



## SPIS TREŚCI

Esej o Gwieździe Betlejemskiej <i>Ludwik Zajdler, astronom</i>	str. 1
Zadania	str. 3
Hodujemy kryształy — <i>Konkurs świąteczny</i>	str. 4
Doświadczalnik — gra towarzyska	str. 5
Album cząstek <i>Mgr Małgorzata Berbecka</i> <i>Doc. dr hab. Tomasz Hofmokl</i>	str. 6
Liczbę pierwsze <i>Mgr Andrzej Mąkowski</i>	str. 12
Mała Delta	str. 14

**W następnym numerze:**

**O balonach i równaniach funkcyjnych**

**Nasza okładka:**

**Gra heksagonalna**

### Errata

W poprzednim numerze na str. 7 zostały błędnie napisane współrzędne wektora rotacji.

Winno być:

$$\left[ \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right), \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right), \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right]$$

„Delta”

matematyczno-fizyczny miesięcznik  
popularny  
Polskiego Towarzystwa  
Matematycznego i Polskiego  
Towarzystwa Fizycznego  
wydawany przy poparciu  
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny  
doc. dr J. Bartke  
prof. dr Grzegorz Białkowski —  
przewodniczący  
doc. dr A. Bączyński  
doc. dr B. Gleichgewicht  
doc. dr K. Goebel  
doc. dr B. Iwaskiewicz  
doc. dr T. Iwiński  
prof. dr A. Januszajtis  
prof. dr Leon Jeśmanowicz —  
wiceprzewodniczący  
mgr H. Kaczorek  
prof. dr B. Karczewski  
prof. dr M. Kuczma  
mgr A. Mąkowski  
prof. dr Z. Pawlak  
prof. dr A. Piekara

prof. dr Z. Semadeni  
prof. dr J. Stankowski  
prof. dr M. Subotowicz  
doc. dr S. Turnau  
doc. dr J. Wdowczyk

Redaguje Kolegium w składzie:  
doc. dr T. Hofmokl — z-ca red. nac.  
dr T. B. Iwiński  
dr M. Kordos — red. nac.  
mgr K. Prażmowski — red. techn. graf.  
doc. dr M. Święcki  
D. Tys — sekr. red.  
Adres Redakcji  
ul. Hoża 69 pok. 151,  
00-681 Warszawa,

Zakład Narodowy im.  
Ossolińskich — Wydawnictwo  
Wrocław, Oddział w Warszawie  
Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.  
wyd.; 2,50 ark. druk.;  
papier offsetowy III kl. 80 g, 61 × 86  
Wydrukowano w Drukarni im.  
Rewolucji Październikowej  
Warszawa, ul. Mińska 65.  
Nr zam. 1257/76 J-101

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60, — cena prenumeraty półrocznej zł 30, —

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach:  
— do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i na cały rok następny  
— do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego.  
Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienie w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”.  
Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW oraz prenumeratorki indywidualni, zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.  
Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej.

**Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich**

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTA”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.  
Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.

Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, konto PKO nr 1-6-100312

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7

00-068 Warszawa, Poland or with

— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68,

Bundesrepublik Deutschland.

— Earls Court Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain,

— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia.

Cena 1 egzemplarza zł 5,—

nr indeksu 35723/35550





## Ludwik ZAJDLER, astronom

Gwiazda Betlejemska ... Na szopkach i kartach świątecznych wyobrażana bywa zwykle jako „gwiazda z ogonem” — czyli kometa. Jednak wielowiekowa tradycja łączy zawsze pojawienie się komety z nieszczęściem, wojną, zarazą, śmiercią królów. Nie! Kometa stanowczo tu nie pasuje. Nie mogła Gwiazdą Betlejemską być także planeta Wenus: ta najjaśniejsza po Księżycu ozdoba naszego nieba zbyt dobrze była zawsze znana, by jej ukazanie się mogło być poczytane za coś niezwykłego. A więc?

Jedynym źródłem mitu o Gwiazdzie Trzech Króli jest relacja ewangelisty Mateusza. Przytoczmy te jej fragmenty, które mają jakieś znaczenie przy próbie wyjaśnienia zjawiska jako zjawiska astronomicznego: „Gdy się tedy narodził Jezus w Bethlejem Juda, we dni Heroda króla: oto Mędrcy ze wschodu słońca przybyli do Jerozolimy, mówiąc: Gdzie jest ten, który się narodził Król Żydowski? Albowiem widzieliśmy gwiazdę jego na wschód słońca, i przyjechaliśmy pokłonić się jemu” — czytamy w rozdz. II Ewangelii według Mateusza, w pięknej, szesnastowiecznej polszczyźnie ks. Jakuba Wujka, tłumaczeniu z łaciny. Mędrcom skierowanym przez Heroda do Betlejem — znajdującego się 8 km na południe od Jerozolimy — „gwiazda” służyła znów za przewodniczkę: „A oto gwiazda, którą byli widzieli na wschód słońca, szła przed nimi, aż przyszedłszy stanęła nad miejscem, gdzie było dziecię”.

Nietrudno w przybliżeniu zlokalizować zjawisko na niebie, opierając się na określeniu „na wschód Słońca”, co należy rozumieć jako „na wschód od Słońca”, w pobliżu ekliptyki, w południowej lub południowo-zachodniej części nieba. Zjawisko musiało utrzymywać się przez szereg dni podróży Mędrców przybyłych zapewne z Babilonii, szczególnie spektakularnie przedstawiając się tuż przed zachodem Słońca. Opowieść w wersji ewangelicznej rozpowszechniła się od czasów św. Augustyna (Augustus Aurelius, 354–430), nie wiadomo jednak, kiedy w tej formie została zredagowana. Jeśli jej autorem jest rzeczywiście Mateusz Ewangelista, to jej powstanie należałoby datować na lata 45–64, przy czym napisana powinna była być w języku aramejskim. Tymczasem znamy ją jedynie z przekładów greckich i znacznie późniejszych — łacińskich. Trudno dziś dojść, co dodali lub ujęli tłumacze i komentatorzy. Wiemy na przykład, że dopiero mnich anglosaski Beda Venerabilis (673–735) doliczył się, że owych Mędrców było trzech i wymienił nawet ich imiona: Kacper, Melchior i Baltazar ...

Opowieść stała się tematem dyskusji dopiero po wprowadzeniu rachuby lat „od narodzenia Chrystusa”, której twórcą był zakonnik Dionizjusz Mały (ok. 525 r.). Próbowano wtedy, zresztą bez powodzenia, datę narodzin Chrystusa potwierdzić na drodze astronomicznej, przez odtworzenie widoku nieba w początku ery Dionizjusza. Sam Dionizjusz zresztą za „rok pierwszy od narodzenia Chrystusa” przyjął rok 753 „od założenia Rzymu” jako szczególnie dogodny, gdyż zbiegały się w tym roku różne cykle kalendarzowe. Według powszechnego mniemania Chrystus powinien był narodzić się kilka lat wcześniej. Sprawa ta nie jest bez znaczenia przy próbach wyjaśnienia istoty zjawiska Gwiazdy Betlejemskiej.

Pierwszym, który wszedł do literatury jako twórca nowej interpretacji Gwiazdy Betlejemskiej, był hiszpański Żyd, uczonego rabin Izaak ben Jehuda zwany Abardanel lub Abrawanel (1437–1508). Inspiracją dla niego stała się obserwowana w 1463 roku koniunkcja (pozorne zbliżenie na niebie) dwóch jasnych planet — Jowisza z Saturnem — na tle gwiazdozbioru Ryb.

O ile pojawienie się jednej z jasnych planet — nawet w ciągu dnia — nie jest czymś niezwykłym, zwłaszcza w krajach, gdzie niebo rzadko bywa zachmurzone, o tyle złączenie dwóch lub więcej planet powinno zwrócić szczególną uwagę. I to właśnie „mędrców ze Wschodu”, którym na pewno nie obca była astrologia. A że od dawna zjawiskom na niebie przypisywano zdarzenia na Ziemi, świadczą liczne zapiski kronikarzy. I tak, Józef Flawiusz podaje, że Mojżesz urodził się w trzy lata po wielkiej koniunkcji planet (Merkury, Wenus, Mars i Saturn, a także Księżyc i Słońce) w gwiazdozbiorze Ryb, co — jak wynika z obliczeń — miało miejsce w marcu 1334 r. p.n.e. Podobnie, według źródeł arabskich, narodzin Mahometa poprzedziła koniunkcja Jowisza z Saturnem w Skorpionie, która — zgodnie z obliczeniami dzisiejszymi — utrzymywała się w ciągu marca i kwietnia 571 roku.







Podobnych zestawień „jako na niebie, tako na Ziemi” można by wyliczyć co niemiara, jeśli dodać przypadki zaćmień Słońca i Księżyca oraz pojawienia się komet. Miała swoją kometa także wojna trojańska, a była nią — jak to uzasadnia zmarły niedawno prof. Michał Kamiński — kometa Halleya z roku 1163 p.n.e.

Myśl Abardanela podjął po stu latach Jan Kepler, który w roku 1603 obserwował podobną koniunkcję Jowisza z Saturnem. A ponieważ wkrótce (w 1604 r.) ukazała się na niebie gwiazda Nowa w sąsiedztwie wciąż jeszcze w pobliżu znajdujących się planet, Kepler uznał, że zjawiska te łączy jakiś związek przyczynowy.

Posługując się niezbyt dokładnymi, aczkolwiek już na systemie kopernikowskim opartymi tablicami „pruskimi” (*Tabulae prutenicae* Erazma Reinholda z roku 1551), Kepler obliczył, że potrójna koniunkcja Jowisza, Saturna i Marsa miała miejsce w lutym i marcu roku 748 od założenia Rzymu, tj. w roku 5 p.n.e. Jeśli więc — konkluduje Kepler — w tym czasie ukazała się na niebie również nieznana dotąd jasna gwiazda, musiało to zwrócić powszechną uwagę ...

Również data — rok 5 p.n.e. — wydaje się dość prawdopodobna: Ewangelista Mateusz podaje (rozd. II, 19), że król Herod zmarł wkrótce po narodzeniu Chrystusa; śmierć tego ostatniego przypada na rok 4 p.n.e. Z innych dociekań wynika nawet, że datę narodzin Chrystusa należałoby cofnąć do roku 9 p.n.e.

Ciekawe, że ukazanie się nowej gwiazdy obserwował również Tycho Brahe, jeszcze w roku 1572, w Kasjopei. Już wtedy przypominano, że zjawisko takie obserwowano w latach 1264 i 945, a więc w odstępach nieco powyżej 300 lat. Ekstrapolacja wstecz wskazuje na hipotetyczną datę narodzin Chrystusa. Na tym bodaj oparł się Kepler, łącząc zjawisko Nowej z koniunkcją planet. W tych czasach nie znano jeszcze istoty gwiazd „nowych”, toteż „cud” ten przyjmowano za dobrą monetę. Ale już Encke (1791–1865) wykazał, że o potrójnej koniunkcji w roku 748 od założenia Rzymu nie ma w ogóle mowy, zaszła jedynie podwójna — Saturn i Jowisz — i to w roku 747 ab urbe condita, czyli w roku 6 lub 7 p.n.e.

Oczywiście, gwiazdy nowe pojawiają się zupełnie nieoczekiwanie i wszelkie spekulacje na temat ich związku z Gwiazdą Trzech Mędrców są bezcelowe. Brak zresztą jakiegokolwiek wzmianki o podobnym wydarzeniu w okresie panowania Heroda, niczego podobnego nie notuje najwybitniejszy astronom owych czasów — Klaudiusz Ptolemeusz (ok. 100–168 r.), choć zjawisko takie odnotował Hipparch (190–125 p.n.e.). Sprawie „Gwiazdy Betlejemskiej” poświęcono wiele setek pozycji bibliograficznych, prócz religionistycznej, także literatury astronomicznej. Niektórzy przypuszczają, że mogła nią być najjaśniejsza gwiazda południowego nieba — Syriusz. Gwiazda ta odgrywała dużą rolę w astronomii Egiptu, obserwowano ją w czasie tzw. heliakalnego wschodu, to jest tuż przed wschodem Słońca, kiedy znajdowała się blisko — ale na zachód od Słońca. Przypadało to na koniec czerwca, w pobliżu daty rozpoczynającego się wylewu Nilu i było sygnałem rozpoczęcia się nowego roku kalendarzowego. Zgodnie z relacją Mateusza gwiazda miała być jednak „na wschód od Słońca”, a więc mogła być obserwowana wieczorem, przed zapadnięciem zmroku. Takie usytuowanie Słońca względem Syriusza przypada w marcu i kwietniu, w końcu kwietnia następuje już tzw. heliakalny zachód Syriusza i od tej pory aż do końca czerwca gwiazda niknie w blasku Słońca. W tym przypadku musielibyśmy przyjąć, że Chrystus urodził się nie „na Boże Narodzenie” lecz w porze Wielkanocy. Hipoteza ta wymagałaby jeszcze dużej korekty słów Ewangelisty: gwiazda Syriusz nie mogła przecież być „przewodniczką” Mędrców ze Wschodu, ponieważ widywano ją od lat o tej samej porze.

Ale może Mateusz w innym sensie podał tę interesującą nas od prawie dwóch tysięcy lat informację? Może nie o miejsce mu chodziło (słowa „gwiazda stanęła nad miejscem, gdzie było dziecko” nie mają przecież sensu), lecz o czas tego wydarzenia, datę poprzedzającą heliakalny zachód Syriusza?

