

SPIS TREŚCI

O piorunach kulistych, latających talerzach i innych „meteorach” <i>Prof. dr Andrzej K. Wróblewski</i>	str. 1
O ślimakach, liściach i łańcuchach <i>Dr Wiesław Kufel</i>	str. 4
Rysujemy konchoidy	str. 6
Mała Delta	str. 7
Tylko cyrklem <i>Dr Marek Kordos</i>	str. 10
Kosmologia — Fakty I <i>Dr Bronisław Kuchowicz</i>	str. 13
Zadania	str. 15
Laboratorium w domu	str. 16

„Delta”
matematyczno-fizyczny miesięcznik
popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego i Polskiego
Towarzystwa Fizycznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny
doc. dr J. Bartke
prof. dr Grzegorz Białkowski —
przewodniczący
doc. dr A. Bączyński
doc. dr B. Gleichgewicht
doc. dr K. Goebel
doc. dr B. Iwaskiewicz
doc. dr T. Iwiński
prof. dr A. Januszajtis
prof. dr L. Jeśmanowicz —
wiceprzewodniczący
mgr H. Kaczorek
prof. dr B. Karczewski
prof. dr M. Kuczma
mgr A. Mąkowski
prof. dr Z. Pawlak
prof. dr A. Piekara

prof. dr Z. Semadeni
prof. dr J. Stankowski
prof. dr M. Subotowicz
doc. dr S. Turnau
doc. dr J. Wdowczyk

Redaguje Kolegium w składzie:
doc. dr T. Hofmokl — z-ca red. nac.
dr T. B. Iwiński
dr M. Kordos — red. nac.
mgr K. Prażmowski — red. techn. graf.
doc. dr M. Świącki
D. Tys — sekr. red.

Adres Redakcji
ul. Hoża 69 pok. 151,
00-681 Warszawa.

Zakład Narodowy im.
Ossolińskich — Wydawnictwo.
Wrocław, Oddział w Warszawie
Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.
wyd.: 2,50 ark. druk.;
papier offsetowy III kl., 80 g, 61 × 86
Wydrukowano w Drukarni im.
Rewolucji Październikowej,
Warszawa, ul. Mińska 65.
Nr zam. 498/76 J-113

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60, — cena prenumeraty półrocznej zł 30, —

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach:
— do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i na cały rok następny
— do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego.
Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienie w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”.
Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW, oraz prenumeratorzy indywidualni zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.
Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej.

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTA”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.
Sprzedaż gotówką i wysyłką, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.

Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, konto PKO nr 1531-912. Oddział w Warszawie.

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław
w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa
w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7 00-068 Warszawa, Poland or with

— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 München 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland.
— Earls Court Publications Ltd., 130 Shephard Bush Centre, London W 12, Great Britain,
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italia.

Cena 1 egzemplarza zł 5, — nr indeksu 35723/35550

O piorunach kulistych, latających talerzach i innych „meteorach”



Prof. dr Andrzej K. WRÓBLEWSKI

„Meteora nie co innego jest tylko z Greckiego Sublimia (zjawiska górne) unoszące się, że będąc Exhalacją, do góry się maia. Które się rodzą z Elementarnych subtelných części, znacznie pomieszanych y znowu skupionych.

Te meteora z czterech Elementów urodzone są cztery, Ogniste, wodne, Powietrzne y ziemskie. Ignea, ogniste, z ognistej rodzą się Materyi, iako to Ignis Fatuus (błędny ogień) za idącym lecący, przed gonącym uciekający; jest to alias subtelną, tłustą, kleiowatą Exhalacją, która zaiąwszy się, tu y owdzie lata ponad ziemię, dla tego Ogniem szalonym nazwany. Prości ludzie latawcami, albo diabłami, nazywają, którzy w prostocie swojej causas rerum (przyczyn rzeczy) nie wiedząc, wszystkie rzeczy extraordinaryne albo Bogu albo diabłu imputują.”

