

h=653-10-1-s II-3144593

della

SPIS TREŚCI

Z kompasem i młotkiem na Spitsbergenie <i>Dr Maria Bogna Jeleńska</i>	str. 1
$\operatorname{div} [\operatorname{rot} (\operatorname{grad} \varphi)] \equiv 0$ <i>Mgr Marian Grudnicki</i>	str. 3
Różne całki — podobne własności	str. 6
Zadania	str. 7
Równania Maxwella <i>Doc. dr Tomasz Hofmokl</i>	str. 8
Mała Delta	str. 10
Jak pies gonił zającą <i>Dr Wiesław Kufel</i>	str. 14
Laboratorium w domu <i>Mgr Krzysztof Tabaszewski</i>	str. 16

„Delta”
matematyczno-fizyczny miesięcznik
popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego i Polskiego
Towarzystwa Fizycznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny
doc. dr J. Bartke
prof. dr Grzegorz Białkowski —
przewodniczący
doc. dr A. Bączyński
doc. dr B. Gleichgewicht
doc. dr K. Goebel
doc. dr B. Iwaszkiewicz
doc. dr T. Iwiński
prof. dr A. Januszajtis
prof. dr Leon Jeśmanowicz —
wiceprzewodniczący
mgr H. Kaczorek
prof. dr B. Karczewski
prof. dr M. Kuczma
mgr A. Mąkowski
prof. dr Z. Pawlak
prof. dr A. Piekara

prof. dr Z. Semadeni
prof. dr J. Stankowski
prof. dr M. Subotowicz
doc. dr S. Turnau
doc. dr J. Wdowczyk

Redaguje Kolegium w składzie:
doc. dr T. Hofmokl — z-ca red. nac.
dr T. B. Iwiński
dr M. Kordos — red. nac.
mgr K. Prazmowski — red. techn. graf.
doc. dr M. Świącki
D. Tys — sekr. red.
Adres Redakcji
ul. Hoża 69 pok. 151,
00-681 Warszawa,

Zakład Narodowy im.
Ossolińskich — Wydawnictwo
Wrocław, Oddział w Warszawie
Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.
wyd.; 2,50 ark. druk.;
papier offsetowy III kl. 80 g, 61×86
Wydrukowano w Drukarni im.
Rewolucji Październikowej
Warszawa, ul. Mińska 65.
Nr zam. 1097/76 J-113

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60, — cena prenumeraty półrocznej zł 30, —

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach:

— do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i na cały rok następny

— do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego.

Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienie w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”.

Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW oraz prenumeratorki indywidualni, zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw,

ul. Towarowa 28 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej.

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTA”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.

Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.

Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, konto PKO nr 1-6-100312

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7 00-068 Warszawa, Poland or with

— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 Munchen 34, Postfach 68,

Bundesrepublik Deutschland.

— Earls Court Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain,

— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia.

Cena 1 egzemplarza zł 5,—

nr indeksu 35723/35550

Nasza okładka:
Spitsbergen

W następnym numerze:
O Gwieździe Betlejemskiej

Dr Maria Bogna JELEŃSKA

Spitsbergen — główna wyspa archipelagu Swalbard — zawsze kojarzyła mi się z surową przyrodą Arktyki, białymi przestrzeniami pól śnieżnych i błękitem lodowców. Przywodziła na myśl wielką przygodę. Tymczasem, kiedy w końcu wyjechałam na Spitsbergen jako jedna z uczestników Polskiej Wyprawy Polarnej w lecie 1975 r., cel mojego wyjazdu był zupełnie konkretny. Miałam pobrać próby skał do badań paleomagnetycznych (O własnościach magnetycznych skał i badaniach paleomagnetycznych pisaliśmy w „Delcie” nr 2/1976). Dlaczego wybrałam do moich badań rejon Spitsbergenu zamiast ograniczyć się do obszaru Polski?



W ciągu ostatnich lat odżyła koncepcja kontynentalnego dryftu Wegenera w związku z teorią rozszerzania się dna oceanicznego. Według tej teorii dno oceanów rozszerza się wzdłuż grzbietów oceanicznych, powodując rozsuwanie się płyt kontynentalnych. Rozszerzanie się dna oceanicznego między Grenlandią a archipelagiem Swalbard spowodowało powstanie północnego Atlantyku. Towarzyszyły temu ruchy Grenlandii i Swalbardu, a więc i Spitsbergenu. Badania paleomagnetyczne skał ze Spitsbergenu mogą dostarczyć dowodów przemawiających za tą teorią. Na podstawie krzywych wędrówki bieguna paleomagnetycznego wykonanych na Spitsbergenie, w Europie i w Ameryce Północnej można zrekonstruować położenie Spitsbergenu w dawnych epokach geologicznych i prześledzić ewolucję basenu północnego Atlantyku. I dlatego znalazłam się na Spitsbergenie.

Nie ominęła mnie jednak przygoda. Baza polskich wypraw znajduje się w Hornsundzie, w Zatoce Białych Niedźwiedzi, na południowym końcu Spitsbergenu. Chociaż to południowy koniec, jest tu zimniej niż w części środkowej i często prąd oceaniczny niesie ze sobą kry, które tarasują wejście do Hornsundu. Właśnie tym razem, kiedy polski statek „Jan Turlejski” wiozący XV Polską Wyprawę Polarną zbliżył się do Spitsbergenu, wielkie pole lodowe zablokowało nam wejście do Hornsundu. Statek stał trzy dni na skraju pola i czekał aż sprzyjający wiatr oczyści wodę z kry. Niestety, każdego ranka oglądaliśmy ten sam widok. Daleko na horyzoncie białe szczyty gór otaczających nieosiągalny Hornsund, a przed nami iskrząca się w słońcu niebieska przestrzeń lodowa. A „Jan Turlejski” musiał wracać do kraju. W końcu wylądowaliśmy w Barentsburgu, radzieckiej osadzie górniczej, skąd po dwóch tygodniach czekania radziecki statek odwiózł nas do Hornsundu. Wylądowaliśmy w polskiej bazie — długim pomarańczowym baraku, zbudowanym w 1957 r. przez jedną z wypraw Międzynarodowego Roku Geofizycznego, kierowaną przez St. Siedleckiego.

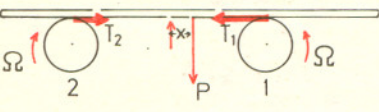


Był czerwiec, na Spitsbergenie trwał dzień mający się skończyć dopiero w drugiej połowie sierpnia. Kilka pierwszych dni po przyjeździe zeszło nam na porządkowaniu bazy, która stała pusta od poprzedniego roku, i innych czynnościach gospodarczych, jak zakładanie dopływu wody, znoszenie zapasów żywności, urządzenie pokoi sypialnych, świetlicy itp.

Po wykonaniu tych najpilniejszych prac każdy z uczestników wyprawy zabrał się do swojej roboty. Ornitolog biegał obserwować ptaki, klimatolodzy ustawiali swoje przyrządy, geobiznawcy i geolodzy wyruszali w teren. I ja także przygotowałam plecak, młotek i kompas i w towarzystwie jednego z geologów, który miał mi pomagać w pracy, poszłam zbierać próby.

Na początku miałam pracować na odsłonięciu skał wylewnych zwanych dolorytami, położonymi w pobliżu bazy, po drugiej stronie lodowca Hansa. O tej porze roku lodowiec był jeszcze przysypany śniegiem i szczeliny w środkowej jego części były niewidoczne.

Postanowiliśmy przedostać się na drugą stronę lodowca przy jego czole, gdzie szczeliny były wprawdzie większe, ale za to widać je było wyraźnie. Początkowo przechodziliśmy przez boczne moreny, brzydkie usypiska żwiru i kamieni, przypominające wielkie hałdy. Następnie weszliśmy na martwy lód, poprzecinany drobnymi płytkimi szczelinkami, którymi płynęła woda, przysypany drobnymi kamyczkami a miejscami pokryty błotem. Stopniowo szczeliny zaczęły się pogłębiać i poszerzać.



Rozwiązanie zadania F 35.
 Gdybyśmy umieścili deskę tak, aby jej środek ciężkości znajdował się akurat w połowie drogi między rolkami, to nie wystąpiłby żaden ruch, ponieważ siły tarcia pomiędzy poszczególnymi rolkami a deską byłyby jednakowe, lecz przeciwnie skierowane. Jednak w przypadku niesymetrycznego umieszczenia deski nacisk deski na jedną z rolek będzie większy. Wskutek tego, zgodnie z prawami tarcia, siła tarcia między deską a tą rolką będzie proporcjonalnie większa i będzie przeciwdziałać zwiększonemu naciskowi deski. Jeżeli przyjmiemy, że położenie początkowe było takie, jak na rysunku, to deska zacznie się poruszać w lewo. Gdy deska osiągnie położenie równowagi, będzie już miała pewną prędkość skierowaną w lewo, więc będzie nadal poruszać się w tym kierunku, zbliżając się do drugiej rolki i zwiększając na nią nacisk. Wkrótce jednak siły tarcia na drugiej rolce zatrzymają deskę i ruch zacznie się w przeciwnym kierunku. Tak więc deska będzie poruszać się to w prawo, to w lewo. Łatwo opisać dokładnie ruch deski. Niech odległość między osiami rolek wynosi $2l$, położenie środka ciężkości deski w danej chwili oznaczmy przez x (początkowo x_0). Wówczas naciski na poszczególne rolki spełniają zależność:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{l+x}{l-x}, \quad \text{czyli} \quad (P_1 - P_2)l = Px.$$

Wypadkowa siła działająca na deskę w kierunku poziomym wynosi:

$$F = T_2 - T_1 = P_2 f - P_1 f = -\frac{P f}{l} \cdot x,$$

czyli jest wprost proporcjonalna do wychylenia deski z położenia równowagi.

Równanie $F = -\omega^2 x$, gdzie $\omega^2 = \frac{P f}{l}$,

opisuje ruch harmoniczny z prędkością kątową ω . Uwzględniając warunki początkowe ($t = 0$), że $x = x_0$ oraz

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0 \text{ otrzymujemy}$$

$$x = x_0 \cos \omega t, \quad \omega = \sqrt{\frac{P f}{l}}.$$

Przy czole lodowca tworzyły już system równoległych spękań, które rozgałęziały się lub łączyły ze sobą. Musieliśmy kluczyć w tym labiryncie, szukać przejść. W węższych miejscach przeskakiwaliśmy na drugą stronę, czasami most śnieżny był dostatecznie mocny, żeby można było ryzykować przejście po nim.

Lód z lodowca ma błękitną barwę, miejscami bardzo intensywną. Nigdzie poza Spitsbergenem nie widziałam lodu o takim zabarwieniu. Toteż, o ile w czasie niepogody lodowiec jest smutny i monotony, to w słońcu staje się niezwykle kolorowy. Po przejściu strefy szczelin wkroczyliśmy znów na martwy lód. I jeszcze tylko skok przez rzekę lodowcową, która płynęła na skraju lodowca i dostaliśmy się w miękkie, muliste błoto, w którym nogi grzęzły do kostek. Dwa poszarpane grzbieciki, cel naszej wyprawy, wydawały się już blisko, minęło jednak jeszcze pół godziny zanim do nich dotarliśmy. Powietrze na Spitsbergenie jest bardzo przejrzyste i stąd niezwykła widoczność, która myli przy ocenie odległości. Wydawało się, że góry widziane przed nami są tuż, tuż, a tymczasem dzieli je od nas odległość 30 km.

Skały, które miałam przed sobą, były mocno potrzaskane, więc nie powinno być kłopotu z pobieraniem prób. Z drugiej strony w przypadku takich skał istnieje niebezpieczeństwo, że pobierze się próbę, która jest zmieniona. Przy pobieraniu prób do badań paleomagnetycznych zwraca się uwagę na dwie rzeczy: po pierwsze skały powinny być niezmienione chemicznie, po drugie powinny pozostawać w tym samym położeniu, w jakim były w czasie ich powstania. Jeżeli zostały poruszone to powinniśmy móc określić (odtworzyć) ich pierwotne położenie.

Procesy wietrzenia wywołują zmiany chemiczne w skałach, powodują też przesuwanie się jednych partii skały w stosunku do drugich. Dlatego należy wybierać takie partie skały, które są nieporuszone i „świeże”.

