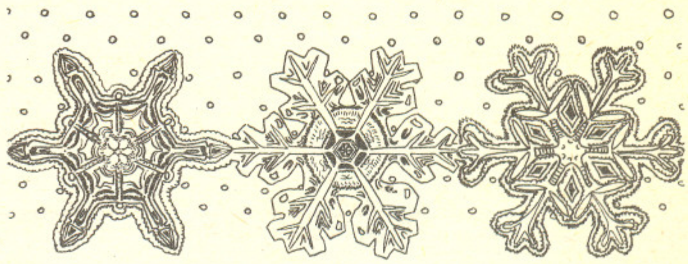


W pewnej kartotece każda karta ma 8 dziurek — a więc 9 miejsc do nacinania. Na ile sposobów można wyciąć dwa, trzy, cztery i pięć miejsc na karcie?
W zadaniu tym wykorzystamy pewną relację: dwie karty są ze sobą w naszej relacji (a więc połączymy je kreską), jeśli we wszystkich miejscach poza jednym są nacięte identycznie.



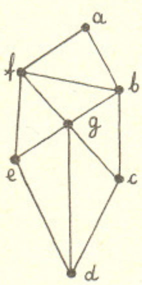
Karta nacięta trzykrotnie jest w tej relacji z dziewięcioma innymi kartami. Jak pokazuje rysunek, trzy z nich to karty nacięte dwukrotnie a pozostałe sześć to karty nacięte czterokrotnie.
Oczywiście jedno nacięcie wykonać można na 9 sposobów. Rozwiązać nasze zadanie metodą kresek jest już zupełnie łatwo.
A skąd w podtytule wzięły się podzbiory? Proste — naciąć kartę trzykrotnie to spośród dziewięciu miejsc wybrać trójelementowy podzbiór.
I jeszcze jeden przykład.

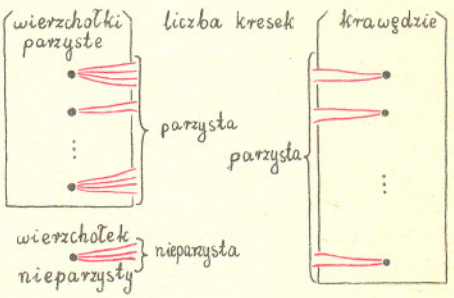




Figurę złożoną z wierzchołków i krawędzi, jak na rysunku, będziemy nazywać grafem.
Wierzchołek grafu nazwiemy parzystym, gdy styka się z parzystą liczbą krawędzi; nieparzystym, gdy styka się z nieparzystą ich liczbą. W naszym przykładzie parzyste są wierzchołki: a, b, f, natomiast nieparzyste c, d, e, g. Spróbujcie narysować graf, który miałby tylko jeden wierzchołek nieparzysty, a pozostałe parzyste.
Trudne, prawda? Pokażemy, że jest to zadanie niewykonalne.
Wszystko wyjaśnia metoda kresek. Relacja, jaką będziemy rozpatrywać, to oczywiście przyleganie krawędzi do wierzchołka. Kreski łączą więc wierzchołek z przylegającymi do niego krawędziami i na odwrót.

PARZYSTE I NIEPARZYSTE WIERZCHOŁKI GRAFU





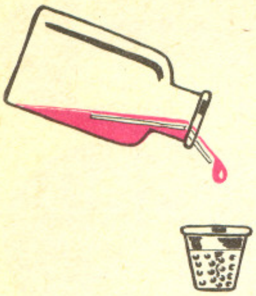
Zanalizujemy schemat interesującego nas grafu z jednym tylko wierzchołkiem nieparzystym. Z jednej strony, biorąc pod uwagę wierzchołki, kresek musi być nieparzysta ilość. Z drugiej strony, biorąc pod uwagę krawędzie (każda ma dwa końce, a więc przylega do dwóch wierzchołków) kresek jest ilość parzysta. Rysunek nasz ilustrowałby sytuację niemożliwą. Nie ma grafu, który ma tylko jeden wierzchołek nieparzysty.

Zadanie. Patrząc na rysunki wielościanów archimedesowych i wykorzystując podane informacje obliczcie, ile liczą one wierzchołków i krawędzi.

Czy umiecie pytać?

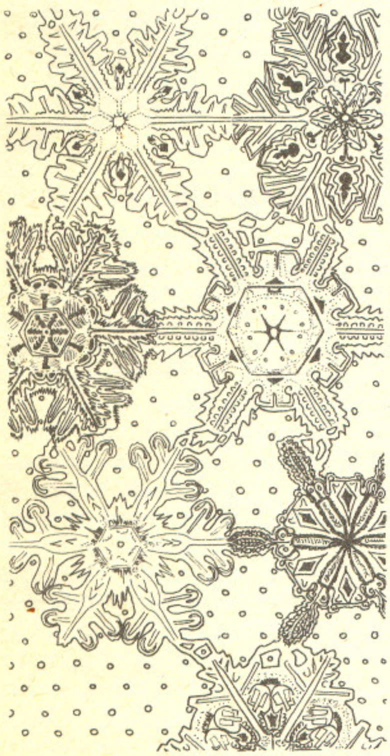
Przechodzimy obojętnie wokół dziwów. Nie zwracamy na nie uwagi. Są zbyt znane, codzienne. Czy umiemy je zauważyć? Czy potrafimy zadać pytanie dlaczego? jak? Czy potrafimy dojrzeć niezwykłość otaczających nas zjawisk? Spróbujmy. Proponujemy zabawę w stawianie pytań. Im prostszych, bardziej codziennych zjawisk będą dotyczyły, tym lepiej. Należy przełamać przyzwyczajenia i na wszystko patrzeć tak, jakby się po raz pierwszy zobaczyło świat. Pytania nadsyłajcie na kartkach pocztowych. W każdym numerze zamieścimy kilka naszym zdaniem najciekawszych wraz z nazwiskiem autora. Te najciekawsze z najciekawszych nagrodzimy książkami. Może zdarzą się pytania, na które nikt nie zna odpowiedzi, może będzie warto poświęcić poruszonemu tematowi osobny artykuł.
To co uważamy za najcenniejsze to umiejętność widzenia zjawisk i stawiania pytań — jest to przecież podstawa wszelkiej pracy naukowej. A oto kilka pytań jakie przychodzą do głowy, niektóre wybrane są z Waszych listów:
— dlaczego w herbacie mieszanej łyżeczką fusy gromadzą się w środku?
— dlaczego małe kropelki wody tworzące mgłę wiszą w powietrzu, a nie opadają na ziemię?
— jaką pajęczynę utkałby pająk w laboratorium kosmicznym w stanie nieważkości?
— niektóre lekarstwa wydziela się kroplami. Czy wielkość kropli zależy od rodzaju cieczy?
— co powoduje, że soki dopływają do najwyższych gałęzi drzewa? Gdzie jest pompa, która je tłoczy?

