SPIS TREŚCI

W następnym numerze:
Tabele SI

„Delta"
matematyczno-fizyczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i Polskiego Towarzystwa Fizycznego wydawany przy poparciu Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Adres Redakcji
ul. Hoża 69 pok. 151,
00-681 Warszawa

Zakład Narodowy im. Ossolińskich — Wydawnictwo Wrocław, Oddział w Warszawie
Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark. wyd.; 2,50 ark. druk.; papier offsetowy III kl. 80 g. 61 × 86
Wydrukowano w Drukarni im. Rewolucji Październikowej Warszawa, ul. Mińska 65.
Nr zam. 1397/76 J-113

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60,— cena prenumeraty półrocznej zł 30,—

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch" oraz urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach:
— do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i cały rok następny
— do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego.
Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienie w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch".
Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW oraz prenumeratorzy indywidualni, zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.
Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch", Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTĘ":

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.
Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.
Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, konto PKO nr 1-6-100312

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona" Krakowskie Przedmieście 7 00-068 Warszawa, Poland or with
— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland.
— Earlscourt Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain.
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Finze, Italia.

Cena 1 egzemplarza zł 5.— nr indeksu 35723/35550

NOWE
odkrycia, twierdzenia, konstrukcje, technologie
pozwalają lepiej
poznać świat
i wykorzystać jego prawa
DLA DOBRA LUDZI

ALE
istnieją dwa
zasadniczo różne
sposoby przekazania swoich osiągnięć
ogółowi

PIERWSZY
właściwy dla naszego stulecia
TO PATENT
— odkrywca, konstruktor, technolog
instytucjonalnie
OGRANICZA
swobodę wykorzystania
swojej pracy
przez innych

DRUGI
ciągle jeszcze istniejący
TO ROZPOWSZECHNIENIE
swoich rezultatów
wśród wszystkich
którym mogłyby się przydać
a zyski czerpie twórca
na równi z całym społeczeństwem
i ma nadzieję
że szeroka znajomość jego osiągnięć
pozwoli innym dorzucić
do wspólnego dorobku
WIĘCEJ

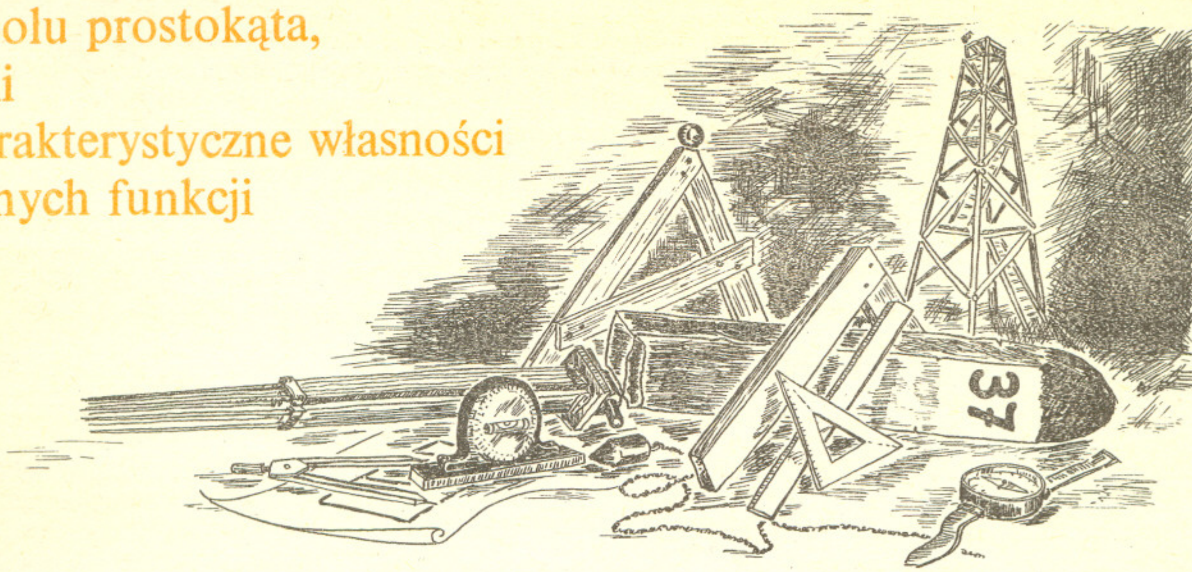
warto się chyba zastanowić
na który z tych dwóch sposobów
pomnażać będziemy
dorobek ludzkości

MATEMATYCY I FIZYCY
w przeważającej większości
WYBRALI DRUGĄ DROGĘ

i Wam
wybrania tej właśnie drogi
życzy

DELTA

O polu prostokąta, czyli charakterystyczne własności różnych funkcji



Prof. dr Marek KUCZMA

Pole prostokąta o bokach a i b wyraża się wzorem: $P = a \cdot b$. Dlaczego? Czy wzór ten został nam narzucony przez autorów podręczników i zależy wyłącznie od ich wyboru? Czy też może jest on koniecznością i nie ma innej możliwości; innymi słowy, może można go udowodnić?

Aby móc na te pytania odpowiedzieć, musimy wpierw dobrze zdać sobie sprawę z tego, czym właściwie jest pole prostokąta. Możemy powiedzieć, że jest to miara wielkości prostokąta. Zauważmy jednak, że zdanie to nie jest bynajmniej definicją, gdyż zastępuje tylko jedno niesprecyzowane pojęcie (pole) przez inne (miara wielkości). Niemniej pozwala ono odwołać się do intuicji geometrycznej. Jakież zatem własności powinna mieć taka miara wielkości prostokąta? Intuicja geometryczna sugeruje nam, że powinna ona spełniać następujące trzy warunki:

A. Każdy prostokąt ma jednoznacznie określone pole, które wyraża się liczbą rzeczywistą nieujemną.

B. Przystające prostokąty mają równe pola.

C. Jeżeli prostokąt podzielimy na dwie części odcinkiem równoległym do któregokolwiek z boków, to suma pól powstałych w ten sposób dwóch prostokątów jest równa polu wyjściowego prostokąta.

Zanim posuniemy się dalej w naszych rozważaniach, trzeba jasno stwierdzić, że powyższe postulaty, aczkolwiek dyktowane intuicją geometryczną, nie są bynajmniej konieczne i w znacznym stopniu przyjęcie ich zależy od naszej woli.

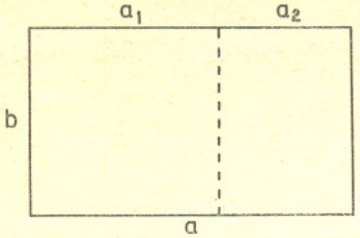
Zgadzamy się, że miara powinna być liczbą nieujemną, ale są przecież wielkości (np. temperatura, czas), których miarę wyrażamy w liczbach względnych.

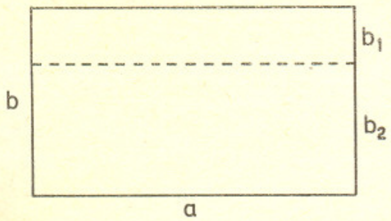
Dwa przystające prostokątne poletka gruntu mogą mieć różną cenę (a cenę wszak też możemy uważać za pewną miarę) w zależności od położenia, gleby itp.

Wreszcie np. dwie pięciodekowe paczki kawy kosztują więcej niż jedna paczka dziesięciodekowa. Tak więc w pewnych okolicznościach miara nie musi spełniać żadnego ze sformułowanych powyżej postulatów **A**, **B**, **C**. W przypadku pola prostokąta wydają się nam one rozsądne i zgodne z naszą intuicją, zatem jesteśmy gotowi przyjąć je bez zastrzeżeń. Zależy to jednakże od naszej woli, od naszego wyboru.

Zgódźmy się zatem, że przyjmujemy postulaty **A**, **B**, **C** i postarajmy się teraz przetłumaczyć je na język matematyczny. Ponieważ prostokąty o bokach odpowiednio równych są przystające, więc z postulatów **A** i **B** wynika, że pole prostokąta zależy wyłącznie od jego boków (czy też, dokładniej, od długości jego boków). Ściślej mówiąc, pole to jest funkcją: $P = P(a, b)$, określoną w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych i przyjmującą wartości w zbiorze $\langle 0, +\infty)$:

(1) $$P: \langle 0, +\infty) \times \langle 0, +\infty) \to \langle 0, +\infty).$$





August Louis Cauchy (1789—1857), matematyk francuski. Twórca współczesnego, ścisłego wykładu analizy matematycznej. Zajmował się wszystkimi niemal ówcześnie rozwijanymi działami matematyki, szczególnie zaś analizą matematyczną, teorią funkcji zespolonych i równaniami różniczkowymi, gdzie uzyskał szereg bardzo ważnych rezultatów. (Ciekawostka: pierwszy podał poprawny dowód wzoru Taylora). Zajmował się również mechaniką, astronomią i optyką.

Najistotniejsze informacje zawiera jednak postulat C. Dokonując opisanych podziałów (patrz rysunek) widzimy, że funkcja P musi spełniać następujące dwa związki:

$$P(a_1+a_2, b) = P(a_1, b)+P(a_2, b), \tag{2}$$

$$P(a, b_1+b_2) = P(a, b_1)+P(a, b_2). \tag{3}$$

Związki (2) i (3) muszą być prawdziwe dla wszelkich nieujemnych a, b, a_1, a_2, b_1, b_2; są zatem tożsamościami. Nasze zadanie można więc sformułować następująco: znaleźć funkcję (1), dla której związki (2) i (3) są spełnione tożsamościowo względem wszystkich występujących tam zmiennych.

Tego typu zadania, w których problem polega na wyznaczeniu niewiadomej funkcji na podstawie zadanej tożsamości, którą funkcja ta ma spełniać, noszą nazwę *równań funkcyjnych.*

Związki (2) i (3) są właśnie przykładami równań funkcyjnych. Zostawmy na chwilę problem wzoru na pole prostokąta i zajmijmy się równaniami funkcyjnymi. Jednym z najważniejszych równań funkcyjnych jest *równanie Cauchy'ego*

$$f(x+y) = f(x)+f(y). \tag{4}$$

Postarajmy się wyznaczyć funkcję $f\colon \langle 0, +\infty) \to \langle 0, +\infty)$ (tj. funkcję o wartościach nieujemnych, określoną dla nieujemnych wartości zmiennej niezależnej) spełniającą związek (4) dla wszystkich nieujemnych x, y. W szczególności (4) ma zachodzić dla $x = y = 0$.

Zastępując w (4) x i y przez zero otrzymamy $f(0) = 2f(0)$, skąd wynika, że

$$f(0) = 0. \tag{5}$$

Przez indukcję łatwo udowodnić, że

$$f(nx) = nf(x) \tag{6}$$

dla wszelkich x nieujemnych i wszelkich n całkowitych nieujemnych. Istotnie, dla $n = 0$ prawdziwość związku (6) wynika z (5). Zakładając, że zachodzi dla pewnego całkowitego $n = k \geqslant 0$ i dla wszelkich $x \geqslant 0$, mamy dla $n = k+1$ i dowolnego $x \geqslant 0$:

$$f((k+1)x) = f(x+kx) = f(x)+f(kx) = f(x)+kf(x) = (k+1)f(x),$$

gdzie po drodze wykorzystaliśmy własność (4) dla $y = kx$. Tak więc związek (6) został udowodniony.

Pokażemy z kolei, że związek (6) pozostaje również słuszny dla n wymiernych nieujemnych. Weźmy dowolne liczby całkowite $p \geqslant 0$, $q > 0$ oraz dowolną liczbę rzeczywistą $x \geqslant 0$. Mamy na podstawie (6):

$$pf(x) = f(px) = f\left(q\frac{p}{q}x\right) = qf\left(\frac{p}{q}x\right), \quad \text{skąd} \quad f\left(\frac{p}{q}x\right) = \frac{p}{q}f(x).$$

Innymi słowy, funkcja f spełnia związek

$$f(rx) = rf(x) \tag{7}$$

dla wszelkich nieujemnych x rzeczywistych i r wymiernych.