Powyższy wyjątek z „Nowych Aten” wydanych przez ks. Benedykta Chmielowskiego w latach 1754–1756 odzwierciedla osiemnastowieczne poglądy na szereg zjawisk atmosferycznych, których w owym czasie rzecz jasna zupełnie nie rozumiano. Jeszcze na początku XIX wieku utrzymywano nazwę „meteory” dla wszystkich zjawisk rozgrywających się w atmosferze; naukę o tych zjawiskach nazywano meteorologią. Rozróżniano wówczas aż sześć rodzajów „meteorów”: ogniowe, elektryczne, wodne (mgła, chmury, śnieg, grad, rosa, deszcz itp.), światła, ciepła i powietrzne.

Wyładowania elektryczne zaliczano najpierw do „meteorów ogniowych”, potem do „meteorów elektrycznych”. Poglądy z pierwszej połowy XVIII wieku na temat piorunów znakomicie ilustruje następujący wyjątek z dzieła „Informacya matematyczna przez księdza Wojciecha Bystrzanowskiego do druku podana Roku 1743”:

„Bo piorun jest to exhalacja ziemna siarczysta, saetrzysta, gorąca y sucha, słońca promieniem w górę wyciągniona, y z piekła, od tegoż słońca albo powietrza gorącego zapalona, która gdy na chmurę wodnistą napadnie, grzmot w niej sprawuje... Błyskawica zaś iest podobnaż exhalacja ziemna gorąca y sucha, ale tak od słońca zpiekła, która zapalona w wyższym nad chmury krayu, prędzey się spali nim do chmury dopadnie: na podobieństwo żywicy na proch startey y zapaloney...”

Dziś pioruny przestały być już zjawiskiem tak tajemniczym, jakim były dla naszych przodków z połowy XVIII wieku. Beniamin Franklin swymi pięknymi i odważnymi doświadczeniami udowodnił, że są to wyładowania elektryczne podobne do tych, które możemy wywołać przy użyciu maszyny elektrostatycznej, tyle że są to zjawiska niepomiernej wielkości. Konstruując piorunochron tenże Franklin pierwszy podał sposób zabezpieczenia przed tymi groźnymi fenomenami natury. Zdjęcia takie, jak na okładce niniejszego numeru, nie są niczym osobliwym i może je uzyskać każdy, kto podczas nocnej burzy będzie czekał z otwartą migawką aparatu fotograficznego. Zjawiska najpospolitszych piorunów, tzw. liniowych, zostały już dość szczegółowo zbadane i można na ten temat znaleźć wiele informacji w podręcznikach fizyki, meteorologii, encyklopediach i innych wydawnictwach.

A jednak pozostało zjawisko, które, mimo wysiłków uczonych, do dziś jest tajemnicze i niewyjaśnione. Tym zjawiskiem jest tzw. piorun kulisty.

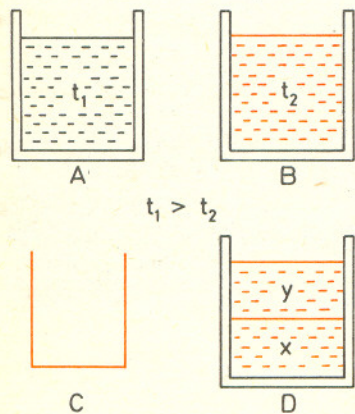




Rozwiązanie zadania F 31.

Zwykle odpowiadamy od razu: „Nie, bowiem proces przekazywania ciepła urywa się z chwilą, gdy temperatura obu litrów wody stanie się jednakowa. Aby go podtrzymać, konieczne byłoby przekazywanie ciepła od ciała chłodniejszego do cieplejszego, co jest niemożliwe”.

Jednakże, okazuje się, że odpowiedź jest: „Można”. Jak?