Największym jednak powodzeniem cieszy się wersja Abardanela, którą podjął Kepler i inni: koniunkcja kilku planet. Astronom F. K. Ginzl, autor trzytomowego dzieła „Handbuch der mathematischen und technischen Chronologie” (1914 r.) podaje współrzędne planet: Marsa, Jowisza i Saturna dla okresu od 9 do 1 roku p.n.e. w odstępach 10 dni, z których wynika, że w owym okresie miało miejsce kilka „spotkań” dwóch lub trzech z tych planet. Tylko te wchodzą w rachubę — jeśli chodzi o Gwiazdę Betlejemską — które mogły być obserwowane na południowo-zachodnim niebie „na wschód Słońca”, z nich najlepiej „udokumentowana” jest koniunkcja obserwowana w gwiazdozbiornie Ryb w okresie od kwietnia do czerwca roku 7 p.n.e. Największe zbliżenie dwóch planet (Jowisz i Saturn) nastąpiło ok. 25 maja, kiedy obie planety dzieliła odległość dwóch tarcz Księżyca. Mars znajdował się wówczas po przeciwległej stronie nieba.







W tym przypadku, podobnie jak w wersji związanej z heliakalnym zachodem Syriusza, akcja na scenie betlejemskiej powinna się była rozegrać na wiosnę. Hipotezę, że Gwiazdą Trzech Króli była kometa, odrzuciliśmy na samym początku raczej z uwagi na złą opinię, jaką ci przybysze z Kosmosu mają od dawien dawna. Ale my, ludzie dwudziestego wieku, patrzmy na to inaczej. Dla nas każdy zapis w starych kronikach, jeśli zawiera obok omówienia faktów historycznych opis jakiegoś szczególnego wydarzenia na niebie gwieździstym, zjawiska, którego datę można dziś dokładnie ustalić, stanowi bezcenny materiał dla dociekań chronologicznych. Dla porządku należy więc podać, że jedyną kometa, o której wolno tu wspomnieć, to kometa Halleya, której przejście przez punkt przysłoneczny wypadło w roku 11 p.n.e. Nie wchodzi zatem w rachubę. Metody astronomiczne pozwoliły w licznych przypadkach ustalić daty wydarzeń historycznych z dokładnością nie tylko dnia, ale godziny i minuty, jak w przypadku bitwy pomiędzy Lidyczykami i Medami podczas zaćmienia Słońca w roku 585 p.n.e. W przypadku Gwiazdy Betlejemskiej wszelkie dochodzenia prowadzą raczej do nikąd. Być może, że zapis Mateusza Ewangelisty zawiera po prostu alegorię: każdemu człowiekowi przypisywano kiedyś gwiazdę, która rozbłysła w chwili jego urodzenia, a gaśła w chwili śmierci.



## Zadania

Redaguje mgr Andrzej MAKOWSKI

**M 106.** Udowodnić, że jeżeli  $0 < \alpha < \pi$ , to

$$\operatorname{ctg} \frac{1}{4} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha > 2.$$

Rozwiązanie na str. 4

**M 107.** Udowodnić, że jeżeli  $a + b + c = 0$ , to

$$2(a^4 + b^4 + c^4) = (a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

Rozwiązanie na str. 12

**M 108.** Udowodnić, że liczba przedstawień liczby naturalnej  $n$  w postaci sumy różnych składników naturalnych równa jest liczbie przedstawień liczby  $n$  w postaci sumy składników naturalnych nieparzystych.

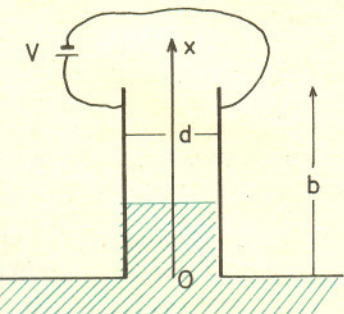
(W obydwu przypadkach liczby składników nie są ustalone, dwóch zaś przedstawień różniących się tylko porządkiem składników nie uważamy za różne).

Rozwiązanie na str. 13

Redaguje dr Andrzej ZIEMIŃSKI

**F 36.** Kondensator płaski ustawiony pionowo został umieszczony w naczyniu z olejem, tak że dolna część kondensatora stykała się z powierzchnią cieczy (patrz rysunek obok). Okładki kondensatora połączone z baterią, która utrzymuje na nich stałą różnicę potencjałów,  $V$ . Zaobserwowano, że poziom oleju między okładkami podniósł się na wysokość  $h$ . Zastanówcie się, dlaczego olej został wciągnięty do kondensatora. Jaka była wartość  $h$ , jeżeli parametry geometryczne kondensatora wynosiły: odległość między okładkami —  $d$ , szerokość okładek —  $a$ , ich wysokość —  $b$ , gęstość oleju —  $\rho$ , jego stała dielektryczna —  $\epsilon$ , a przyspieszenie grawitacyjne Ziemi —  $g$ .

Rozwiązanie na str. 5







Dr. Jan A. GAJ

## KONKURS ŚWIĄTECZNY

Rozważając możliwość przystąpienia do konkursu, Czytelnik zada sobie z pewnością pytanie, po co hodować kryształy. Wyniki pracy uczestników konkursu będą miały jedynie wartość dydaktyczną i estetyczną. Należy sobie jednak zdać sprawę z licznych zastosowań kryształów w nauce i technice. Praktycznie wszystkie półprzewodnikowe elementy elektroniczne, rezonatory kwarcowe, polaryzatory i cały szereg innych elementów optycznych, ośrodki aktywny szeregu laserów — wszystko to są kryształy.

Istnieje w związku z tym cały szereg niejednokrotnie bardzo skomplikowanych metod technologicznych otrzymywania kryształów różnych substancji. Większość z nich zupełnie nie nadaje się do zastosowania w warunkach domowych, znajdują się jednak sposoby dostępne dla każdego Czytelnika. Nie zwlekając dłużej, zastanówmy się

## JAK SIĘ TO ROBI?

Najłatwiej z roztworu wodnego. Wytwarzamy roztwór nasycony na przykład cukru, o nieco podwyższonej temperaturze. Do roztworu wpuszczamy na nitce mały kryształek, od którego rozpoczniemy naszą hodowlę. W czasie stygnięcia cukier z roztworu będzie wydzielal się między innymi na powierzchni kryształka powiększając jego wymiary. Powtarzając ten proces wielokrotnie można wyhodować spory kryształ. Korzystne jest, jeżeli proces stygnięcia przebiega powoli, co można osiągnąć przeprowadzając go w termosie. Inną metodą, podobną do wyżej opisanej, jest krystalizacja ze stopionej masy. Oczywiście, w naszych warunkach możemy ją przeprowadzać tylko dla kryształów o dostatecznie niskiej temperaturze topnienia. Cały proces przebiega tak samo, tylko zamiast roztworu nasyconego stosujemy ciecz w temperaturze krzepnięcia.

Jestem przekonany, że Czytelnicy nie ograniczą się do podanych tu sposobów, a wprowadzą własne udoskonalenia lub całkowicie oryginalne metody. Obecnie pozostaje nam ogłosić

## WARUNKI KONKURSU

1. Zadaniem uczestników jest wyhodować po jednym kryształku trzech substancji: soli kuchennej, cukru (sacharozy) i tiosiarczanu sodu (główny składnik utrwalacza fotograficznego).
2. Zewnętrzna forma kryształów ma odzwierciedlać ich strukturę.
3. Podstawowym kryterium oceny jest iloczyn mas trzech kryształów. W razie istotnych różnic w jakości nadesłanych kryształów zostaną wprowadzone również punkty za jakość, ocenioną na podstawie wyglądu zewnętrznego oraz — w razie potrzeby — dodatkowych badań.
4. Prace konkursowe, które należy nadsyłać do dnia 31.I.1977 r., będą oceniane przez jury w składzie:

1. Doc. dr T. Hofmoki
2. Doc. dr M. Świącki
3. Dr Jan A. Gaj
5. Przewiduje się następujące nagrody:
  - 2 mikroskopy
  - rzutnik do slide'ów
  - 5 zestawów „Młodego chemika”

Czytelnicy, którzy nadesłają najlepsze kryształy każdej z trzech substancji, zostaną dodatkowo wyróżnieni (o ile nie zdobędą wymienionych nagród) niezależnie od tego, jakie będą ich pozostałe kryształy.

Jeszcze jedna istotna uwaga: należy bardzo starannie opakować przesyłane kryształy zabezpieczając je przed wpływem wstrząsów (wata) i wilgoci (np. torebką z folii).

Życząc powodzenia!



Rozwiązanie zadania M 106

Zachodzą równości:

$$\operatorname{ctg} \frac{1}{4} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \frac{1}{4} \alpha}{\sin \frac{1}{4} \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} =$$

$$= \frac{\cos \frac{1}{4} \alpha \sin \alpha - \cos \alpha \sin \frac{1}{4} \alpha}{\sin \frac{1}{4} \alpha \sin \alpha} =$$

$$= \frac{\sin \left( \alpha - \frac{1}{4} \alpha \right)}{\sin \frac{1}{4} \alpha \sin \alpha} = \frac{\sin \frac{3}{4} \alpha}{\sin \frac{1}{4} \alpha \sin \alpha} =$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{4} \alpha \left( 3 \cos^2 \frac{1}{4} \alpha - \sin^2 \frac{1}{4} \alpha \right)}{\sin \frac{1}{4} \alpha \sin \alpha} =$$

$$\frac{\cos^2 \frac{1}{4} \alpha + \sin^2 \frac{1}{4} \alpha + 2 \left( \cos^2 \frac{1}{4} \alpha - \sin^2 \frac{1}{4} \alpha \right)}{\sin \alpha} =$$

$$= \frac{1 + 2 \cos \frac{1}{2} \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{2 \cos \frac{1}{2} \alpha}{2 \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha} =$$

$$= \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \frac{1}{2} \alpha}.$$

Ponieważ dla  $\alpha \in (0, \pi)$  jest  $\frac{1}{\sin \alpha} \geq 1$ ,

$\frac{1}{\sin \frac{1}{2} \alpha} \geq 1$  i  $\sin \alpha \neq \sin \frac{1}{2} \alpha$  (dlaczego?), więc

nie mogą w obydwu nierównościach wystąpić dla tej samej liczby  $\alpha$  znaki równości, zatem

$\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \frac{1}{2} \alpha} > 2$ , co kończy żądany dowód.





## Rozwiązanie zadania F 36

Zjawisko wciągania oleju, tzn. dielektryka, do wnętrza kondensatora należy do tej samej kategorii zjawisk, co np. przyciąganie skrawków papieru przez naelektryzowane ciała.

Przyczynę tego łatwo sobie uświadomić analizując zachowanie się dielektryka w niejednorodnym polu elektrycznym. Powstałe ładunki polaryzacyjne podlegają wypadkowej sile skierowanej ku obszarom większego natężenia pola. W jednorodnym polu wypadkowa siła działająca na dielektryk jest równa zeru.

Ponieważ kondensator płaski ma skończone wymiary, na jego brzegach występują niejednorodności pola elektrycznego, które powodują wciąganie oleju do wnętrza. Siłę wciągającą dielektryk jest bardzo trudno obliczyć analizując rozkłady ładunków itd. Natomiast można znaleźć jej wartość stosując znany związek między składowymi wektora siły a energią potencjalną układu przewodników:

$$F_i = - \frac{dU}{dx_i}$$

Stały potencjał na okładkach kondensatora podtrzymywany jest za pomocą baterii o bardzo dużej pojemności.

Przy wciąganiu dielektryka do wnętrza kondensatora zwiększa się ładunek zgromadzony na jego okładkach. Dopływa on z baterii, której energia maleje o wartość  $V \cdot \Delta Q$ , gdzie  $\Delta Q$  jest ładunkiem dostarczonym do kondensatora. Jednocześnie wzrasta energia pola zawartego w kondensatorze. Ostatecznie, rolę energii mechanicznej dla układu kondensator — bateria odgrywa wielkość:

$$U = U_{\text{kond}} - V \cdot Q = \frac{VQ}{2} - VQ = - \frac{VQ}{2} = - \frac{V^2 C}{2}$$

Składową siły (tutaj przyjmujemy, że siła jest skierowana wzdłuż osi  $x$  — patrz rysunek przy tekście zadania) można obliczyć różniczkując energię,  $U$ , względem odpowiedniej współrzędnej:

$$(1) \quad F_x = - \frac{dU}{dx} = \frac{V^2}{2} \frac{dC}{dx}$$

Pojemność kondensatora płaskiego wypełnionego do wysokości  $x$  dielektrykiem jest sumą pojemności 2 kondensatorów: z dielektrykiem o wysokości  $x$  i próżniowego o wysokości  $b-x$ ,

$$(2) \quad C = \frac{\epsilon_0 a}{d} (\epsilon \cdot x + b - x).$$

Stąd wartość siły  $F$  wynosi

$$(3) \quad F_x = \frac{V^2}{2} \frac{\epsilon_0 a}{d} (\epsilon - 1).$$

Wciąganiu dielektryka do kondensatora przeszkadza siła ciężkości części oleju, znajdującej się już we wnętrzu kondensatora. Warunek równowagi odpowiada równości obu sił:

$$m \cdot g = F_x,$$

czyli:

$$(4) \quad \rho \cdot a \cdot d \cdot x \cdot g = \frac{V^2 \epsilon_0 a (\epsilon - 1)}{2d} \quad \text{dla } x = h.$$

Stąd:

$$(5) \quad h = \frac{V^2 \epsilon_0 (\epsilon - 1)}{2d^2 \rho g}.$$

Do takiej wysokości podniesie się poziom oleju wewnątrz kondensatora.