Bawimy się w badania



Spróbujmy odpowiedzieć na pytanie, czy wielkość kropli zależy od jej rodzaju? Odpowiedzi poszukamy na drodze doświadczalnej. W tym celu zgromadzimy urządzenia i materiały:
— co najmniej dwie różne ciecze, na przykład wodę i olej jadalny,
— naparstek lub podobnej wielkości naczyńko, może być po lekarstwie,
— nadłamaną zapałkę, która posłuży jako kroplomierz.

Wykonanie doświadczenia ilustruje rysunek. Ostrożnie kapiąc i licząc krople napełniamy naczyńko cieczą do określonego poziomu. Im więcej kropel zmieści się, tym mniejsze są krople. Liczymy krople potrzebne do zapełnienia w ten sam sposób wybranego naczynia każdą badaną cieczą. Porównując liczby kropel powinniśmy umieć odpowiedzieć na postawione pytanie. Ostrożnie jednak z wyciąganiem wniosków. Przeprowadzenie po jednym pomiarze dla każdej cieczy nie wystarcza:
— mogliśmy się pomylić w liczeniu,
— mogliśmy źle uchwycić chwilę, w której należy przerwać napełnianie naczynia,
— powierzchnia różnych cieczy wygląda inaczej, jednej jest wypukła, innej może być wklęsła, trudno określić czy naczynie jest już pełne,
— mogła ręka drgnąć i kilka kropel oderwało się mniejszych niż powinny,
— mogło zdarzyć się wiele rzeczy, które ostatecznie zmieniły ilość kropel w naczyniu.



Pomyłki w liczeniu można uniknąć. Drgnięcia ręki trudniej, wpływu zaś innych przypadkowych czynników jeszcze trudniej. Jeżeli nie możemy uniknąć ich wpływu, to skorzystajmy z tego, że są przypadkowe. Przypadkowe wpływy powinny się znosić w wielu powtórzonych doświadczeniach.
Nie da się w ten sposób usunąć błędów systematycznych wywołanych np. różnym kształtem powierzchni cieczy, ale błędy te nie będą duże, jeśli naczynie nie jest zbyt małe.
Powtórzmy więc doświadczenie z każdą cieczą kilka razy, na przykład pięć.
Oto przykładowe wyniki:

Nr doświadczenia	liczba kropel I cieczy	liczba kropel II cieczy
1	120	201
2	115	189
3	125	195
4	130	215
5	100	180

Z każdej serii pomiarów obliczamy średnią liczbę kropel potrzebną do wypełnienia naczynia.

$$N_1 = \frac{120+115+125+130+100}{5} = \frac{590}{5} = 118$$

$$N_2 = \frac{201+189+195+215+180}{5} = \frac{980}{5} = 196$$

Im więcej razy powtórzymy doświadczenia, tym bardziej oswobodzimy się od wpływu czynników przypadkowych. Całkowicie oswobodzić się od ich wpływu nie można. Porównanie wartości średnich pozwoli nam w większości przypadków odpowiedzieć na postawione pytanie. Wiemy już jak postępować w przypadku naszego doświadczenia. Możemy jednak rozszerzyć znacznie program badań. Oto garść dodatkowych pytań:
— czy rozmiary kropli zależą od grubości zakończenia drewienka, z którego kapią?
— czy rozmiary kropli zależą od temperatury cieczy? Sprawdźcie korzystając z oleju jadalnego ochłodzonego w lodówce i podgrzanego.
— czy dodatek mydła do wody zwiększa czy też zmniejsza rozmiary kropli?

Na zakończenie proponuję zbadanie wpływu czynników przypadkowych. Powtórzcie doświadczenie z jedną cieczą 50 razy. Można w tym celu wybrać naczynie bardzo małe (ale nie za małe, bo wprowadzimy duże błędy systematyczne), aby wkraplanie nie było zbyt nużące. Wykreślcie wyniki pomiarów na papierze kratkowanym tak jak na rysunku i zaznaczcie strzałką, w którym miejscu znajduje się wartość średnia. Czy wynik pozwala zrozumieć, dlaczego liczyliśmy w naszych doświadczeniach wartość średnią?

× — jeden pomiar

Małą „Deltę" opracowali: Tomasz Hofmokl i Przemysław Nowicki.

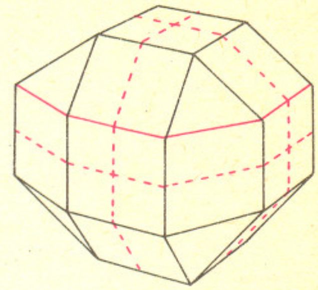
Ile jest wielościanów półregularnych, czyli czy Archimedes miał rację?