Weźmy dla przykładu najprostszą możliwą realizację. Niech w naczyniu A znajduje się woda gorąca, w B — chłodna. Założymy teraz, że oba naczynia są doskonałymi termosami i w dalszym ciągu będziemy zaniedbywać wszelkie straty ciepłone podczas wykonywanych operacji.

Nalejmy teraz do naczynia C (o doskonale przewodzących ciepło ściankach) chłodnej wody z B i opuszcmy je do naczynia z wodą gorącą (A). Po pewnym czasie temperatury wody w A i C wyrównają się i ustali się jakaś temperatura x , gdzie

$$t_1 > x > t_2.$$

Wylejmy teraz z naczynia C wodę ogrzaną do temperatury x do nowego naczynia D i powtórzmy raz jeszcze całą operację nalewając do naczynia C resztę chłodnej wody z B i wstawiając je do naczynia A zawierającego obecnie wodę o temperaturze x . W wyniku otrzymamy wodę o temperaturze y , gdzie

$$x > y > t_2.$$

Wlewając tę wodę do naczynia D otrzymamy po zmieszaniu obu części nagrzaną wodę, o temperaturach x i y (przy czym $x > y$) wodę o temperaturze z , gdzie

$$x > z > y.$$

Woda ta, to nasz początkowy 1 litr wody chłodnej. Natomiast w wodzie początkowo gorącej ustali się temperatura y przy czym $y < z$, czego i należało dowiedzieć.

Pytanie:

Jaką maksymalną różnicę temperatur y i z można osiągnąć?

Odpowiedź na str. 17.

Pierwsze obserwacje piorunów kulistych wykonują już u starożytnych, w dziełach Arystotelesa, Lukrecjusza, Seneki. Wzmianki te nie mają jednak wartości naukowej, lecz tylko historyczną, gdyż trudno z nich wyciągnąć cechy charakterystyczne zjawiska. Jak wiadomo, przez długie lata ludzie skłonni byli uznawać wszelkie niezrozumiałe zjawiska za cuda. I tak np. kronikarz francuski Grzegorz z Tours, żyjący w VI w., opisuje cud, jaki zdarzył się w tym mieście podczas procesji, gdy nad zgromadzonymi przeleciała oślepiająco jasna kula ognista, która tak przeraziła ludzi, że padli na ziemię. Mógł to być właśnie piorun kulisty.

Wzmianki o obserwacjach podobnych zjawisk z ostatnich paruset lat przynoszą już wiele materiału faktograficznego. W 1838 r. znany fizyk francuski Franciszek Arago napisał pierwszą pracę naukową na temat piorunów kulistych, zbierając w niej ponad 20 dobrze udokumentowanych doniesień na temat tego zjawiska. Od tego czasu napisano na temat piorunów kulistych setki prac z zestawieniami i analizą obserwacji. Niedawno wydana monografia S. Singera (*The Nature of Ball Lightning*, 1971 r.) zawiera sześćset odnośników do prac wcześniejszych, w tym do wielu prac przeglądowych. I mimo wszystko nadal nie umiemy powiedzieć z całą pewnością, czym jest to tajemnicze zjawisko.