Opisana niżej gra jest jednym z wariantów gry *eleusis* (R. Abbot, 1959). Jej pierwotną wersję, wraz z wariantem *delfy* (M. D. Kruskal, 1965) można znaleźć w *Przewodniku gier* L. Pijanowskiego.

A oto nasza wersja:

**Grający** (co najmniej 3 osoby) otrzymują od **sędziego** (dodatkowa osoba) tę samą ilość kart (z jednej lub dwu talii — co najmniej po 10 kart).

Sędzia ustala **reguły** gry, to znaczy zapisuje na kartce zasadę, według której grający mogą odkładać karty na **stos**, i kładzie tę kartkę tak, aby grający nie mogli zobaczyć, co na niej zostało napisane. Następnie zapoczątkowuje stos kładąc na stole (odkrytą) kartę (jedną z tych, jakich nie rozdał).

Grający kolejno odkładają karty na stos. Jeżeli karta została odłożona niezgodnie z ustalonymi regułami, sędzia zwraca ją grającemu i kartę kładzie następny z grających.

Grający wyłącza się z gry zapisując na kartce odgadniętą regułę i odkładając kartkę (również bez pokazania pozostałym). Nie bierze on już dalej udziału w odkładaniu kart na stos.

Gra kończy się w momencie, gdy jeden z grających nie ma już kart (wówczas on jest zwycięzcą), bądź gdy wszyscy grający wyłączyli się z gry.

W tym ostatnim przypadku zwycięzcą zostaje ten z grających, który pierwszy prawidłowo odgadł ustaloną przez sędziego regułę. Gdy nikt nie odgadł — remis.

Uczestnicy powyższej gry są w sytuacji zbliżonej do badacza-przyrodnika, który usiłuje za pomocą mniej lub bardziej przypadkowych działań-eksperymentów oraz interpretowania działań kolegów — badaczy, odgadnąć reguły — prawa przyrody.

Jak dotąd, odgadnięte reguły okazały się nieźle pomyślane. Łatwo sobie jednak wyobrazić, co by było, gdyby reguły zostały pomyślane np. złośliwie.

Stąd wysokie wymagania, jakie musimy w naszej grze postawić inteligencji i wyobraźni sędziego (czy potrafiłby odgadnąć ustaloną przez siebie regułę).

Proponujemy więc sędziemu, aby (przynajmniej na początku) posłużył się jedną z podanych niżej reguł. Ułatwi to zadanie grającym (będą wiedzieli, jakie reguły są możliwe), ale ich zadanie i tak jest przecież ciężkie.

## Propozycje reguł:

Na zmianę karty czarne i czerwone.

Kolejno pik, kier, karo, trefle, pik itd.

Na parzystą kładziemy czerwoną, na nieparzystą — czarną.

Kolejne karty: ..., 9, 10, W, D, K, A, 2, 3 itd. niezależnie od koloru.

Co trzecia karta pikowa, inne dowolne.

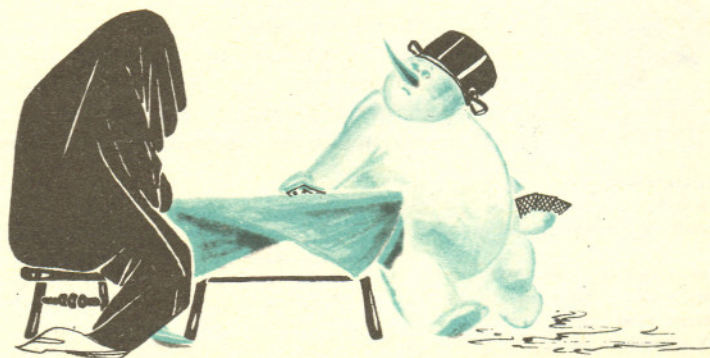
Po karcie wyższej od siódemki niższą od ósemki i odwrotnie.

Byle nie figury.

Trzy czerwone, dwie czarne, trzy czerwone itd.

Na zmianę parzyste i nieparzyste.

Po udanym odłożeniu kładziemy kartę czerwoną, po nieudanym — czarną.





# Album cząstek

Mgr Małgorzata BERBECKA

Doc. dr hab. Tomasz HOFMOKL

Każda cząstka była kiedyś tą nową, podniecającą fizyków. Każda niemal stanowiła sensację naukową, niekiedy nawet na większą skalę, gdy jej odkrycie zapoczątkowywało nowy rozdział fizyki, innym razem odkrycie było potwierdzeniem czegoś dobrze znanego i ugruntowanego. Jak to jednak było?

## Kto? Gdzie? Kiedy? Jak?

zobaczył po raz pierwszy nową cząstkę. Na te pytania chcemy odpowiedzieć. Pokażemy przy tym reprodukcje 18 zdjęć, które ich autorom pozwoliły po raz pierwszy stwierdzić, a czasem tylko wysunąć hipotezę istnienia nowych cząstek. Za każdym z tych zdjęć kryje się wielka przygoda badawcza — zobaczenie czegoś całkiem nowego. W tablicy, w której zamieszczamy daty odkryć stosunkowo długożyciowych cząstek (z wyłączeniem rezonansów), podajemy również odnośnik do pracy oryginalnej. Czytelnik mający dostęp do odpowiednio zaopatrzonej biblioteki naukowej może przesłedzić dokładnie argumentację autorów prowadzącą do takiej a nie innej interpretacji zaobserwowanego zdarzenia.

## Jak zobaczyć?

Jak zobaczyć cząstki — najmniejsze z poznanych dotychczas składników materii? Odpowiedź, wbrew oczekiwaniu, jest prosta. W zasadzie tak samo, jak można obejrzeć każdy inny obiekt. Widzenie, postrzeganie w świetle widzialnym to badanie oddziaływań fotonów z obserwowanym obiektem. Widzenie cząstek to badanie ich oddziaływań z różnymi innymi cząstkami, wliczając w to kwanty pola elektromagnetycznego.

Cząstka naładowana przebiegając przez materię oddziałuje elektromagnetycznie z elektronami powłok atomowych wybijając je niekiedy z orbity. Tak zjonizowany atom swobodny albo związany w związku chemicznym świadczy, że blisko niego mogła przejść cząstka naładowana (mógł ulec jonizacji na skutek działania innych czynników). Jeżeli położenia zjonizowanych atomów układają się regularnie na jakiejś krzywej oznacza to, że przez ośrodek przeszła naładowana cząstka pozostawiając za sobą ślad w postaci zjonizowanych atomów. Ślad ten jest jednak niewidoczny, należy go ujawnić korzystając z takiego procesu fizycznego, który odróżnia atomy zjonizowane od obojętnych elektrycznie. Znamy kilka takich procesów i każdy z nich jest wykorzystywany w innych detektorach śladowych cząstek.

Omówimy tu tylko te metody detekcji, które potrzebne są do zrozumienia zamieszczonych zdjęć. Emulsja fotograficzna po wywołaniu ulega zaczerwienieniu w miejscach, przez które przeszła cząstka jonizująca.

Para przesycona skrapla się w miejscach, w których są jony. Krople cieczy szybko rosną do rozmiarów pozwalających na zaobserwowanie. Fotografując kropelki cieczy możemy zobaczyć ślad cząstki, która wywołała jonizację.

Detektor tego typu nazywamy komorą Wilsona, jeżeli stan przesylenia pary osiąga się przez gwałtowne rozprężenie gazu (adiabaticzne). Komora Wilsona jest czuła przez okres około 0,1–1,0 s po rozprężeniu. Odmianą komory Wilsona o pracy ciągłej jest komora dyfuzyjna, w której stan przesylenia pary utrzymuje się w niewielkim obszarze między gorącą i zimną ścianką naczynia wskutek procesu dyfuzji.

Wrzenie w cieczy przegrzanej rozpoczyna się w obszarze, w którym są jony. Fotografując przegrzaną ciecz w ułamku sekundy po przejściu cząstki jonizującej zarejestrujemy pęcherzyki pary tworzące jej ślad. Detektor tego typu nosi nazwę komory pęcherzykowej. W zależności od użytej cieczy mówimy o komorach wodorowych, deuteronowych, propanowych itp.

A jak zobaczyć cząstki obojętne elektrycznie?

Cząstki neutralne nie jonizują atomów, nie zostawiają więc śladów. O ich istnieniu wnioskujemy, jeżeli uda się zaobserwować rozpad. Na przykład hiperon  $\Lambda$  rozpada się na proton i mezon  $\pi^-$ . W detektorze obserwujemy ten rozpad jako widełki  $<$ . Ramiona wideł to ślady dwóch cząstek: protonu i mezonu  $\pi^-$ . Mierząc pędy obu cząstek i kąt rozlotu możemy obliczyć masę cząstki neutralnej, która rozpadła się na cząstki naładowane.



W 12 numerze „Deltę” z 1974 r. zamieściliśmy tablicę znanych wówczas cząstek elementarnych. O odkryciu nowych cząstek typu wąskich rezonansów pisaliśmy w „Deltę” 6/1975. Czytelników zainteresowanych problematyką cząstek elementarnych odsyłamy do podręcznika G. Białkowskiego i R. Sosnowskiego „Cząstki elementarne” PWN 1971.



1 eV — jeden elektronowolt jest energią nabywaną lub traconą przez ładunek elementarny  $e$  podczas przebywania różnicy potencjałów 1 V.  
1 MeV =  $10^6$  eV, 1 GeV =  $10^9$  eV. Pęd cząstki wyrażamy w GeV/c. Masa jest równoważna energii, masę cząstek wyrażamy w MeV. 1 MeV odpowiada masie  $1,782678 \cdot 10^{-30}$  kg.

Wyjaśnienie skrótów tytułów czasopism występujących w tabeli

Phil. Mag.	— Philosophical Magazine
Proc. Roy. Soc.	— Proceedings of the Royal Society of London
Phys. Rev.	— Physical Review
Phys. Rev. Letters	— Physical Review Letters
Żur. eksper. i teor. fiz.	— Żurnal eksperimental'noj i teoretičeskoj fiziki
Zapis: Phys. Rev. 90, 167 (1953)	oznacza tom 90 czasopisma Physical Review z roku 1953, stronę 167 itp.