Kładąc w (7) w szczególności $x = 1$ i oznaczając $f(1) = c$, otrzymujemy

$$f(r) = cr \tag{8}$$

dla wszelkich nieujemnych r wymiernych.

Udowodnimy teraz, że związek (8) zachodzi nie tylko dla r wymiernych, ale dla dowolnych r rzeczywistych nieujemnych. W tym celu utwórzmy nową funkcję

$$g(x) = f(x)-cx, \tag{9}$$

gdzie, jak wyżej, $c = f(1)$.
Uwzględniając fakt, że funkcja f spełnia równanie (4) w szczególności dla $y = 1$, otrzymamy

$$g(x+1) = f(x+1)-c(x+1) = f(x)+f(1)-cx-c = f(x)-cx = g(x) \quad \text{gdyż } f(1) = c.$$

Oznacza to, że funkcja g jest okresowa, o okresie 1: $g(x+1) = g(x)$.

Ponieważ wartości funkcji f są nieujemne, a wartość wyrażenia cx dla $x \in \langle 0, 1 \rangle$ nie przekracza c, więc z (9) widzimy, że funkcja g spełnia warunek

$$g(x) \geqslant -c \quad \text{dla} \quad x \in \langle 0, 1 \rangle. \tag{10}$$

Z okresowości zaś wynika, że nierówność (10) jest słuszna dla wszystkich $x \geqslant 0$. Weźmy teraz dowolne $x \in \langle 0, 1 \rangle$. Na podstawie wzoru (9) oraz równania (4), gdzie przyjmiemy $y = 1-x$, mamy

$$g(x)+g(1-x) = f(x)-cx+f(1-x)-c(1-x) = f(1)-c = 0, \text{ tj.}$$

$$g(x)+g(1-x) = 0. \tag{11}$$

Chcemy pokazać, że funkcja g jest identycznie równa zeru. Gdyby w jakimś punkcie $x \in \langle 0, 1 \rangle$ wartość funkcji g była różna od zera, to jak wynika ze związku (11) dokładnie jedna z wartości $g(x)$ i $g(1-x)$ byłaby ujemna. Niech x_0 będzie takim punktem przedziału $\langle 0, 1 \rangle$, że $g(x_0) < 0$. Na podstawie (6) mamy dla dowolnych n naturalnych

$$g(nx_0) = f(nx_0)-cnx_0 = nf(x_0)-ncx_0 = n[f(x_0)-cx_0] = ng(x_0).$$

Zatem dla dostatecznie dużego n naturalnego będziemy mieli $g(nx_0) < -c$, co jest sprzeczne z (10). Funkcja g musi więc być tożsamościowo równa zeru, w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$, a wobec okresowości musi być ona tożsamościowo równa zeru w całym przedziale $\langle 0, +\infty \rangle$. Oznacza to (por. (9)), że

$$f(x) = cx \text{ dla wszystkich } x \in \langle 0, \infty). \tag{12}$$

Tym samym wyznaczyliśmy funkcję f, a więc rozwiązaliśmy równanie (4).

Możemy obecnie rozwiązać równania (2) i (3). Ustalając na chwilę w (2) zmienną b i pisząc $f(x) = P(x, b)$ widzimy, że funkcja f spełnia równanie (4). Musi być zatem postaci (12), gdzie współczynnik c może jednak zależeć od ustalonej chwilowo wartości zmiennej b:

$$P(a, b) = c(b)a. \tag{13}$$

Jeżeli teraz podstawimy wzór (13) do równania (3) i przyjmiemy, że $a = 1$, to otrzymamy $c(b_1+b_2) = c(b_1)+c(b_2)$, co oznacza, że funkcja c również spełnia równanie (4). (Nie jest istotne czy zmienne niezależne oznaczymy przez x, y, czy przez b_1, b_2). Musi być zatem $c(b) = cb$, gdzie współczynnik c jest już teraz stały. Podstawiając znalezioną postać funkcji c do wzoru (13) otrzymamy

$$P(a, b) = cab. \tag{14}$$

Co robi we wzorze (14) współczynnik c? Jest on związany z jednostką pomiaru pola. Jeśli umówimy się, że kwadrat o boku 1 ma pole jednostkowe, to wówczas $c = 1$. Jeśli jednak np. boki prostokąta mierzyć będziemy w metrach, pole zaś w centymetrach kwadratowych, to $c = 10\,000$. Tak więc nasze rozumowanie dało nam na pole prostokąta wzór (14), ogólniejszy, niż klasyczny wzór $P = ab$, bo uwzględniający jednostki pomiaru.

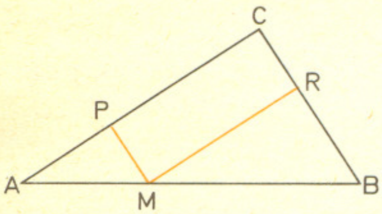
Zarazem otrzymaliśmy odpowiedź na pytania postawione na początku artykułu. O ile przyjmiemy postulaty **A**, **B**, **C**, to wzór (14) jest jedynym możliwym wzorem na pole prostokąta. Przyjęcie tych postulatów, aczkolwiek dobrze umotywowane intuicją geometryczną, zależy jednak od naszej woli.

Wróćmy teraz znów do równania (4), ale załóżmy tym razem, że funkcja niewiadoma f jest typu $f\colon (-\infty, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$. Możemy wówczas położyć w (4) $y = -x$ i biorąc pod uwagę związek (5) otrzymamy

$$f(-x) = -f(x), \tag{15}$$

co oznacza, że f jest funkcją nieparzystą. Ponieważ przy wyprowadzaniu związku (7) nie korzystaliśmy z nieujemności ani x, ani f, więc związek ten jest słuszny i w obecnym przypadku, a z (15) wynika, że (7) zachodzi dla wszystkich x rzeczywistych i r wymiernych. Dalszego rozumowania, prowadzącego do wzoru (12), nie da się jednak powtórzyć, gdyż korzystało ono w bardzo istotny sposób z założenia o nieujemności funkcji f. Jeżeli założymy dodatkowo, że f jest funkcją ciągłą lub monotoniczną, to ze wzoru (8) (ważnego teraz dla dowolnych wymiernych r) wyniknie wzór (12) (ważny dla dowolnych rzeczywistych x). Jeśli jednak nie założymy o funkcji nic więcej ponadto, że spełnia ona równanie (4), to czy może mieć ona inną postać niż (12)?

Rozwiązanie zadania M 111.
Niech P i Q będą odpowiednio rzutami punktu M na boki $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$.



Mamy

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MP}{BC} \text{ i } \frac{BM}{AB} = \frac{MQ}{AC},$$

skąd

$$AM^2 \cdot BC^2 = MP^2 \cdot AB^2$$
$$\text{i } BM^2 \cdot AC^2 = MQ^2 \cdot AB^2.$$

Dodając stronami te równości otrzymujemy $AM^2 \cdot BC^2 + BM^2 \cdot AC^2 = (MP^2+MQ^2) \cdot AB^2$, a ponieważ $MP^2+MQ^2 = PQ^2 = CM^2$, więc otrzymujemy stąd żądaną równość.

Georg Hamel (1877—1954), działał w Berlinie. Autor ważnych prac z mechaniki teoretycznej i hydrodynamiki. Wniósł również wkład w teorię równań różniczkowych zwyczajnych i teorię funkcji.

Pytanie to nurtowało matematyków przez wiele lat, a odpowiedź okazała się zupełnie nieoczekiwana: zależy ona od tego, jaką matematykę przyjmiemy. Gdyż matematyka jest systemem dedukcyjnym i zależy od przyjętego układu aksjomatów. Tak, jak możemy mieć różne geometrie (geometria euklidesowa i różne geometrie nieeuklidesowe), tak też możemy mieć różne matematyki. Jeżeli do układu aksjomatów, na których oprzemy naszą matematykę, włączymy tzw. pewnik wyboru, to — jak pokazał w 1905 roku matematyk niemiecki G. Hamel — równanie (4) ma również rozwiązania nie wyrażające się wzorem (12). Istnieją jednak matematyki, w których funkcje (12) są jedynymi rozwiązaniami równania (4).

Rozwiązania równania (4), różne od funkcji (12), są bardzo nieregularne i mają bardzo osobliwe własności. Nie są one ograniczone ani z góry, ani z dołu na żadnym przedziale, ich wykresy są gęste na płaszczyźnie i nie dadzą się one zapisać efektywnym wzorem. W dalszym ciągu nie będziemy się nimi zajmowali.

Jak widzieliśmy, w klasie funkcji ciągłych jedynymi funkcjami, które mają własność (4), są funkcje liniowe jednorodne (12); są one przez tę własność (tzw. addytywność) jednoznacznie scharakteryzowane. Każda własność wyrażona przez równanie funkcyjne charakteryzuje pewne funkcje (mianowicie — rozwiązania tego równania).

Np. funkcje logarytmiczne,

$$L(x) = \log_a x, \quad \text{spełniają ważną zależność}$$

$$L(xy) = L(x)+L(y). \tag{16}$$

Inaczej mówiąc, zamieniają one mnożenie na dodawanie, co ma ogromne znaczenie praktyczne. Czy istnieją jeszcze inne funkcje o tej własności?

Związek (16) można traktować jako równanie funkcyjne na funkcję $L:(0, +\infty) \to \to (-\infty, +\infty)$. Dokonajmy zmiany zmiennych kładąc $f(x) = L(e^x)$. Wówczas $f(x+y) = L(e^{x+y}) = L(e^x e^y) = L(e^x)+L(e^y) = f(x)+f(y)$, tj. funkcja $f:(-\infty, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$ spełnia równanie Cauchy'ego (4). Jeżeli funkcja L jest ciągła lub monotoniczna, to funkcja f również jest ciągła lub monotoniczna i, jak widzieliśmy, musi być postaci $f(x) = cx$. Wracając do starych zmiennych, otrzymamy stąd $L(x) = \log_a x$, gdzie $a = e^{1/c}$. Tak więc funkcje logarytmiczne są jedynymi funkcjami o własności (16), jeśli ograniczymy się do klasy funkcji ciągłych lub klasy funkcji monotonicznych. Jeżeli jednak dopuścimy funkcje analogiczne do hamelowskich rozwiązań równania Cauchy'ego, to w matematyce opartej na pewniku wyboru istnieją jeszcze inne funkcje spełniające związek (16), ale ze względu na swoje osobliwe własności nie mają one znaczenia praktycznego.

Podobnie przedstawia się sprawa z funkcją wykładniczą

$$A(x) = a^x.$$

Wzór $a^{x+y} = a^x a^y$, któremu odpowiada równanie

$$A(x+y) = A(x)A(y), \tag{17}$$

okazuje się charakterystyczną własnością tych funkcji. Wzór (17) uogólnia znaną własność potęg o wykładnikach naturalnych. Jeśli chcemy zdefiniować potęgę dla dowolnych wykładników rzeczywistych tak, aby zachowana była własność (17) i aby wartość potęgi zmieniała się monotonicznie ze zmianą wykładnika, możemy to zrobić w jeden tylko sposób. (Sprawdzenie tego pozostawiam Czytelnikowi).

Funkcje trygonometryczne

$$S(x) = \sin cx \text{ oraz } C(x) = \cos cx$$

(gdzie c jest dowolnie ustaloną stałą) spełniają związki

$$S(x+y) = S(x)C(y)+C(x)S(y), \tag{18}$$

$$C(x+y) = C(x)C(y)-S(x)S(y), \tag{19}$$

$$S(x-y) = S(x)C(y)-C(x)S(y), \tag{20}$$

$$C(x-y) = C(x)C(y)+S(x)S(y). \tag{21}$$

Żadne z powyższych równań nie charakteryzuje funkcji S i C w klasie funkcji ciągłych. Najbliższe tego jest równanie (21); poza funkcjami trygonometrycznymi jedynymi funkcjami ciągłymi, które spełniają to równanie, są funkcje stałe $C(x) \equiv c$ i $S(x) \equiv \pm\sqrt{c(1-c)}$. Tak więc równanie (21) charakteryzuje funkcje $S(x) = \sin cx$ i $C(x) = \cos cx$ w klasie funkcji ciągłych i niestałych. (Zwróćmy tu uwagę na interesujący fakt, że *jedno* równanie pozwala wyznaczyć *dwie* funkcje niewiadome!)