Przytoczymy kilka ciekawszych doniesień o piorunach kulistych. Zacytujmy najpierw informację z ogłoszonego w 1858 r. zbioru kuriozów Królestwa Polskiego. Dowiadujemy się tam, że „...Roku 1724 w m. lutym około godziny 8 z rana, wśród szumu, kula ognista wielkości pięści, przez okno wpadła do Zamku Warszawskiego z hukiem równym bombie i napełniła pokoje dymem i ogniem smrodliwym ogłuszając przy tym trzy osoby w kancelarii królewskiej”. A teraz szereg informacji świadczących o niszczącym działaniu piorunów kulistych. W 1711 r. kula ognista wpadła przez wieżę do kościoła w Solingen i eksplodowała zabijając trzy osoby, raniąc ponad sto. W 1789 r. kula ognista wielkości „kuli armatniej” wpadła do wielkiego holu w Feltre; eksplozja spowodowała śmierć 10 osób i rany ponad 100. W 1901 r. w Uralsku podczas burzy 21 osób skryło się do sieni w pewnym domu, gdy nagle zagrzmiąło i pojawiła się we wnętrzu kula ognista, która bardzo powoli zbliżyła się do głowy jednej z dziewcząt; po dotknięciu przez kulę dziewczyna padła martwa, natomiast kula ognista oddaliła się do sąsiedniego pokoju i tam wybuchła powodując zniszczenie. W podobny sposób zginął także fizyk rosyjski Richmann, który w 1753 r. powtarzał w Petersburgu doświadczenia Franklina z wydobywaniem iskier podczas burzy z wysokiego pręta metalowego; w pewnej chwili z pręta wyskoczył w kierunku profesora bladobłękitny „kłąb ognisty” wielkości pięści; rozległ się huk jakby wystrzału z działa i Richmann padł martwy.

W innych opisywanych przypadkach piorun kulisty powoduje daleko mniejsze szkody lub nie powoduje ich wcale. I tak, np. w 1934 r. pewien Anglik wraz z dwunastoletnim synem znajdował się na wycieczce samochodem i napotkał burzę. Jego syn otwierał właśnie żelazną bramę na drodze, gdy ojciec spostrzegł kulę ognistą o średnicy około 30 cm zbliżającą się do bramy wśród drzew; gdy kula zetknęła się z bramą, ręka chłopca została sparaliżowana na kilka godzin, ale na tym się skończyło. W 1936 r. zdarzyło się, że po uderzeniu zwykłego pioruna do wnętrza domu przeniknęła kula ognista o średnicy około 20 cm i potoczyła się pod drewnianą ławę; wtedy gospodarz odważnie zdołał zniszczyć kulę kilkoma uderzeniami deski nie ponosząc żadnego szwanku; po kuli pozostał tylko silny zapach.

Znane są też liczne obserwacje pioruna kulistego w samolotach. W 1938 r. kula ognista wpadła przez otwarte okno do kabiny pilota wodnopłatowca brytyjskiego lecącego na wysokości 2500 m. Kula osmalila brwi i rzęsy pilota, po czym nie czyniąc dalszej krzywdy przewędrowała obok zdumionego pasażera, aby z głośnym hukiem wybuchnąć w tylnej części samolotu. W 1956 r. obserwowano dwa „zderzenia” samolotów radzieckich z piorunami kulistymi (na wysokości 3300 i 5000 m); w jednym przypadku dokładne oględziny samolotu po wylądowaniu wykazały, że uszkodzona jest część śmigła, w drugim — nie stwierdzono najmniejszych śladów, chociaż po uderzeniu pioruna zgasił jeden z silników samolotu, uruchomiony po jakimś czasie przez pilota. W 1963 r. po uderzeniu pioruna zwykłego w pasażerski samolot „Eastern Airlines” lecący z Nowego Jorku do Waszyngtonu, pasażerowie ze zdumieniem spostrzegli, że od strony kabiny pilotów leci (z prędkością tylko ok. 1,5 m/s) na wysokości ok. 75 cm nad podłogą kula ognista o średnicy ok. 20 cm. Przelatywała ona w odległości zaledwie kilkudziesięciu centymetrów od pasażerów, którzy jednak nie doznali żadnej krzywdy; kula miała podobno świecić jak żarówka o mocy ok. 10 W, lecz nie wysyłała ciepła. W 1957 r. piloci brazylijskiego transportowca spostrzegli w nocy, jak do ich samolotu zbliża się czerwony „obiekt”, który w pobliżu samolotu nagle zniknął, przy czym uległo zniszczeniu kilka elektrycznych urządzeń pokładowych, np. nadajnik. (Ta ostatnia relacja pochodzi z książki o latających talerzach).