Znalazłam kawałek skały, który wydał mi się mocno związany z całym kompleksem i dość łatwy do wybicia młotkiem. Teraz należało próbę zorientować w przestrzeni, tzn. określić jej azymut i upad (Azymut — kąt pomiędzy kierunkiem pn. a wybranym kierunkiem, upad — kąt nachylenia skały w stosunku do poziomu), napisać numer próby i numer odsłonięcia. Wreszcie można było przystąpić do wybijania próby. Nie zawsze jest to łatwe. Czasami trzeba na to stracić 30–40 minut. Często też w poszukiwaniu skał świeżych i nieporuszonych trzeba się wspinać wysoko po piargach lub ścianach skalnych. Pobrałam 5 prób, które zostały załadowane do plecaka. Jedna próba waży przeciętnie 5 kg, razem stanowiły więc niemały ciężar, jak na to, że trzeba go było nieść na własnych plecach. Na dodatek czekało nas przejście przez lodowiec i pokonywanie szczelin, toteż wróciłam z tej pierwszej wyprawy porządnie zmęczona. A przecież to był dopiero początek. Właściwa praca zaczęła się, kiedy wyruszyłam z bazy łodzią na półwysep Treskelen położony w głębi fiordu — pobierać próby skał osadowych. W poprzednim roku polscy paleontolodzy zbudowali tu mały domek na wzór husów. Husy — małe domki traperów norweskich są rozsiane po całym Spitsbergenie. Obecnie większość zwierząt na Spitsbergenie została objęta ochroną, całkowitą lub okresową i traperzy przenieśli się w inne rejony. Zostały po nich małe, drewniane domki, wykorzystywane często przez różne wyprawy. Domki te są zaopatrzone w prycze do spania, żelazny piecyk, niezbędne garnki, naczyńia i inne sprzęty. Przeważnie jest też w nich zapas drzewa i węgla, zapalki oraz żywność, tak aby zgłodniały i zmęczony przybysz mógł w takim domku ogrzać się, przenocować i posilić. Ja mieszkałam w trzech prawdziwych husach i w domku polskich paleontologów. Program mojej pracy obejmował formacje skalne rozsiane w różnych punktach po obu stronach Hornsundu. Dopytywaliśmy do nich łodzią i zamieszkiwaliśmy w najbliższym husie. Często trzeba było pobierać próby ze skał wystających tuż nad wodą, dostępnych tylko w czasie odpływu lub wspinać się po drobnych uciekających spod nóg piargach wysoko w górę. Próby znosiliśmy w plecakach do husa i po zakończeniu pracy w danym rejonie łodzią przewoziliśmy je do bazy.

Była to ciężka praca, wymagająca dużego wysiłku, ale jednocześnie umożliwiała poznanie wielu nowych miejsc i obejrzenie ciekawych i pięknych zakątków.

W bazie próby starannie opisane i owinięte w papier zostały zapakowane w skrzynie i statkiem przewiezione do Polski. A ja, mierząc teraz małe kamienne sześciangi, które zostały z tych prób wycięte, myślę, że moja praca na Spitsbergenie to była także przygoda.

Zagadnienia wywodzące się z nauk przyrodniczych i wchodzące w zakres badań matematyków charakteryzują się tym, że przestają być jasne intuicyjnie, ale zyskują na przejrzystości matematycznej. Wynika to z wprowadzenia dość dużego stopnia abstrakcji, pozwalającej na ściśle i poprawne formułowanie ważnych definicji i dalsze badania za pomocą aparatu matematycznego. Taka sytuacja jest np. w geometrii, która wywodząc się z czysto praktycznej wiedzy, stała się obecnie dyscypliną zupełnie niezależną od praktyki.

W mechanice klasycznej związki ze światem „rzeczywistym” są nieco silniejsze, ale obecnie należy ją również traktować jako dział matematyki, a nie fizyki. Na bazie modelu fizycznego została tu bowiem stworzona teoria matematyczna i przy jej rozwijaniu można obejść się bez odwoływania się do intuicji fizycznej. Jednakże czasem znajomość interpretacji pewnych pojęć jest niezwykle cenna. Dlatego też chciałbym przypomnieć sens fizyczny niektórych definicji, występujących w teorii pola.

Polem w mechanice nazywamy funkcję $\varphi: \Omega \rightarrow Y$, gdzie Ω jest pewnym zbiorem punktów przestrzeni (lub płaszczyzny), natomiast Y może być zbiorem liczb rzeczywistych lub zbiorem wektorów. W zależności od Y otrzymujemy pole skalarne lub pole wektorowe. Tak więc pole skalarne jest funkcją, która punktom przyporządkowuje liczby, a pole wektorowe — funkcją przyporządkowującą punktom wektory. Jeżeli w przestrzeni (na płaszczyźnie) wprowadzony jest układ współrzędnych, to każdemu punktowi można przyporządkować uporządkowaną trójkę (parę) liczb i pole staje się funkcją trzech (dwóch) zmiennych liczbowych. Jednakże przy przechodzeniu do innego układu współrzędnych funkcja ta ulega zmianie. Żeby podkreślić, że pole nie zależy od wprowadzonego układu współrzędnych zachowuje się nazwę „pole” zamiast funkcji. Przykładem pola skalarnego może być pole temperatury atmosfery, pole gęstości masy jakiegoś ciała, pole wysokości nad poziom morza itd. Przykładem pola wektorowego może być pole prędkości cieczy w kanale, pole siły ciężkości itd.

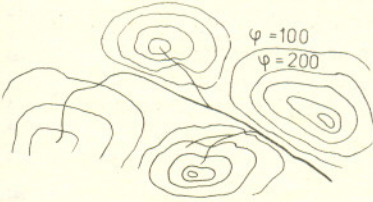
Dla ułatwienia opisu wprowadźmy i ustalmy pewien prostokątny układ współrzędnych kartezjańskich.

Niech wektor r zaczepiony w początku układu współrzędnych i końcu w punkcie p , ma składowe x, y, z (na płaszczyźnie odpowiednio $r = [x, y]$). Ponieważ istnieje odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna między r i punktem p o współrzędnych x, y, z (lub x, y), będę w dalszym ciągu używał wektora r dla określenia punktu p mimo, że są to zupełnie inne pojęcia geometryczne.

Na początku zajmiemy się polem skalarnym $\varphi(p)$. Oznaczmy

$$\varphi(p) \stackrel{\text{def}}{=} f(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} f(r).$$

Pole skalarne można całkowicie scharakteryzować podając zbiór powierzchni (linii w przypadku dwuwymiarowym), na których ma ono stałą wartość oraz podając wartość odpowiadającą danej linii. Taki sposób jest często stosowany w przypadku dwuwymiarowym np. przy określaniu poziomicy na mapie.



Gradient

W celu badania pola skalarnego metodami analizy matematycznej wygodnie jest wprowadzić pochodną kierunkową pola φ . Pochodną kierunkową pola w punkcie p i w kierunku wektora jednostkowego l nazywamy (o ile istnieje) liczbę

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(p_1) - \varphi(p)}{h} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\varphi}{dl},$$

gdzie h jest odległością między punktami p_1 i p oraz punkt p_1 leży na półprostej o kierunku wektora l , wychodzącej z punktu p . Pochodna kierunkowa w myśl definicji nie zależy od wyboru układu współrzędnych, ale można ją w danym układzie współrzędnych zapisać

$$\frac{d\varphi}{dl} = \frac{df}{dl} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(r+h) - f(r)}{h}.$$

Jeżeli $f(r+hl)$ będziemy traktować jako funkcję złożoną zmiennej h , to

$$\frac{df}{dl} = \left. \frac{df(r+hl)}{dh} \right|_{h=0} = \frac{\partial f}{\partial x} l_x + \frac{\partial f}{\partial y} l_y + \frac{\partial f}{\partial z} l_z = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right] \cdot l, \quad \text{gdzie } l = [l_x, l_y, l_z].$$

Ponieważ lewa strona tej równości nie zmienia się przy przejściu do innego układu współrzędnych, więc musi zachowywać się także prawa strona. Zatem trójka liczb

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ oznacza w danym układzie kartezjańskim składowe pewnego wektora

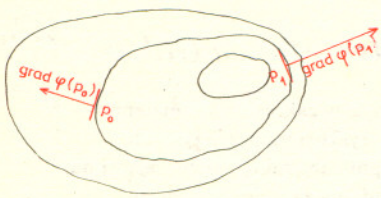
w punkcie x, y, z . Wektor ten nazywamy *gradientem* pola skalarnego i oznaczamy symbolem

$$\text{grad } \varphi = \text{grad } f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right].$$

Y może być zbiorem innych jeszcze obiektów, np. tensorów, ale nie będziemy się tu nimi zajmować (o tensorach — w przyszłym roku).

Umawiamy się przy tym, że wektor przyporządkowany punktowi jest zaczepiony w tym właśnie punkcie.





Łatwo zauważyć, że w innym prostokątnym układzie współrzędnych kartezjańskich, w którym $\varphi(p) = f_1(r_1)$ gradient ma inne składowe: $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \frac{\partial f_1}{\partial y_1}, \frac{\partial f_1}{\partial z_1}$ (tzn. nie zmienia się sposób ich obliczania). Operację obliczania gradientu zapisuje się czasami za pomocą symbolu $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$.

Pochodną funkcji można interpretować jako szybkość zmiany tej funkcji, np. pochodna drogi względem czasu jest szybkością zmiany drogi tzn. zwykłą prędkością. Zatem pochodna kierunkowa w punkcie p oznacza szybkość zmiany pola w tym punkcie w kierunku wektora l . Ze wzoru $\frac{d\varphi}{dt} = l \cdot \text{grad } \varphi$ oraz definicji iloczynu skalarnego wektorów

$$l \cdot \text{grad } \varphi = |l| |\text{grad } \varphi| \cos \alpha = |\text{grad } \varphi| \cos \alpha$$

(α jest kątem między wektorem l i $\text{grad } \varphi$, pionowe kreski oznaczają długości wektorów i $|l| = 1$) wynika, że gradient pola skalarnego wyznacza kierunek najszybszej zmiany pola w danym punkcie, a jego długość określa szybkość tej zmiany.

Zauważyć należy jeszcze, że jeżeli wektor l leży w płaszczyźnie stycznej do powierzchni $\varphi = \text{const}$, to $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, co oznacza, że gradient jest wektorem prostopadłym do l , a więc do

tej powierzchni. Jeżeli powierzchnie (lub linie) jednakowej wartości pola zagęszczają się w pobliżu jakiegoś punktu, to w tym punkcie wartość gradientu jest większa niż w punkcie, w pobliżu którego powierzchnie (linie) są w większej odległości (rysunek obok).

Jak widzimy pole skalarnie wyznacza pewne pole wektorowe (pole gradientu) dość dokładnie je charakteryzujące.

Pole wektorowe A , które można traktować jako pole gradientu pewnego pola skalarnego φ , nosi nazwę pola potencjalnego, zaś pole φ nazywamy wtedy potencjałem pola A .

Przykładem pola potencjalnego może być pole siły grawitacyjnej. Potencjał w tym przypadku nazywa się energią potencjalną masy jednostkowej.



Dywergencja

Mając pole wektorowe A można związać z nim pole skalarnie, stanowiące pewną charakterystykę danego pola wektorowego. Przykładem takiego pola jest dywergencja. Zaczniemy od przykładu fizycznego. W pewnym obszarze dany jest stacjonarny przepływ cieczy nieściśliwej (gęstość ρ jest stała). Prędkość w każdym punkcie tej cieczy określa pewne pole wektorowe V . Jeżeli w tym polu umieścimy powierzchnię S , to możemy badać ilość $m = \rho Q$ cieczy przez nią przepływającej. Jeżeli można powierzchnię podzielić na k elementów o polach $S_i, i = 1, 2, \dots, k$, na których V_{ni} (składowa wektora V w kierunku prostopadłym do i -tego elementu) ma stałą wartość, to objętość cieczy przepływającej przez powierzchnię S w jednostce czasu wynosi:

$$Q = \sum_{i=1}^k V_{ni} S_i = \sum_{i=1}^k (V \cdot n_i) S_i,$$

gdzie n_i jest wektorem jednostkowym prostopadłym do i -tego elementu powierzchni.

W ogólnym przypadku zamiast sumy należy stosować całkę powierzchniową $Q = \iint_S V \cdot n dS$,

gdzie n jest wektorem normalnym do powierzchni, tzn. wektorem jednostkowym prostopadłym do niej. W związku z występowaniem w powyższych wzorach wektora normalnego do powierzchni, należy jednoznacznie wybierać zwrot tego wektora. Dla naszych celów wystarczy powiedzieć, że będzie to normalna zewnętrzna, gdyż będziemy rozważać tylko powierzchnie zamknięte.