Rozwiązanie zadania M 110. Zauważmy, że dla każdej liczby naturalnej k mamy

$$\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4k^2+4k+1} < \frac{1}{4k(k+1)} = \frac{1}{4k} - \frac{1}{4(k+1)}.$$

Wynika stąd, że

$$\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{4(n-1)}-\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n}-\frac{1}{4(n+1)} = \frac{1}{4}-\frac{1}{4(n+1)} < \frac{1}{4}.$$

Żadne z pozostałych równań — (18), (19), (20) nie ma tej własności. Np. rozwiązaniem równania (20) jest też para funkcji

$$S(x) = \frac{1}{2}[e^x - e^{-x}], \qquad C(x) = \frac{1}{2}[e^x + e^{-x}],$$

(tzw. *sinus hiperboliczny* i *cosinus hiperboliczny*), jak również para funkcji liniowych

$$S(x) = qx, \qquad C(x) = 1 + px,$$

gdzie p i q są zupełnie dowolnymi stałymi.
Nawet dwa równania (18) i (19) razem nie charakteryzują funkcji trygonometrycznych. Ich rozwiązanie w klasie funkcji ciągłych ma postać

$$S(x) = e^{ax}\sin cx, \qquad C(x) = e^{ax}\cos cx,$$

gdzie stałe a i c mogą być dowolne. Funkcje trygonometryczne otrzymamy, przyjmując wartość parametru a jako zero.

Oczywiście istnieje dużo innych równań funkcyjnych, postacią i własnościami nieraz bardzo różniących się od podanych tutaj przykładów. Niektóre typy równań funkcyjnych, jak np. równania różniczkowe czy całkowe, wyodrębniły się dziś w osobne dyscypliny matematyczne. Obecnie pod nazwą „*równania funkcyjne*" rozumie się takie równania funkcyjne, w których nie występują pochodne ani całki. Nawet po tym ograniczeniu, bogactwo i rozmaitość różnych rodzajów i typów równań funkcyjnych są ogromne. Jeśli dodamy ponadto, że równania funkcyjne pojawiają się w niemal wszystkich dziedzinach matematyki, stanie się jasne, że stanowią one fascynujący przedmiot badań naukowych. Wśród pionierów tych badań znajdują się również najwybitniejsi matematycy polscy, jak Wacław Sierpiński czy Stefan Banach. A dzisiaj w badaniach nad równaniami funkcyjnymi matematycy polscy odgrywają czołową rolę na świecie.

Zadania

Redaguje mgr Andrzej MĄKOWSKI

M 109. Na płaszczyźnie dany jest zbiór n punktów ($n \geq 2$), przy czym odległość dowolnych dwóch punktów tego zbioru jest nie większa od 1. Udowodnić, że zbiór ten jest zawarty w pewnym kwadracie o boku długości 1.
Rozwiązanie na str. 10

M 110. Udowodnić, że jeżeli n jest liczbą naturalną, to

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}.$$

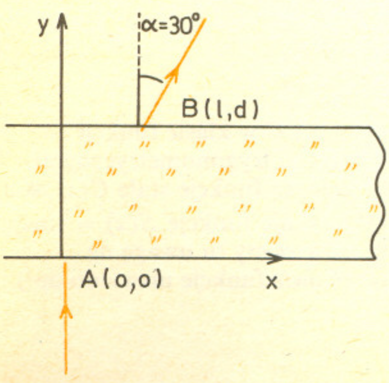
Rozwiązanie na str. 5

M 111. Udowodnić, że jeżeli M jest punktem wewnętrznym przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC, to

$$AM^2 \cdot BC^2 + BM^2 \cdot AC^2 = CM^2 \cdot AB^2.$$

Rozwiązanie na str. 4

Redaguje dr hab. Andrzej SZYMACHA

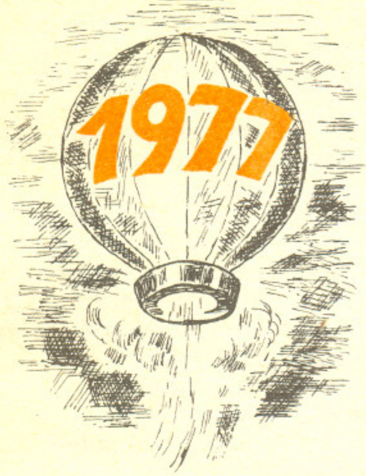


F37. Na płytkę płaskorównoległą, której współczynnik załamania n zmienia się według wzoru

$$n(x) = \frac{n_0}{1 - \frac{x}{R}} = \frac{1{,}2}{1 - \frac{x}{13\ [\mathrm{cm}]}}$$

pada w punkcie A(0, 0), prostopadle do płytki, promień światła. Promień opuszcza płytkę w punkcie B(l, d) pod kątem $\alpha = 30°$ (patrz rysunek). Wyznaczyć grubość płytki d oraz odległość l punktu B od osi y. Po jakim torze porusza się promień wewnątrz płytki?
Rozwiązanie na str. 11
(zadanie z VII Międzynarodowej Olimpiady Fizycznej, autor dr hab. A. Szymacha)

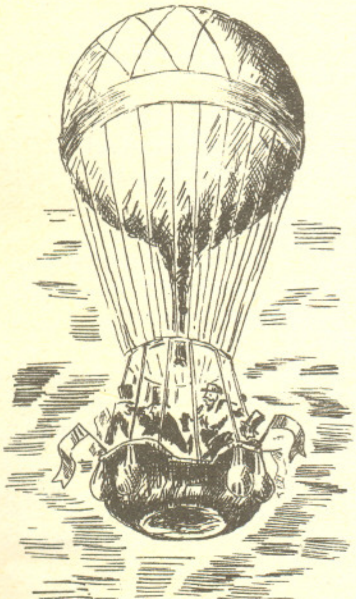
O zagadkach wzlotu balonu wierszy kilka...



Dr hab. Łukasz A. TURSKI

Kilka lat temu „Physics Today" zamieściło artykuł pt. „Zmęczyły cię bieguny Reggego, strefy Brillouina itp. — spróbuj tego". Tym „czymś" była teoria i praktyka roweru nie nadającego się zupełnie do jazdy. W niniejszym artykule chciałbym zająć się nie tyle fizyką „nieujeżdżalnego" roweru, ile, chyba równie pasjonującym zagadnieniem teoretycznego „baloniarstwa", a mianowicie tym, jakie jest przyspieszenie, z którym startują balony. Oczywiście wiemy, że ruchem balonów, tak jak i ich zwycięskich konkurentów — aeroplanów, rządzą prawa mechaniki ośrodków ciągłych (MOC) i że ta dyscyplina wiedzy to archaizm zupełnie nic nie mający wspólnego ze współczesną fizyką. Ten, niestety, dość powszechny wśród fizyków pogląd jest całkowicie mylny i, jak zobaczymy, nasze zagadnienie balonowe doprowadzi nas do pojęcia szeroko stosowanego we współczesnej fizyce np. w teorii ciała stałego, a mianowicie — pojęcia masy efektywnej. Tyle, że w MOC-y pojęcie to znane było od początków ubiegłego stulecia.

Hydrodynamika i aerodynamika, dwa podstawowe działy MOC-y, są bardzo trudnymi działami ludzkiej ciekawości i, co tu ukrywać, do dziś borykają się z wielu fundamentalnymi kłopotami. Ot, chociażby tym, że pomimo zastosowania Bóg wie jakich metod matematycznych do dziś nie udało się udowodnić ogólnego twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań równania Naviera-Stokesa — podstawowego równania opisującego dynamikę cieczy lepkiej. Ba, cóż mówić o równaniu Naviera-Stokesa, jeżeli do dziś nie wiadomo, co było przyczyną krew w żyłach mrożącej historii szyb okiennych w superwieżowcu kompanii ubezpieczeniowej Johna Hancocka. (Podobna historia, acz na mniejszą skalę, wydarzyła się oknom Klubu MPiK w domu towarowym Junior w Warszawie i, być może, co starsi Czytelnicy „Delty" widzieli „to to" na własne oczy). Otóż, kiedy ten superwieżowiec, (IV str. okł.), ulokowany w centrum Bostonu, został szczelnie zamknięty i ruszyła jego super-klimatyzacja, to nagle, pod wpływem wiejących znad oceanu wiatrów cudowne, zielono-niebieskie przeciwsłoneczne szyby okienne zaczęły wyskakiwać z ram i z cichym świstem spadać w dół na miasto (szyby były porządnie „okitowane"). Dobry Bóg Towarzystw Ubezpieczeniowych czuwał i, o ile wiem, nikt nie został zgilotynowany przez te fruwające kawały szkła. Puste oczodoły okien zabijano dyktą aż do momentu, gdy do akcji wkroczyła... straż pożarna — bo przecie tyle dykty stanowi istotne zagrożenie pożarowe. W tunelu aerodynamicznym, należącym do sławnej bostońskiej uczelni MIT (Massachusetts Institute of Technology) zbudowano nielichym nakładem kosztów, acz ku uciesze spragnionych kontraktów badawczych uczonych, model budynku i całej otaczającej go dzielnicy. Nikt nie wie, ile pieniędzy wydano na symulacje numeryczne (na maszynach cyfrowych MIT) przepływów aerodynamicznych powietrza wokół wieżowca itp, aż w końcu zaufano majstrom i zamontowano znacznie grubsze szyby. Dlaczego teraz nie wypadają?
Ba, kto to wie? MOC kryje w sobie wiele ciekawych i zaskakujących historii, jak właśnie ta o balonach.

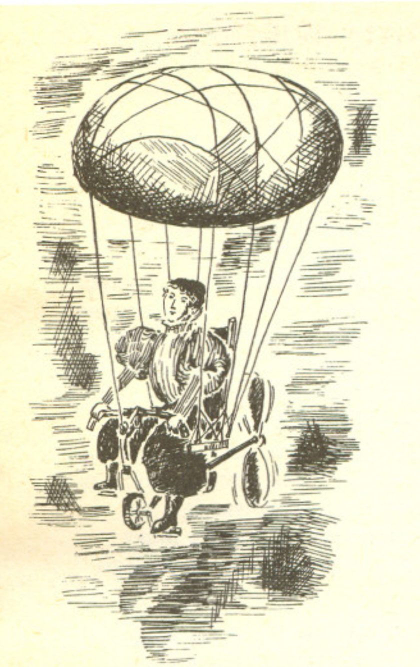


Zacznijmy od dwu zadań. Zadanie pierwsze podstawowe:

Wyobraźmy sobie balon kulisty, którego całkowita masa równa jest 1/10 masy wypartego powietrza. Pytanie: jakie jest przyspieszenie tegoż balonu w momencie startu?

Drugie zadanie (bardziej „naukowa" wersja pierwszego):
Wyobraźmy sobie wielkie akwarium wypełnione wodą, wewnątrz akwarium umieszczamy kulę wykonaną z nieważkiego materiału i pomijamy zupełnie występowanie sił ciężkości. Całemu akwarium nadajemy przyspieszenie a względem laboratoryjnego układu odniesienia. Pytanie: ile wynosi przyspieszenie kuli względem laboratorium? (Doświadczenie tego typu — jak powyższe zadanie — zostało przeprowadzone przez wybitnego matematyka Birkhoffa i Caywooda; badano w nim ruch niewielkich pęcherzyków powietrza w wodzie).