Podobnych relacji przytaczać można by bardzo wiele. Duża różnorodność zjawiska, zaskoczenie świadków, ich częsty brak kwalifikacji, wszystko to sprawia, że dość trudno jest wyróżnić najbardziej charakterystyczne i powtarzalne cechy dla zjawisk zaliczanych do piorunów kulistych. Spróbujmy jednak podać takie podsumowanie wzorując się na istniejących pracach przeglądowych:

1. Pioruny kuliste pojawiają się najczęściej podczas burzy lub tuż po niej, ale pewien ich procent (ok. 20% według ostatnich statystyk radzieckich) nie ma widocznego związku z burzą, występuje przy ładnej pogodzie.
2. Rozmiary pioruna są różnorodne, najczęściej średnica kuli ma od kilkunastu do kilkudziesięciu centymetrów, są jednak relacje o kulach kilkucentymetrowych i parometrowych.



Rozwiązanie zadania M 93.

Jeżeli jedna z liczb n i $n-1$ dzieli się przez 3, to rozpatrywana suma nie jest podzielna przez 3. Rozpatrywana suma może dzielić się przez 3 tylko wtedy, gdy $n = 3k+1$. Wówczas suma ta ma postać $(3k+1)3k+2 + (3k+2)3k+1$. Pierwszy składnik jest liczbą postaci $3a+1$, drugi zaś postaci $3b+(-1)3k+1$, co wynika z zastosowania wzoru dwumianowego do wyrażenia $[3(k+1)-1]3k+1$. Rozpatrywana suma dzieli się więc przez 3 tylko wtedy, gdy $1+(-1)3k+1 = 0$ czyli gdy $1-(-1)3k = 0$ tj. dla k parzystych, a więc dla n postaci $6m+1$ (m — liczba całkowita nieujemna).



Rozwiązanie zadania M 91.

Będziemy korzystać z następujących faktów (Czytelnik zechce je udowodnić):

(1) Prosta przechodząca przez dwa punkty wymierne może być określona równaniem postaci $ax+by+c=0$ gdzie a, b, c są liczbami wymiernymi.

(2) Środek odcinka o końcach w punktach o współrzędnych (x_1, y_1) i (x_2, y_2) ma

współrzędne $(\frac{1}{2}(x_1+x_2), \frac{1}{2}(y_1+y_2))$.

(3) Prosta prostopadła do prostej o równaniu $ax+by+c=0$ może być określona równaniem postaci $bx-ay+d=0$.

(4) Jeżeli prosta określona równaniem $ax+by+c=0$, gdzie a, b — liczby wymierne, przechodzi przez jakiś punkt wymierny, to c jest liczbą wymierną.

Przejdźmy teraz do rozwiązania zadania. Niech trzy różne punkty o współrzędnych wymiernych (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) leżą na okręgu o środku mającym współrzędne (p, q) . Na mocy (2) środki odcinków o końcach w tych punktach mają współrzędne wymierne, na mocy zaś (1) prosta przechodząca przez któreś dwa z tych punktów ma równanie postaci $ax+by+c=0$, gdzie a, b, c — liczby wymierne.

Symetralne odcinków o końcach w tych punktach mają więc równanie postaci $Ax+By+C=0$, gdzie A, B — liczby wymierne (co wynika z (3)), ponieważ zaś symetralne te przechodzą przez środki odcinków będące punktami wymiernymi, więc na mocy (4) także wyrazy wolne równań są liczbami wymiernymi. Środek okręgu leży na każdej z symetralnych, jest więc rozwiązaniem układu równań określających dwie takie symetralne. Ponieważ równania te mają współczynniki wymierne, więc rozwiązaniem układu tych równań jest para liczb wymiernych, a więc p i q są liczbami wymiernymi.