Strumieniem pola wektorowego A przez powierzchnię S nazywamy całkę powierzchniową

$$\iint_S A \cdot n dS.$$

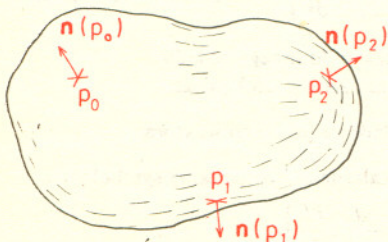
W przypadku pola prędkości cieczy nieściśliwej jest to, jak już zauważyliśmy, objętość zajmowana przez ciecz przepływającą przez powierzchnię w jednostce czasu.

Niech \mathcal{S} będzie ustaloną powierzchnią zamkniętą, p — ustalonym punktem wewnątrz \mathcal{S} . Przez \mathcal{S}_τ oznaczymy powierzchnię jednokładną z \mathcal{S} względem p taką, że bryła ograniczona przez \mathcal{S}_τ ma objętość τ . Możemy wtedy badać istnienie granicy

$$(*) \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \iint_{\mathcal{S}_\tau} A \cdot n dS.$$

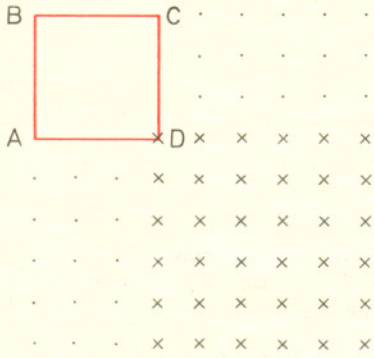
Gdy $\tau \rightarrow 0$, cała bryła ściąga się do punktu p . Jeżeli dla dowolnej powierzchni \mathcal{S} granica (*) istnieje i jest taka sama dla wszystkich \mathcal{S} , to granica ta określa w punkcie p wartość pewnego pola skalarnego.

Nie podajemy tu ścisłej definicji całki powierzchniowej. Przybliżoną wartość takiej całki — o ile całka ta istnieje — można znaleźć wpisując w powierzchnię S wielościan o bardzo małych powierzchniach ścian, zakładając, że funkcja podcałkowa jest stała na każdej ze ścian, a następnie obliczając wielkość Q zdefiniowaną poprzednim wzorem. (Warto przy tym zauważyć, że $\iint_S 1 dS$ jest wobec tego polem powierzchni \mathcal{S} .)





Rozwiązanie zadania M 103. Obliczmy, ile jest różnych kwadratów $k \times k$. Aby uzyskanie odpowiedzi na to pytanie uczynić bardziej pogładowym przyjmijmy $n = 9$ $k = 4$.



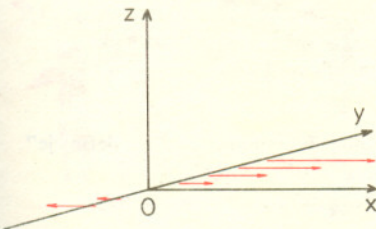
Dowolny kwadrat 4×4 otrzymamy przesuwając kwadrat narysowany tak, aby wierzchołek D znalazł się w jednym z punktów oznaczonych krzyżykiem. Punktów tych jest 6^2 . Ogólnie kwadratów $k \times k$ na szachownicy $n \times n$ jest $(n-k+1)^2$. Wszystkich kwadratów na szachownicy jest więc

$$\sum_{k=1}^n (n-k+1)^2 = n^2 + (n-1)^2 + \dots + 1^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Ostatnią równość można łatwo udowodnić przez indukcję.

Nie podajemy tu ścisłej definicji całki krzywoliniowej. Przybliżoną wartość takiej całki — o ile istnieje — można obliczyć zastępując krzywą przez wpisaną w nią łamaną, złożoną z bardzo krótkich odcinków, a funkcję podcałkową — funkcją, która na każdym z tych odcinków jest stała i mało różni się od funkcji podcałkowej (Wyrażenie $\int_L 1 dL$ jest wobec tego długością krzywej \mathcal{L} .)

„ \times ” oznacza iloczyn wektorowy: jeśli w przestrzeni trójwymiarowej dane są wektory a i b , to $a \times b$ jest takim wektorem, który (1) jest prostopadły do a i do b ; (2) ma długość równą polu równoległoboku rozpiętego na a i b ; (3) ma taki zwrot, że trójka $a, b, a \times b$ zorientowana jest dodatnio. Np. $[1, 0, 0] \times [0, 1, 0] = [0, 0, 1]$ ale $[0, 1, 0] \times [1, 0, 0] = [0, 0, -1]$.



Pole to nazywamy *dywergencją* pola wektorowego A :

$$(\text{div } A)(p) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \iint_{\mathcal{S}_\tau} A \cdot n dS.$$

Jeżeli wprowadzony jest prostokątny układ współrzędnych kartezjańskich, to można pokazać (wykorzystując twierdzenie Gaussa-Ostrogradzkiego), że

$$\text{div } A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \quad \text{gdzie } A(p) = [P(p), Q(p), R(p)].$$

Powróćmy jeszcze raz do przykładu cieczy nieściśliwej i wybierzmy jednostki tak, aby $\varrho = 1$. Wówczas strumień $\iint_{\mathcal{S}} V \cdot n dS$ przez zamkniętą powierzchnię \mathcal{S} oznacza ilość cieczy,

która powstała lub znikła w obszarze ograniczonym powierzchnią. Jeżeli w obszarze tym nie ma źródeł lub źródeł ujemnych (upustów) cieczy, to strumień przez taką powierzchnię jest zerowy. W przeciwnym przypadku daje nam wielkość określoną jako moc źródeł (upustów). Zatem dywergencja pola prędkości cieczy nieściśliwej może być interpretowana jako gęstość źródeł (upustów) w danym punkcie. Interpretacja dywergencji innych pól wektorowych, np. pola siły grawitacji, pola elektrostatycznego itd. wymaga szerszego zastosowania aparatu matematycznego i dlatego nie będę jej tu przytaczał. Osoby zainteresowane odsyłam do literatury specjalistycznej np. A. И. Борисенко, И. Е. Тарапов: *Векторный анализ и начало тензорного исчисления*, Б. М. Бурак, С. В. Фомин: *Кратные интегралы и ряды*.

Rotacja

Jeżeli F jest stałym polem siłowym a \mathcal{L} pewnym odcinkiem równoległym do F , to iloczyn $|F| \cdot \mathcal{L}$ daje pracę siły F na drodze \mathcal{L} . W ogólnym przypadku dla określenia pracy musimy wziąć całkę krzywoliniową ze składowej stycznej F_τ wektora F wzdłuż krzywej \mathcal{L} . Uogólniając to pojęcie na przypadek dowolnego pola wektorowego wprowadzamy definicję:

Cyrkulacją pola wektorowego A nazywamy całkę $\int_{\mathcal{L}} A_\tau dL$, gdzie A_τ jest składową wektora A styczną do krzywej \mathcal{L} . Wprowadźmy prostokątny układ współrzędnych, w którym $A(p) = [P(p), Q(p), R(p)]$. Dla krzywej zamkniętej \mathcal{L} całkę $\int_{\mathcal{L}} A_\tau dL$ można sprowadzić do całki powierzchniowej (korzystając z tw. Stokesa):

$$\int_{\mathcal{L}} A_\tau dL = \iiint_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx$$

po powierzchni \mathcal{S} ograniczonej krzywą \mathcal{L} .

„Wektor” o składowych $\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ w tym układzie

współrzędnych nazywamy *rotacją (wirum)* pola wektorowego A i oznaczamy symbolem $\text{rot } A$. Z własności całki powierzchniowej wynika, że prawa strona ostatniej równości jest równa $\iiint_{\mathcal{V}} (\text{rot } A) \cdot n dS$. Oznacza to, że cyrkulacja pola wektorowego A wzdłuż krzywej zamkniętej

jest równa strumieniowi pola wektorowego $\text{rot } A$ przez powierzchnię \mathcal{S} . Rotacja, w odróżnieniu od poprzednich pojęć, została wprowadzona przy pomocy konkretnego układu współrzędnych. Można pokazać, że jeżeli ograniczymy się do układów o ustalonej orientacji, to jest ona wielkością niezależną od układu. Jednakże przy zmianie orientacji układu zmienia znak. Rotacja pola charakteryzuje „składową obrotową” pola wektorowego. Sens tego pojęcia wyjaśnię na kilku przykładach.

1) Ciało sztywne obracające się z prędkością kątową ω określa pewne pole wektorowe prędkości V wzorem $V = \omega \times r$, gdzie wektor r jest „promieniem wodzącym” punktu ciała. Określmy prostokątny układ współrzędnych, w którym $r = [x, y, z]$. Po wykonaniu obliczeń okazuje się, że $\text{rot } V = 2\omega$. Zatem rotacja w tym przypadku określa obrót ciała.

2) Ciecz porusza się ze stałą prędkością, tzn. pole prędkości $V = [P, Q, R]$ ma stałe składowe. Rotacja jest w tym przypadku równa zero i nie występuje żaden ruch obrotowy. Ciecz porusza się prostoliniowo.

3) Ciecz porusza się z prędkością $V = [y, 0, 0]$, (tzn. im dalej od płaszczyzny X, Z tym większa jest prędkość cieczy); $\text{rot } V = [0, 0, -1]$. W tym przypadku ciecz porusza się prostoliniowo i pozornie nie ma żadnego obrotu wbrew temu, że rotacja, charakteryzująca ruch wirowy (obrotowy), jest różna od zera.

Przeływ taki zawiera jednak jakby potencjalną możliwość wykonywania obrotu. Jeżeli np. wstawimy do niego kółko z łopatkami tak, że oś obrotu nie będzie prostopadła do osi Z , to przepływ ten zacznie to kółko obracać.

Między gradientem, rotacją i dywergencją zachodzi szereg związków. Wymienię tylko te dwa spośród nich, które wydają mi się najważniejsze:

a) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} A) = 0$.

b) Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, żeby pole wektorowe A było potencjalne, jest warunek $\operatorname{rot} A = 0$

Z każdego z nich wynika natychmiast równość, którą umieściłem w tytule

$$\operatorname{div}[\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi)] \equiv 0.$$

Różne całki — podobne własności

Rozważmy zadanie:

Dany jest odcinek $\langle a, b \rangle$ na osi X . Z każdego punktu x tego odcinka wystawiamy prostopadłe w górę odcinek o długości $f(x) \geq 0$. Obliczyć pole S powstającej w ten sposób figury płaskiej (o funkcji $f(x)$ zakładamy, że jest „porządną”, np. ciągłą).

Jak wiemy, rozwiązaniem tego zadania jest *całka (pojedyncza)* funkcji f po odcinku $\langle a, b \rangle$ (zob. rys. 1):

$$S = \int_{\langle a, b \rangle} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Co więcej, historycznie rzecz biorąc, całka oznaczona została wprowadzona właśnie po to, by była ona rozwiązaniem naszego zadania. Przybliżony sposób obliczania tej całki (o ile ona istnieje) podany jest na rys. 2 (dodajemy pola małych prostokątów). Jak wiemy, można również obliczać całki z funkcji nie tylko dodatnich.

Rozważmy teraz zadanie analogiczne (rys. 3):

Dany jest obszar płaski \mathcal{P} w płaszczyźnie XY . Z każdego punktu (x, y) tego obszaru wystawiamy prostopadłe „w górę” odcinek o długości $f(x, y) \geq 0$. Obliczyć objętość B powstającej w ten sposób bryły (o funkcji $f(x, y)$ i tu zakładamy, że jest „porządną”, np. ciągłą).

Rozwiązanie tego zadania nazywa się *całką podwójną* funkcji $f(x, y)$ po obszarze \mathcal{P} :

$$B \stackrel{\text{df}}{=} \iint_{\mathcal{P}} f(x, y) dx dy = \iint_{\mathcal{P}} f(x, y) d\mathcal{P}.$$

Przybliżony sposób obliczania tej całki (o ile ona istnieje) podany jest na rys. 4 (dodajemy objętości małych prostopadłościów). Okazuje się, że można zdefiniować nieco ogólniej całkę podwójną, tak aby miała ona sens dla funkcji nie tylko dodatnich.