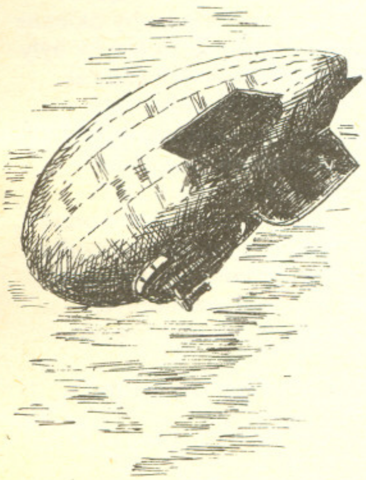
Czytelników zachęcam do próby rozwiązania tych zadań bez czytania dalszej części artykułu i do nadesłania rozwiązań do redakcji. Spośród autorów najoryginalniejszych rozwiązań rozlosujemy kilka nagród w postaci świeżej wody do akwarium.



Jak przystąpilibyśmy do rozwiązania pierwszego zadania? Oczywiście, najpierw trzeba obliczyć siłę działającą na balon: wynosi ona, zgodnie z prawem Archimedesa, $F_W = 9M_b g$, gdzie g jest przyspieszeniem ziemskim. Co dalej? Trzeba wstawić siłę F_W do równania ruchu, a to, zgodnie z prawem Newtona, powinno mieć postać: $M_b \cdot a = F_W$, gdzie M_b jest masą balonu. Korzystając z warunków zadania otrzymujemy: $a = 9g$. Ponieważ wiemy, że piloci balonów nie przyjmują przed startem pozycji horyzontalnej ani też nie noszą specjalnych przeciwprzeciążeniowych strojów jak kosmonauci, to coś jest niedobrze z naszym rozwiązaniem. Nim powiem co — cofnijmy się wstecz w czasie, do końca XVIII wieku. Uczeni w owym czasie pasjonowali się dokładnym wyznaczaniem wartości przyspieszenia ziemskiego g. Praktycznym zagadnieniem będącym partnerem tego „problemu poznawczego" było dokładne wyznaczanie okresu drgań wahadeł używanych w precyzyjnych chronometrach. W 1776 roku Du Buat przeprowadził pomiary okresu drgań wahadła zbudowanego z „nieważkiej" nici zakończonej sferycznym ciężarkiem zrobionym z materiału o gęstości ϱ i pełnej masie $M = 4/3\,\pi R^3 g$, gdzie R jest promieniem ciężarka. Du Buat stwierdził istotne odchylenia okresów drgań od przewidywanych teoretycznie; zauważył przy tym, że jest w stanie dopasować swoje wyniki do teorii, jeżeli założy, że ciężarek wahadła ma masę nieco większą niż M, co więcej, ten dodatek do masy zdawał się zależeć od tego czy wahadło poruszało się w powietrzu, czy w innym gazie. Pomińmy fakt, że w opisie ruchu wahadła należy uwzględnić tarcie zawieszenia, wagę nici itp. i zajmijmy się teorią doświadczenia Du Buat'a. Jak wiemy, równanie ruchu wahadła ma postać:

$$Ml\ddot{\Theta} = Mg\sin\Theta,$$

gdzie Θ jest kątem wychylenia wahadła, l — długością, a M — masą, a dwie kropki oznaczają drugą pochodną względem czasu. Dla małych kątów Θ okres drgań wahadła dany jest znanym wzorem $T^2 = 4\pi^2 l/g$. Ponieważ ruch wahadła odbywa się w powietrzu, należy uwzględnić siłę wyporu działającą na ciężarek wahadła. Prowadzi to do zmiany równania ruchu polegającej na pomnożeniu prawej strony przez współczynnik $(1-\varrho'/\varrho)$, gdzie ϱ' jest gęstością powietrza. W 1832 roku Baily przeprowadził pomiar wpływu tej poprawki na okres drgań wahadła i stwierdził, że teoretyczna różnica okresów (rzędu 5 minut na dzień) nie wystarcza do uzyskania dobrej zgodności z doświadczeniem. W tej sytuacji na arenę wkroczyli teoretycy i w 1833 roku Green (tenże Green od twierdzeń całkowych Greena, Ostrogradzkiego, Gaussa, Stokesa i innych) wykazał, że w równaniu ruchu wahadła należy wprowadzić jeszcze jedną poprawkę polegającą na zastąpieniu masy wahadła M po lewej stronie równania ruchu przez masę $\overset{*}{M}$, którą nazwał masą wirtualną. Uwzględnienie tej zmiany prowadzi do wydłużenia okresu drgań wahadła w stosunku $1:\sqrt{1+\frac{\overset{*}{M}-M}{M}}$.

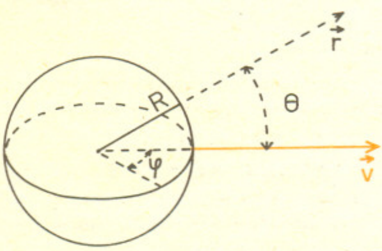


Teoria Greena dawała wzór na masę wirtualną w postaci:

$$\overset{*}{M} = M + k\varrho' V,$$

gdzie V jest objętością ciężarka, a k pewną liczbą, zależną od kształtu ciężarka. Porównywanie okresów drgań wahadła z przewidywaniami teoretycznymi sprowadza się więc do porównywania doświadczalnej wartości współczynnika k z teoretycznymi. Z doświadczeń Du Buata dla sferycznego ciężarka uzyskano wynik: $k = 0{,}45 \div 0{,}67$. Nie jest to wynik zgodny z przewidywaniem teoretycznym: $k = 1/2$. Proszę pamiętać, że w czasach, o których mowa, dokładność doświadczeń mechanicznych była niewiele mniejsza niż dzisiaj. Analiza wyników doświadczeń, o których mówimy, nasunęła Stokes'owi pomysł, że coś jeszcze jest pominięte przy analizie wpływu ośrodka na ruch wahadła. Właśnie w ten sposób odkrył on swoje prawo wiążące lepkość z dodatkową siłą działającą na ciało poruszające się w płynie. Zauważamy, że już w początkach XIX wieku fizycy byli gotowi „psychicznie" do posłużenia się, w opisie ruchu cząstki w ośrodku, trickiem polegającym na tym, że część wpływu ośrodka na ruch cząstki zastępuje się przez wprowadzenie „fikcyjnej" cząstki poruszającej się pod wpływem takiej samej siły, ale mającej inną masę. W dzisiejszej fizyce taką zmienioną masę nazywamy masą efektywną i pojęcie to powszechnie stosujemy np. w fizyce ciała stałego, gdzie badając ruch elektronu w krysztale półprzewodnikowym, zastępuje się masę elektronu m przez masę efektywną $\overset{*}{m}$, która dla wielu materiałów może być mniejsza niż masa elektronu w próżni.

Jak wyjaśnić tę konieczność zastąpienia masy ciężarka wahadła, masy balonu itp. przez masę efektywną? Każdy z Czytelników na pewno trzymał kiedyś w ręku wiosło. Otóż łatwo sobie przypomnieć, że na to, aby wykonać pełne pociągnięcie wiosłem bez zanurzania pióra w wodzie, trzeba do rękojeści wiosła przyłożyć mniejszą siłę niż wtedy, gdy wiosło zanurzamy w wodzie. Wyobraźmy sobie sytuację, że nie wiemy czy wiosło zostało zanurzone w wodzie, czy nie; wiemy tylko, że musimy wykonać pociągnięcie wiosłem z określoną prędkością. Otóż — raz „opór" wiosła na nadanie mu tej samej prędkości będzie większy (wiosło w wodzie) niż za drugim razem (wiosło w powietrzu).
W pierwszym przypadku wiosło jest „cięższe" tj. wiosło o odpowiednio większej masie, poruszające się w powietrzu stawiać będzie nam taki sam „opór" jak „prawdziwe", poruszające się w wodzie. Powyższy przykład zawiera podstawową ideę fizyczną, leżącą u podstaw zrozumienia pojęcia masy efektywnej. Powstaje pytanie, jak obliczyć tę „dodatkową" masę potrzebną w naszym „suchym" opisie „mokrego" wiosłowania? Dla wiosła problem ten jest niebywale skomplikowany. Oprócz dość wstrętnego kształtu wiosła, wykluczającego jakiekolwiek rachunki analityczne, przy opisie ruchu wiosła trzeba uwzględniać efekty związane z powierzchnią cieczy itp. Dla ruchu obiektów sferycznych (balon) w mocno wyidealizowanym modelu ośrodka, jakim jest nielepka, nieściśliwa ciecz (ciecz, w której gęstość płynu w danym punkcie przestrzeni pozostaje stała podczas ruchu płynu), wszystkie rachunki można przeprowadzić do końca w elementarny sposób. Musimy pamiętać, że jest to bardzo uproszczony opis, ale całkiem sensowny właśnie dla opisu ruchu balonów w początkowej fazie lotu, a także i dla innych, fizycznie ciekawszych zjawisk np. ruchu dodatnio naładowanych jonów w nadciekłym helu.



Przystąpmy wreszcie do wykonania tych rachunków. Na rysunku mamy przedstawiony szkic sytuacji. Sferyczny balon — kula o promieniu R porusza się z prędkością $\boldsymbol{v}$ w płynie o gęstości ϱ'. Wygodnie jest posługiwać się układem współrzędnych biegunowych: r, Θ, φ. Przy czym, w związku z założeniem o nielepkości płynu, możemy łatwo przekonać się, że składowa prędkości płynu u_φ jest równa zeru (nie ma mechanizmu oddziaływania obracającej się kuli z nielepką cieczą). Pozostałe dwie składowe pola prędkości: u_r i u_θ łatwo jest znaleźć, pamiętając, że muszą one na powierzchni kuli spełniać warunek brzegowy równości składowych normalnych płynu i kuli. Otrzymujemy więc następujące wyrażenia na te składowe: $u_r = R^3 v\cos\Theta/r^3$, $u_\theta = R^3 v\sin\Theta/2r^3$.

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{2} \boldsymbol{v} R^3 \nabla \frac{\cos\Theta}{r^2}$$

$r \geqslant a,$

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})\Big|_{r=R} = (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})\Big|_{r=R},$$

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) \xrightarrow[r\to\infty]{} 0.$$

Znając prędkość płynu $\boldsymbol{u}$ możemy obliczyć jego energię kinetyczną. W tym celu należy zauważyć, że energia kinetyczna elementu objętości płynu ΔV równa jest $\frac{1}{2}\varrho' u^2$. Chcąc obliczyć T_p — pełną energię płynu, należy zsumować wkłady pochodzące od poszczególnych elementów objętości płynu. Mamy wtedy

$$T_p = \sum_{\Delta V} \frac{1}{2}\varrho' u^2 \to \frac{1}{2}\varrho' \int d^3x u^2.$$

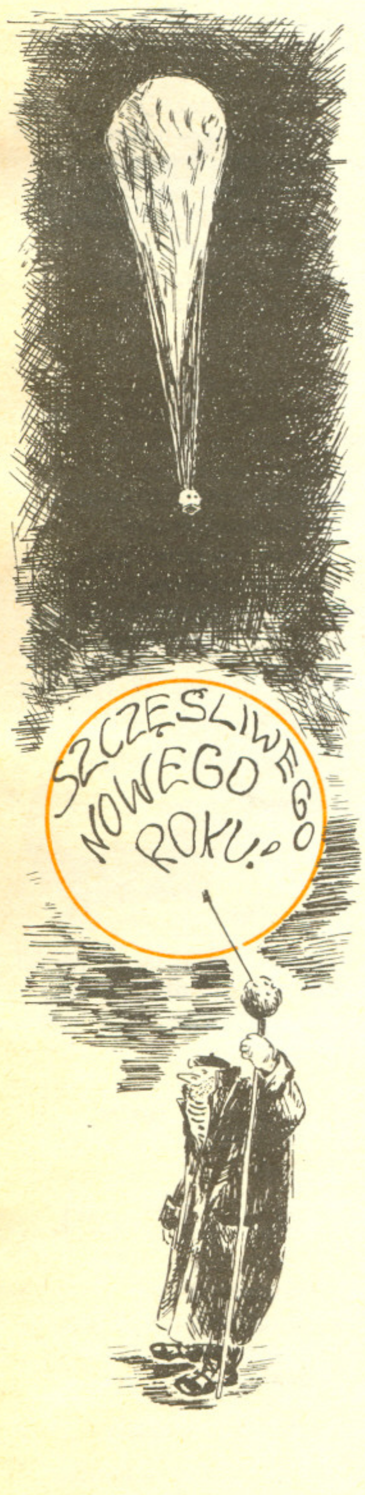
Całkowanie potrójne w powyższym wzorze musimy wykonać po całej objętości wypełnionej płynem, tj. przy naszym założeniu nieskończonego ośrodka, po całej przestrzeni z wyjątkiem sferycznej „dziury" o promieniu R, zajętej przez nasz balon. Całkowanie powyższe jest elementarne i przebiega, jak następuje:

$$T_p = \frac{1}{2}\varrho' \int (u_r^2 + u_\theta^2) r^2 \sin\Theta \, dr \, d\Theta \, d\varphi = \pi\varrho' v^2 R^6 \int_{r=R}^{\infty} r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\Theta \left[\frac{\cos^2\Theta}{r^6} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin^2\Theta}{4r^6}\right] d\Theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{3}\varrho' R^3\right) v^2 = \frac{1}{2} M_1 v^2; \qquad M_1 \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{3}\varrho' R^3\right).$$