Wielościany półregularne znane są od ponad 2000 lat. Już Archimedes stwierdził, że oprócz dwóch serii (graniastosłupy i antygraniastosłupy) istnieje 13 takich wielościanów (patrz Delta 12/1975). Przez 2000 lat, a szczególnie po systematycznym zbadaniu tego zagadnienia przez Keplera, wierzono, że innych wielościanów półregularnych niż wymienione przez Archimedesa być nie może. Okazało się jednak, że w teorii wielościanów półregularnych był pewien defekt. Na początku lat pięćdziesiątych naszego stulecia radziecki matematyk Aszkinuze zauważył, że istnieje jeszcze jeden, czternasty wielościan półregularny. „Portret" tego wielościanu widzimy na rys. 2. Wielościan ten to chytrusek nie lada, bowiem liczby ścian poszczególnych rodzajów, krawędzi i wierzchołków ma dokładnie takie same jak wielościan półregularny pokazany na rys. 1 (wymieniony przez Archimedesa). A mimo to jest on inny!

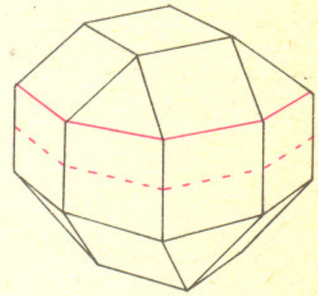
Czytelnik zechce zwrócić uwagę, że na wielościanie z rys. 1 istnieją trzy „łańcuchy" kwadratów spojonych przeciwległymi bokami. Łańcuchy te zaznaczono liniami przerywanymi. Natomiast na wielościanie z rys. 2 istnieje tylko jeden taki „łańcuch". Przy obracaniu wielościanu, jego przesuwaniu, a także przy odbijaniu w lustrze, liczba „łańcuchów" nie może ulec zmianie. Wynika stąd, że pokazane wielościany są różne w tym znaczeniu, że żaden z nich nie daje się dokładnie pokryć z drugim za pomocą przekształcenia izometrycznego.

Tak więc liczba ścian poszczególnych rodzajów, liczba krawędzi a także liczba i rodzaj wierzchołków nie charakteryzują jeszcze wielościanu w pełni. Wspomniany defekt teorii wielościanów półregularnych polegał właśnie na niedostrzeżeniu tego faktu.

Zauważmy, że wielościan z rys. 2 można otrzymać przez odcięcie górnej części wielościanu z rys. 1 (wzdłuż czerwonej linii ciągłej), obrócenie jej o 45° i ponowne połączenie z resztą. I jak tu po tym wszystkim nie wierzyć w feralność trzynastki? Ponieważ nasz chytrusek ukrywał się przez ponad 2000 lat, trudno się dziwić, że został opuszczony w spisie wielościanów zamieszczonym w Delcie. (*W. G.*)

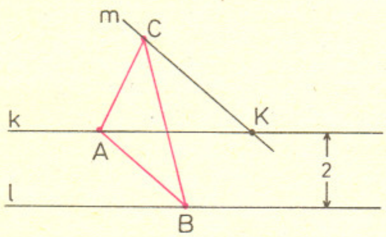


Rys. 1



Rys. 2

Czytelnicy proponują



Kolega *Jan ANTONIK* z Grzebieni, uczeń II klasy LO w Dąbrowie Białostockiej, podał twierdzenie:

Niech punkt A leży na prostej k, punkt B na prostej l równoległej do k, punkt C na prostej m równoległej do $\overline{AB}$. Oznaczmy przez K punkt przecięcia prostych k i m. Jeśli odległość k i l wynosi 2 [cm], to pole ΔABC jest równe AK [cm^2].

Polecamy sprawdzenie. Autor proponuje zastosować to twierdzenie do mierzenia pola trójkąta.

Dlaczego tak jest? — rozwiązanie

Mamy wykazać, że opisany w poprzednim numerze przyrząd kreśli prostą.

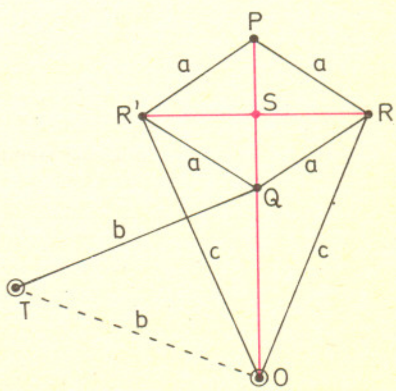
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku i na pewien czas pomińmy listewkę QT.

Zauważmy, że $ORPR'$ jest deltoidem, a $QRPR'$ rombem, co pozwala na stwierdzenie, że punkty O, P, Q leżą na jednej prostej prostopadłej do prostej RR', punkt S zaś jest środkiem odcinka $\overline{PQ}$.

Z uogólnionego twierdzenia Pitagorasa (w $\Delta\ OPR$) mamy

$$c^2 = a^2+OP^2-2\cdot OP\cdot PS =$$

$$= a^2+OP^2-2\cdot OP\cdot\frac{1}{2}(OP-OQ) = a^2+OP\cdot OQ$$



Widać więc, że iloczyn $OP\cdot OQ$ jest stały: niezależnie od położenia przyrządu wynosi c^2-a^2. Stąd wynika, że taki „zubożony" przyrząd pokazuje nam wzajemne położenie punktów inwersyjnych względem okręgu o środku O i promieniu $\sqrt{c^2-a^2}$: mianowicie Q i P są wzajemnie inwersyjne.