W podobny sposób można wprowadzić całkę potrójną. Formułujemy mianowicie zadanie:

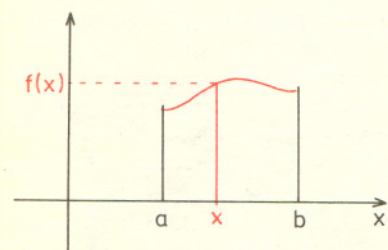
Dany jest w przestrzeni XYZ obszar trójwymiarowy (bryła) \mathcal{V} . Z każdego punktu (x, y, z) wystawiamy „w czwarty wymiar” prostopadłe w kierunku dodatniego zwrotu czwartej osi odcinek o długości $f(x, y, z) \geq 0$ (o funkcji $f(x, y, z)$ zakładamy, że jest np. ciągłą). Obliczyć „objętość czterowymiarową” U powstającej w ten sposób bryły czterowymiarowej.

Rozwiązaniem tego zadania jest *całka potrójna* z funkcji $f(x, y, z)$ po bryle \mathcal{V} :

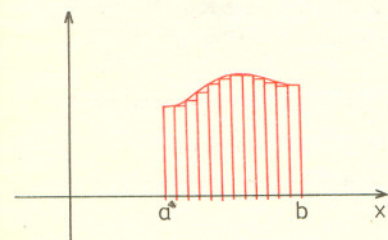
$$U = \iiint_{\mathcal{V}} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\mathcal{V}} f(x, y, z) d\mathcal{V}.$$

Przybliżony sposób obliczania tej całki (o ile ona istnieje) jest analogiczny do poprzednich: dzielimy \mathcal{V} na małe kostki, objętość kostki mnożymy przez wartość funkcji f w lewym-dolnym-przednim rogu kostki (będzie to objętość „prostopadłościu czterowymiarowego”) i wszystkie te iloczyny dodajemy. Trudno sobie wyobrazić sens geometryczny tej całki, ma ona jednak proste ilustracje fizyczne. Np. jeśli \mathcal{V} jest geometrycznie ciałem o niejednorodnej gęstości $f(x, y, z)$, to dla obliczenia masy tego ciała należy obliczyć całkę z gęstości po bryle \mathcal{V} . (Innymi słowy — gęstość „odkładamy” w czwartym wymiarze, nadając obliczaniu masy interpretację geometryczną). Przybliżony sposób obliczania całki odpowiada tu skorzystaniu z faktu, że w bardzo małych obszarach gęstość można uznać za praktycznie stałą.

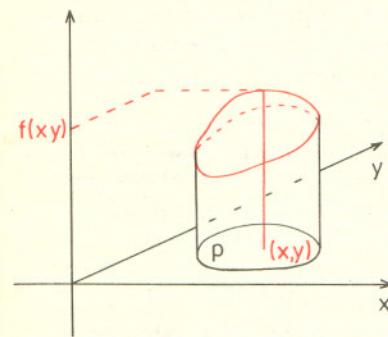
Uznajmy więc, że wiemy już, co to są całki: podwójna i potrójna. Przyjmijmy też, że „definicje” całek: *krzywoliniowej* i *powierzchniowej* podane na marginesie artykułu $\operatorname{div}[\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi)] \equiv 0$ też w wystarczającym stopniu uruchomiły naszą intuicję. Możemy teraz sformułować trzy interesujące twierdzenia.



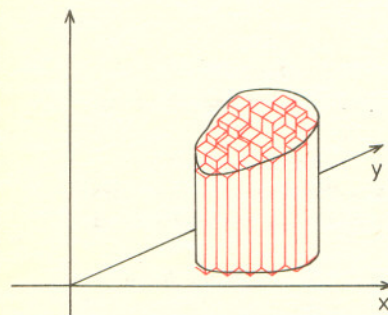
Rys. 1



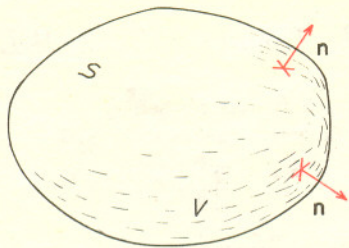
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

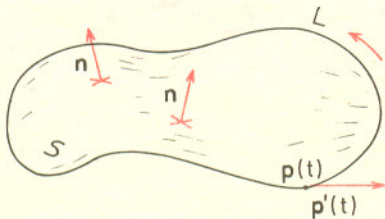


Rys. 5

Twierdzenie Gaussa-Ostrogradzkiego. Jeśli \mathcal{S} jest gładką powierzchnią zamkniętą, $\mathbf{n}(x, y, z)$ wektorem jednostkowym zewnętrznie prostopadłym do tej powierzchni w punkcie (x, y, z) , \mathcal{V} — bryłą, której brzegiem jest \mathcal{S} (rys. 5) i wreszcie $\mathbf{W} = (P, Q, R)$ polem wektorowym na \mathcal{V} takim, że funkcje P, Q, R są różniczkowalne, to

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{W} d\mathcal{V}.$$

Innymi słowy, wartość całki po \mathcal{V} pewnej funkcji zależnej od pochodnych \mathbf{W} (dywergencji tego pola) wyznaczona jest jednoznacznie przez wartości pola \mathbf{W} na brzegu \mathcal{S} bryły \mathcal{V} . Zaskakujące?



Rys. 6

Twierdzenie Stokesa. Niech \mathcal{L} będzie gładką krzywą zamkniętą o ustalonej orientacji (kierunku obiegu) ograniczającą powierzchnię \mathcal{S} w przestrzeni trójwymiarowej (rys. 6), a $\mathbf{W} = (P, Q, R)$ polem wektorowym określonym na \mathcal{S} takim, że funkcje P, Q, R są różniczkowalne. Niech $\mathbf{n}(x, y, z)$ będzie wektorem jednostkowym prostopadłym do \mathcal{S} w punkcie (x, y, z) o zwrocie wybranym tak, że dla obserwatora siedzącego na jego końcu krzywa \mathcal{L} obiegana jest w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara. Niech wreszcie $\mathbf{p}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in \langle a, b \rangle$, będzie równaniem parametrycznym krzywej \mathcal{L} (wtedy wektor $\mathbf{p}'(t) = [x'(t), y'(t), z'(t)]$ jest styczny do krzywej \mathcal{L} w punkcie $(x, y, z) = \mathbf{p}(t)$). Przy tych założeniach

$$\int_{\langle a, b \rangle} \mathbf{W} \cdot \mathbf{p}' dt = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{n} \cdot \left[\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right), \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right), \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{W} d\mathcal{S}.$$

A więc — wartość całki po powierzchni \mathcal{S} z pewnej funkcji zależnej od pochodnych \mathbf{W} (tzn. z iloczynu skalarnego rotacji \mathbf{W} i wektora \mathbf{n}) wyznaczona jest jednoznacznie przez wartości pola \mathbf{W} na brzegu powierzchni \mathcal{S} (tj. na krzywej \mathcal{L}). Dziwne?

I trzecie twierdzenie. Jeśli punkty a, b są końcami odcinka \mathcal{J} , na którym określona jest różniczkowalna funkcja F , to

$$F(b) - F(a) = \int_{\mathcal{J}} F'(t) dt.$$

A więc wartość całki po krzywej \mathcal{J} z pewnej funkcji zależnej od F (to jest z jej pochodnej) wyznaczona jest jednoznacznie przez wartości funkcji F na brzegu (to jest na końcach) tej krzywej. Dziwne? Nie bardzo. Jest to dobrze znany wzór na obliczanie całki oznaczonej.

Dwa poprzednie wzory nie są dziwniejsze od tego. Jedynie — znacznie bardziej skomplikowane.



Zadania

Redaguje dr Andrzej ZIEMIŃSKI

F 35. Przypuśćmy, że mamy dwie takie same rolki obracające się w przeciwnych kierunkach (ku sobie) ze stałą prędkością kątową Ω i położoną na nich deskę drewnianą o ciężarze P . Deska leży poziomo, a obracające się rolki ślizgają się pod nią. Współczynnik tarcia dynamicznego rolek o deskę wynosi f . W chwili początkowej deska została umieszczona na rolkach w ten sposób, że jej środek ciężkości znalazł się na prawo od punktu leżącego w połowie odległości między osiami rolek.

Opiszcie ruch deski.

Rozwiązania szukajcie na str. 2

Redaguje mgr Andrzej MAKOWSKI

M 103. Ile jest na szachownicy $n \times n$ różnych kwadratów złożonych z (całych) pól szachownicy? (Dwa kwadraty uważamy za różne, gdy zbiory pól wchodzących w ich skład są różne.)

W. Mnich.

Rozwiązanie na str. 5

M 104. Rozwiązać równanie $\cos^n x - \sin^n x = 1$, gdzie n jest liczbą naturalną.

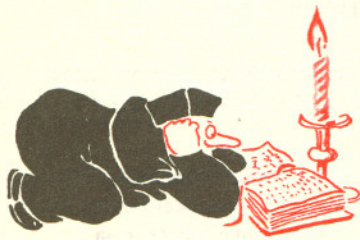
Rozwiązanie na str. 17

M 105. Udowodnić, że dla $n \geq 3$ zachodzi nierówność

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} > \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n^2}.$$

Rozwiązanie na str. 15





Całą klasyczną teorię elektromagnetyzmu można zapisać za pomocą czterech równań podanych w 1873 r. przez Jamesa Clarka Maxwella. Jest rzeczą fascynującą przekonać się jak pozornie niezależne zjawiska okazują się być powiązane. Tęcza na niebie, rozchodzenie się fal radiowych, przyciąganie się naelektryzowanych kulek — to wszystko można wyjaśnić na gruncie teorii Maxwella. Równań Maxwella nie ma w programie szkolnym i nie może być. Zrozumienie ich i wykorzystanie wymaga znajomości metod matematycznych nie znanych w szkole. W tym numerze „Deltę” w artykule $\text{div}[\text{rot}(\text{grad}\varphi)] \equiv 0$ M. Grudnicki wprowadza niezbędny aparat matematyczny. Skorzystajmy z tego i pobawmy się nieco równaniami. Pokażemy, jak można wyprowadzić z nich znane nam prawo Coulomba oddziaływania ładunków elektrycznych i jak obliczyć indukcję pola magnetycznego wokół przewodnika z prądem. Potrzebujemy do tego twierdzenia Gaussa, twierdzenia Stokesa — no i równań Maxwella.

Dokonajmy ich prezentacji w postaci w jakiej opisują pole elektromagnetyczne w próżni. Równania Maxwella

$$1. \quad \text{div} E = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \quad 2. \quad \text{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$3. \quad \text{div} B = 0; \quad 4. \quad \text{rot} B = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{j}{\epsilon_0 c^2},$$

gdzie

E — wektor natężenia pola elektrycznego. Siła działająca na ładunek q w polu o natężeniu E wynosi $F = q \cdot E$,

B — wektor indukcji magnetycznej. Siła działająca na ładunek q poruszający się z prędkością v w polu o indukcji B wynosi $F = q \cdot v \times B$,

j — gęstość prądu. Wektor ten jest skierowany w kierunku ruchu ładunków dodatnich i równa się co do wartości bezwzględnej natężeniu prądu na jednostkę powierzchni S ustawioną prostopadle do kierunku prądu $|j| = \frac{dI}{dS}$,

ρ — gęstość objętościowa ładunku elektrycznego $\rho = \frac{dq}{dV}$,

c — prędkość światła,

ϵ_0 — stała dielektryczna próżni.

Wiemy już co oznaczają poszczególne symbole. Zwróćmy więc uwagę, że wszystkie równania określają związki między E, B, j, ρ w dowolnym punkcie przestrzeni. Nie występują tu ani przewodniki ani obwody ani nawet ładunki. Wszystkie wielkości charakteryzują jeden punkt w przestrzeni i formalnie nie interesują się własnościami sąsiadów.

Postawiliśmy sobie na wstępie dwa zadania — jedno z elektrostatyki a drugie z magnetyzmu.

Możemy więc równania znacznie uprościć zakładając, że natężenie pola elektrycznego i indukcja magnetyczna nie zmieniają się w czasie:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial B}{\partial t} = 0.$$

Równania przybierają postać

$$1. \quad \text{div} E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad 2. \quad \text{rot} E = 0$$

$$3. \quad \text{div} B = 0 \quad 4. \quad \text{rot} B = \mu_0 j$$

$\left(\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \right.$ oznaczamy literą μ_0 i nazywamy przenikalnością magnetyczną próżni).