Jak widzimy, energię kinetyczną cieczy możemy zapisać w postaci energii kinetycznej, jaką miałaby cząstka poruszająca się w próżni z tą samą prędkością, co nasz balon, ale mająca masę równą 1/2 masy wypartego przez balon płynu. Pełna energia kinetyczna układu balon plus płyn równa jest $T = T_p + T_b = \frac{1}{2}(M_b + M_1)v^2$ i tym samym równa jest energii kinetycznej cząstki o masie M = masa balonu plus połowa masy wypartej przez balon cieczy. Jest to bardzo ciekawy i elegancki wynik, który stał się podstawą do rozumowania Greena dotyczącego ruchu wahadła.

Rozwiązanie zadania M 109. Przez punkty danego zbioru poprowadzimy proste równoległe o danym kierunku oraz proste do nich prostopadłe. Odległość skrajnych prostych równoległych nie przekracza 1, a więc cały zbiór zawarty jest w prostokącie o bokach długości nie większej od 1; stąd wynika, że jest zawarty w kwadracie o boku długości 1.



Obliczenie energii kinetycznej płynu, wywołanej ruchem niesferycznych obiektów, jest o kilka „rzędów wielkości" bardziej skomplikowane. Przede wszystkim należy znaleźć pole prędkości płynu $\boldsymbol{u}$, spełniające odpowiednie warunki brzegowe, no i oczywiście, obliczenie całki potrójnej we wzorze na T przestaje być igraszką. Można jednak wykazać następujące, ważne twierdzenie. Jak wiemy, każda bryła sztywna opisana jest przez sześć stopni swobody (trzy związane są z ruchem postępowym, a trzy z obrotami). Oznaczamy odpowiadające tym stopniom swobody współrzędne jako: $q_1, \ldots, q_6$. Odpowiednie prędkości oznaczymy jako: $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_6$. Twierdzenie, o którym mowa, orzeka, że energia kinetyczna płynu T_p jest formą kwadratową prędkości $\dot{q}_i$, a współczynniki tej formy zależą wyłącznie od q_i. Możemy więc napisać:

$$T_p = \sum_{a,b=1}^{6} M_1^{ab}\dot{q}_a\dot{q}_b.$$

Można również podać skomplikowane wyrażenia na obliczanie współczynników M_1^{ab}. W ogólnym przypadku pełna energia kinetyczna układu płyn i kula jest więc formą kwadratową prędkości, a co za tym idzie, nie można przypisać naszej fikcyjnej cząstce jednej masy skalarnej, ale całą tablicę mas (współczynniki M_1^{ab}); mówimy wtedy o tensorowej masie efektywnej. I znowu np. w fizyce ciała stałego często mówi się o tensorowej masie efektywnej nośników ładunku. W ciele stałym ta tensorowość wiąże się z geometrią pasm energetycznych, dozwolonych dla nośników ładunku przez symetrie sieci krystalicznej, skład kryształu itp.

W mechanice teoretycznej udawadnia się, że równania ruchu dla układu można zapisać w postaci tzw. równań Lagrange'a. Równania te mają postać:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial T}{\partial q_a} = Q_a.$$

W równaniach tych T jest pełną energią kinetyczną układu. Q_a to tzw. siły uogólnione. W konkretnym przypadku ruchu naszego balonu Q_a to po prostu składowe wektora siły wyporu. Korzystając z prawa Archimedesa możemy łatwo obliczyć te siły. Dla kuli jedynymi stopniami swobody, które trzeba uwzględniać, są te, które wiążą się z ruchem postępowym. Współrzędne q_a w tym wypadku to współrzędne środka kuli, a prędkości $\dot{q}_a$ to po prostu składowe wektora prędkości kuli $\dot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{v}$. Wstawiając nasze wyrażenie na energię kinetyczną płynu plus kula oraz siłę wyporu do równań Lagrange'a, uzyskujemy równanie ruchu balonu w postaci:

$$(M_b+M_1)\cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_w.$$

Jest to równanie ruchu dla „cząstki" o masie efektywnej $\overset{*}{M}$.
Gdybyśmy analogiczne rozumowanie, jak powyżej, przeprowadzili dla wahadła, to otrzymalibyśmy, omawiane uprzednio, równanie Greena. Możemy teraz nareszcie rozwiązać do końca zadanie o balonie. Znamy już siłę wyporu F_W, a masa efektywna wynosi teraz $(1/10+5/10)$ masy wypartego powietrza. Równanie ruchu ma więc postać: $(6/10)a = (9/10)g$, skąd: $a = (3/2)g$. Jest to całkiem sensowne przyspieszenie i każdy, kto widział startujący balon, gotów jest „kupić" ten wynik. Tak więc, to masa efektywna balonu gwarantuje nam to, że balon nie wzlatuje w górę jak rakieta. Trzeba podkreślić, że nasza analiza jest słuszna tylko dla bardzo krótkiego okresu czasu, zaraz po starcie balonu. Dla pełnego opisu trzeba by uwzględnić wiele dodatkowych efektów, np. niesferyczność (gondola, w której siedzą aeronauci) itp.

Ponieważ mają Państwo zapewne dość tej matematyki, czas już zakończyć ten artykuł. Starałem się w nim przekonać Państwa, że w MOC-y pojęcie masy efektywnej, tak dziś powszechnie stosowane, narodziło się znacznie wcześniej niż w innych działach fizyki. Mam nadzieję, że ci spośród Czytelników, którzy będą teraz czytać poważne dzieła naukowe, w których napotkają takie to terminy, jak: masa polowa elektronu, renormalizacja masy, masa polaronu, masa efektywna nośników ładunku, ciężkie i lekkie elektrony itp., będą mogli powiedzieć: phi, to nic takiego nowego, to jest to, dlaczego balony latają wolno. Aha, no i mam nadzieję, że przekonałem Państwa o tym, iż MOC to ciekawa dyscyplina fizyki.

Można np., korzystając z jej praw, udowodnić, że samoloty w ogóle nie mogą latać. Ale o tym to może kiedy indziej.

XI MIĘDZYNARODOWA OLIMPIADA FIZYCZNA

W dniach od 1 do 8 lipca 1976 roku w Budapeszcie odbyła się kolejna, IX Międzynarodowa Olimpiada Fizyczna, w której czestniczyło 10 państw: Bułgaria, Czechosłowacja, Francja, NRD, RFN, Polska, Rumunia, Szwecja, Węgry i ZSRR.
Polskę reprezentowali uczniowie najlepsi na zawodach krajowej XXV Olimpiady Fizycznej: Konrad Gajewski, Wojciech Jawień, Krzysztof Kulpa, Rafał Łubis i Waldemar Rachowicz.
Drużyna polska co roku wypada nieźle. Tak też było i teraz. Dwaj nasi zawodnicy: Krzysztof Kulpa i Rafał Łubis znaleźli się w grupie zdobywców pierwszych nagród, zaś pozostali trzej otrzymali wyróżnienia. Bezwzględnie najlepszym uczestnikiem zawodów okazał się Rafał Łubis z I Liceum Ogólnokształcącego im. J. Śniadeckiego w Pabianicach, który oprócz nagrody otrzymał z tej okazji dodatkowo piękny Medal Węgierskiego Towarzystwa Fizycznego.

Oto krótki wywiad z Rafałem Łubisem dla Czytelników „Delty":

— Przede wszystkim serdecznie gratulujemy.

— Dziękuję bardzo.

— Co uważasz za najbardziej pociągające w fizyce?

— W fizyce szczególnie pasjonuje mnie możliwość wyjaśnienia za pomocą niewielu prostych praw ogromnej liczby skomplikowanych zjawisk. Najbardziej ciekawi mnie elektryczność oraz dynamika cieczy.

— Czy uczeniu się fizyki poświęcałeś dużo czasu?

— Sporo, ale nie za dużo. Uczenie się fizyki zawsze przychodziło mi bardzo łatwo. Więcej czasu na naukę zacząłem poświęcać dopiero w klasie trzeciej, kiedy przygotowywałem się do wojewódzkiego quizu fizycznego.

— Niewątpliwie swój sukces zawdzięczasz przede wszystkim swojej pracy, ale na sposób pracy i jej skuteczność z pewnością miały wpływ niektóre osoby z twojego otoczenia. Komu najwięcej zawdzięczasz?

— W okresie poprzedzającym zawody dopingowało mnie wiele osób, szczególnie rodzice, ale najwięcej zawdzięczam pani profesor Aleksandrze Wójcik. Ona to nakłoniła mnie do wzięcia udziału w olimpiadzie krajowej, a potem starała się, żebym miał jak najlepsze warunki do pracy i jak najlepsze wyniki. Najczęściej uczyłem się samodzielnie w domu, ale gdyby nie kierownictwo pani profesor, z pewnością nie osiągnąłbym tego sukcesu. Pani Wójcik podsuwała mi zbiory zadań oraz podręczniki, które często były kupowane do biblioteki szkolnej głównie z myślą o mnie. Na pewno w moim sukcesie ma ona wielki udział.

— Co było trudniejsze: olimpiada krajowa czy międzynarodowa?

— Sądzę, że organizatorzy olimpiady krajowej stawiają uczestnikom wyższe wymagania niż organizatorzy olimpiad międzynarodowych. Chyba jest to jedną z przyczyn sukcesów Polaków w spotkaniach z uczniami z innych krajów.

— Jako laureat olimpiady krajowej masz zapewniony wstęp bez egzaminu wstępnego na każdą uczelnię techniczną i na dowolny kierunek ścisły uniwersytetów. Jaka jest twoja decyzja?

— Wybieram się na elektronikę Politechniki Warszawskiej. Myślę, że po ukończeniu studiów będę miał z wybranego zawodu dużą satysfakcję, bo odpowiada on moim zainteresowaniom.

— Jak twój sukces został przyjęty przez kolegów?

— Gdy wróciłem z Budapesztu, moi koledzy właśnie kończyli egzaminy na wyższe uczelnie i gratulacje prawie bez wyjątku były obustronne. Potem wszystkich nas pochłonęła Olimpiada w Montrealu. Korzystając z okazji chciałbym serdecznie pozdrowić Czytelników „Delty", najciekawszego pisma, jakie znam.

— Dziękujemy bardzo i ze swej strony życzymy Ci dalszych sukcesów.

Rozmawiał mgr Waldemar GORZKOWSKI.

Rozwiązanie zadania F 37

Rozważmy nieco ogólniejszy problem ruchu płaskiej fali świetlnej padającej prostopadle na płytkę. Zgodnie z zasadą Huygensa każdy punkt, do którego dotarła fala, staje się źródłem nowej fali kulistej. Narysujmy czoła tych nowych fal uwzględniając, że długość fali wewnątrz płytki zależy od x. Ponieważ $\lambda \sim R-x$, obwiednia tych fal kulistych (a dokładniej jej przekrój płaszczyzną rysunku) jest linią prostą przecinającą oś x-ów w punkcie $x = R$. A zatem czoło fali płaskiej równoległe do płytki przed wniknięciem fali w płytkę, pozostaje linią prostą (ściślej płaszczyzną) tyle, że tworzącą z płaszczyzną płytki pewien kąt.