Udowodniliśmy więc, że jeżeli na okręgu leżą trzy punkty wymierne, to środek tego okręgu jest też punktem wymiernym. Czytelników interesujących się podobnymi zagadnieniami odsyłamy do książki Wacława Sierpińskiego: *O stu prostych, ale trudnych zagadnieniach arytmetyki. Z polszycizną geometrii i arytmetyki*. Biblioteczka Matematyczna, tom 6, PZWS, Warszawa 1959.

3. Czas kształt na ogół zblizony do kulistego, ale czasem nieregularny gruszkowaty, z występami; niekiedy syąpi się iskry.

4. Barwa najczęściej czerwonawa, ale może być także żółta, pomarańczowa, biała, niebieska, zielona.

5. Ruch odbywa się czasem na niewielkiej wysokości nad ziemią, z wiatrem lub pod wiatr, czasem mamy jakby swobodne spadanie pioruna, czasem unoszenie się do góry. Obserwacje z samolotów świadczą o występowaniu tych zjawisk także na dużych wysokościach. Czasem kule ogniste poruszają się wzdłuż dobrych przewodników elektryczności, w innych przypadkach nie są związane z żadnymi przedmiotami, czasem wręcz zdają się unikać przewodników. Mogą nagle pojawiać się w zamkniętych pomieszczeniach.

6. Czas trwania: kilka do kilkunastu sekund, ale są relacje o zjawiskach trwających wiele minut.

7. Czasem pojawia się nie jedna kula, lecz dwie lub więcej.

8. Niektóre pioruny kuliste wyraźnie promieniują ciepło odczuwane przez obserwatorów, inne nie. Jedne są oślepiająco jasne, inne nie. Jedne niszczą i zabijają, inne znikają bezgłośnie nie powodując żadnych szkód.

Z tego zestawienia najlepiej widać, że jak mało poznanych zjawiskiem mamy do czynienia. Nic więc dziwnego, że żadna z wysuwanych hipotez nie potrafiła dotychczas wytłumaczyć wszystkich obserwowanych i tak różnorodnych cech piorunów kulistych. A było już tych hipotez bardzo wiele. Większość z nich, ale nie wszystkie, przyjmują, że pioruny kuliste mają rzeczywiście naturę elektryczną. Trudność zasadniczą sprawia wyjaśnienie źródła dużej energii kul ognistych (pewnego razu piorun kulisty wpadł do beczki pełnej wody, która zaczęła się gotować; na tej podstawie można było ocenić jego całkowitą energię na ok. 0,3 kWh) i ich długiego, jak na małe rozmiary, świecenia. Znany radziecki fizyk Piotr Kapica zwrócił uwagę, że czas wypromieniowania energii przez piorun kulisty jest proporcjonalny do jego średnicy d (wynika to stąd, że energia całkowita $\sim d^3$, a straty zależą od powierzchni, czyli od d^2). Weźmy dla porównania świecąca obłok zjonizowanego gazu powstający przy wybuchu jądrowym: przy średnicy około 150 m czas jego świecenia jest mniejszy niż 10 sekund. Stąd wynika, że piorun kulisty o średnicy 10 cm powinien przestać świecić po około 0,01 s, tymczasem w bardzo licznych przypadkach obserwowano te zjawiska przez 1–2 minuty. Wobec tego, mówi Kapica, należy przyjąć, że energia pioruna kulistego jest ciągle dostarczana z zewnątrz; jest on czymś w rodzaju rezonatora, pochłaniającego energię fal elektromagnetycznych powstających podczas wyładowań elektrycznych. W tej hipotezie zrozumiałe jest także to, że pioruny kuliste mogą z łatwością przenikać przez okna lub ściany, nie powodując żadnych uszkodzeń.