Dwa pierwsze równania opisują elektrostatykę, a pozostałe dwa magnetostatykę. Jak je zastosować?

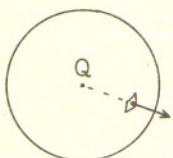
PRAWO COULOMBA

W pewnym punkcie przestrzeni umieszczamy ładunek Q . Pytamy, czemu równa się natężenie pola elektrostatycznego w odległości R . Z symetrii problemu wynika, że wartość natężenia pola musi być co do wartości bezwzględnej taka sama we wszystkich punktach na powierzchni \mathcal{S} kuli \mathcal{V} o promieniu R . Wektor E musi być skierowany wzdłuż promienia. Jeżeli ładunek Q jest dodatni, to E jest skierowane na zewnątrz kuli. Pozostaje obliczenie wartości $E = |E|$. Skorzystajmy z

1. Twierdzenia Gaussa

$$\iint_{\mathcal{S}} E \cdot n dS = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div} E dV,$$

gdzie n oznacza wektor jednostkowy prostopadły do powierzchni \mathcal{S} kuli \mathcal{V} , oraz



kula o promieniu R

2. Równania Maxwella



$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Wektor \mathbf{E} jest wszędzie prostopadły do powierzchni kuli, więc $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{s} = 4\pi R^2 \cdot E$,

$$4\pi R^2 E = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{E} dV = \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \frac{dQ}{dV} dV = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Stąd

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Siła działająca na ładunek q w odległości R od ładunku Q

$$F = q \cdot E = \frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

A to jest właśnie zapis prawa Coulomba. Otrzymaliśmy je jako szczególny przypadek równań Maxwella.

POLE MAGNETYCZNE PRZEWODNIKA Z PRĄDEM

W długim prostoliniowym przewodniku płynie prąd o natężeniu I . Wartość wektora indukcji jest na powierzchni walca o długości d i o promieniu R wszędzie taka sama. Nie możemy jednak nic powiedzieć, jak jest skierowany wektor \mathbf{B} . Może być albo wzdłuż promienia (a) albo prostopadły do promienia i w płaszczyźnie prostopadłej do osi walca (b). Pokażemy, że tylko drugi wariant jest możliwy.

W pierwszym przypadku (a) z twierdzenia Gaussa mamy

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{S}_1} 0 \cdot \mathbf{n} d\mathbf{S}_1 + \iint_{\mathcal{S}_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{S}_2 = 2\pi R B d = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{B} dV.$$

gdzie \mathcal{S} — powierzchnia walca \mathcal{V} , \mathcal{S}_1 — „denka” walca, \mathcal{S}_2 — powierzchnia boczna. Podobnie jak poprzednio \mathbf{n} oznacza wektor jednostkowy prostopadły do powierzchni. Z równania Maxwella $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, a więc

$$2\pi R B d = 0,$$

skąd $B = 0$.

Wektor indukcji magnetycznej nie może mieć w tym przypadku składowej wzdłuż promienia. Nie rozważamy również składowej wzdłuż walca. Jej rotacja równa się zero i nie może być wywołana przez przepływ prądu w badanym przewodniku. Jej źródłem musiałyby być jakieś inne przewodniki z prądem, których nie rozważamy. Pozostaje nam tylko takie ułożenie wektora \mathbf{B} , jak w przypadku (b). Zastosujemy twierdzenie Stokesa

$$\int_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{S},$$

gdzie \mathcal{S} jest powierzchnią ograniczoną krzywą \mathcal{L} . Ponieważ $\mathbf{B} \parallel d\mathbf{L}$, a B jest stałe, więc

$$\int_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = 2\pi R B.$$

Z równania Maxwella

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

$$\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{S} = \mu_0 \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{S}.$$

Ponieważ $\mathbf{j} \parallel \mathbf{n}$, więc

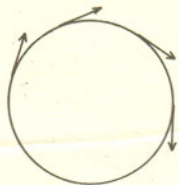
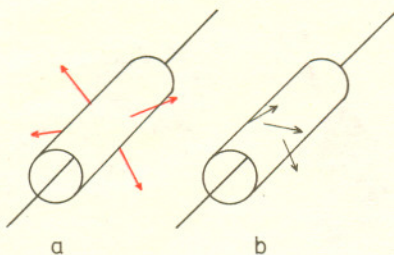
$$\mu_0 \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{S} = \mu_0 \iint_{\mathcal{S}} j d\mathbf{S} = \mu_0 I.$$

Ostatecznie

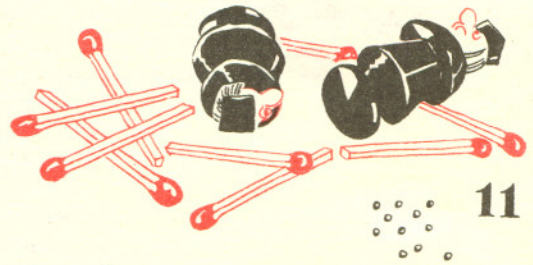
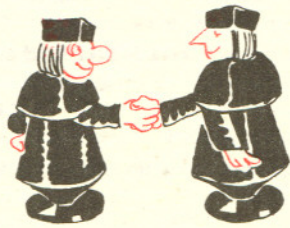
$$2\pi R B = \mu_0 I$$

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi R}.$$

Rozważyliśmy dwa najprostsze zagadnienia znane z materiału szkolnego z elektrostatyki i magnetyzmu. Chciałbym, abyś Czytelniku umiał dostrzec poza przesłaną znużonych dla nie wprawionego rachunków piękno prostoty równań Maxwella. Tak niewiele symboli potrzeba, aby ująć w jedną całość obszerny materiał doświadczalny. Im dalej posuwa się nasza wiedza, tym większe uogólnienie można tworzyć, tym jaśniej widać związek między wszystkimi zjawiskami przyrody.

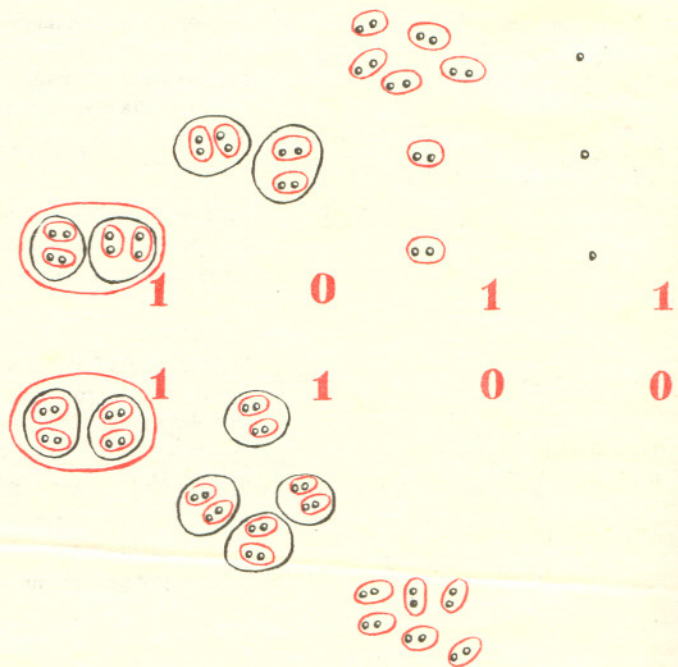


Smarta delta

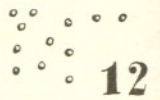


System dwójkowy

Mamy 11 pionków. Ustawmy je w pary. Pionek nie do pary odkładamy na bok. Teraz pary grupujemy w czwórki. Pojedynczą dwójkę odkładamy na bok. Wreszcie z dwóch czwórek tworzymy ósemkę. Ostatecznie, ugrupowaliśmy pionki tak: Jedna ósemka, zero czwórek, jedna dwójka i jeden pionek pojedynczy. Zapiszemy to w ten sposób: 1 0 1 1



Na odwrót, zapis 1 1 0 0 zinterpretujemy tak: Jedna ósemka, jedna czwórka, zero dwójek i zero pojedynczych pionków, razem pionków dwanaście. Jeśli pionków jest więcej, wówczas kolejne grupy liczyć będą: 16, 32, 64 ... pionki. Dwójkowy system zapisywania liczb, bo o nim tu mowa, ma wiele ciekawych własności.



+	0	1
0	0	1
1	1	10

Np.:

$$\begin{array}{r} 1110 \\ + 1011 \\ + 101 \\ \hline 11110 \end{array}$$

czyli:

$$\begin{array}{r} 14 \\ + 11 \\ + 5 \\ \hline 30 \end{array}$$

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Np.:

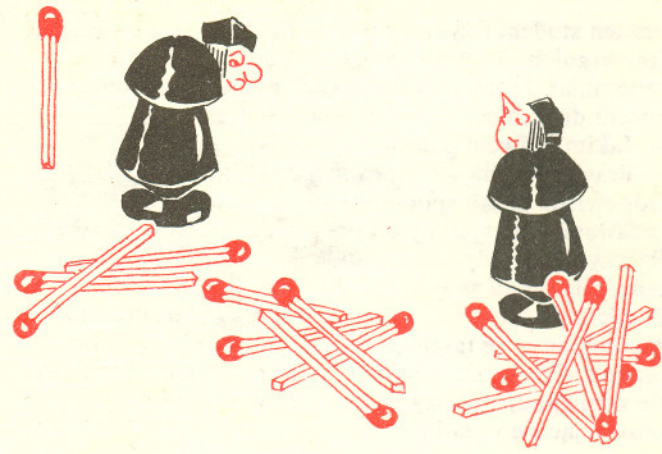
$$\begin{array}{r} 1011 \\ \times 1101 \\ \hline 1011 \\ 1011 \\ + 1011 \\ \hline 10001111 \end{array}$$

czyli:

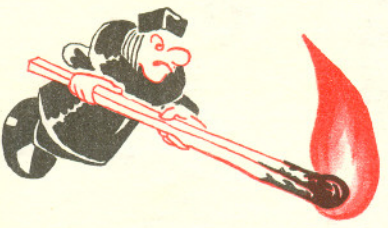
$$\begin{array}{r} 11 \\ \times 13 \\ \hline 143 \end{array}$$

Czy umiecie grać w marienbadkę?

16 zapalek dzielimy na cztery kupki: w pierwszej jedna zapalka, w drugiej 3, w trzeciej 5 i w czwartej 7 zapalek. Dwóch graczy na przemian zabiera z kupek zapalki. Wolno wziąć dowolnie wiele zapalek z jednej kupki. Nie wolno brać z dwóch kupek jednocześnie i oczywiście trzeba zabrać co najmniej jedną zapalkę. Przegrywa ten, kto zabierze ostatnią zapalkę. Po rozegraniu kilku partii nietrudno wyłowić kilka szczególnych układów przegrywających, które występują w końcowej fazie gry. Na przykład: *dwa-dwa, trzy-trzy, cztery-cztery* itp. (dwie kupki, w każdej po tyle samo zapalek). Gracz, na którego wypadnie teraz kolej z reguły przegrywa (chyba, że jego partner gra nieuważnie). **Sprawdźcie**



Inny układ przegrywający: *jeden-dwa-trzy*.



Trzeba dążyć do utworzenia jednego z tych układów. Ba, ale jak? I oto zupełnie nieoczekiwanie pomaga system dwójkowy. Dowolny układ, na przykład: *trzy-pięć-sześć* zapiszemy tak:

- 1 1 (czyli *trzy*)
- 1 0 1 (czyli *pięć*)
- 1 1 0 (czyli *sześć*). **Sprawdźcie.**

Układy przegrywające wyróżniają się cechą szczególną: w każdej kolumnie zapisu jest parzysta liczba jedynek. Na przykład: *jeden-dwa-trzy*:

- 1 (*jeden*)
- 10 (*dwa*)
- 11 (*trzy*).

Umówmy się nazywać takie układy parzystymi, a pozostałe nieparzystymi.

A oto ważne dla graczy twierdzenia

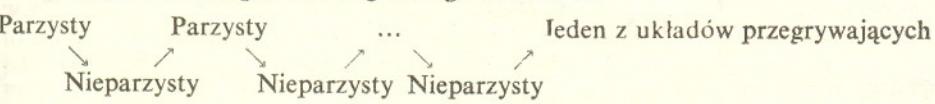
Twierdzenie pierwsze:

Jeśli gracz zabiera zapalki z układu parzystego, zawsze otrzyma układ nieparzysty.

Twierdzenie drugie:

Jeśli gracz zabiera zapalki z układu nieparzystego, to może zagrać w ten sposób, żeby otrzymać układ parzysty.