Powtarzając rozumowanie z zasadą Huygensa jeszcze raz, łatwo się przekonać, że następne czoło fali będzie znów linią prostą przechodzącą przez punkt $x = R$, lecz obróconą jeszcze bardziej w stosunku do kierunku pierwotnego. Zbiór czół fali ma zatem postać pęku prostych wychodzących z punktu $x = R$.

Promienie świetlne są to linie prostopadłe do czoła fali. Liniami prostopadłymi do pęku prostych wychodzących z jednego punktu są oczywiście okręgi o środku w punkcie przecięcia prostych pęku.

Możemy teraz zapomnieć o całej fali i ograniczyć się do promienia z treści zadania. Wiemy już, że wewnątrz płytki promień ten będzie miał kształt okręgu o środku w punkcie $x = R$, $y = 0$ a promień tego okręgu będzie wynosił $R = 13$ cm. Dalsze obliczenia nie wymagają już dokładniejszych objaśnień

$$\sin\alpha = n(l)\cdot\sin\beta,$$

$$\sin\beta = \frac{d}{R},$$

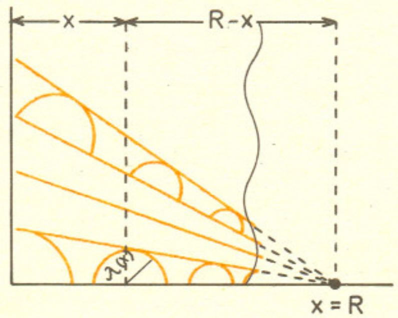
$$l + R\cdot\cos\beta = R.$$

Eliminując β z powyższych związków dostaniemy układ dwóch równań o dwóch niewiadomych d i l

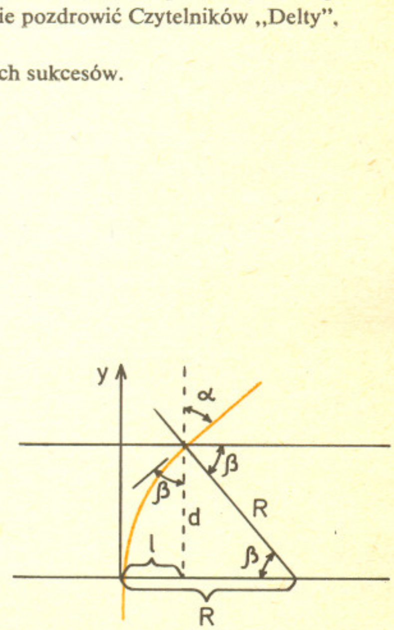
$$\sin\alpha = \frac{d}{R}\,\frac{n_0}{1-\frac{l}{R}}$$

$$\left(\frac{d}{R}\right)^2 + \left(1-\frac{l}{R}\right)^2 = 1,$$

z którego łatwo znajdujemy $l = 1$ cm, $d = 5$ cm.



$$\lambda(x) = \frac{\lambda_0}{n(x)} = \frac{\lambda_0}{n_0 R}\,(R-x)$$



Ta trzecia

Dr Marek KORDOS

„Samolot wystartował z Warszawy i poleciał prosto przed siebie, by potem skręcić pod kątem prostym, znów lecieć i znów skręcić pod kątem prostym i po pewnym czasie wrócić do Warszawy z kierunku prostopadłego do tego, w którym odleciał. Ile przeleciał kilometrów?"
Głupie zadanie, prawda? Niewątpliwie widać na siłę dorobioną fabułę, która wyda się jeszcze głupsza po rozwiązaniu zadania. Mało jest (o ile się w ogóle trafiają) samolotów mogących przelecieć bez lądowania 30 tys. kilometrów, a taka właśnie jest odpowiedź.
Żeby to ustalić, trzeba tylko uświadomić sobie, że zwrot „prosto" ma dla nas kilka znaczeń. W przypadku zaś poruszania się po sferze (powierzchni kuli) oznacza „wzdłuż okręgu wielkiego" (tj. leżącego w płaszczyźnie przechodzącej przez środek kuli). Jest to rozsądny pogląd, albowiem łuk okręgu wielkiego przechodzącego przez punkty A i B sfery jest najkrótszą linią leżącą na sferze i łączącą te dwa punkty: a więc — prosto, czyli najkrótszą drogą.

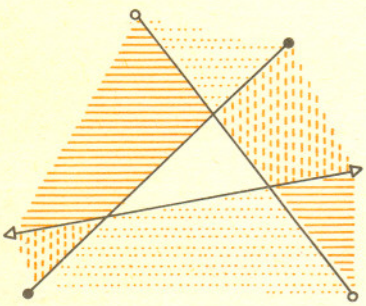
W tym miejscu można wpaść w zdziwienie przypomniawszy sobie, jak wielki szum towarzyszył odkryciu geometrii Bolyai-Łobaczewskiego. Przecież zdumieni odkryciem jakiejś nieeuklidesowej geometrii byli ludzie od dłuższego czasu przyzwyczajeni do poruszania się po sferze i używania pojęcia „prostej" w dwu znaczeniach. Mieli nawet na sferze trójkąty z trzema kątami prostymi, jak ten, który przeleciał nasz kompromitujący samolot. Istotnie, jeśli z bieguna północnego udamy się południkiem Greenwich na równik, równikiem do jednego z dziewięćdziesiątych południków, i z powrotem na biegun, to przemierzymy właśnie taki trójkąt.
No dobrze, ale z Warszawy? Z Warszawy też można, bo przecież sfera jest wszędzie taka sama (choćby na to nie wyglądała).

Nie należy jednak sądzić pochopnie, a już w szczególności naszych poprzedników, od których przecież sami wszystkiego się nauczyliśmy. Mieli oni istotne powody, aby geometrii sferycznej (tak się nazywa geometria powierzchni kuli) nie traktować równorzędnie z euklidesową. I to nie tylko dlatego, że mieli kłopoty z wyobrażeniem jej sobie w trójwymiarowej postaci. Bardzo wyraźne opory budziły proste przecinające się w dwóch punktach; punktach, między którymi jest nieskończenie wiele najkrótszych dróg. A przecież na sferze tak jest. Dlatego też geometria sferyczna zawsze była dyskryminowana.
Sprawę można jednak uratować zauważając, że wszystko psują antypody. To właśnie na antypodach przecinają się dwukrotnie proste; przez antypody przechodzi nieskończenie wiele prostych. Można by więc sprawę ratować pozbawiając sferę antypodów. Np. sklejając je ze sobą. Ten genialny w swej prostocie pomysł istotnie, jak się okazuje, poprawia sytuację; ma tylko jedną wadę, o której może się przekonać każdy, kto spróbuje połączyć równocześnie wszystkie antypody jakiegokolwiek modelu sfery (np. worka, lepiej — zawiązanego). Tego nie da się zrobić!
W każdym jednak razie możemy sobie wyobrazić, co to będzie. Bo, na przykład, na półsferze są reprezentowane wszystkie pary antypodów sfery, a tylko te na brzegu są oba obecne. Można więc sklejać antypody na brzegu półsfery (np. zawiązać tak worek). Też się nie da!
Ale wyobrażenie mamy: jakby się dało, to byłoby to. To ogromnie głęboka informacja — wobec tego wszelkie lokalne sprawy w tak powstałej płaszczyźnie (jej geometria nazywa się *eliptyczna*) przedstawiają się tak samo jak na sferze — wygoda niesłychana. A musi tak być, jeśli problem „zmieści się" na półsferze nie dotykając jej brzegu — tu przecież nic nie zmienialiśmy.
Chciałoby się jednak mieć jakieś wyobrażenie, jak to wygląda „w całości", a nie tylko lokalnie, choć po prawdzie nie znam osobiście nikogo, kto obejrzałby płaszczyznę euklidesową inaczej niż lokalnie. Płaszczyzna, o której mówimy, bywa nazywana eliptyczną lub rzutową (tak ją nazywamy, kiedy nie interesują nas odległości na niej). Pod tą ostatnią nazwą figurowała jej podobizna np. w „Delcie" 10/1976, gdzie napisano o niej też, że jest zaklejeniem sfery z otworem wstęgą Möbiusa. Proste, nie?

Może więc nie przyglądać się, tylko zbierać jej ciekawsze własności. Płaszczyzna taka ma np. własność *dualności*, co oznacza, że jeśli w jakimś twierdzeniu o punktach, prostych i ich wzajemnym położeniu zamienimy miejscami nazwy punktów i prostych, to otrzymane zdanie też będzie twierdzeniem. Przykład: „Przez dowolne dwa punkty przechodzi prosta"; dualnie (z modyfikacjami, jakich wymaga język potoczny, a nie matematyka) będzie to brzmiało: „Dowolne dwie proste mają punkt wspólny".

No i w tym miejscu, istotnie, stwierdzamy, że nie jest to ani geometria Euklidesa, ani Bolyai-Łobaczewskiego, to jest właśnie ta trzecia (patrz: „Delta" 7/1975). Z rozważań o półsferze mamy natomiast wniosek, że prosta jest krzywą zamkniętą. Istotnie! Okręgi wielkie opuszczały półsferę w antypodach, a te właśnie mają być sklejone. Prosta zatem ma skończoną długość! Istnieją najbardziej od siebie oddalone punkty na płaszczyźnie!
Nadzwyczajność tego ostatniego stwierdzenia można jednak wydatnie zmniejszyć, kojarząc ją z dualnością. Maksymalne oddalenie punktów jest po prostu obrazem dualnym prostopadłości prostych. Istotnie, przecinające się proste (a tu mamy tylko takie) „dalej" od siebie być nie mogą.
Czytając raz jeszcze „Klasyfikację powierzchni" z „Delty" 10/1976 stwierdzamy, że nasza płaszczyzna jest jednostronna i że prosta (mimo, iż jest krzywą zamkniętą) płaszczyzny nie rozcina. Nie ma więc tam półpłaszczyzn — płaszczyzna z wyciętą prostą jest dalej „w jednym kawałku"!

Defekt trójkąta ABC to liczba: $\pi - \sphericalangle ABC - \sphericalangle BCA - \sphericalangle CAB$



Istnienie maksymalnie oddalonych punktów może nasunąć skojarzenia z geometrią Bolyai — Łobaczewskiego, gdzie można było geometrycznie obrać jednostkę długości. I jest to dobre skojarzenie. Ustalając, że maksymalnie oddalone punkty są w odległości $\pi/2$, otrzymujemy związek podobny do znanego np. z „Delty" 10/1975: pole trójkąta jest równe *minus* defektowi tego trójkąta. Dlaczego minus? Dlatego, że tu trójkąty mają sumę kątów większą niż π. Pełnej analogii oczywiście nie ma: tak jak prosta ma tu skończoną długość π, tak i pole całej płaszczyzny jest skończone i wynosi 2π. Spróbujcie uzasadnić — czemu (może o czymś świadczy model na półsferze?)
Analogicznie natomiast do geometrii Bolyai-Łobaczewskiego i tu jest prawdziwa IV cecha przystawania trójkątów: jeśli odpowiednie kąty są równe, to trójkąty są przystające. I tu od razu wątpliwość: trójkąt? A co to takiego? Przecież prosta nie rozcina płaszczyzny. No tak, ale trzy proste nie przechodzące przez jeden punkt rozcinają naszą płaszczyznę. Tyle, że nie na siedem części, jak to było u Euklidesa i Bolyai-Łobaczewskiego, a zaledwie na cztery. Wyznaczają więc cztery trójkąty na ogół o różnych kątach (pytanie: kiedy wszystkie cztery trójkąty są przystające?)