A oto kilka innych hipotez:

a. energia pioruna bierze się z reakcji jądrowej rozszczepienia jąder ksenonu z powietrza pod wpływem wyładowań elektrycznych,

b. energia pioruna powstaje wskutek zachodzącej reakcji chemicznej utleniania azotu, silnie egzotermicznej i samopodtrzymującej się z chwilą zapoczątkowania,

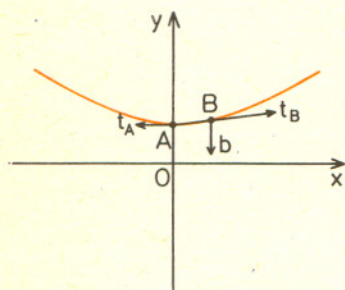
c. pioruny kuliste są wywoływane przez mikrometeority z antymaterii, których anihilacja w powietrzu jest spowodowana przez warstwę „ochronną” zjonizowanego gazu wytwarzaną podczas tego procesu.

Są także fizycy, którzy, uważają, że większość piorunów kulistych to złudzenie optyczne, tzw. powidoki, zjawisko powstawania obrazów na siatkówce oka wskutek silnych bodźców świetlnych (jak np. po spojrzeniu na Słońce lub silną lampę). Ta hipoteza wysuwana już przez Kelvina tłumaczy dziwaczne relacje o niespodziewanym pojawianiu się kul ognistych w zamkniętych pomieszczeniach, wewnątrz samolotów itd. Niektóre z tych relacji są rzeczywiście niezwykle. Oto, jak opowiada pewien chemik z uniwersytetu w Sheffield, podczas silnej burzy znajdował się on w budynku, w którym było łącznie 25 osób w różnych pomieszczeniach. W pewnej chwili piorun (liniowy) uderzył w drzewo w odległości około 100 m, niszcząc je i uszkadzając przy okazji przewody telefoniczne. W tym momencie ludzie w tym budynku spostrzegli jednocześnie białą świecą kulę o średnicy około 30 cm. Ale nie była to jedna kula, lecz tyle, ile było pomieszczeń: każdy obserwator zobaczył jasną kulę w środku pomieszczenia, w którym się znajdował, w kuchni, w salonie, w łazience, itd. Po kilku sekundach kule te znikły, bez widocznego śladu. Dodać trzeba, że wskutek silnego grzmotu w chwili uderzenia pioruna ludzie byli ogłuszeni przez około pół godziny. Trudno przypuszczać, żeby było to kilka piorunów kulistych jednocześnie. Należy sądzić, że w tym wypadku przyczyną był powidok, wywołany silnym bodźcem elektromagnetycznym. Nie ma więc w tej chwili jednej, jedynej teorii wyjaśniającej wszystkie obserwowane cechy różnorodnych zjawisk nazywanych piorunami kulistymi. Podobnie ma się sprawa z „latającymi talerzami”, które również według relacji obserwatorów wykazują bardzo różnorodne cechy i dla których nie ma dotychczas jednolitego wyjaśnienia. Autorowi tego artykułu wydaje się, że być może jesteśmy w sytuacji podobnej do naszych przodków z XVIII w., którzy wszystkie różnorodne obserwowane zjawiska nazywali meteorami. My też obserwujemy wiele różnych zjawisk, tajemniczych i niezrozumiałych, współczesnych „meteorów”, niektóre z nich nazywamy piorunami kulistymi, inne — latającymi talerzami. Za jakiś czas może się okazać, że chodzi o kilka odrębnych zjawisk różniących się naturą fizyczną. I może ktoś w przyszłości będzie się z politowaniem wyrażał o swych nierozsądnych przodkach z XX wieku, którzy nie potrafili znaleźć właściwego podziału i wyjaśnienia tych zjawisk.

Dr Wiesław KUFEL

Christian Huygens (1629–95), holenderski fizyk i matematyk. Podał zarys teorii falowej światła oraz wyjaśnił za jej pomocą wiele zjawisk optycznych, podał teorię ruchu wahadła matematycznego, pierwszy skonstruował zegar wahadłowy, opracował nowe metody szlifowania i polerowania soczewek, zbudował teleskop, za pomocą którego odkrył jeden z księżyców Saturna, badał krzywe; podał sposób obliczania powierzchni brył obrotowych napisał pierwszy podręcznik z zakresu rachunku prawdopodobieństwa.