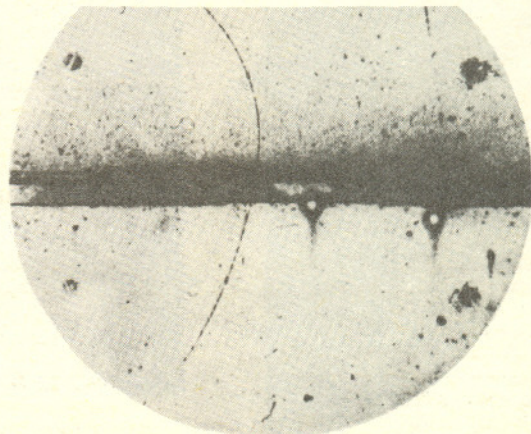


# Kiedy i kto odkrył?

Nazwa	Symbol	Masa w MeV	Rok odkrycia	Komunikat
1. elektron	$e^-$	0,511	1894	J. J. Thomson, Phil. Mag. 38, 358 (1894)
2. foton	$\gamma$	0	1900	M. Planck, Verhandlungen der Deutschen physikalischen Gesellschaft 2, 237 (1900) (koncepcja teoretyczna)
3. proton	$p$	938	1911	E. Rutherford, Phil. Mag. 21, 669 (1911)
4. neutron	$n$	939	1932	J. Chadwick, Proc. Roy. Soc. A 136, 692 (1932)
5. pozyton	$e^+$	0,511	1932	C. D. Anderson, Phys. Rev. 43, 491 (1933)
6. mion	$\mu$	106	1937	S. H. Neddermeyer, C. D. Anderson, Phys. Rev. 51, 884 (1937)
7. naładowany mezon K	$K^\pm$	494	1944	L. Leprince-Ringuet, M. Lh�eritier, Comptes Rendus 219, 618 (1944) R. Brown, U. Camerini, P. H. Fowler, H. Muirhead, C. F. Powell, D. M. Ritson, Nature 163, 82 (1949)
8. mezon pi	$\pi^\pm$	140	1947	C. M. G. Lattes, H. Muirhead, G. P. S. Occhialini, C. F. Powell, Nature 159, 694 (1947)
9. neutralna cz�stka rozpadaj�ca si� na dwie naładowane identyfikacja:	$V^0$		1947	G. D. Rochester, C. C. Butler, Nature 160, 855 (1947)
hiperon lambda	$\Lambda$	1116		R. Armenteros, K. H. Barker, C. C. Butler, A. Cachon, A. H. Chapman, Nature 167, 501 (1951)
mezon K	$K^0$	498		
10. mezon pi zero	$\pi^0$	135	1950	A. G. Carlson, J. E. Hooper, D. T. King, Phil. Mag. 41, 701 (1950)
11. hiperon sigma plus	$\Sigma^+$	1189	1953	C. M. York, R. B. Leighton, E. K. Bjornerud, Phys. Rev. 90, 167 (1953) A. Bonetti, R. Levi Setti, M. Panetti, G. Tomasini, Nuovo Cimento 10, 1736 (1953)
12. hiperon sigma minus	$\Sigma^-$	1197	1953	W. B. Fowler, R. P. Shutt, A. M. Thorndike, W. L. Whittemore, Phys. Rev. 93, 861 (1954)
13. hiperon ksi minus	$\Xi^-$	1321	1953	E. W. Cowan, Phys. Rev. 94, 161 (1954)
14. hiperon sigma zero	$\Sigma^0$	1192	1955	W. D. Walker, Phys. Rev. 98, 1407 (1955)
15. antyproton	$\bar{p}$	938	1955	O. Chamberlain, E. Segr�, C. Wiegand, T. Ypsilantis, Phys. Rev. 100, 947 (1955)
16. antyneutron	$\bar{n}$	939	1956	B. Cork, G. R. Lambertson, O. Piccioni, W. A. Wenzel, Phys. Rev. 104, 1193 (1956)
17. neutrino elektronowe	$\nu_e$	0	1956	F. Reines, C. L. Cowan, Nature 178, 446 (1956)
18. antyhiperon lambda	$\bar{\Lambda}$	1116	1958	D. J. Prowse, M. Baldo-Coelin, Nuovo Cimento 10, 635 (1958)
19. hiperon ksi zero	$\Xi^0$	1315	1959	L. W. Alvarez, P. Eberhard, M. L. Good, W. Graziano, H. K. Ticho, S. G. Wojcicki, Phys. Rev. Letters 2, 215 (1959)
20. antyhiperon sigma minus	$\bar{\Sigma}^-$	1197	1960	Van Gan-Chan, Van Tsu-Tszen, V. I. Veksler, N. M. Viryasov, I. Vrana, Din Da-Tsao, Kim Khi In, E. N. Kladnitskaya, A. A. Kuznetsov, A. Mikhul, Nguen Din Ty, A. V. Nikitin, M. I. Solov'ev, �ur. eksper. i teor. fiz. 38, 1356 (1960)
21. antyhiperon sigma plus	$\bar{\Sigma}^+$	1189	1960	E. Amaldi, A. Barbaro-Galtieri, G. Baroni, C. Castagnoli, M. Ferro-Luzzi, A. Manfredini, M. Muchnik, V. Rossi, M. Severi, Nuovo Cimento 16, 392 (1960)
22. antyhiperon sigma zero	$\bar{\Sigma}^0$	1192	1960	J. Button, P. Eberhard, G. R. Kalbfleisch, J. E. Lannutti, G. R. Lynch, B. C. Magli�, M. L. Stevenson, Phys. Rev. Letters 4, 530 (1960)
23. antyhiperon ksi minus	$\bar{\Xi}^-$	1321	1962	H. N. Brown, B. B. Culwick, W. B. Fowler, M. Gailloud, T. E. Kalogeropoulos, J. K. Kopp, R. M. Lea, R. I. Louttit, T. W. Morris, R. P. Shutt, A. M. Thorndike, M. S. Webster, C. Baltay, E. C. Fowler, J. Sandweiss, J. S. Sanford, H. D. Taft, Phys. Rev. Letters 8, 255 (1962) CERN Laboratory, Phys. Rev. Letters 8, 257 (1962) (praca podpisana nazw� laboratorium)
24. neutrino mionowe	$\nu_\mu$	0	1962	G. Danby, J. M. Gaillard, K. Goulianos, L. M. Lederman, N. Mistry, M. Schwartz, J. Steinberger, Phys. Rev. Letters 9, 36 (1962)
25. antyhiperon ksi zero	$\bar{\Xi}^0$	1315	1963	C. Baltay, J. Sandweiss, H. D. Taft, B. B. Culwick, W. B. Fowler, J. K. Kopp, R. I. Louttit, J. R. Sanford, R. P. Shutt, D. L. Stonehill, R. Stump, A. M. Thorndike, M. S. Webster, Phys. Rev. Letters 11, 165 (1963)
26. hiperon omega	$\Omega^-$	1672	1964	V. E. Barnes, P. L. Connolly, D. J. Crennell, B. B. Culwick, W. C. Delaney, W. B. Fowler, P. E. Hagerty, E. L. Hart, N. Horwitz, P. V. C. Hough, J. E. Jensen, J. K. Kopp, K. W. Lai, J. Leitner, J. L. Lloyd, G. W. London, T. W. Morris, Y. Oren, R. B. Palmer, A. G. Prodell, D. Radoji�i�, D. C. Rahm, C. R. Richardson, N. P. Samios, J. R. Sanford, R. P. Shutt, J. R. Smith, D. L. Stonehill, R. C. Strand, A. M. Thorndike, M. S. Webster, W. J. Willis S. S. Yamamoto, Phys. Rev. Letters 12, 204 (1964)
27. antyhiperon omega	$\bar{\Omega}^-$	1672	1970	A. Firestone, G. Goldhaber, D. Lissauer, B. M. Sheldon, G. H. Trilling, Phys. Rev. Letters 26, 410 (1971)

## Pozyton $e^+$ rok 1932

Fotografując 2 sierpnia 1932 r.  lady cząstek promieniowania kosmicznego w komorze Wilsona umieszczonej w polu magnetycznym (stąd krzywizna toru) otrzymano zdjecie cząstki przechodzącej przez płytk  ołowianą. Po przej ciu przez ołów p d cząstki musi być mniejszy niż przed przej ciem, a więc promień krzywizny powinien ulec zmniejszeniu. Stąd można okre li  kierunek lotu cząstki (z dołu do góry na zdjeciu). Znając kierunek pola magnetycznego, stwierdzono, że jest to ślad cząstki dodatniej. Nie mógł to by  proton, bo zbyt mało energii stracił przy przej ciu przez płytk . Po wykluczeniu innych hipotez zidentyfikowano zdarzenie jako przej cie przez komor  dodatniego elektronu.

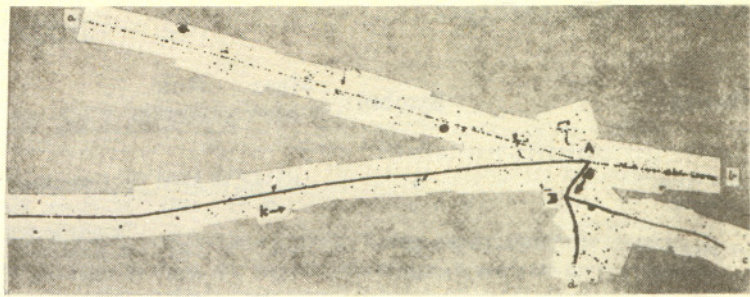
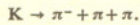




## Naladowane mezony K rok 1944

Pierwszej obserwacji dokonał L. Leprince-Ringuet i M. Lhéritier w 1944 r. Nie wiadomo wtedy o istnieniu mezonów  $\pi$ . Pierwszą identyfikację rozpadu  $K \rightarrow 3\pi$  podała grupa C. F. Powella w 1949 r. Załączone zdjęcie pokazuje przebieg zjawiska w emulsji jądrowej naświetlonej promieniami kosmicznymi. Cząstka K porusza się w kierunku punktu A. Kierunek ruchu oceniono ze wzrastania gęstości ziaren srebra wzdłuż toru. Z charakteru toru wynika, że cząstka ta musiała mieć masę mniejszą od masy protonu, a większą od masy mezonu  $\pi$ .

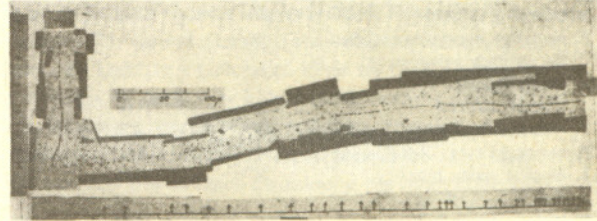
Cząstka t, sądząc po oddziaływaniu w punkcie B była mezonem  $\pi^-$ . Co zdarzyło się w punkcie A? Autorzy pracy doszli do wniosku, że cząstka K rozpadła się tam na trzy mezony  $\pi$ :



## Mezony $\pi^\pm$ rok 1947

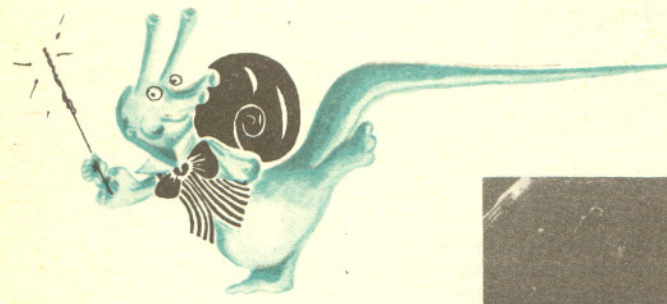
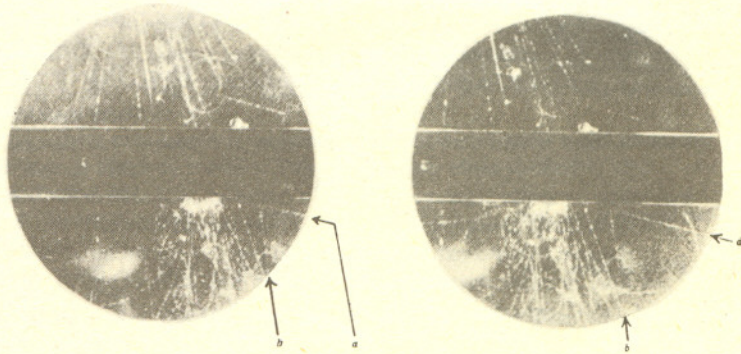
Autorzy pracy donoszą: „W ostatnich badaniach wykonanych techniką fotograficzną pokazano, że w skład promieniowania kosmicznego na dużych wysokościach wchodzi powolne cząstki naladowane o małej masie, które mogą wejść do jądra i spowodować jego rozpad. Wygodnie jest używać terminu mezon dla każdej cząstki o masie pośredniej pomiędzy masą protonu i elektronu. Kontynuując nasze eksperymenty znaleźliśmy zdarzenie wskazujące na istnienie mezonu, który przy końcu swej drogi produkuje wtórny mezon”.

Badano pierwotny ( $m_1$ ) i wtórny ( $m_2$ ) mezon oceniając ich masę na podstawie grubości ziaren (tor pierwotny jest gęstszy). Na reprodukowanym zdjęciu mezon  $m_1$  jest cięższy od mezonu  $m_2$ . Dziś wiemy, że zdjęcie przedstawia rozpad mezonu  $\pi$  na lepton  $\mu$  oraz niewidoczne neutrino.



## Cząstki V rok 1947

Na obu zdjęciach stereoskopowych z komory Wilsona zaobserwowano charakterystyczne widły (a, b). Cząstki promieniowania kosmicznego przechodzą przez komorę, w której znajduje się płytka ołowiana. Poniżej płytki zaobserwowano dwa ślady a i b. Analiza śladów wykazała, że muszą one pochodzić z rozpadu cząstki neutralnej, która nadleciała od strony płytki i rozpadła się na dwie cząstki naladowane. W wielu pracach traktuje się je pokazane obok zdjęcia jako pierwszą obserwację hiperonu  $\Lambda$ . Dopiero jednak w 1950 r. zidentyfikowano dwa rodzaje cząstek rozpadających się na charakterystyczne widły i nazywanych cząstkami V. Były to hiperony  $\Lambda$  i mezon  $K^0$ .



## Hiperon $\Sigma^+$ rok 1953 (niezależne ogłoszenie prac dwóch zespołów o odkryciu hiperonu $\Sigma^+$ ).

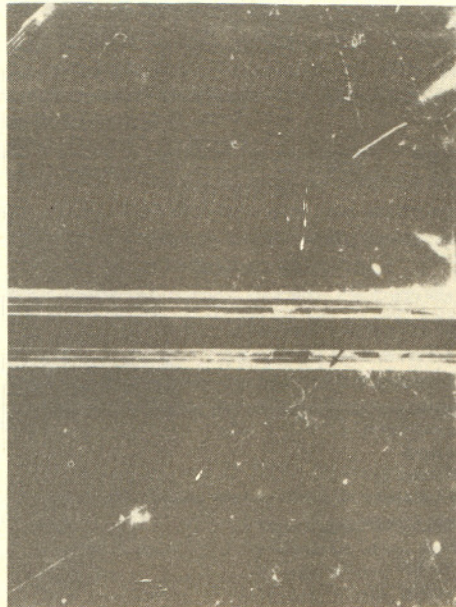
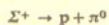
W komorze Wilsona, w której umieszczono płytkę ołowianą zaobserwowano ślad (oznaczony strzałką), który spowodowała cząstka wychodząca z płytki. Ślad ten ulega załamaniu.

Autorzy interpretują zaobserwowane zdarzenie jako rozpad ciężkiej cząstki o masie 1300–2300 MeV na proton i mezon  $\pi^0$  (C. M. York i zespół).

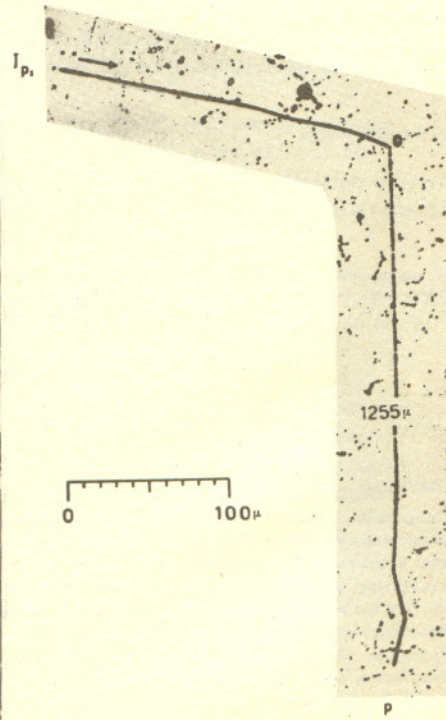
Cząstka  $J_{p_1}$  zarejestrowana w emulsji jądrowej rozpada się w punkcie 0 na proton i cząstkę obojętną, która nie pozostawia śladu. Autorzy sugerują, że produktami rozpadu są proton i mezon  $\pi^0$ .

(A. Bonetti i zespół).