A teraz problem do samodzielnego rozwiązania:

Czemu geodeci triangulując powierzchnię Ziemi startują zawsze z odmierzonej bazy? Przecież lokalnie obowiązują na sferze te same zależności, co w geometrii eliptycznej. Czy, wobec tego, nie można by obejść się bez bazy?

I na zakończenie o poważniejszych problemach do samodzielnego rozwiązania. Za początek istnienia geometrii eliptycznej uważa się rok 1854 (praca Riemanna — patrz „Delta" 7/1975).
Mimo jednak 120-letniej historii jest to bardzo słabo rozwinięta geometria. Dopiero np. w ostatnich latach została zaksjomatyzowana w zadawalający sposób. Jest w niej jeszcze bardzo wiele do zrobienia i można w niej znaleźć więcej białych plam niż w geometrii Euklidesa i Bolyai-Łobaczewskiego razem wziętych. Jeśli tylko będzie się ją badać.

Odpowiedź

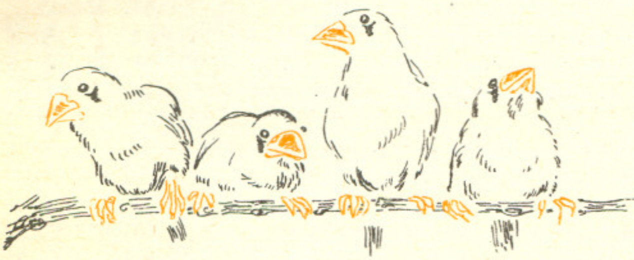
Zadanie: „Wiatraczkowe" ramiona muszą przechodzić przez środki boków większego kwadratu.

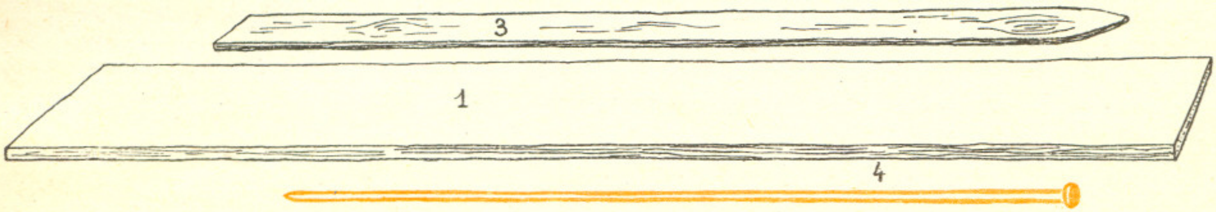
Problem: Mniejszy kwadrat musi mieć pole co najmniej dwukrotnie mniejsze.

mała delta

Zabawa w badanie

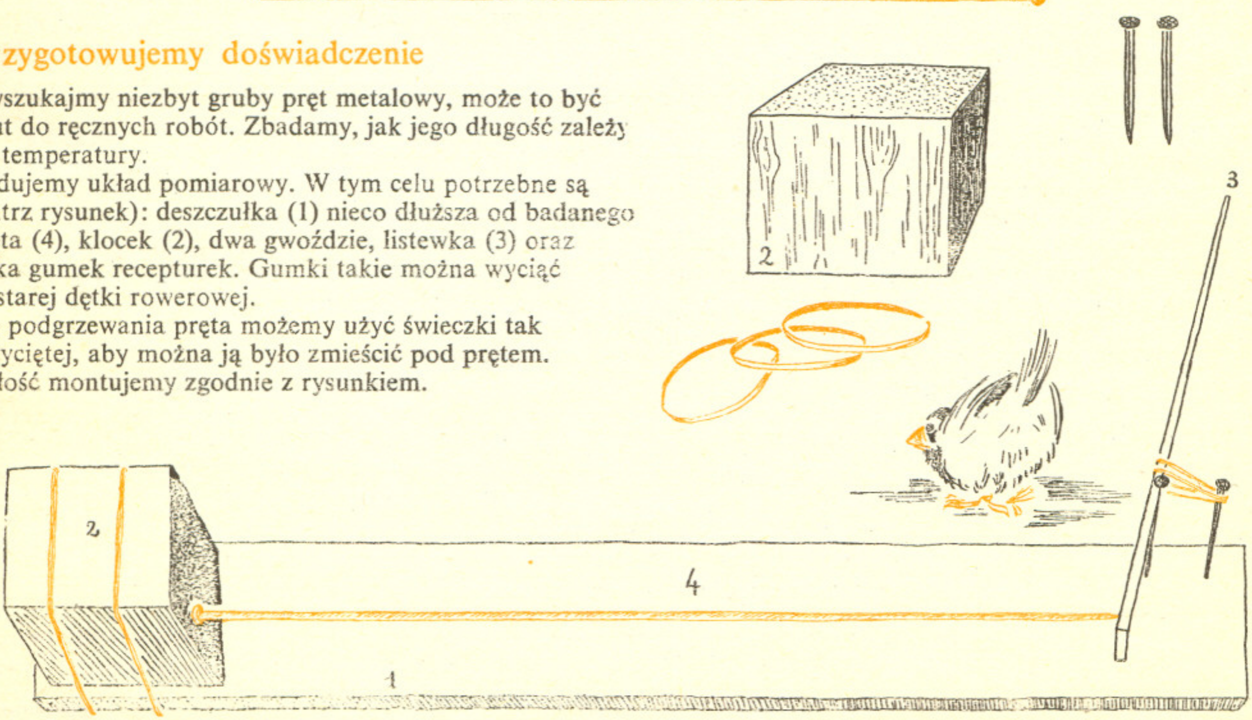
Pobawmy się w badanie naukowe. Będzie to zabawa, ponieważ postawimy pytanie, na które fizycy znają odpowiedź — w prawdziwych badaniach stawia się pytania, na które nikt nie zna odpowiedzi i nawet niekiedy nie wiadomo, czy pytania te mają sens.
Nasze pytanie brzmi: Czy długość ciała zależy od temperatury i w jaki sposób? Wyobraźmy sobie, że nikt nie wie, jak na to odpowiedzieć. Można przywołać na pomoc nasze doświadczenia z życia codziennego.
W czasie silnych mrozów palce grabieją, człowiek się kurczy — czy to świadczy, że długość ciała maleje? Kłódkę pozostawioną na mrozie trudno otworzyć — czy to świadczy, że mechanizmy kłódki powiększyły się pod wpływem spadku temperatury i blokują jej otwarcie? W jednym i drugim przypadku nie mamy prawa wyciągać takich wniosków, ponieważ wiele czynników odgrywa rolę w obserwowanych, nazwijmy je, zjawiskach i obserwujemy dopiero efekt końcowy.
Nas interesuje wpływ na długość jednego, ściśle określonego czynnika — temperatury ciała. Trzeba stworzyć takie warunki obserwacji, aby uniknąć wpływu innych, niepożądanych czynników. Powiemy, że trzeba przeprowadzić doświadczenie.



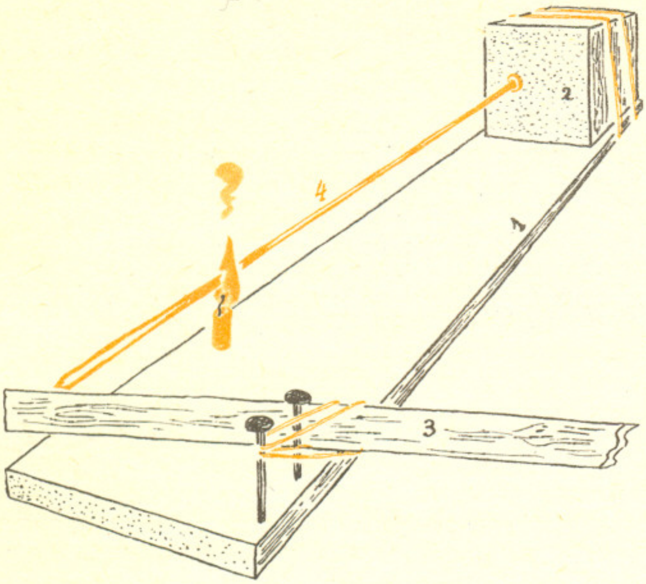


Przygotowujemy doświadczenie

Wyszukajmy niezbyt gruby pręt metalowy, może to być drut do ręcznych robót. Zbadamy, jak jego długość zależy od temperatury.
Budujemy układ pomiarowy. W tym celu potrzebne są (patrz rysunek): deszczułka (1) nieco dłuższa od badanego pręta (4), klocek (2), dwa gwoździe, listewka (3) oraz kilka gumek recepturek. Gumki takie można wyciąć ze starej dętki rowerowej.
Do podgrzewania pręta możemy użyć świeczki tak przyciętej, aby można ją było zmieścić pod prętem.
Całość montujemy zgodnie z rysunkiem.



Wykonanie doświadczenia

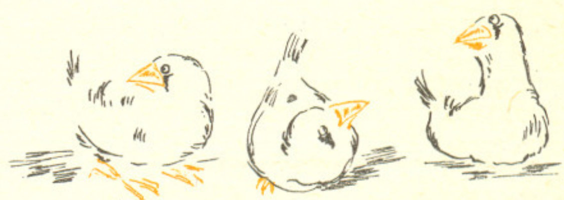


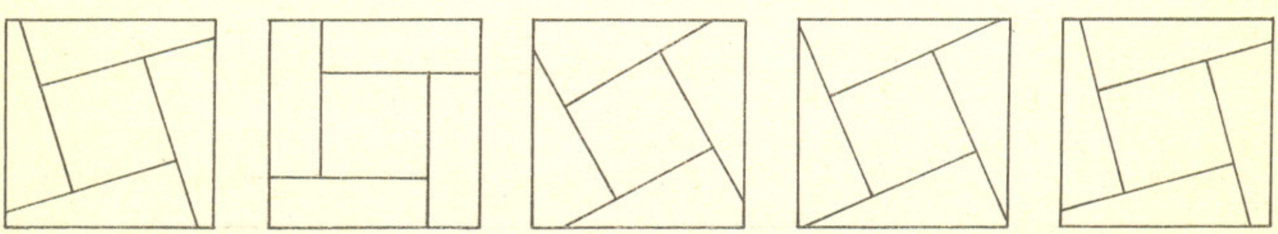
Podgrzewamy pręt. Jeśli przy podgrzewaniu wydłuży się, to listwa — wskazówka (3) wychyli się w lewo. Wychylenie w prawo oznacza skrócenie się pręta. Mamy więc przyrząd, który pozwoli badać zależność długości od temperatury.
Proponujemy wykonanie całego szeregu pomiarów, które odpowiedzą na dodatkowe pytania, jakie zazwyczaj pojawiają się przy wykonywaniu doświadczenia:
1. Czy wychylenie wskazówki zależy od położenia ogrzewającej świeczki (możemy ją przecież przesuwać wzdłuż pręta)?
2. Czy wychylenie, przy ogrzewaniu dwiema świeczkami jest dwukrotnie większe?
3. Zaznaczcie położenia wskazówki, gdy pręt jest nieogrzany i przy ogrzewaniu jedną i dwiema świeczkami. Zgaście świeczki. Sprawdźcie, który odcinek tak utworzonej skali przebędzie wskazówka prędzej przy ostyganiu pręta.
Pytań można stawiać więcej, w miarę, jak zaczynamy rozumieć, jakie prawa rządzą badanym zjawiskiem. To jest najważniejsza część pracy badawczej — zrozumieć, co oznaczają otrzymane wyniki.
Zakończcie zabawę chwilą zastanowienia; teraz można zajrzeć do podręczników, popytać nauczyciela lub napisać do nas. Obiecujemy odpisać.
(Projekt tego doświadczenia przy użyciu najprostszych środków opracował w Zakładzie Dydaktyki Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego — mgr Krzysztof Tabaszewski).

Przecinamy kwadrat

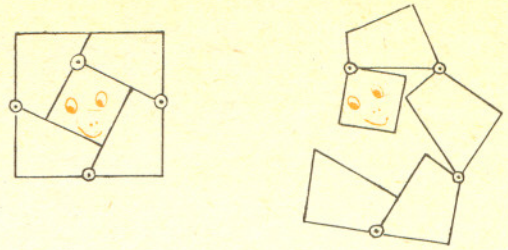
Na pewno umiecie tak przeciąć kwadrat, by za pomocą szpilki zrobić z niego wiatraczek.