Powróćmy do całego przyrządu. Listewka QT gwarantuje nam, że punkt Q leży na okręgu (o środku T), który (wobec $TO = b = TQ$) przechodzi przez punkt O. Obrazem inwersyjnym takiego okręgu jest prosta (patrz „Tylko cyrklem", Delta 7/76) i po niej właśnie musi się poruszać przegub P.

XVIII MIĘDZYNARODOWA OLIMPIADA MATEMATYCZNA ODBYŁA SIĘ W AUSTRII (7-21 LIPCA 1976 R.)

Dwudniowe zawody odbyły się w Lienzu (Wschodni Tyrol) w dniach 12 i 13 lipca. W zawodach uczestniczyli uczniowie z 18 państw: Austrii, Bułgarii, Czechosłowacji, Finlandii, Francji, Grecji, Holandii, Jugosławii, Kuby, NRD, Polski, Rumunii, Stanów Zjednoczonych AP, Szwecji, Węgier, Wielkiej Brytanii, Wietnamu i ZSRR (z Kuby przyjechało trzech uczniów, z pozostałych państw po ośmiu). Ponadto na prawach obserwatorów uczestniczyło dwóch uczniów z RFN. Międzynarodowe jury przyznało 9 nagród I stopnia, 28 nagród II stopnia i 45 nagród III stopnia. Polacy zdobyli 6 nagród III stopnia. Otrzymali je: Jerzy Grzybowski (V LO w Krakowie), Andrzej Huczyński (III LO we Wrocławiu), Adam Parusiński (I LO w Gdańsku), Janusz Pawlikowski (I LO w Bydgoszczy), Jan Wehr (XIV LO w Warszawie).

W nieoficjalnej punktacji zespołowej Polacy zajęli IX miejsce za ZSRR, Wielką Brytanią, Stanami Zjednoczonymi, Bułgarią, Austrią, Węgrami i NRD. Oto zadania:

1. Pole powierzchni płaskiego czworokąta wypukłego równe jest 32 cm² a suma długości dwóch przeciwległych jego boków i jednej przekątnej równa jest 16 cm. Wyznaczyć wszystkie wartości, które może przyjmować długość drugiej przekątnej.

2. Niech $P_1(x) = x^2-2$ i $P_j(x) = P_1(P_{j-1}(x))$ dla $j = 2, 3, \ldots$ Udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n wszystkie pierwiastki równania $P_n(x) = x$ są rzeczywiste i parami różne.

3. Prostopadłościenne pudełko można całkowicie wypełnić sześcianami jednostkowymi. Jeżeli będziemy umieszczać w nim sześciany o objętości 2 i krawędziach równoległych do krawędzi pudełka, to maksymalna liczba takich sześcianów wypełni tylko 40% objętości pudełka. Wyznaczyć wewnętrzne wymiary wszystkich pudełek o tych własnościach. ($\sqrt[3]{2} = 1{,}2599\ldots$).

4. Znaleźć największą wartość iloczynu liczb naturalnych, których suma równa jest 1976. (Odpowiedź uzasadnić.)

5. Dany jest układ p równań z $q = 2p$ niewiadomymi

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1q}x_q = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1}x_1+a_{p2}x_2+\ldots+a_{pq}x_q = 0 \end{array}$$

gdzie $a_{ij} \in \{0, -1, +1\}$ dla $i = 1, 2, \ldots, p$; $j = 1, 2, \ldots, q$. Udowodnić, że istnieje rozwiązanie $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ tego układu spełniające następujące warunki:

— wszystkie x_j $(j = 1, 2, \ldots, q)$ są liczbami całkowitymi,

— co najmniej jedna z liczb x_j $(j = 1, 2, \ldots, q)$ jest różna od zera,

— dla każdego j $(j = 1, 2, \ldots, q)$ jest $|x_j| \leqslant q$.

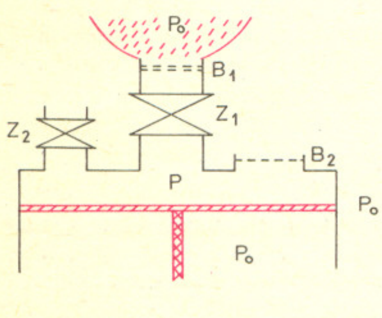
6. Ciąg liczbowy $u_0, u_1, u_2, \ldots$ jest określony następująco: $u_0 = 2$, $u_1 = \frac{5}{2}$,

$$u_{n+1} = u_n(u_{n-1}^2-2)-u_1 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Udowodnić, że zachodzi równość

$$[u_n] = 2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}} \quad (n = 1, 2, \ldots), \qquad ([x] \text{ jest największą liczbą całkowitą nie większą od } x).$$

Rozwiązanie zadania F 38



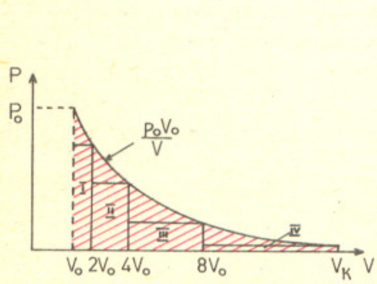
Schematyczny wygląd silnika może być np. taki jak na rysunku obok.