Chcąc wygrać trzeba grać według takiego schematu:



Zobaczmy jak to wygląda praktycznie. Mamy na przykład układ: *dwa-cztery-pięć*. Sprawdzamy, czy jest parzysty.

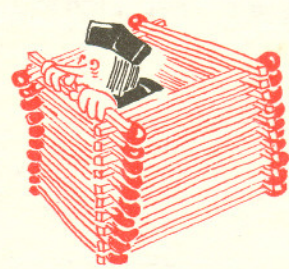
- 1 0 (dwa)
- 1 0 0 (cztery)
- 1 0 1 (pięć)

Trzeba zagrać w taki sposób, żeby doprowadzić do układu parzystego. Zabieramy jedną zapalkę z pierwszej kupki, w której były dwie zapalki. Mamy teraz układ parzysty:

- 1 (jeden)
- 1 0 0 (cztery)
- 1 0 1 (pięć).

Czy można zagrać inaczej?

Zastanówcie się jak udowodnić podane twierdzenia? Sprawdźcie, który z graczy ma w marienbadce strategię wygrywającą. Życzymy mistrzostwa w tej grze i polubienia układu dwójkowego.





Co warto wiedzieć o tarcii

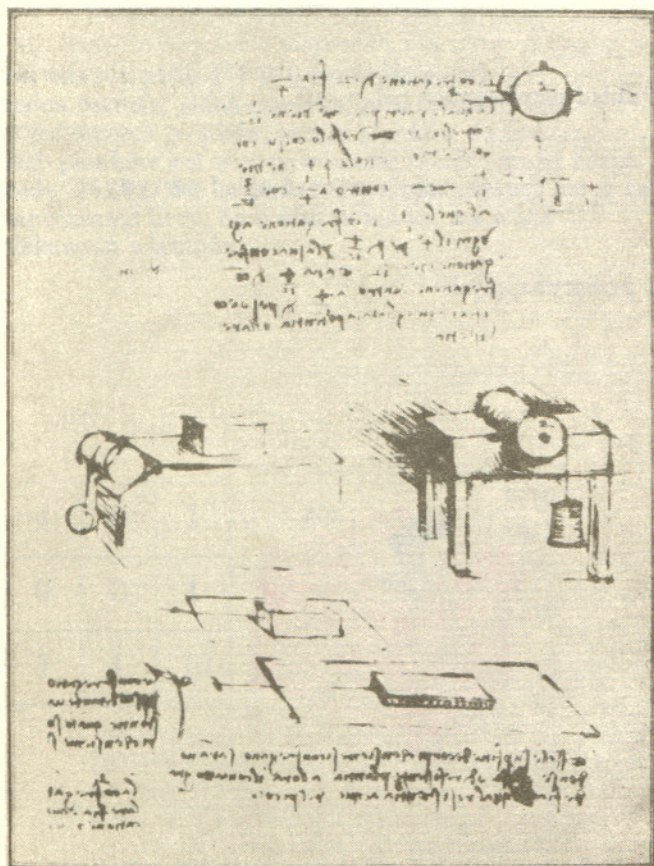
Pewien student fizyki wybrał się do profesora na egzamin.

Roztargniony profesor, zajęty swoimi badaniami, zapomniał, że umówił się ze studentem. Kiedy ten wszedł do gabinetu, profesor wykrzyknął:

— Jakim prawem pan tu wszedł?

— Prawem tarcia — odpowiedział student.

Odpowiedź ta tak spodobała się profesorowi, że bez zadawania dalszych pytań postawił studentowi piątkę. Rzeczywiście, odpowiedź studenta miała swój głęboki sens. Siła tarcia zawsze towarzyszy naszym ruchom. Pamiętamy o tym, że tarcie hamuje ruch, ale czasem zapominamy, że tarcie pomaga nam poruszać się do przodu. Gdyby nie tarcie, to koła samochodu kręciłyby się w miejscu, a pieszy przebieraliby nogami nie posuwając się w żadną stronę.



Jakie prawo rządzi siłą tarcia?

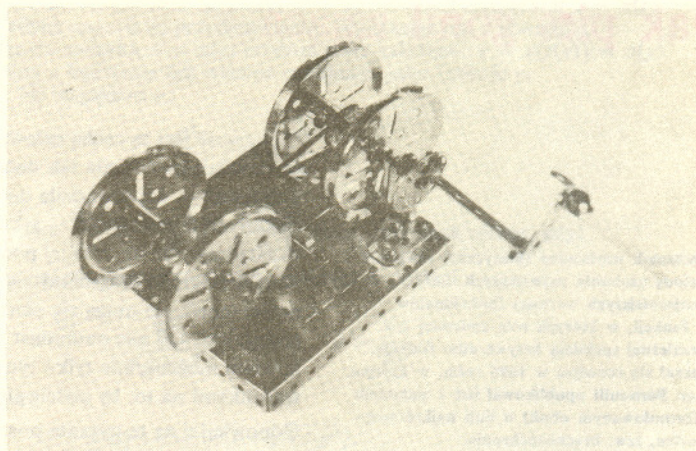
Różne zjawiska fizyczne wiążemy z nazwiskami ludzi, którzy je po raz pierwszy opisali, sformułowali odpowiednie prawa. Znamy prawo Archimedesesa, prawo Coulomba, prawa Newtona. Mało kto wie natomiast, że odkrywcą prawa tarcia był Leonardo da Vinci. Ten genialny i wszechstronny człowiek przeprowadzał specjalne doświadczenia, mające na celu zbadanie od czego zależy tarcie. Stwierdził on, że tarcie zależy od ciężaru ciała, ale nie zależy od jego długości i szerokości (czyli pola powierzchni podstawy). Jeżeli ciężar ciała zwiększymy dwukrotnie, to i tarcie wzrośnie dwukrotnie. Moglibyśmy to sformułować ogólniej, że tarcie ciała o podłożu jest proporcjonalne do nacisku wywieranego na to podłoże. Leonardo da Vinci odkrył te prawa na dwa wieki przed tym, jak Newton wprowadził pojęcie siły. Wkład Leonarda do fizyki został niedoceniony z powodu... jego nieczytelnego pisma. Leonardo był leworeczny i wolał pisać pismem lustrzanym z prawej strony do lewej. Pismo jego odczytano dopiero w czasach napoleońskich. Jeżeli oznaczymy siłę, z jaką ciało naciska na podłoże (w przypadku poziomego podłoża jest to ciężar ciała) przez P , to na siłę tarcia, T , możemy napisać następujący wzór:

$$T = f \cdot P,$$

Współczynnik f określa własności trących o siebie powierzchni. Dla ruchu metalu po drewnie f wynosi około $1/2$. Żeby przesunąć ruchem jednostajnym metalowy odważnik o wadze 1 kg po drewnianej (nie lakierowanej!) podłodze, musisz ciągnąć go siłą $0,5 \text{ kg}$. Jeśli masz dynamometr, możesz sprawdzić wzór na siłę tarcia poruszając odważniki o różnej wadze.

Bardzo ciekawe doświadczenie ilustrujące prawo tarcia zostało omówione w dziale zadań z fizyki na str. 2 niniejszego numeru „Deltę”.

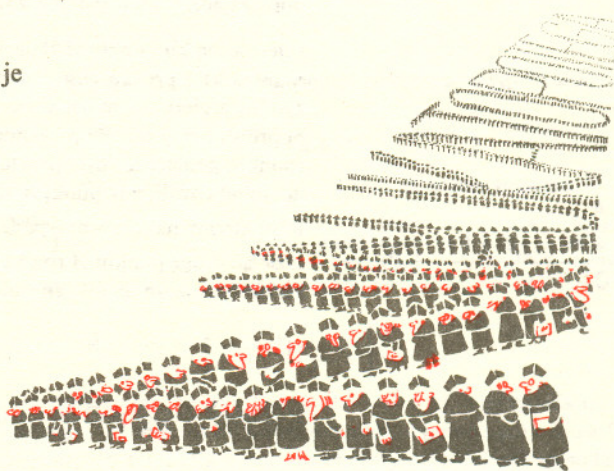
Może udałoby się Wam je przeprowadzić. Przypatrzcie się na przykład zdjęciu zamieszczonemu obok. Przedstawia ono model wykonany z części składowych „Małego inżyniera”. Na dwóch równoległych osiach umieszczone są po dwa koła o średnicy 75 mm, a pomiędzy nimi małe kółka o średnicy 25 mm, na które położona jest gumka „recepturka” jak na rysunku. Wszystko to umocowane jest do podstawki. Na małe kółka nawinięta jest nitka, tak, że kółka te, a wraz z nimi pary dużych kół mogą kręcić się ku sobie. Kółka wprawiamy w ruch za pomocą korbki przymocowanej do jednej z osi. Na dużych kołach kładziemy deskę i obserwujemy jej ruch podczas obrotu kół. Jest to ruch okresowy. Okres, czyli czas pełnego ruchu tam i z powrotem, zależy od masy deski, współczynnika tarcia i odległości między osiami — jak wynika z rozwiązania zadania F 35.



Współczynnik tarcia f , występujący we wzorze na siłę tarcia, jest na ogół mniejszy od jedności. Można go znacznie zmniejszyć przez polerowanie powierzchni ciał lub stosowanie smarów. Czy zawsze? Zobaczymy, jakie własności ma tarcie dwóch powierzchni wykonanych z tego samego materiału. Pchnij lekko szklankę postawioną na szklanej szybie. Prawdopodobnie przesunie się kilkadziesiąt centymetrów, po czym zatrzyma się pod wpływem siły tarcia. Twierdzenie, że ruch zahamowało tarcie szkła o szkło byłoby jednak zbyt pochopne. Jeśli szyby i szklanki nie wyczyścisz bardzo dokładnie, pokryte były cienką warstwą tłuszczu, co zmniejszało tarcie. Jeśli teraz zwilżysz obie powierzchnie i powtórzysz doświadczenie, okaże się, że powierzchnie szklanki i szyby silnie do siebie przylegają. To samo można zrobić z bardzo starannie wypolerowanymi dwiema płytkami wykonanymi z tego samego metalu.



Dobrze oczyszczone, wypolerowane sztabki tego samego metalu złożone ze sobą przyciągają się tak silnie, że trudno je oderwać. Można to łatwo zrozumieć, jeśli pamięta się o budowie cząsteczkowej ciał. Polerowanie sztabek, czy czyszczenie powierzchni szklanych sprawia, że więcej cząsteczek należących do jednego ciała znajduje się w bliskim sąsiedztwie cząsteczek drugiego ciała. Jeśli są to cząsteczki tego samego rodzaju, przyciągają się tak, jak przyciągają się cząsteczki w obrębie jednej sztabki. Po prostu cząsteczki „nie odróżniają” cząsteczek „własnych” od „obcych”. Występują między nimi siły międzycząsteczkowe takie same, jak te, które utrzymują ciała stałe w całości.



Rachunek wariacyjny (klasyczny) obejmuje metody szukania największych i najmniejszych wartości funkcjonalów tj. funkcji, w których rolę zmiennej niezależnej spełniają krzywe albo funkcje. Zaczął się rozwijać w 1696 roku, w którym Jean Bernoulli opublikował list z zadaniem (sformulowanym obok) o linii najkrótszego spadku, tzw. brachistochronie.

W mechanice obok mechaniki analitycznej wyróżniamy mechanikę ciała sztywnego badającą rozkłady naprężeń i odkurczeń, mechanikę płynów, zajmującą się ciśnieniem, przepływami i optykami ciał, mechanikę gruntów, która bada cechy fizyczne gruntu i jego zachowanie się pod wpływem obciążeń itd. W Uniwersytecie Warszawskim na Wydziale Matematyki i Mechaniki istnieje jedyny w Polsce uniwersytecki kierunek studiów poświęcony mechanice.

Ciekawość jest tą cechą człowieka, która spowodowała, chyba w największym stopniu, że nauka postawiła i rozwiązała tak dużo już problemów. Ciekawość Newtona — dlaczego jabłko spada z drzewa? — doprowadziła do powstania, a następnie burzliwego rozwoju mechaniki klasycznej, ciekawość Bernoulliego — jak zjechać (np. na nartach) po zboczu góry, by znaleźć się najszybciej w ustalonym punkcie u jej podnóża? — spowodowała powstanie rachunku wariacyjnego, itd. W tym artykule pragniemy się zająć pytaniami, które pewnie nie doprowadzą do powstania żadnej nowej teorii, ale mogą się okazać ciekawe. Otóż zdarza się, że pies goni zająca. Nic na to nie poradzimy. Od nas natomiast zależy w jakim stopniu fakt ten jest interesujący. Interesować się bowiem możemy nie tylko tym, czy pies złapie zająca, ale i czasem, w którym pościg się uda, warunkami na to, by pościg się nie udał, itd.