Dziś rozpad ten zapisujemy następująco:



C. M. York i zespół.

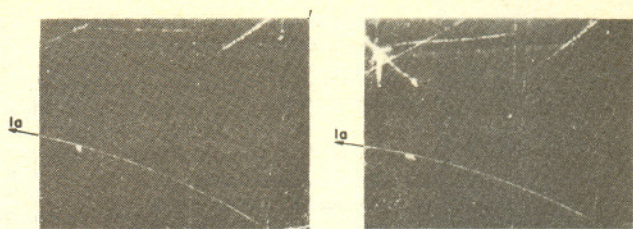


A. Bonetti i zespół.



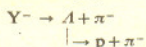
### Hiperon $\Sigma^-$ rok 1953

W komorze dyfuzyjnej zaobserwowano ujemną cząstkę  $\alpha$ , która rozpadła się na cząstkę  $\Lambda$  zidentyfikowaną jako mezon  $\pi^-$  (przebieg zdarzenia ilustruje para zdjęć stereoskopowych). Cząstkę  $\alpha$  nazywamy dziś hiperonem  $\Sigma^-$ , rozpada się on wedle schematu:  $\Sigma^- \rightarrow n + \pi^-$ . Neutron, jako cząstka obojętna elektrycznie, nie pozostawia śladu.

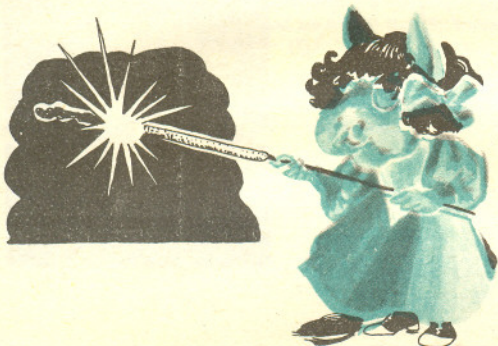
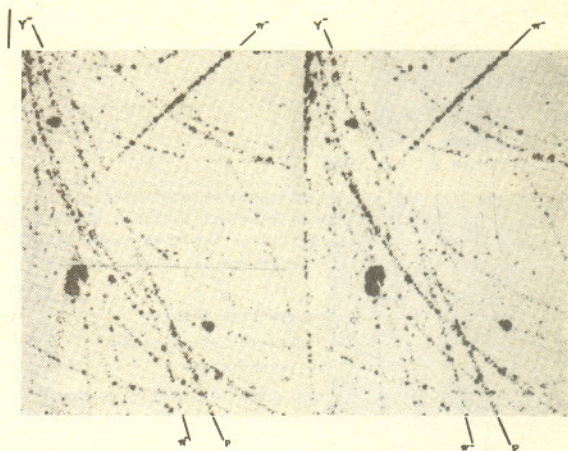


### Hiperon $\Xi^-$ rok 1953

Badając cząstki promieniowania kosmicznego w komorze Wilsona zaobserwowano rozpad kaskadowy (według ówczesnych oznaczeń):

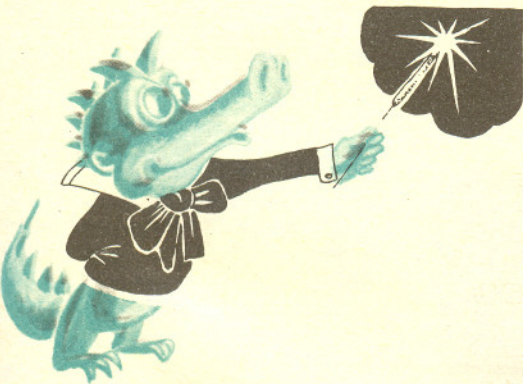
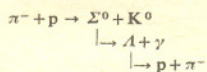


Zdjęcia stereoskopowe przedstawiają powiększony fragment obszaru, w którym zarejestrowano zdarzenie. Cząstka  $Y^-$  (dziś oznaczamy ją symbolem  $\Xi^-$ ) rozpada się w komorze na mezon  $\pi^-$  i na neutralny hiperon  $\Lambda$ . Jako cząstka obojętna jest on niewidoczny i rozpada się z kolei na proton ( $p$ ) i mezon  $\pi^-$ .



### Hiperon $\Sigma^0$ rok 1955

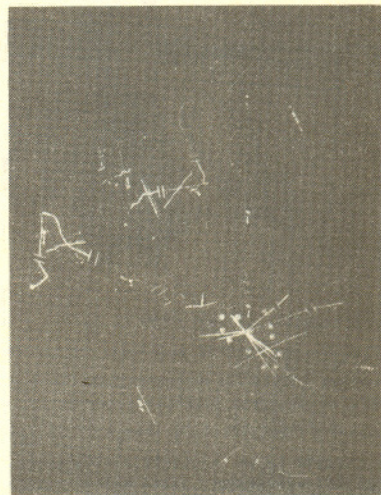
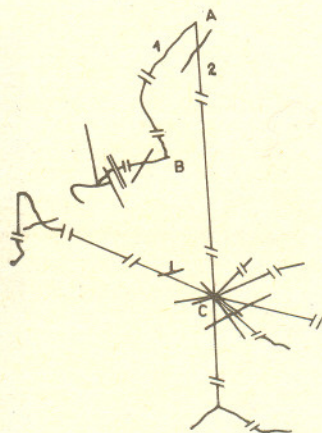
Wodorową komorę dyfuzyjną naświetlono wiązką mezonów  $\pi^-$  o pędzie około 1 GeV/c. Zdjęcie przedstawia zarejestrowany proces oddziaływania  $\pi^- + p \rightarrow \Sigma^0 + K^0$ . Tor A urywa się w komorze. W końcu komory widać rozpad  $\Lambda$  (tory B, C), nieco bliżej rozpad  $K^0$  (tory D, E). Z krzywizny torów w polu magnetycznym oceniono cząstek. Bilans pędu i energii wskazuje na to, że musiała zostać wysłana jeszcze jedna cząstka neutralna o bardzo małej masie. Najprawdopodobniej proces przebiegał następująco:



### Antyhiperon $\bar{\Lambda}$ rok 1958

Emulsję jądrową naświetlono mezonami  $\pi^-$  o pędzie 4,6 GeV/c. Przeglądając pod mikroskopem wywołaną kliszę zaobserwowano zarejestrowany akt rozpadu  $\bar{\Lambda}$ .

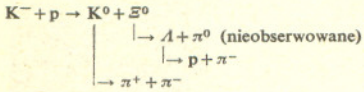
W punkcie A antyhiperon  $\bar{\Lambda}$  rozpadł się na mezon  $\pi^+$  (1) i antyproton  $\bar{p}$  (2). Mezon  $\pi^+$  rozpadł się w punkcie B na  $\mu^+$  i niewidoczne neutrino. W punkcie C nastąpiła anihilacja antyprotonu.



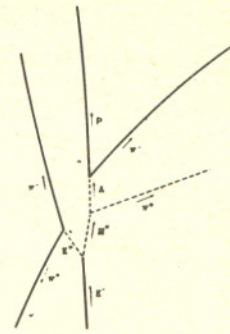
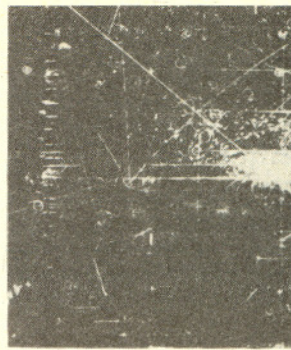


## Hiperon $\Xi^0$ rok 1959

Badano oddziaływanie  $K^-$  o pędzie 1,15 GeV/c z protonami w wodorowej komorze pęcherzykowej. Zaobserwowano proces:



Szkic obok zdjęcia pokazuje najlepszą zdaniem autorów interpretację zdarzenia. Tor pierwotnego  $K^-$  jest na zdjęciu widoczny bardzo słabo. Linia przerywaną na szkicu pokazano przebieg cząstek neutralnych, których komora pęcherzykowa nie rejestruje.

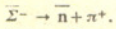


## Antyhiperon $\bar{\Sigma}^-$ rok 1960

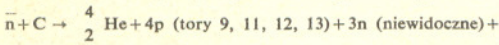
Wypełnioną propanem komorę pęcherzykową naświetlono w Zjednoczonym Instytucie Badań Jądrowych w Dubnie (ZSRR) wiązką mezonów  $\pi^-$  o pędzie 8,3 GeV/c. Wśród 40 tysięcy zdjęć znaleziono jedno, na którym został zarejestrowany akt produkcji i rozpadu antyhiperonu  $\bar{\Sigma}^-$ .

W punkcie 0 nastąpiło najprawdopodobniej zderzenie  $\pi^- + C \rightarrow \bar{\Sigma}^- (2) + K^0 + \bar{K}^0 + K^- (6) + p$  (bardzo powolny, niewidoczny)  $+ \pi^+ (7) + \pi^- (16)$  + jądro odrzutu.

Mezony  $K^0$  i  $\bar{K}^0$  zidentyfikowano dzięki rozpadom w punkcie 0' (tory 4, 5) oraz w punkcie 0'' (tory 14, 15). Antyhiperon  $\bar{\Sigma}^-$  (a więc o ładunku dodatnim) rozpadł się w punkcie A:

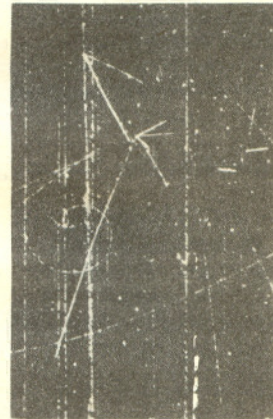
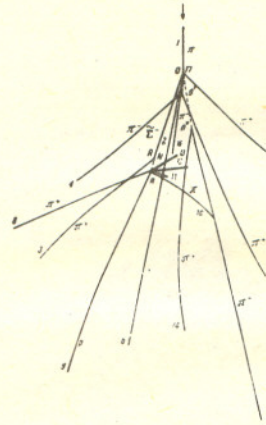


Antyneutron zderzył się w punkcie B z jądrem węgla:



$+ \pi^+ (8) + \pi^- (10)$  + nieznaną liczbę mezonów  $\pi^0$ .

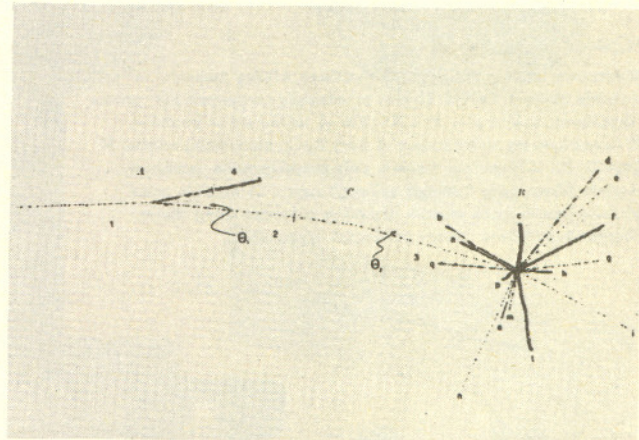
Prawdopodobieństwo, że obserwowany obraz jest przypadkowym nałożeniem się śladów niezależnych procesów jest mniejsze niż  $10^{-9}$ . (Uwaga — oddziaływanie pierwotne  $\pi^-C$  jest na zdjęciu bardzo słabo widoczne).



## Antyhiperon $\bar{\Sigma}^+$ rok 1960

Emulsję jądrową naświetlono wiązką antyprotonów o pędzie 2,05 GeV/c. Antyproton z wiązki zderza się z jądrem jednego z pierwiastków emulsji i produkuje dwie cząstki naładowane pozostawiające widzialne ślady:

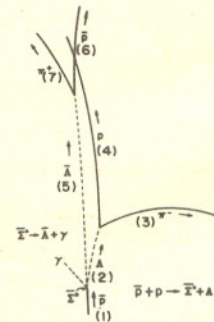
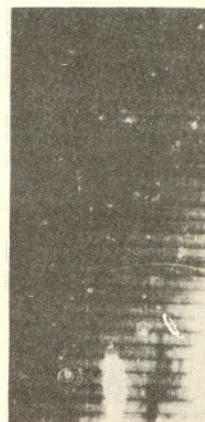
proton (4) i  $\bar{\Sigma}^+$  (2). W punkcie C cząstka  $\bar{\Sigma}^+$  rozpada się na antyproton  $\bar{p}$  i obojętny mezon  $\pi^0$  (niewidoczny na zdjęciu). W punkcie B następuje anihilacja antyprotonu powodująca rozbitcie napotkanego jądra na wiele fragmentów.



## Antyhiperon $\bar{\Sigma}^0$ rok 1960

W wodorowej komorze pęcherzykowej naświetlonej antyprotonami o pędzie 1,99 GeV/c zaobserwowano reakcję  $\bar{p} + p \rightarrow \bar{\Sigma}^0 + \Lambda$ .

Szkic obok zdjęcia przedstawia interpretację procesu. Tory 3 i 4 pochodzą z rozpadu  $\Lambda$  (2). Tory 6 i 7 pochodzą z rozpadu  $\bar{\Lambda}$  (5).  $\bar{\Sigma}^0$  rozpada się na  $\bar{\Lambda}$  i kwant  $\gamma$  niewidoczny na zdjęciu. Kierunek jego lotu wyznaczono z zasad zachowania energii i pędu.