Pierwsza faza cyklu: zawór Z_1 otwarty, Z_2 zamknięty. Ciśnienie pod tłokiem na mocy prawa Daltona wynosi p_0+p_0. Odsuwając tłok od dna cylindra uzyskujemy pracę wykonywaną przez nadwyżkę ciśnienia pod tłokiem nad ciśnieniem atmosferycznym. W fazie tej pobieramy ilość gazu jaka wydziela się z groty w czasie przewidzianym na pełny cykl. Jeśli jest to objętość V_0, to praca tłoka w tej fazie wyniesie $p_0 V_0$. Ponieważ wyczerpaliśmy już ilość gazu przypadającą na cały cykl, więc musimy zamknąć zawór Z_1 i dalsze rozprężanie prowadzić przy zamkniętym zaworze Z_1. Wskutek tego ciśnienie cząstkowe gazu z groty będzie pod tłokiem spadało zgodnie z wzorem $p_0 \cdot V_0/V$. Dzięki błonie B_2 ciśnienie cząstkowe powietrza pod tłokiem jest w każdej chwili równe p_0 i równoważy ciśnienie nad tłokiem. Efektywną pracę wykonuje więc ciśnienie cząstkowe gazu z groty. Pytanie postawione w zadaniu równoważne jest zapytaniu, czy istnieje ograniczenie na pracę jaką możemy uzyskać rozprężając izotermicznie określoną porcję gazu. Żeby to zbadać, sporządźmy wykres funkcji $p_0 \cdot V_0/V$ w zależności od V.

Jasne jest, że jeśli w tej drugiej fazie rozprężymy gaz do objętości V_k, to wykonana w drugiej fazie praca równa jest polu powierzchni zakreskowanej na rysunku. Musimy dowieść, że przy dostatecznie dużym V_k (na co nie ma teoretycznych ograniczeń) otrzymana praca może być dowolnie duża.

Rozpatrzmy w tym celu zaznaczone na rysunku prostokąty odpowiadające odciętym $2V_0, 4V_0, 8V_0, \ldots, 2^nV_0$. Jest oczywiste, że pola tych prostokątów są równe i że pod krzywą można $p_0 \cdot V_0/V$,,zmieścić "dowolnie dużo takich prostokątów. Jeżeli $V_k = 2^nV_0$, to jest jasne, że praca L może być ograniczona przez następujące dwie liczby

$$\frac{p_0V_0}{2}n < L_{V_0V_k} < p_0V_0n$$



lub w dość grubym przybliżeniu $L_{V_0V_k} \approx p_0V_0 \log_2 \frac{V_k}{V}$. W praktyce $\log_2 \frac{V_k}{V_0}$ nie może być liczbą zbyt dużą, gdyż logarytm rośnie niezwykle wolno ze wzrostem V_k, teoretycznie jednak liczba ta nie jest ograniczona. Oczywiście po osiągnięciu żądanej objętości V_k otwieramy zawór Z_2 i sprowadzamy tłok do położenia początkowego bez wykonywania żadnej pracy.

Dowiedliśmy więc, że w określonym czasie trwania cyklu możemy uzyskać teoretycznie dowolnie wielką pracę. Moc silnika (idealnego) może być dowolnie duża mimo ograniczonej liczby gazu roboczego wydobywającego się z groty w jednostce czasu.

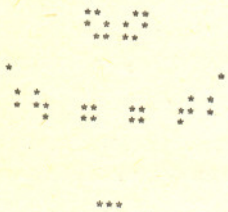
Praca ta wykonywana jest oczywiście kosztem ciepła otoczenia jakie jest pobierane przy izotermicznym rozprężaniu gazu. Wynik ten nie jest sprzeczny z II zasadą termodynamiki, gdyż pobieranie ciepła z otoczenia nie jest jedynym efektem pracy silnika. Odbywa się nieustanne mieszanie gazu wydobywającego się z groty z powietrzem atmosferycznym

Uwaga! W zadaniu rozważaliśmy silnik idealny. W praktyce moc silnika będzie ograniczona. Zastanówcie się, jakie mogą być tego powody (nie termodynamiczne) i jak duży jest ich wpływ.

O układzie SI

Dr inż. Romuald BIAŁOBRZESKI

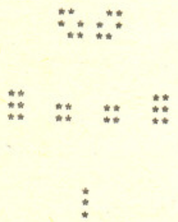
Jedną z podstawowych czynności poznawczych, których celem jest dostarczenie danych do ilościowego opisu badanych zjawisk fizycznych lub rzeczy, jest pomiar. Pomiar polega na przyporządkowaniu badanym cechom zjawisk lub przedmiotów pewnych liczb rzeczywistych jako ich miary. Najprościej można powiedzieć, że pomiar stanowi zespół czynności związanych z porównywaniem badanej wielkości fizycznej z wzorcem tej wielkości przyjętej umownie za jednostkę miary. Wynik pomiaru wyraża się więc iloczynem jednostki miary przez liczbę, określającą ile razy ta jednostka jest mniejsza (lub większa) od badanej wartości. Należy pamiętać, że dokładna znajomość zjawisk fizycznych jest ściśle związana z pojęciem miary. Najdawniejszymi jednostkami miar były jednostki długości. Za jednostki długości służyły pierwotnie części ciała ludzkiego. Dziś z niedowierzaniem czytamy XVI-wieczną definicję jednostki długości nazywanej stopą: *„stopa jest długością* [zapewne średnią] — *ustawionych jedną za drugą — lewych stóp, pierwszych 16 mężczyzn, opuszczających kościół w pewną niedzielę rano*".



mutacja 49

Jednostki miary utworzone dla różnych wielkości w sposób dowolny i nieuporządkowany utrudniały pomiary i porównania. Dość powiedzieć, iż w Europie w wieku XVIII obowiązywało około 100 różnych łokci, 50 różnych mil oraz około 120 różnych funtów. Aby uniknąć tych niedogodności starano się stworzyć jednolite układy jednostek miar. Układ jednostek miar jest zbiorem kilku wielkości fizycznych, których jednostki tworzą bazę układu (jednostki podstawowe). Za pomocą jednostek podstawowych można tworzyć dowolne pochodne jednostki miar innych wielkości fizycznych.