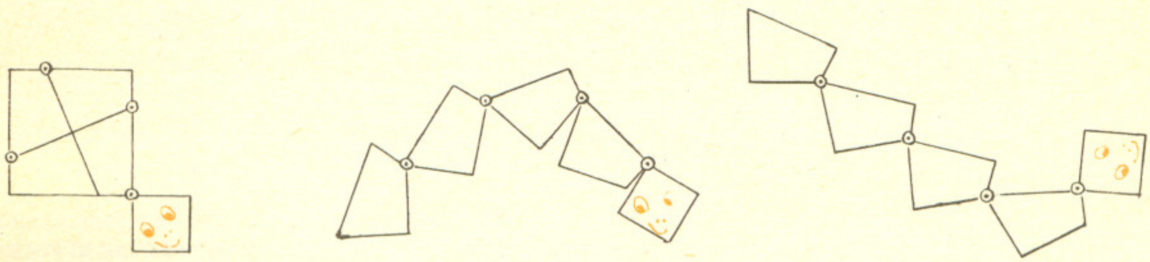
Cóż w tym trudnego? Można sobie jednak zadanie przecinania kwadratu skomplikować. Np. taką samą, jak poprzednio, szpilką przypinamy środek mniejszego kwadratu do środka większego.
Jeśli „wiatraczkowo" przedłużymy boki małego kwadratu, to podzielą one wystającą część większego na cztery jednakowe części. Kształt takiej części będzie jednak zależał od tego, jak będzie położony mały kwadrat w większym.

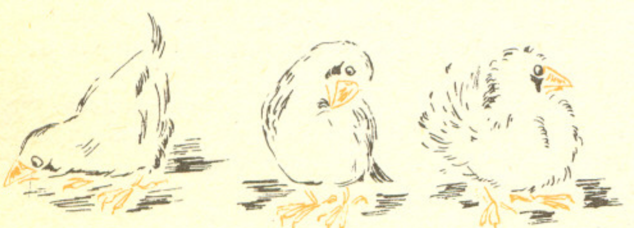




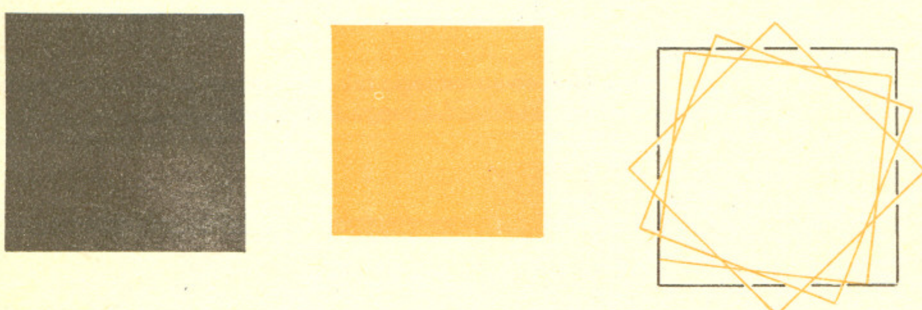
A teraz **zadanie**: Jak musi być położony mały kwadracik, żeby z wyciętych przez jego „wiatraczkowe" ramiona części można było ułożyć kwadrat? Jako wskazówkę dajemy rysunek zabawki, jaką można zrobić z małego kwadracika i wyciętych części większego, o ile wszystkie pięć części zrobimy z deseczki i odpowiednio połączymy zawiaskami. Już wiecie, jak wygląda rozwiązanie zadania?

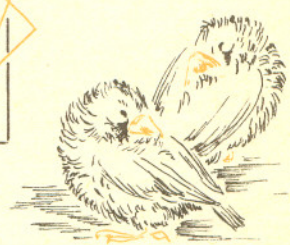




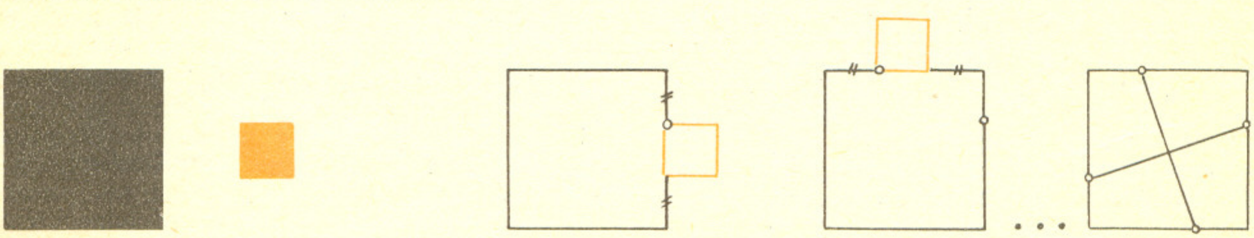


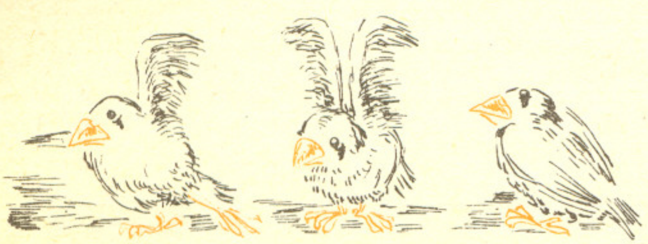
Z kolei **problem**: Czy zawsze można czterema cięciami wyciąć żądany kwadrat z danego, większego od niego, tak, aby z pozostałych ścinków dał się ułożyć kwadrat (bez dodatkowego przecinania)?
Sądząc z rysunku — chyba nie.
Jak myślicie ...





Natomiast, gdy mamy dwa kwadraty, to zawsze jeden z nich można tak przeciąć na cztery jednakowe części, aby z pięciu posiadanych kawałków ułożyć można było kwadrat. Instrukcja jest podana na rysunku.





Sądzę, że teraz już wszyscy umiecie rozwiązać postawiony problem. Oczywiście, nie zawsze można. Spróbujcie odpowiedzieć na pytanie, jaki warunek muszą spełniać kwadraty: ten, z którego wycinamy i ten, który chcemy wyciąć, tak, aby można to było zrobić takimi czterema cięciami, żeby ze ścinków dał się ułożyć kwadrat. Odpowiedź znajdziecie w numerze.

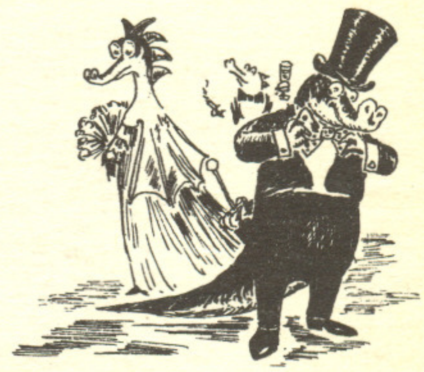
Małą Deltę opracowali: Tomasz Hofmokl, Marek Kordos i Przemysław Nowicki.

PRAWA J. M. MURPHY'EGO

1. Spadające swobodnie narzędzie lub przedmiot upadnie zawsze tak, aby wyrządzić najwięcej szkody.
2. W każdym obliczeniu, które przekracza pewien stopień komplikacji, jakieś wyrażenie z licznika znajdzie się w mianowniku.
3. W każdym obliczeniu liczba, której poprawność jest dla wszystkich oczywista, okaże się źródłem błędu.
4. Wszystkie stałe są zmienne.
5. Każda rura po skróceniu okaże się za krótka.
6. Wszystkie szczelne złącza przeciekają.
7. Każda rzecz po wyrzuceniu staje się niezbędnie potrzebna.
8. Po rozłożeniu i ponownym złożeniu dowolnego urządzenia pozostaje kilka części.
9. Liczba części zamiennych będących do dyspozycji jest odwrotnie proporcjonalna do zapotrzebowania na nie.

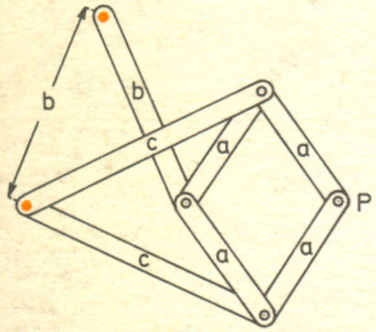
Inż. *Stanisław WOLSKI* z Warszawy pisze:

Czy można podyskutować o smokach z Nr 6/1976 „Delty"? Szczególnie chodzi mi o smoka jedenastkowego. Jest on równie łagodny jak smok dziewiątkowy i dlatego próbuję go bronić. Napisano o nim (niesłusznie!) „... przecież nie znamy cech podzielności przez jedenaście".
A właśnie, że znamy. I cecha ta jest bardzo prosta. Praktycznie dotyczy to liczb co najmniej trzycyfrowych. Otóż, w każdej liczbie rozróżniamy pozycje (miejsca) poszczególnych jej cyfr: parzyste i nieparzyste. Każda liczba jest podzielna przez jedenaście, jeżeli różnica sum pozycji parzystych i nieparzystych jest podzielna przez 11 (lub równa się 0). Np. przytoczona w Waszym artykule liczba 18 447 jest podzielna przez 11, gdyż $(1+4+7)-(8+4)=0$. Albo: 278 949, tutaj suma pozycji parzystych wynosi: $7+9+9=25$, suma pozycji nieparzystych wynosi: $2+8+4=14$; $25-14=11$.
Jeszcze łatwiejsze będą liczby trzy- i czterocyfrowe. Np.: 792 $(9-9)$; 506 $(11-0)$; 2 761 $(8-8)$; 5 192 $(14-3)$.
Natomiast smok siódemkowy jest rzeczywiście „wredny" i poddaje się tylko przy atakowaniu go „tabelami reszt", które są zresztą znane od bardzo dawna.



Naszym zdaniem i smok siódemkowy jest łagodny, może nie tak, jak jedenastkowy, ale zawsze...
Gdy mamy zbadać podzielność liczby wielocyfrowej przez 7, dzielimy ją (od końca) na grupy trzycyfrowe, np. 6/789/456/321/012.
Liczba ta daje przy dzieleniu przez 7 resztę taką, jak liczba $012-321+456-789+6=-636$, czyli 1 (bo $-636=-91\cdot 7+1$).
Jest to również cecha podzielności przez 11 i 13. (Red.).

DLACZEGO TAK JEST?



Z czterech listewek o długości *a*, jednej długości *b* i dwóch długości *c* montujemy przyrząd taki, jak na rysunku. Punkty oznaczają przeguby, co oznacza, że listewki mogą się w nich obracać. Jeżeli pomarańczowe przeguby przymocujemy do podłoża (np. tektury) tak, by ich odległość była *b*, to przegub *P* będzie się poruszał po prostej, a dokładniej — po odcinku.
Jeśli ktoś nie wierzy, to może sprawdzić mocując w tym przegubie jakiś pisak.
Długości *a*, *b* i *c* są dość dowolne — ważne tylko, by *a* było wyraźnie mniejsze od *c*.

No dobrze, ale dlaczego tak się dzieje?

Pewne wskazówki na ten temat znajdziecie w numerze 7/1976 „Delty".
A odpowiedź będzie w następnym numerze.

Kol. *Jerzy DOMIŃSKI* z Kielc zauważa, że wartość całki

$$\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\,dx$$

wynosi $\pi/4$, ponieważ $y=\sqrt{2x-x^2}=\sqrt{1-(x-1)^2}$ jest funkcją, której wykresem jest półokrąg pokazany na rysunku obok.
Ten bardzo prosty przykład pokazuje, że dobre rozumienie matematyki znacznie upraszcza życie: w tym konkretnym przypadku znajomość twierdzenia o związku całkowania z obliczeniem pól pozwoliła zastąpić żmudne rachunki prostym pomysłem.