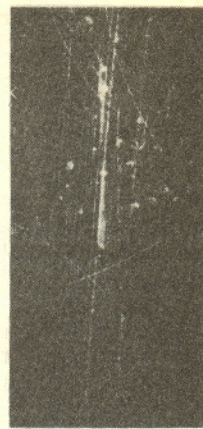
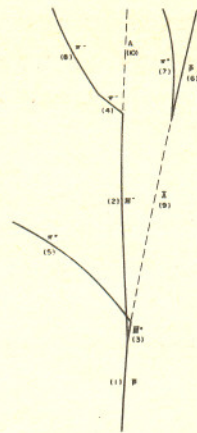
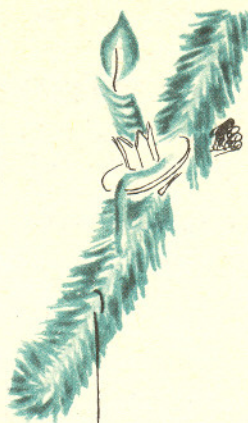


### Antyhiperon $\bar{\Xi}^-$ rok 1962

W wodorowej komorze pęcherzykowej naświetlonej antyprotonami o pędzie 3,3 GeV/c zaobserwowano reakcję  $\bar{p} + p \rightarrow \bar{\Xi}^- + \bar{\Xi}^-$ .

Hiperon  $\bar{\Xi}^-$  (tor 3) rozpada się na  $\pi^+$  (5) i  $\bar{\Lambda}$  (9), która jako cząstka neutralna nie pozostawia śladu w komorze.

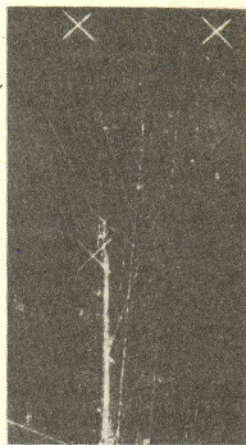
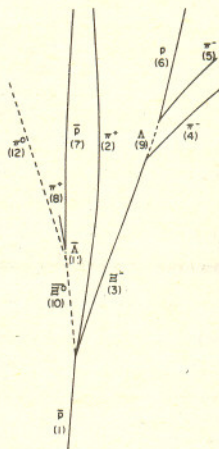
Po przebyciu pewnej drogi  $\bar{\Lambda}$  rozpada się na  $\bar{p}$  (6) i  $\pi^+$  (7). Zaobserwowano również rozpad  $\bar{\Xi}^-$  (2) na  $\pi^-$  (4) i na  $\Lambda$  (10), której rozpadu nie zarejestrowano. O jej istnieniu wnioskujemy z zasad zachowania energii i pędu. (Uwaga: ładunek antyhiperonu  $\bar{\Xi}^-$  jest dodatni i dlatego autorzy na szkicu oznaczyli cząstkę jako  $\bar{\Xi}^+$ ).



### Antyhiperon $\bar{\Xi}^0$ rok 1963

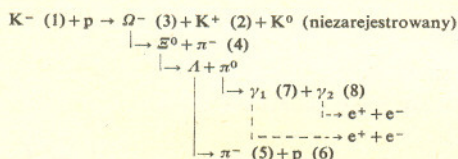
W wodorowej komorze pęcherzykowej naświetlonej antyprotonami o pędzie 3,69 GeV/c zaobserwowano proces  $\bar{p} + p \rightarrow \bar{\Xi}^- + \bar{\Xi}^0 + \pi^+$ . O istnieniu  $\bar{\Xi}^-$  (3) świadczy rozpad na  $\pi^-$  (4) i  $\Lambda$  (9), która z kolei rozpada się na  $p$  (6) i  $\pi^-$  (5).

Rozpad  $\bar{\Xi}^0$  na  $\bar{\Lambda}$  i  $\pi^0$  jest trudniejszy do interpretacji. Widać rozpad  $\bar{\Lambda}$  na  $\bar{p}$  (7) i  $\pi^+$  (8), który zderza się z protonem. Kierunek  $\pi^0$  obliczono z zasad zachowania energii i pędu.

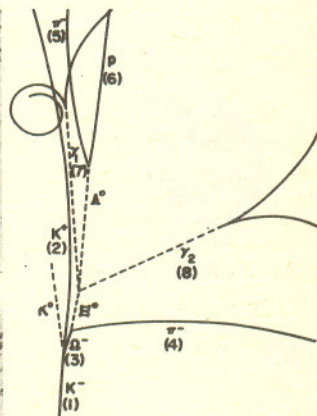
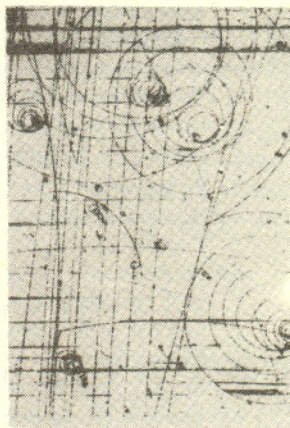


### Hiperon $\Omega^-$ rok 1964

W wodorowej komorze pęcherzykowej naświetlonej mezonami  $K^-$  o pędzie 5 GeV/c zarejestrowano proces:

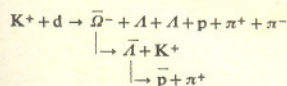


Zapis  $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$  nie oznacza rozpadu kwantu  $\gamma$ , który jest trwały. W pobliżu jądra atomowego może on wytworzyć parę elektron-pozyton (skonwertować). Stąd wnioskujemy o kierunku jego lotu.



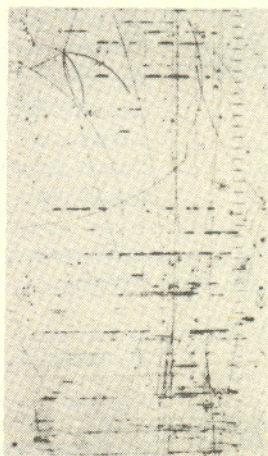
### Antyhiperon $\bar{\Omega}^-$ rok 1970

W komorze pęcherzykowej wypełnionej deuterem badano oddziaływania mezonów  $K^+$  o pędzie 12 GeV/c. Zaobserwowano proces:



Szkic ilustruje przebieg zjawiska. Widać rozpad antyhiperonu  $\bar{\Lambda}$  i jednego hiperonu  $\Lambda$ .

Istnienie drugiego hiperonu  $\Lambda$  wynika z zasad zachowania (pędu, energii, dziwności, liczby barionowej).





Mgr Andrzej MAKOWSKI

Niewiele zwrotów, które stworzyli matematycy, by opisywać fakty matematyczne, zadomowiło się w języku potocznym. Jednym z nich jest „rozłożyć na czynniki pierwsze”. Popularność swoją zawdzięcza on być może temu, że stykamy się z nim wszyscy, bowiem występuje w programie nauczania w klasie piątej. Fakt ten ma również pewne ujemne (kolejny zwrot matematyczny!) strony, np. tę, że nie poznajemy żadnych dowodów twierdzeń mówiących o liczbach pierwszych. W tym artykule postaramy się wykazać kilka elementarnych twierdzeń o liczbach pierwszych. Najpierw sformułujemy definicję liczby pierwszej — musimy wszak wiedzieć, czym będziemy się zajmować.

**Definicja.** Liczbę naturalną  $p$  nazywamy pierwszą wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona większa od 1 i jedynymi jej dzielnikami są liczby 1 i  $p$ .

(Niekórzy Czytelnicy mogą się dziwić, po co żądamy, by liczba pierwsza była większa od 1; czasami w szkole nie zwracano na to uwagi. Gdyby zaliczyć liczbę 1 do liczb pierwszych, wtedy twierdzenie 4 tego artykułu byłoby fałszywe, bowiem nawet liczba czynników w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby np. 6 nie byłaby określona:  $6 = 2 \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = \dots$ ) Zachodzi pozornie oczywiste

**Twierdzenie 1.** Każda liczba naturalna większa od 1 ma co najmniej jeden dzielnik będący liczbą pierwszą.

**Dowód.** Niech  $A_n$  będzie zbiorem wszystkich większych od 1 dzielników liczby  $n$ . Niech  $n$  będzie liczbą większą od 1. Wówczas  $A_n$  jest zbiorem niepustym, gdyż  $n \in A_n$ . Na mocy zasady minimum wnioskujemy, że w  $A_n$  istnieje liczba najmniejsza, nazwijmy ją  $d_n$ . Wykażemy, że  $d_n$  jest liczbą pierwszą. Z definicji zbioru  $A_n$  mamy, że  $d_n | n$  i  $d_n > 1$ .

Jeżeli  $k | d_n$ , to także  $k | n$  (dlaczego?) oraz  $k \leq d_n$ , czyli liczba  $k$  byłaby dzielnikiem liczby  $n$  nie większym od  $d_n$ , a więc, jeżeli  $k \in A_n$ , to  $k = d_n$  (bo w  $A_n$  nie ma liczb mniejszych od  $d_n$ ); jeżeli zaś  $k \notin A_n$ , to  $k = 1$  (bo jedynym dzielnikiem liczby  $n$  nie należącym do  $A_n$  jest 1). Wykazaliśmy więc, że  $d_n > 1$  i jedynymi dzielnikami liczby  $d_n$  są 1 i  $d_n$ , czyli  $d_n$  jest liczbą pierwszą, a ponieważ  $d_n | n$ , więc zakończyliśmy dowód twierdzenia 1. Zauważmy, że wykazaliśmy także

**Twierdzenie 2.** Najmniejszy większy od 1 dzielnik liczby naturalnej większej od 1 jest liczbą pierwszą.

Fakt opisany twierdzeniem 2 wykorzystywaliśmy wielokrotnie w szkole, gdy trzeba było rozłożyć liczbę naturalną na czynniki pierwsze: dzieliliśmy ją przez najmniejszą (większą od 1) liczbę, przez którą dała się podzielić.

Teraz udowodnimy, że sprawdzona na wielu przykładach (choćby przez nas samych) możliwość rozłożenia liczby naturalnej na czynniki pierwsze, tzn. możliwość przedstawienia jej w postaci  $p_1 p_2 \dots p_r$ , gdzie wszystkie liczby  $p_i$  są pierwsze, jest faktem ogólnie prawdziwym.

**Twierdzenie 3.** Każda liczba naturalna większa od 1 jest iloczynem skończonej liczby  $r$  (być może jednej) liczb pierwszych.

**Dowód.** Zastosujemy tutaj pewną wersję zasady indukcji matematycznej.

Liczba 2 jest, oczywiście, takim iloczynem ( $r = 1$ ). Załóżmy, że każda liczba naturalna większa od 1 i mniejsza od  $n$  jest iloczynem liczb pierwszych. Rozróżnimy teraz dwa przypadki:

- $n$  jest liczbą pierwszą. Wówczas  $n$  jest iloczynem liczb pierwszych ( $r = 1$ ).
- $n$  nie jest liczbą pierwszą, ma więc dzielnik  $a$  spełniający warunki  $1 < a < n$ . Istnieje więc liczba  $b$ , spełniająca nierówność  $1 < b < n$  oraz równość  $n = ab$ .

Liczby  $a$  i  $b$ , na mocy założenia, są iloczynami liczb pierwszych, a więc i  $n$  jest takim iloczynem.

Wylania się teraz pytanie: czy jest możliwe, by dwie osoby, nie popełniając błędów w obliczeniach, znalazły różne rozkłady tej samej liczby naturalnej na czynniki pierwsze?

Aby odpowiedzieć na to pytanie należy sprecyzować, co to są *różne* rozkłady. Sprawę tę rozstrzyga następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 4.** Jeżeli  $n$  jest dowolną liczbą naturalną większą od 1 i  $n = p_1 p_2 \dots p_r = q_1 q_2 \dots q_s$  oraz wszystkie liczby  $p_i, q_j$  są pierwsze, to  $r = s$  i można tak przestawić czynniki drugiego rozkładu ( $q_j$ ), że  $p_i = q_i$  dla  $i = 1, 2, \dots, r$ .

**Dowód.** Przypuśćmy, że istnieją liczby naturalne większe od 1, mające dwa różne rozkłady na czynniki pierwsze, tzn. takie, że  $n = p_1 p_2 \dots p_r = q_1 q_2 \dots q_s$  ( $p_i, q_j$  — liczby pierwsze) i ciąg  $q_1, q_2, \dots, q_s$  nie jest permutacją ciągu  $p_1, p_2, \dots, p_r$ . Niech  $N$  będzie najmniejszą spośród tych liczb (znowu stosujemy zasadę minimum).

Jest więc

$$N = p_1 p_2 \dots p_r = q_1 q_2 \dots q_s.$$

Zauważmy, że każda liczba  $p_i$  jest różna od każdej liczby  $q_j$ , gdyby bowiem dla jakichś liczb

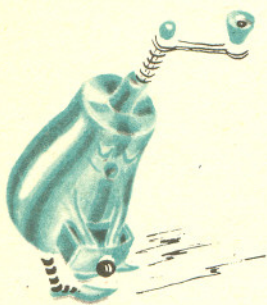
$k$  i  $l$  było  $q_k = p_l$ , to liczba  $\frac{N}{p_l}$  byłaby liczbą mającą dwa różne rozkłady i przy tym mniejszą

od  $N$ , co przeczy definicji liczby  $N$ .



Zasada minimum brzmi następująco: W każdym niepustym zbiorze złożonym z liczb naturalnych istnieje liczba najmniejsza. Analogiczne zdanie dla zbiorów liczb całkowitych, wymiernych lub rzeczywistych jest fałszywe.

Zapis  $a|b$  czytamy „ $a$  jest dzielnikiem  $b$ ”, „ $a$  dzieli  $b$ ”, „ $b$  jest podzielne przez  $a$ ”. Oznacza on, że istnieje taka liczba całkowita  $c$ , że  $b = ac$ .



Rozwiązanie zadania M 107.