Najbardziej znane układy jednostek miar należą do tzw. systemu metrycznego, choć istnieją i niemetryczne układy jednostek miar stosowane głównie w krajach anglosaskich. System metryczny po raz pierwszy wprowadzono podczas Wielkiej Rewolucji Francuskiej ustawą z dnia 7.IV.1795 r., a w roku 1799 wprowadzono wzorce metra i kilograma. Były to wzorce prototypowe i, w zamierzeniu ich twórców, jeden miał odtwarzać długość 1/40 000 000 części ziemskiego koła południkowego, a drugi masę jednego decymetra sześciennego wody. Jednak w wyniku dalszych pomiarów okazało się, że przyjęte wzorce nie odtwarzają zamierzonych wielkości. Fakt ten oraz potrzeba powiązania wzorca danej wielkości z odtwarzalnym, w dowolnym miejscu i czasie zjawiskiem fizycznym, a nie tak jak dotychczas z pewnym materialnym wyrobem (prototypem), stymulowały dalsze badania. Powstało wówczas pytanie: czy na podstawie jakiegoś zjawiska fizycznego ustanowić nowy metr, czy też do istniejącego metra dopasować jakieś zjawisko fizyczne? Wybrano rozwiązanie drugie. Ta tendencja tworzenia wzorców fizycznych a nie prototypowych spowodowała, iż w chwili obecnej wszystkie wzorce jednostek miar, z wyjątkiem wzorca kilograma, są wzorcami opartymi na zależnościach wiążących zjawiska fizyczne. W trakcie badań powstawały w różnych ośrodkach naukowych różne układy jednostek miar. Układy te mimo należenia do systemu metrycznego, z powodu dowolnego wyboru baz układów, dawały dla tych samych wielkości fizycznych jednostki miar o różnych wymiarach i nazwach. Jest to zjawisko wysoce niepożądane, zwłaszcza obecnie, gdy szereg najrozmaitszych dziedzin wiedzy przenika się wzajemnie, bądź też kojarzy się często w jedną nową gałąź nauki. Narastała więc potrzeba opracowania takiego układu jednostek miar, który by umożliwiał uniknięcie kłopotów przy przechodzeniu z jednego układu jednostek miar do innego i który byłby obowiązujący we wszystkich dziedzinach nauki i techniki.



mutacja 50

Od szeregu już lat podejmowano prace nad stworzeniem takiego uniwersalnego układu jednostek miar. Układ ten jako Międzynarodowy Układ Jednostek Miar (Système International d'Unites), zwany również w skrócie Układem SI, został przyjęty w 1960 roku na XI Generalnej Konferencji Miar. Postanowienie to zostało przyjęte również przez wiele międzynarodowych organizacji, jak np. Międzynarodowa Organizacja Normalizacyjna (ISO), Rada Wzajemnej Pomocy Gospodarczej (RWPG), oraz przez wszystkie państwa uczestniczące w Generalnej Konferencji Miar.

W Minikonkursie („Delta 5/76) za wykrycie błędu w rozwiązaniu zadania M67 („Delta" 11/75) nagrody książkowe (A. Schincel — „Wacław Sierpiński") otrzymują:
- Jacek Chrobak z Bielska-Białej,
- Mirosław Gorbaczow z Gdyni,
- Andrzej Rychlewicz z Łodzi.

Międzynarodowy Układ Jednostek Miar (układ SI) opiera się na następujących założeniach:

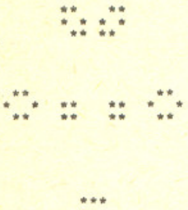
1. Ustala się 7 podstawowych jednostek miar: metr, kilogram, sekunda, amper, kelwin, mol i kandela; jednostki te podporządkowane są odpowiednio 7 wybranym podstawowym wielkościom fizycznym: długości, masie, czasowi, natężeniu prądu elektrycznego, temperaturze, liczności materii i światłości.

2. Ustala się 2 uzupełniające jednostki miar: radian i steradian; pierwszy dla pomiarów kąta płaskiego, drugi dla pomiarów kąta bryłowego.

3. Pochodne jednostki miar podporządkowane właściwym wielkościom pochodnym tworzy się w oparciu o odpowiednie prawa fizyczne formułujące zależności między wielkościami podstawowymi, uwzględniając zasadę spójności jednostek.

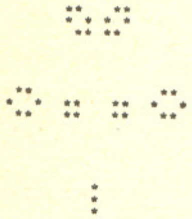
Termin „spójność jednostek" oznacza, że zależności między jednostkami układu wyrażają się wzorami, w których współczynniki liczbowe (przeliczeniowe) są zawsze równe jedności.

Analizując dobór jednostek podstawowych i uzupełniających można stwierdzić, że:
a) Trzy jednostki podstawowe: metr, kilogram i sekunda umożliwiają stworzenie jednostek pochodnych dla wszystkich wielkości mechanicznych.
b) Cztery pozostałe jednostki podstawowe: amper, kelwin, mol i kandela, dodawane pojedynczo lub łącznie do pierwszej grupy jednostek — umożliwiają utworzenie wszelkich jednostek pochodnych dla wielkości elektrycznych, magnetycznych, cieplnych, świetlnych itp.
c) Jednostki uzupełniające: radian i steradian nie wchodzą do grupy jednostek podstawowych; mają wymiar L^0, czyli równy 1 i nie zależą od wyboru jednostek podstawowych.