Odpowiedzi na te pytania poszukiwać będziemy w mechanice. Dla wielu ludzi mechanika kojarzy się z wałem korbowym, uszczelką w kranie, czy też napisami na szyldach „mechanika pojazdowa”, „mechanika precyzyjna”. Ta mechanika, o której tu mowa, jest krótko mówiąc nauką o ruchu i równowadze ciał materialnych. W otaczającym nas świecie wyróżniamy różne obiekty: wodę, kamień, jabłko, Ziemię. Obok różnych swoich cech mają one tę, że zajmują (wypełniają sobą) miejsce w przestrzeni. Wiemy, że wypełnianie to różnie wygląda i zależy od sposobu patrzenia: jeśli patrzymy gołym okiem, jest ciągłe (bez dziur), jeśli spojrzymy przez mikroskop może być nieciągłe (np. w kamieniu pojawiają się otwory), z kolei jeśli popatrzmy się na nie z dostatecznie dużej odległości obiekty zmniejszają i mogą być utożsamiane z punktami. Mechanikę badającą ruch i równowagę punktów nazywa się mechaniką analityczną (teoretyczną). Tak więc w mechanice analitycznej realnym obiektem materialnym przyporządkowujemy punkty lub układy punktów.

W ten sposób postąpimy w naszym przypadku: uciekającego zająca i goniącego go psa utożsamimy z dwoma punktami w przestrzeni kartezjańskiej R^3 . Ruch tych punktów opisywać będziemy zależnościami współrzędnych położenia od czasu $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Zgodnie z definicją, prędkością poruszającego się punktu nazywać będziemy wektor $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$

o składowych równych pochodnym współrzędnych położenia względem czasu. Długość wektora prędkości nazywać będziemy szybkością. Po tych uwagach przejdźmy do rozwiązania problemu pogoni. Dla uproszczenia zagadnienia założymy, że teren, po którym biegnie pies i zając jest płaski, szybkość psa i zająca jest stała oraz że prędkość zająca ma stały kierunek. Problem pogoni można więc teraz sformułować w następujący sposób: wyznaczyć tor (krzywą) punktu A poruszającego się w płaszczyźnie (x, y) z prędkością $v = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$, $|v| = \text{const.}$, stałe

skierowaną ku punktowi B poruszającemu się w tej płaszczyźnie ze stałą prędkością u ; $u = \text{const.}$ Stały wektor prędkości $u = \text{const}$ wyznacza na płaszczyźnie pewien kierunek, który będzie zgodny z kierunkiem osi x . Punkt B (punkt uciekający) porusza się więc po tej osi. Oś y poprowadzimy tak, by przechodziła przez pewien punkt A_0 , w którym prędkość punktu A (punktu goniącego) była prostopadła do osi (rysunek obok). Ustalmy ponadto, że czas zaczynamy liczyć od chwili, gdy punkt A znajdował się w położeniu A_0 .

Rozpatrzmy najpierw przypadek, kiedy zwrot osi x jest zgodny ze zwrotem wektora u . Dzieląc drogę punktu A równą $\widetilde{A_0A} = s$ oraz drogę punktu B równą OB przez odpowiednie szybkości otrzymujemy ten sam czas t :

$$(1) \quad t = \frac{s}{v} = \frac{OB}{u}, \quad \text{gdzie } v = |v|, u = |u|.$$

Rozłóżmy wektor prędkości v na składowe $\frac{dx}{dt}$ i $\frac{dy}{dt}$. Z trójkąta ABC mamy

$$(2) \quad \frac{dx}{dt} = v \cos \varphi, \quad \frac{dy}{dt} = -v \sin \varphi.$$

W ostatniej równości napisaliśmy znak minus, gdyż zwrot $\frac{dy}{dt}$ jest przeciwny do zwrotu osi y (rysunek obok).

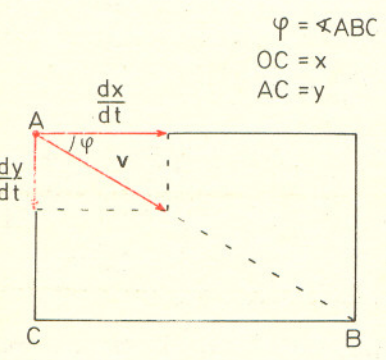
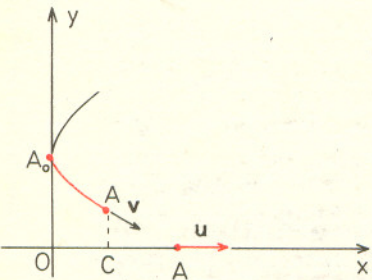
Ponieważ $\cos \varphi = \frac{OB-OC}{AB} = \frac{ut-x}{AB}$, $\sin \varphi = \frac{AC}{AB} = \frac{y}{AB}$,

po podstawieniu tych wyrażeń do (2) i podzieleniu stronami równań (2) mamy

$$(3) \quad \frac{dx}{dy} = \frac{-ut+x}{y}.$$

Równanie (3) można przepisać w innej postaci

$$(4) \quad x - \frac{dx}{dy} y = \varepsilon s, \quad \text{gdzie oznaczono: } \varepsilon = \frac{u}{v} \text{ a za } t \text{ podstawiono zgodnie z (1) } \frac{s}{v}.$$





Krzywa pogoni — krzywa, po której porusza się punkt A — opisana jest związkami $x = x(t)$ oraz $y = y(t)$. Nie jest to jedyny sposób jej przedstawienia. Wyliczając np. z równania $y = y(t)$ czas t i podstawiając do związku $x = x(t)$ otrzymujemy zależność $x = x(t(y)) = x(y)$. W dalszym ciągu współrzędną x będziemy tak właśnie rozumieć: jako funkcję y . Zrózniczkujemy obie strony (4) względem y :

$$(5) \quad -\frac{d^2x}{dy^2}y = \varepsilon \frac{ds}{dy}.$$

Ponieważ $ds^2 = dx^2 + dy^2$, więc $\frac{ds}{dy} = -\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$ (bierzemy znak minus, gdyż ze wzrostem y długość s maleje) równanie (5) można przepisać w postaci

$$(6) \quad \varepsilon \frac{dy}{y} = \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}, \quad \text{gdzie} \quad p = \frac{dx}{dy}.$$

Całkując równanie (6) mamy

$$(7) \quad \varepsilon \ln y + c = \ln(p + \sqrt{1+p^2}).$$

Niech $OA_0 = a$, wtedy dla $y = a$, $p = \frac{dx}{dy} = 0$. Wynika to stąd, że oś x była poprowadzona jako styczna do krzywej $x = x(y)$ w punkcie A_0 . Uwzględniając ten warunek, z równania (7) otrzymujemy $c = -\varepsilon \ln a$. Podstawiając wyliczoną stałą c do równania (7) mamy

$$(8) \quad \left(\frac{y}{a}\right)^\varepsilon = p + \sqrt{1+p^2}.$$

Przeprowadzone rozumowanie, w wyniku którego otrzymaliśmy równanie (8), można powtórzyć dla przypadku, w którym zwrot osi x jest przeciwny do zwrotu wektora u . Otrzymamy wtedy (dowód jest analogiczny) równanie:

$$(9) \quad \left(\frac{y}{a}\right)^{-\varepsilon} = -p + \sqrt{1+p^2}.$$

Odejmując i dodając kolejno stronami równania (8) i (9) i uwzględniając, że $p = \frac{dx}{dy}$ otrzymamy

$$2 \frac{dx}{dy} = \left(\frac{y}{a}\right)^\varepsilon - \left(\frac{y}{a}\right)^{-\varepsilon}, \quad 2 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \left(\frac{y}{a}\right)^\varepsilon + \left(\frac{y}{a}\right)^{-\varepsilon}.$$

Pierwsze równanie po scałkowaniu daje nam równanie toru

$$(10) \quad \begin{aligned} 2x + c_1 &= \frac{y^{1+\varepsilon}}{a^\varepsilon(1+\varepsilon)} - \frac{y^{1-\varepsilon}}{a^{-\varepsilon}(1-\varepsilon)} & \text{dla } \varepsilon \neq 1, \\ 2x + c_2 &= \frac{y^2}{2a} - a \ln y & \text{dla } \varepsilon = 1. \end{aligned}$$

Stałe c_1 i c_2 wylicza się wykorzystując (10) i uwzględniając warunek: $x = 0$ gdy $y = a$.

Po prostych rachunkach otrzymuje się związki: $c_1 = -\frac{2a\varepsilon}{1+\varepsilon^2}$, $c_2 = \frac{a}{2} - a \ln a$.

Równanie drugie pozwala wyliczyć odległość między punktami A, B , mamy bowiem

$$(11) \quad AB = \pm \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} y, \quad \text{gdź} \quad \frac{AB^2}{AC^2} = 1 + \frac{CB^2}{AC^2} = 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2$$

Podstawiając (10)₂ do (11) otrzymujemy ostatecznie:

$$(12) \quad AB = \pm \frac{1}{2} \left[\frac{y^{\varepsilon+1}}{a^\varepsilon} + \frac{a^\varepsilon}{y^{\varepsilon-1}} \right].$$

Analizując równanie (12) toru pościgu można wykazać, że dla $\varepsilon > 1$ (tj. w przypadku, gdy szybkość punktu uciekającego jest większa od szybkości punktu goniącego) odległość AB rośnie nieograniczenie, gdy y dąży do zera. Dla $\varepsilon = 1$ (szybkości są równe) odległość AB dąży do $a^2/2$. W tych dwu przypadkach oś x jest asymptotą toru i punkty się nigdy nie spotkają. Jeśli natomiast $\varepsilon < 1$, tor pościgu przecina oś x w punkcie $(x_0, 0)$, gdzie x_0

$$(wzór (10)) \text{ równa się: } x_0 = \frac{1}{2} \left[\frac{a^\varepsilon}{1-\varepsilon^2} + \frac{1}{a^\varepsilon(1+\varepsilon)} - \frac{1}{a^{-\varepsilon}(1-\varepsilon)} \right].$$

Znając współrzędną punktu spotkania x_0 można wyliczyć (wzór (11)) czas potrzebny do zakończenia pościgu: $t = AB/u = x_0/u$.

Otrzymane odpowiedzi rozwiązują problem pościgu zająca.

Zastosowany tutaj język matematyki (oprócz precyzji sformułowania zadania) pozwala wykorzystać wyniki do innych ale podobnych zagadnień.



Rozwiązanie zadania M 105. Dowód przeprowadzimy metodą indukcji matematycznej.

Dla $n = 3$ dana nierówność przyjmuje postać

$$1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}.$$

Prawa jej strona równa jest

$$\frac{1}{2520} (840 + 630 + 504 + 420 + 360 + 315 + \dots + 280) = \frac{3349}{2520} < \frac{3}{2}.$$

Dla $n = 3$ dana nierówność jest więc prawdziwa.

Zauważmy teraz, że jest

$$(*) \quad \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{n^2+n} \right) + \left(\frac{1}{n^2+n+1} + \dots + \frac{1}{n^2+2n+1} \right) < \frac{2}{n} < \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+n+1} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$$

(każdy składnik w nawiasie jest nie większy od pierwszego). Załóżmy teraz, że dla pewnego n zachodzi dana nierówność.

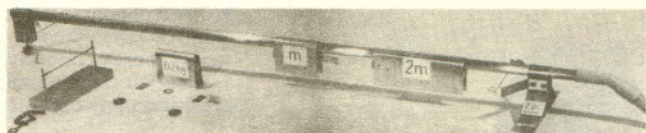
Wówczas

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} > \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) > \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2+1} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2}$$

(skorzystaliśmy z nierówności (*)).

Tak więc na mocy zasady indukcji matematycznej dana nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$. Łatwo sprawdzić, że dla $n = 2$ jest ona fałszywa.

Ruch bez tarcia



Proponujemy Wam wykonanie kilku doświadczeń w warunkach, w których tarcie jest tak małe, że praktycznie można je zaniedbać. Należy zaopatrzyć się po prostu w tor powietrzny. Co to jest? Słyszeliście pewnie o poduszkowcach, poruszających się tuż nad ładem czy wodą na poduszce sprężonego powietrza. Na tej samej zasadzie działa tor powietrzny. Skąd go wziąć? Najlepiej zbudować samemu. A więc

Budujemy tor powietrzny.