Mamy tożsamości:

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca), \\ (ab+bc+ca)^2 &= a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + \\ &+ 2(ab^2c + bc^2a + ca^2b) = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + \\ &+ 2abc(a+b+c). \end{aligned}$$

Jeżeli  $a+b+c = 0$ , to z tożsamości tych wynika, że

$$\begin{aligned} (1) \quad a^2 + b^2 + c^2 &= -2(ab+bc+ca), \\ (2) \quad (ab+bc+ca)^2 &= a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2. \end{aligned}$$

Podnosząc obie strony równości (1) do kwadratu i uwzględniając równość (2) otrzymujemy

$$(3) \quad (a^2 + b^2 + c^2)^2 = 4(ab+bc+ca)^2 = 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2).$$

Z drugiej strony

$$(4) \quad (a^2 + b^2 + c^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2).$$

Z (3) i (4) otrzymujemy

$$a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2),$$

stąd

$$(5) \quad a^4 + b^4 + c^4 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2).$$

Z równości (3) i (5) natychmiast wynika teza.



Możemy więc założyć, że  $p_1 < q_1$ . Rozpatrzmy liczbę

$$A = N - p_1 q_2 \dots q_s.$$

Z jednej strony mamy

$$(1) \quad A = p_1 p_2 \dots p_r - p_1 q_2 \dots q_s = p_1 (p_2 \dots p_r - q_2 \dots q_s),$$

a więc  $p_1 | A$ , z drugiej zaś

$$(2) \quad A = q_1 q_2 \dots q_s - p_1 q_2 \dots q_s = (q_1 - p_1) q_2 \dots q_s.$$

$A$  jest zatem liczbą naturalną mniejszą od  $N$  i większą od 1 (bo podzielna przez  $p_1$ ), nie ma więc ona dwóch różnych rozkładów. W jednym jej rozkładzie, który otrzymalibyśmy rozłożywszy liczbę w nawiasie we wzorze (1), wystąpi liczba  $p_1$ , musiałaby więc ona wystąpić i w rozkładzie, który otrzymałoby się rozłożywszy we wzorze (2) liczbę  $q_1 - p_1$ . Liczby  $q_2, \dots, q_s$  są pierwsze i, jak stwierdziliśmy, są różne od  $p_1$ , a więc liczba  $p_1$  musiałaby być dzielnikiem liczby  $q_1 - p_1$ , a więc i liczby pierwszej  $q_1$ , co jest sprzeczne z tym, że  $q_1$  jest liczbą pierwszą większą od  $p_1$ .

Założenie, że istnieją liczby naturalne większe od 1, mające dwa rozkłady na czynniki pierwsze, doprowadziło nas do sprzeczności, udowodniliśmy więc twierdzenie 4.

Każdemu chyba nasuwało się pytanie, ile jest liczb pierwszych. Odpowiedź, że nieskończenie wiele, wynika z następującego twierdzenia:

**Twierdzenie 5.** Dla każdej liczby naturalnej  $n$  istnieje liczba pierwsza większa od  $n$ .

**Dowód.** Na podstawie twierdzenia 2 najmniejszy, większy od 1 dzielnik liczby  $n! + 1$  jest liczbą pierwszą.

Oznaczamy ją literą  $p$ . Gdyby było  $p \leq n$ , to  $p | n!$ , a ponieważ  $p | n! + 1$ , więc także  $p | 1$ , co jest niemożliwe. Musi więc być  $p > n$ .

Twierdzenie 5 można udowodnić wieloma innymi sposobami. Oto dwa z nich.

I. Niech  $F_n = 2^{2^n} + 1$  (jest to tzw.  $n$ -ta liczba Fermata). Zachodzi łatwa do udowodnienia przez indukcję tożsamość

$$F_0 F_1 \dots F_{n-1} + 2 = F_n.$$

Wynika z niej, że jeżeli  $k < n$ , to  $F_k$  i  $F_n$  są względnie pierwsze, czyli nie mają wspólnego dzielnika większego od 1:

Niech bowiem  $d$  będzie wspólnym dzielnikiem liczb  $F_k$  i  $F_n$ . Z podanej tożsamości wynika, że wówczas  $d | F_n - F_0 F_1 \dots F_{n-1} = 2$ , a ponieważ  $d$ , jako dzielnik liczby nieparzystej  $F_n$ , jest liczbą nieparzystą i jedynym dzielnikiem nieparzystym liczby 2 jest 1, więc  $d = 1$ .

Każda z liczb  $F_0, F_1, \dots$  ma, na mocy twierdzenia I, czynnik pierwszy, żadne dwie nie mają, jak wykazaliśmy, wspólnego czynnika pierwszego, a więc czynników pierwszych liczb Fermata jest nieskończenie wiele (można wykazać, że liczb pierwszych nie będących dzielnikami liczb Fermata też jest nieskończenie wiele, takimi są np. liczby pierwsze postaci  $4k + 3$ ).

II. Przypuśćmy, że liczb pierwszych jest tylko skończona ilość:  $p_1, p_2, \dots, p_r$ . Rozpatrzmy iloczyn

$$\prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)^{-1} = \prod_{i=1}^r \left(1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + \dots\right).$$

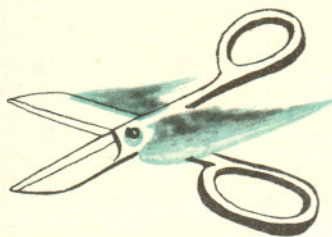
Lewa strona tej równości jest oczywiście liczbą wymierną. Po prawej stronie mamy iloczyn skończonej liczby czynników, z których każdy jest szeregiem nieskończonym. Czytelnicy, którzy nie znają teorii szeregów, niech uwierzą, że wolno w tym przypadku mnożyć te szeregi „wyraz po wyrazie” i ustawić otrzymane iloczyny w dowolnym porządku. Iloczyn ten będzie więc równy sumie wszystkich (nieskończenie wielu) iloczynów

$$\frac{1}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}}$$

( $\alpha_i \geq 0$ ). Każda liczba naturalna będąc iloczynem liczb pierwszych (twierdzenie 3) jest mianownikiem jakiegoś składnika. Wśród składników wystąpią więc wszystkie wyrazy tzw.

szeregu harmonicznego (tj.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ), o którym wiadomo, że jest rozbieżny.

Otrzymujemy więc sprzeczność: liczba wymierna równa jest  $\infty$ . Założenie, że liczb pierwszych jest ilość skończona, doprowadziło nas do sprzeczności.



Największą znaną obecnie liczbą pierwszą jest liczba  $2^{19937} - 1$ .



#### Rozwiązanie zadania M 108.

Wiadomo, że każdą liczbę naturalną  $m$  możemy zapisać w jeden tylko sposób w układzie dwójkowym:

$$m = 2^a + 2^b + 2^c + \dots$$

( $0 \leq a < b < c < \dots$ ).

Każdą liczbę naturalną  $k$  można też w jeden

tylko sposób zapisać w postaci  $k = 2^p \cdot m$ , gdzie  $m$  jest liczbą nieparzystą.

Zauważmy teraz, że każdemu rozkładowi liczby  $n$  na sumę składników nieparzystych

$$\begin{aligned} n &= m_1 \cdot 1 + m_2 \cdot 3 + m_3 \cdot 5 + \dots = \\ &= (2^{a_1} + 2^{b_1} + \dots) \cdot 1 + (2^{a_2} + 2^{b_2} + \dots) \cdot 3 + \\ &+ (2^{a_3} + 2^{b_3} + \dots) \cdot 5 + \dots \end{aligned}$$

(tzn. rozkładowi, w którym  $m_i$  składników jest równych 1,  $m_2$  równych 3 itd.,  $m_i = 2^{a_i} + 2^{b_i} + \dots$ ,  $0 \leq a_i < b_i < \dots$ ) można przyporządkować rozkład liczby  $n$  na różne składniki:

$$n = 2^{a_1} \cdot 1 + 2^{b_1} \cdot 1 + \dots + 2^{a_2} \cdot 3 + 2^{b_2} \cdot 3 + \dots + 2^{a_3} \cdot 5 + 2^{b_3} \cdot 5 + \dots$$

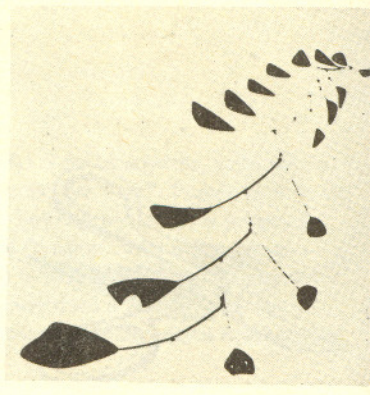
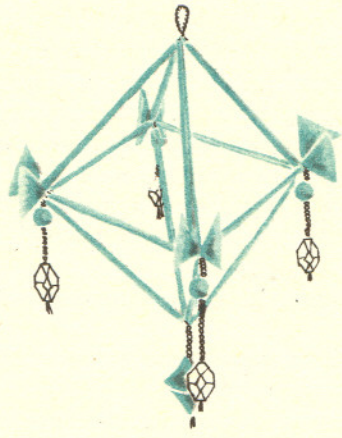
Przyporządkowanie to jest wzajemnie jednoznaczne.

Liczba  $n$  ma więc jednakową liczbę rozkładów każdego z omawianych typów.

Zadanie to jest, przynajmniej pozornie, podobne do zadania M 66 (Delta 10/1975).

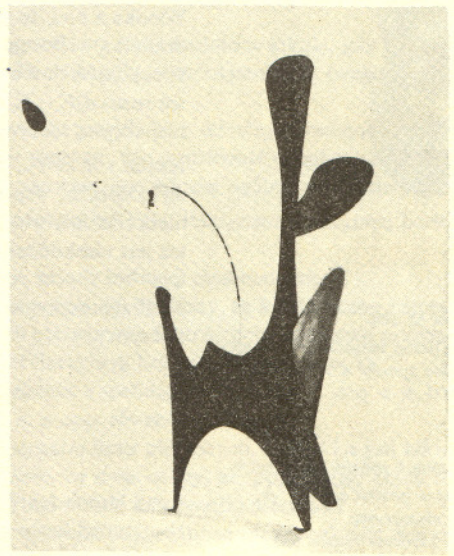
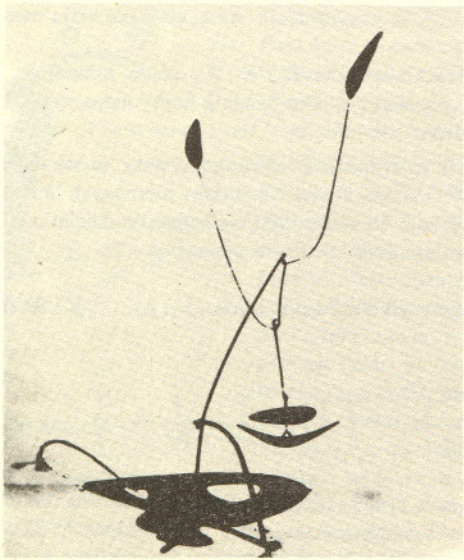
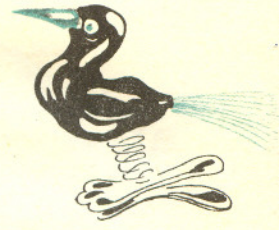


# mała delta

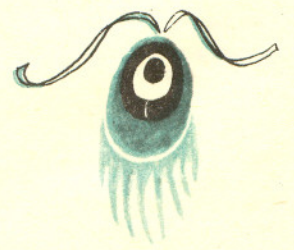


## Ruchome rzeźby

Zbliża się okres świąteczny. Niedługo będziecie ubierali choinki i dekorowali sale na zabawy noworoczne. Każdy wtedy staje się po trochu artystą. Ładnie udekorowana sala czy pomysłowe, niezwykle ozdoby na choinkę mogą być Waszym powodem do dumy.

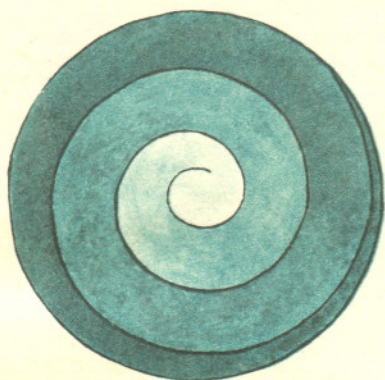


We współczesnej rzeźbie istnieje kierunek zwany „mobiles et stables”, który polega na tworzeniu kompozycji będących w ciągłym ruchu pod wpływem najmniejszych powiewów powietrza. Kierunek ten zainicjował amerykański rzeźbiarz tworzący w Paryżu, Alexander Calder. Prezentujemy Wam kilka reprodukcji kompozycji Caldera i radzimy popробować swoich sił na tym polu. Nie powinniście mieć kłopotu ze zdobyciem materiału: stanowią go głównie drut i kawałki blachy pomalowane na czarno lub na jeden z czystych kolorów: czerwony, żółty, niebieski. Najbardziej udaną spośród tych kompozycji możecie sobie zostawić jako stałą dekorację pokoju.





Można też zrobić inny rodzaj ruchomej dekoracji: z kolorowej bibułki powycinajcie spiralki, jak na rysunku poniżej. Spiralki te, zawieszane na drucie nad jakimś źródłem ciepła — grzejnikiem lub lampkami (ale nie radzimy nad świeczką) będą wykonywały szybki ruch obrotowy. Podobnie, jak w przypadku kompozycji „mobiles”, wykorzystane są tu prądy powietrza, tzw. konwekcja, spowodowana różnicą gęstości powietrza ciepłego i chłodnego. Powietrze ogrzane staje się lżejsze i unosi się do góry wprawiając w ruch napotkane po drodze lekkie przedmioty.