mutacja 51

Definicje podstawowych jednostek miar układu SI są (prócz definicji kilograma) definicjami „atomowymi", tzn. związanymi z pewnymi zjawiskami zachodzącymi w atomie. Historię opracowania takich definicji najlepiej ilustruje ewolucja definicji sekundy, która była pierwotnie określana jako 1/86 400 część średniej doby słonecznej. Jednak zjawiska astronomiczne cechuje pewna zmienność w czasie i z tego powodu od 1956 r. obowiązywała definicja następująca: sekunda jest 1/31 556 925,974 7 częścią roku zwrotnikowego 1900 stycznia 1 godzina 12 czasu efemeryd. Wyrażenie „czas efemeryd" oznacza w astronomii czas przyjęty za równomiernie biegnący, niezależnie od wszelkich zakłóceń.
Różnice między tymi definicjami i trudności z uwzględnianiem skali czasu oraz konieczność wymuszana przez współczesną technikę, dokładniejszego wyznaczania wartości sekundy spowodowały kolejną zmianę definicji. I tak proponowana w roku 1964 jako równoległa, a obowiązująca od roku 1967 jest definicja wykorzystująca związek czasu z częstotliwością oraz zjawiska zachodzące w atomie cezu 133. Definicja ta brzmi: sekunda jest to czas równy 9 192 631 770 okresom promieniowania odpowiadającego przejściu między dwoma nadsubtelnymi poziomami stanu podstawowego atomu ^{133}Cs (cezu 133).
Jednakże uściślenie definicji podstawowych jednostek miar nie wprowadziło większych zmian. Największe zmiany wprowadził układ SI w nazwach i zasadach tworzenia pochodnych jednostek miar. Zmiany te dotyczą głównie jednostek miar ciśnienia, siły, promieniowania jonizującego i energii cieplnej; zmiany te dotyczą również logarytmicznych jednostek miar stosowanych w elektronice i akustyce.



mutacja 52

Układ SI zlikwidował wszystkie dotychczas stosowane jednostki ciśnienia, a wprowadził jako obowiązującą jednostkę paskal. Podobna sytuacja istnieje w jednostkach siły. Obecnie obowiązuje niuton z jego wielokrotnymi i podwielokrotnymi. Energia cieplna zyskując dżula straciła kalorię, a wielkości elektryczne i akustyczne straciły nepera przechodząc na decybel. Wielkości promieniowania jonizującego, takie jak dawka pochłonięta i ekspozycyjna, będziemy teraz mierzyli w grejach i kulombach na kilogram, zamiast jak do tej pory w rentgenach i w radach lub w dżulach na kilogram czy ergach na gram. Nie wolno zapominać, że zmiany te spowodowały również zmiany jednostek miar pochodnych od zlikwidowanych. Na przykład jednostka mocy dawki pochłoniętej, rad na sekundę, jest zastąpiona jednostką centygrej na sekundę. Takie przykłady można wyliczać jeszcze dość długo, gdyż każda dziedzina techniki została objęta zmianami.
Z tego powodu przyjęcie, wprowadzenie i stosowanie spójnego układu jednostek miar nie jest sprawą ani prostą ani łatwą. We wszystkich państwach zajmują się tym Komitety Miar. U nas sprawą tą zajmuje się Polski Komitet Normalizacji i Miar, który wydaje odpowiednie zarządzenia dotyczące ustalenia definicji, nazw i oznaczeń jednostek miar oraz zasad wprowadzania i stosowania jednostek układu SI. Z zarządzeń tych wynikają pewne obowiązki ciążące na naukowcach i inżynierach wszystkich dziedzin nauki i techniki. W Polsce jesteśmy przed wielkimi przemianami spowodowanymi przyjęciem układu SI:
— od dnia 1 stycznia 1977 r. jednostki układu SI powinny być stosowane w normalizacji, szkolnictwie, w wydawnictwach i publicystyce,
— do dnia 31 grudnia 1979 r. powinien zostać zakończony proces wprowadzania w życie jednostek miar układu SI. Proces ten obejmuje takie działania jak: nowelizacja norm, katalogów i podręczników; przewzorcowanie na nowe jednostki lub wymianę przyrządów pomiarowych wyskalowanych w jednostkach stosowanych dotychczas; zmianę oznaczeń jednostek miar w dokumentacji technicznej, na opakowaniach i tabliczkach znamionowych urządzeń; podjęcie produkcji przyrządów pomiarowych wyskalowanych w nowych jednostkach miar i przestawienie procesów technologicznych tak, aby były stosowane w nich jednostki układu SI.

Zarządzenie Prezesa Polskiego Komitetu Normalizacji i Miar z dnia 5 stycznia 1976 r. w sprawie ustalenia definicji, nazw i oznaczeń jednostek miar (Monitor Polski Nr 4, poz. 19) oraz Zarządzenie Prezesa Polskiego Komitetu Normalizacji i Miar z dnia 25 maja 1976 r. w sprawie ustalenia ogólnego programu wprowadzenia jednostek miar Międzynarodowego Układu Jednostek SI do stosowania w gospodarce narodowej.

?

mutacja 53

Czy układ SI możemy uważać za doskonały i czy prace nad udoskonaleniem układu jednostek miar możemy uważać za zakończone? Chyba nie. Zwróćmy uwagę na stosunkowo nieprecyzyjną definicję ampera i prototypowy wzorzec kilograma. Układ jednostek SI spełni może zadanie podobnie jak to zrobił system metryczny, a nasze pokolenie być może zadowoli się nim. Jednak może się zdarzyć, że ktoś w przyszłości będzie się dziwił swoim przodkom żyjącym w XX wieku, że stosowali tak niewygodne i nieprecyzyjne układy jednostek miar jak układ SI.

?

mutacja 54

Wiemy o tym i mamy nadzieję, że wielu spośród Was przyczyni się do lepszego poznania zjawisk dotyczących materii i będzie dążyć na przykład do ustalenia nowego wzorca jednostki masy — kilograma. Rozwój nauki nie znosi przestojów. Musimy o tym pamiętać przystępując do pomiarów i nowych badań.