Może być taki jak na zdjęciu — wypróbowano go wielokrotnie. Może zmodyfikujecie konstrukcję, ale wtedy trzeba się liczyć z możliwymi niepowodzeniami. A więc do dzieła.

Materiały jakie musimy zgromadzić, to:

1. rura duraluminiowa o średnicy 30–40 mm, grubości ścianki 1–2 mm i długości 1,5–2 m (możecie wypróbować inny materiał),
2. korek o wewnętrznej średnicy rury,
3. miękka blacha aluminiowa o grubości 2 mm,
4. gumki recepturki,
5. guma modelarska 1 mm × 1 mm lub 1 mm × 4 mm,
6. dwie deseczki o długości około 30 cm,
7. cztery gwoździe o długości kilkunastu cm,
8. drut stalowy o średnicy 0,7–0,9 mm lub spiralne sprężynki wykonane z podobnego drutu o długości kilku cm i średnicy ok. 2 cm.

Narzędzia i przyrządy: 1. piłka do metalu,

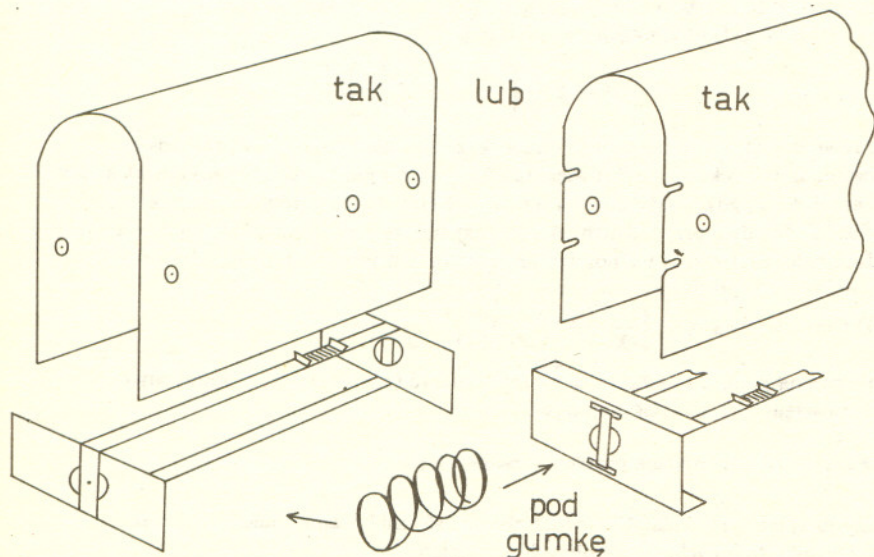
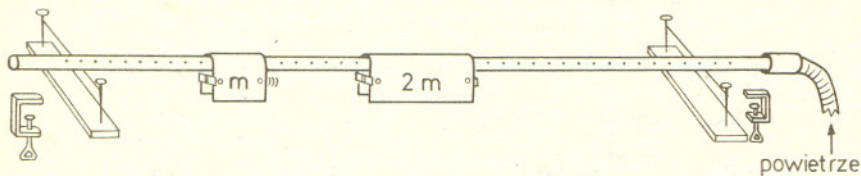
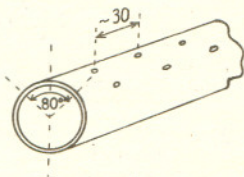
2. wiertarka (wiertła 1 mm i 5 mm),
3. papier ścierny do metalu,
4. odkurzacz dowolnego typu.

W rurze nawiercamy 160–180 otworów o średnicy 1,1–0,9 mm.

Otwory rozmieszczamy w trzech rzędach oddalonych od siebie tak, aby patrząc na rurę od góry było widać 4 pasy równej szerokości (kąt między skrajnymi rzędami otworów ok. 75–80°). Odległość między otworami w rzędzie – 3 cm. Otwory rzędów bocznych przesunięte względem rzędu środkowego o 1,5 cm.

Po nawierczeniu otworów, za pomocą pręta i papieru ściernego oczyścimy rurę od wewnątrz. Rurę możemy umocować za pomocą statywów szkolnych, możemy wykonać odpowiednie nóżki np. takie jak na fotografii, możemy tor położyć na klockach. Jeden koniec rury zamykamy korkiem, do drugiego dołączamy odkurzacz

(najlepiej bez worka) tak, aby powietrze było tłoczone. Po torze poruszają się wózki w kształcie odwróconej litery U wygięte z paska miękkiej blachy aluminiowej. Wysokość wózka 125–140 mm, długość 140–160 mm w zależności od średnicy rury użytej do budowy toru. Wózek o masie podwójnej ma dwa razy większą długość. Jeżeli chcemy aby wózek wielokrotnie przebył długość toru (w modelu na fot. ok. 80 razy) musi odbijać się sprężysto od jego końców



Zderzaki w najprostszej wersji, to napięta guma modelarska między dwoma gwoździami wbitymi w deseczkę. Deseczkę obciążamy lub przykręcamy imadłem do stołu. Gumę rozpinamy na takiej wysokości, aby wózek uderzał w nią na wysokości swojego środka ciężkości tzn. 2–3 cm pod rurą toru.

Możemy już badać ruch zmienny, jednostajny oraz przemiany energii.

Najpiękniejsze są jednak zderzenia!

Zderzakami wózków będą spiralne sprężynki. Do ich zamocowania wycinamy dwie blaszki o szerokości nieco większej niż średnica posiadanej sprężynki (np. 25–30 mm) i długości większej o ok. 1 cm od grubości wózka (40–50 mm). Blaszki mocujemy do wózka tuż pod rurą za pomocą gumki recepturki. Pod gumkę wsuwamy koniec spiralnej sprężynki. Do badania zderzeń dwu mas wystarczy jedna sprężynka, drugi wózek zaopatrujemy tylko w blaszki.

Kilka praktycznych rad

Jeżeli będziecie chcieli skonstruować inny tor, pamiętajcie, że zmniejszając liczbę otworów i ich powierzchnię, powiększamy ciśnienie powietrza (w naszym torze przy jednym końcu rury 35 cm słupa wody, przy drugim końcu nieco inne, dlaczego?), rośnie nośność toru, maleje wysokość poduszki. Zbyt duże ciśnienie może jednak przeciążyć odkurzacz.

Rura o większej średnicy zapewni większą nośność. Wózki z grubszej blachy o większej masie będą miały większą energię kinetyczną — dłużej będzie trwał ich ruch po torze. Blachę na wózki wycinajcie piłką do metalu (nożyce zniekształcą brzegi wózka). Na rurę połóżcie kawałek papieru ściernego i dotrzyjcie wewnętrzną powierzchnię wózka. Wykonajcie specjalny rozgałęźnik (2 gniazda na desce), aby można było w szereg z odkurzaczem włączyć kuchenkę elektryczną o mocy 600–800 W, odkurzacz będzie ciszej pracował, wózek będzie lepiej poruszał się przy małych prędkościach. Rurę i blachę aluminiową kupicie w sklepie z materiałami dla majsterkowiczów.

Pora na doświadczenia

1. WYZNACZANIE OPORÓW RUCHU

Umieszczamy tor dokładnie poziomo, włączamy odkurzacz. Ustawiamy wózek i lekkim uderzeniem nadajemy mu ruch postępowy. Wózek powinien przebyć kilkadziesiąt razy drogę tam i z powrotem po torze. Straty energii są minimalne i następują na skutek zderzeń z odbojnikami oraz oporów powietrza. Można ocenić, które straty są mniejsze wykonując dwie serie pomiarów przy tej samej prędkości początkowej wózka (jak to zapewnić?) skracając przy drugiej serii pomiarów długość toru. Spróbujcie wyznaczyć ilościowo współczynnik tarcia.

2. BADANIE ZDERZEŃ SPRĘŻYSTYCH

Tor ustawiony poziomo. Umieszczamy na nim dwa wózki o tej samej masie, z których jeden ma odbojnik sprężynowy. Jeden wózek umieszczamy nieruchomo na środku toru. Drugiemu nadajemy nieznaną prędkość, łatwą do wyznaczenia przez pomiar drogi i czasu. Obserwujemy zderzenie i prędkość wózków po zderzeniu. Czy wynik jest zgodny z obliczeniami? Powtarzamy doświadczenie przy nierównych masach wózków.

3. ZASADA ZACHOWANIA PĘDU

Dwa wózki o znanych masach związujemy nitką tak, aby dzieląca je sprężyna była ściśnięta. Wózki są początkowo nieruchome, a więc pęd układu równa się zero. Przepalamy nitkę — wózki rozjeżdżają się w przeciwne strony. Czy pęd układu pozostanie równy zero? Sprawdźcie.

4. Nachylamy nieznanie tor pod kątem do poziomu, tak aby składowa przyspieszenia ziemskiego równoległa do toru była bardzo mała. Pozwoli to na dokładne pomiary ruchu jednostajnie przyspieszonego.

A co jeszcze?

Zaproponujcie inne doświadczenia. Najciekawsze doświadczenia wraz z nadesłanym zdjęciem toru opublikujemy.

Model toru został wykonany w Zakładzie Dydaktyki Fizyki U.W. Wdrożeniem jego do produkcji zajmuje się Ośrodek Badawczo-Rozwojowy Pomocy Szkolnych. Pierwsze egzemplarze produkowane seryjnie dotrą do szkół prawdopodobnie dopiero w 1978 roku.



Rozwiązanie zadania M 104. Dla $n = 1$ mamy równanie

$$\cos x - \sin x = 1,$$

$$\text{czyli } \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\cos \frac{\pi}{4} \cos x - \sin \frac{\pi}{4} \sin x = \cos \frac{\pi}{4},$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{4} + x \right) = \cos \frac{\pi}{4},$$

$$\text{skąd } \frac{\pi}{4} + x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ lub } \frac{\pi}{4} + x + \frac{\pi}{4} =$$

$$= 2l\pi \quad (k, l - \text{liczby całkowite}), \text{ a więc}$$

$$x = 2k\pi \text{ lub } x = (4l - 1) \frac{\pi}{2}.$$

Dla $n = 2$ mamy równanie

$$\cos^2 x - \sin^2 x = 1$$

$$\text{czyli } \cos 2x = 1,$$

$$\text{skąd } 2x = 2m\pi, \quad x = m\pi \quad (m - \text{liczba całkowita}).$$

Niech teraz $n > 2$. Dane równanie można napisać w postaci

$$\cos^n x - \sin^n x = \cos^2 x + \sin^2 x$$

$$\text{czyli } \cos^2 x (1 - \cos^{n-2} x) + \sin^2 x (\sin^{n-2} x + 1) = 0.$$

Obydwa składniki występujące po lewej stronie ostatniego równania są nieujemne, więc ich suma jest równa zero wtedy, i tylko wtedy, gdy obydwa są równe zero:

$$\cos^2 x (1 - \cos^{n-2} x) = 0,$$

$$\sin^2 x (\sin^{n-2} x + 1) = 0.$$

Układ ten jest równoważny alternatywie układów

$$\text{A) } \cos x = 0, \quad \text{B) } \cos^{n-2} x = 1, \\ \sin x = 0; \quad \sin^{n-2} x = -1;$$

$$\text{C) } \cos x = 0, \quad \text{D) } \cos^{n-2} x = 1, \\ \sin^{n-2} x = -1; \quad \sin x = 0.$$

Układy A) i B) są, wobec tożsamości $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, sprzeczne. Układ C) jest rozwiązalny tylko dla nieparzystych n i wówczas spełniają go liczby

$$x = (4m+3) \frac{\pi}{2}.$$

Układ D) jest z kolei równoważny układowi

$$\text{D}_1) \quad \cos x = 1,$$

$$\sin x = 0;$$

lub, przy parzystym n , alternatywie D₁) i układu

$$\text{D}_2) \quad \cos x = -1,$$

$$\sin x = 0.$$

Układ D₁) ma rozwiązanie $x = 2p\pi$,

układ D₂) zaś $x = (2r+1)\pi$. Dane

równanie przy $n > 3$ jest więc spełnione

a) dla n parzystych przez $x = s\pi$

b) dla n nieparzystych przez $x = 2p\pi$ lub

$$x = (4m+3) \frac{\pi}{2}.$$