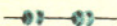
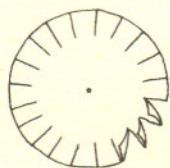
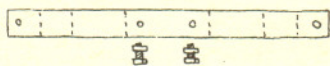
Podobne zjawisko jest wykorzystane w zabawkach, które czasem można zobaczyć na wystawach sklepów. W wysokim cylindrze szklanym znajdują się dwie nie mieszające się cieczy o zbliżonym ciężarze właściwym. Ciecz cięższa znajduje się oczywiście na dnie. Jeśli jednak naczynie umieści się nad źródłem ciepła, powstaje prąd konwekcyjny. Część cieczy uwypukla się, wypływa na wierzch, gdzie ochładza się i powraca na dno.

Jedna z cieczy jest podkolorowana na czerwono i całe naczynie silnie oświetlone, dzięki czemu ten ruchomy obraz jest naprawdę fascynujący.

Jeśli chcecie mieć taką zabawkę w domu, możecie ją sobie bez trudu sami wykonać.

Najważniejsze jest odpowiednie naczynie — wąskie, wysokie i przezroczyste. Może to być ładna butelka lub prosty, szklany wazon. Do naczynia wlejcie kolejno trochę oliwy i zabarwionego spirytusu. Oliwa, jako cięższa, pozostanie na dnie. Następnie ostrożnie doleście wody, aż rozcieńczony spirytus będzie miał ciężar właściwy zbliżony do ciężaru właściwego oliwy. Jeśli teraz naczynie postawicie w pobliżu silnej żarówki, powinniście osiągnąć żądany efekt.

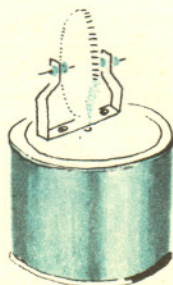
Kropki oliwy oderwane od dna pod wpływem ogrzewania powinny unosić się do góry, po czym powoli opadać. Jeśli Wam to słabo wychodzi, potrząśnijcie naczyniem tak, żeby oliwa rozdrobniła się na mniejsze kropki. Wtedy ruch kroteł powinien być szybszy.



Na koniec chcemy zaproponować Wam skonstruowanie czegoś zupełnie innego. Będzie to turbina parowa, taka, jak na statku lub w elektrowni. Potrzebna jest do tego puszka metalowa, blaszany krążek, śruby, długi gwóźdź, cztery korki i oczywiście woda. Ponacinajcie krążek wzdłuż promieni i pozaginajcie końce obcęgami w tę samą stronę. Wygnijcie długi pasek blaszany, jak na rysunku, zróbcie w nim cztery dziurki — dwie na oś koła i dwie do śrubek, za pomocą których pasek przymocujecie do puszki. Wywierćcie w puszcze odpowiednio duże dziurki i w środku wieczka trzecią dziurkę, z której będzie wydobywać się para.

Nalejcie wody do puszki — nie więcej niż jedną trzecią objętości puszki. Po złożeniu całości zadbajcie o to, żeby para nie wydobywała się wzdłuż brzegów wieczka.

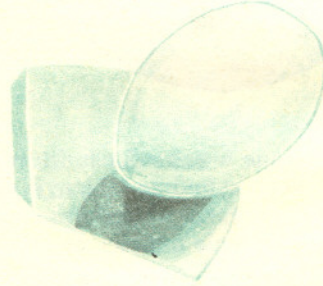
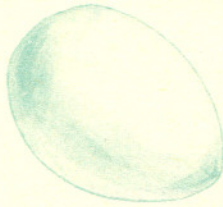
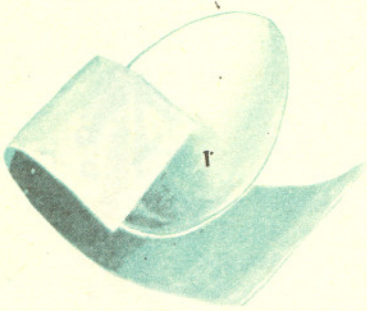
Postawcie puszkę na kuchence. Kiedy woda zagotuje się, strumień pary będzie wydobywać się z otworka puszki i Wasza turbina zacznie się obracać.



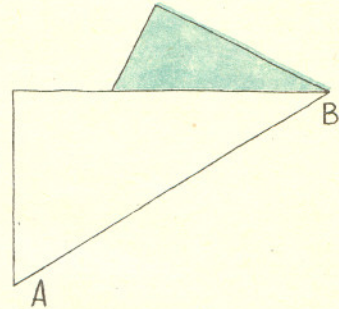
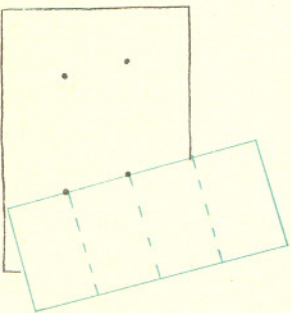
Życzymy powodzenia.



## ŁAMANKI



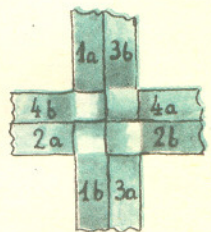
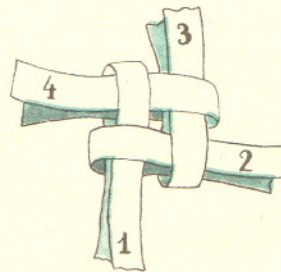
Prostokątna kartka papieru złamana jest wzdłuż przekątnej (linia przerywana na rysunku). Trzeba wykonać nowe łamanie, prostopadłe do danego i przecinające je w połowie. Jak? Odpowiedź brzmi prosto. Zgiąć kartkę w ten sposób, żeby jej rogi *A* i *B* pokryły się.



Połowić odcinki i kąty jest sprawą prostą (konstrukcja łamania prostopadłego to także połowienie kąta — jakiego?) A czy można podzielić prostokątny arkusik papieru na trzy równe części? Tak — jeśli zastosujemy pomysłowy wybieg. Potrzebna będzie pomocnicza kartka, którą złamiemy na cztery części (rysunek). Do tak przygotowanej kartki przykładamy w odpowiedni sposób nasz arkusik papieru i ... zaznaczamy ołówkiem lub paznokciem punkty, przez które trzeba wykonać łamanie. Poprawność konstrukcji gwarantuje znane Wam dobrze twierdzenie. Jakie?

## GWIAZDA

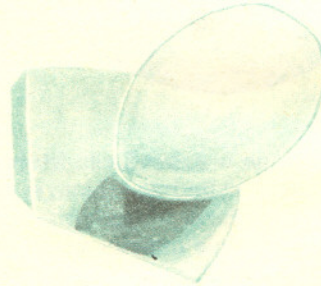
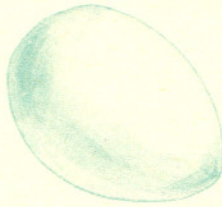
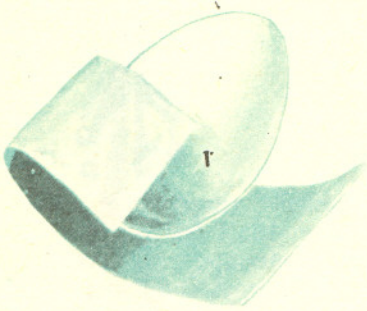
Cztery długie, równe paski papieru zginamy na pół i spleatamy w „koszyczek”. Ściągamy, wyrównujemy.



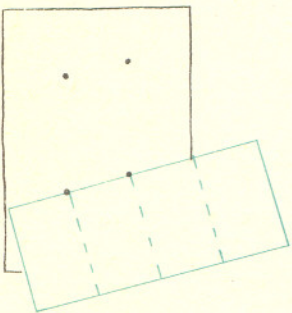
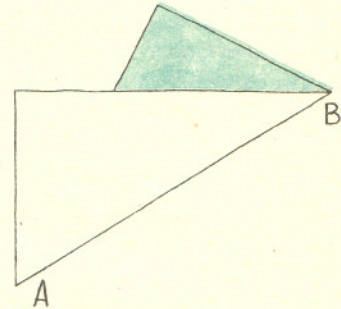
Kładziemy na stole i zginamy po kolei: 1, 4, 3 i 2 pasek. Ten ostatni, po zgięciu, przeciągamy przez „ucho” 1 paska.



## ŁAMANKI



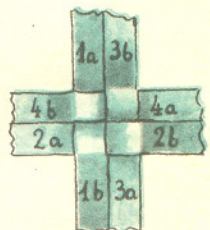
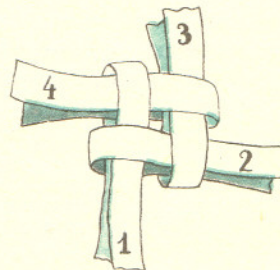
Prostokątna kartka papieru złamana jest wzdłuż przekątnej (linia przerywana na rysunku). Trzeba wykonać nowe łamanie, prostopadłe do danego i przecinające je w połowie. Jak? Odpowiedź brzmi prosto. Zgiąć kartkę w ten sposób, żeby jej rogi *A* i *B* pokryły się.



Połowić odcinki i kąty jest sprawą prostą (konstrukcja łamania prostopadłego to także połowienie kąta — jakiego?) A czy można podzielić prostokątny arkusik papieru na trzy równe części? Tak — jeśli zastosujemy pomysływy wybieg. Potrzebna będzie pomocnicza kartka, którą złamiemy na cztery części (rysunek). Do tak przygotowanej kartki przykładamy w odpowiedni sposób nasz arkusik papieru i ... zaznaczamy ołówkiem lub paznokciem punkty, przez które trzeba wykonać łamanie. Poprawność konstrukcji gwarantuje znane Wam dobrze twierdzenie. Jakie?

## GWIAZDA

Cztery długie, równe paski papieru zginamy na pół i spleatamy w „koszyczek”. Ściągamy, wyrównujemy.

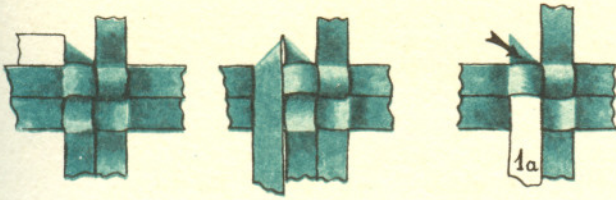


Kładziemy na stole i zginamy po kolei: 1, 4, 3 i 2 pasek. Ten ostatni, po zgięciu, przeciągamy przez „ucho” 1 paska.





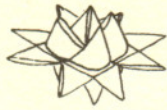
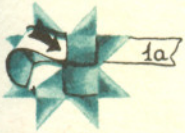
Przystępujemy do formowania zewnętrznych ramion gwiazdy. Pasek 1a zginamy trzykrotnie.



Koniec przeciągamy przez „ucho” w miejscu wskazanym przez strzałkę. Pierwsze ramię gotowe. Podobnie formujemy ramiona z pasków: 2a, 3a i 4a. Przewracamy gwiazdę na drugą stronę i formujemy pozostałe 4 zewnętrzne ramiona.



Wzajemne położenie wszystkich 8 zewnętrznych ramion powinno być takie, jak na rysunku.



Uformujemy teraz ramiona wewnętrzne. Zaczynamy od paska 1a. Zginamy jak na rysunku i przeciągamy jego koniec w miejscu wskazanym strzałką. Wystający koniec obcinamy. Pozostałe ramiona wewnętrzne formujemy w ten sam sposób. Szesnastoramienna gwiazda gotowa.

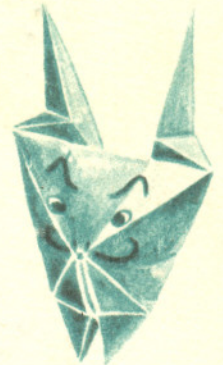
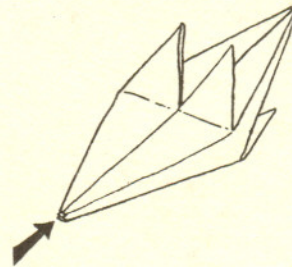
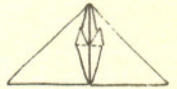
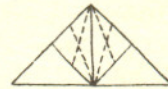
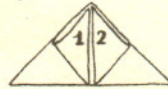
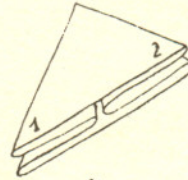
## DIABELEK

Kwadratową kartkę papieru zginamy wzdłuż przekątnych, rozprostowujemy i formujemy jak na rysunku.

Kolejne załamania robimy wzdłuż linii przerywanych, po czym formujemy „uszy”, jak na rysunku.

Przewracamy diabełka na drugą stronę i powtarzamy wszystkie czynności.

Diabełek ma, jak dotąd, niepozorne kształty. Bierzymy go za dolne uszy i dmuchamy w miejscu wskazanym przez strzałkę. Diabełek rośnie, wyskakują mu rogi. Można go teraz pomalować i powiesić na choince.



## ŁAŃCUCH

Dwa paski papieru, jak najdłuższe i najlepiej różnego koloru, układamy prostopadłe, końcami obok siebie, jak na rysunku.

Sklejamy. Pasek a zginamy przez pasek b, następnie pasek b zginamy przez pasek a itd. (jak na rysunku). Po ukończeniu zaginania sklejamy wolne końce.

Ogłaszamy konkurs: Kto zna najciekawsze łamanki — zabawki na choinkę?  
Napiszcie nam, jakie znacie łamanki — zabawki.  
Najciekawsze listy nagrodzimy książkami.

*Małą Deltę redaguje: Przemysław Nowicki i Daria Ziemińska.*