Wykaz zmian jednostek miar stosowanych w elektrotechnice i elektronice

Lp.	Wielkość	Dotychczas stosowana jednostka miary – Nazwa	Dotychczas stosowana jednostka miary – Oznaczenie	Nowa jednostka miary w układzie SI – Nazwa	Nowa jednostka miary w układzie SI – Oznaczenie	Relacja pomiędzy jednostką stosowaną dotychczas a jednostką układu SI
1.	Natężenie pola elektrycznego	kilowolt na milimetr	kV/mm	megawolt na metr	MV/m	1 kV/mm = 1 MV/m
		miliwolt na centymetr	mV/cm	wolt na metr	V/m	$1\ \mathrm{mV/cm} = 10^{-1}\ \mathrm{V/m}$
2.	Natężenie pola magnetycznego	ersted	Oe	amper na metr	A/m	$1\ \mathrm{Oe} = \frac{1}{4\pi} \cdot 10^3\ \mathrm{A/m}$
3.	Siła magnetomotoryczna	gilbert	Gb	amper	A	$1\ \mathrm{Gb} = \frac{1}{4\pi} \cdot 10\ \mathrm{A}$ $7{,}95775\ \mathrm{A} \cdot 10^{-1}\ \mathrm{A}$
4.	Indukcja magnetyczna	gaus	Gs	militesla	mT	$1\ \mathrm{Gs} = 10^{-1}\ \mathrm{mT}$
5.		weber na centymetr kwadratowy	$\mathrm{Wb/cm^2}$	kilotesla	kT	$1\ \mathrm{Wb/cm^2} = 10\ \mathrm{kT}$
6.	Strumień magnetyczny	makswel	Mx	nanoweber	nWb	1 Mx = 10 nWb
7.		woltogodzina	V·h	kiloweber	kWb	1 V·h = 3,6 kWb
8.	Opór elektryczny właściwy	omocentymetr	$\Omega \cdot \mathrm{cm}$	miliomometr	$\mathrm{m}\Omega \cdot \mathrm{m}$	$1\ \Omega \cdot \mathrm{cm} = 10\ \mathrm{m}\Omega \cdot \mathrm{m}$
		om razy milimetr kwadratowy na metr	$\Omega \cdot \mathrm{mm^2/m}$	mikroomometr	$\mu\Omega \cdot \mathrm{m}$	$1\ \Omega \cdot \mathrm{mm^2/m} = 1\ \mu\Omega \cdot \mathrm{m}$
9.	Przewodność elektryczna właściwa	simens na centymetr	S/cm	kilosimens na metr	kS/m	$1\ \mathrm{S/cm} = 10^{-1}\ \mathrm{kS/m}$
10.		metr na om i milimetr kwadratowy	$\mathrm{m/(\Omega \cdot mm^2)}$	megasimens na metr	MS/m	$1\ \mathrm{m/(\Omega \cdot mm^2)} = 1\ \mathrm{MS/m}$
11.	Energia, praca (czynna)	watosekunda	W·s	dżul	J	1 W·s = 1 J
12.	Poziom bezwzględny mocy elektrycznej	neper	Np	decybel	dB	1 Np = 8,685890 dB
13.	Luminancja	nit	nt	kandela na metr kwadratowy	$\mathrm{cd/m^2}$	$1\ \mathrm{nt} = 1\ \mathrm{cd/m^2}$
14.		stilb	sb	kilokandela na metr kwadratowy	$\mathrm{kcd/m^2}$	$1\ \mathrm{sb} = 1\ \mathrm{cd/m^2}$
15.		apostilb	brak	kandela na metr kwadratowy	$\mathrm{cd/m^2}$	$1\ \mathrm{apostilb} = \frac{1}{\pi}\ \mathrm{cd/m^2}$
16.		lambert	brak	kilokandela na metr kwadratowy	$\mathrm{kcd/m^2}$	$1\ \mathrm{lambert} = \frac{1}{\pi} \times$ $\times 10\ \mathrm{kcd/m^2}$
17.	Natężenie oświetlenia	fot	ph	kiloluks	klx	1 ph = 1,0 · 10 klx

Zasady wyrażania dziesiętnych wielokrotności i podwielokrotności jednostek miar

Dziesiętne wielokrotności i podwielokrotności jednostek miar można wyrażać przez dołączenie (odpowiednio) do nazwy lub oznaczeń jednostek miar przedrostków lub ich oznaczeń wyrażających mnożniki dziesiętne. Zestawienie tych przedrostków i oznaczeń podane jest obok.

Przedrostek	Oznaczenie	Mnożnik
eksa	E	10^{18} = 1 000 000 000 000 000 000
peta	P	10^{15} = 1 000 000 000 000 000
tera	T	10^{12} = 1 000 000 000 000
giga	G	10^{9} = 1 000 000 000
mega	M	10^{6} = 1 000 000
kilo	k	10^{3} = 1 000
hekto	h	10^{2} = 100
deka	da	10^{1} = 10
decy	d	10^{-1} = 0,1
centy	c	10^{-2} = 0,01
mili	m	10^{-3} = 0,001
mikro	μ	10^{-6} = 0,000 001
nano	n	10^{-9} = 0,000 000 001
piko	p	10^{-12} = 0,000 000 000 001
femto	f	10^{-15} = 0,000 000 000 000 001
atto	a	10^{-18} = 0,000 000 000 000 000 001

Jedynym wyjątkiem jest tworzenie dziesiętnych wielokrotności i podwielokrotności kilograma, które wyraża się przez dołączenie przedrostków (oznaczeń) do słowa gram (oznaczenie — g).