Jean Bernoulli (1667–1748), szwajcarski fizyk i matematyk. Zapoczątkował rachunek wariacyjny, autor pierwszego wykładu rachunku całkowego, badał ruch ciał w ośrodkach stawiających opór.

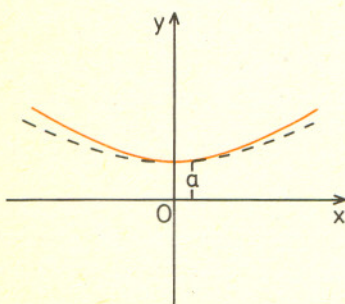


Rys. 1

Wielkość charakteryzującą nieskończenie mały przyrost długości łuku nazywamy różniczką łuku i oznaczamy dS . Jest ona równa

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx;$$

$$\text{stad } \frac{dS}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$



Rys. 2

Zacznijmy od łańcucha. Co to takiego — odpowiedzieć można na przykład tak: szereg połączonych ze sobą jednakowych części, zwanych ogniwami, tworzących rodzaj sznura. Łańcuchy znane były od dawna — w epoce brązu kobiety nosiły je jako ozdoby, a w epoce żelaza służyły już do podnoszenia ciężarów. Jedne i drugie różniły się pewnie masą i kształtem. Stosowany obecnie w różnych mechanizmach łańcuch przegubowy zaprojektował jeszcze Leonardo da Vinci. Inny wielki Włoch, Galileo Galilei (Galileusz), interesował się odpowiedzią na pytanie: jaką krzywą wyznacza łańcuch zawieszony w dwu punktach? Odpowiedź: „poszukiwaną krzywą jest zwykła parabola” znalazł w 1638 roku. Odpowiedź ta była błędna. Poprawne rozwiązanie podali nieco później Leibniz, Huygens i Bernoulli. Prześledźmy ich argumentację.

Założmy najpierw, że masa łańcucha jest rozmieszczona równomiernie wzdłuż całej jego długości. Znaczący to, że przyrost masy na jednostkę długości jest stały, równy ρ . Wprowadźmy układ współrzędnych jak na rys. 1.

Oś y jest osią symetrii łańcucha, a odcinek OA ma długość a . Oznaczmy dowolny punkt krzywej przez $B(x, y)$ oraz długość łuku \widehat{AB} przez S . Jeżeli łańcuch znajduje się w położeniu równowagi, to można założyć, że na łuk \widehat{AB} działają trzy siły: siły naciągu łańcucha t_A, t_B działające odpowiednio w punktach A i B w kierunku stycznym do krzywej oraz siła b równa ciężarowi łuku \widehat{AB} . Zgodnie z założonym równomiernym rozkładem masy, siła b jest równa $b = [0, \rho S]$. Rozłóżmy siłę t_B na składowe $t_B = [t_B^1, t_B^2]$:

$$(1) \quad \begin{aligned} t_B^1 &= |t_B| \cos \alpha, \\ t_B^2 &= |t_B| \sin \alpha. \end{aligned}$$

Skoro łańcuch jest w równowadze, to suma sił znika: $t_A + t_B + b = 0$. Z ostatniej równości mamy

$$(2) \quad \begin{aligned} t_A^1 &= |t_A| = t, \\ t_A^2 &= \rho S. \end{aligned}$$

Porównując (1) z (2) otrzymujemy równanie

$$(3) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\rho}{t} S.$$

Wykorzystując związek $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$ równość (3) możemy przepisać w postaci

$$S = \frac{t}{\rho} \frac{dy}{dx}.$$

Różniczkując ostatnie równanie stronami względem x i wykorzystując związek

$$\frac{dS}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \text{ otrzymamy}$$

$$(4) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho}{t} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Równanie (4) jest nieliniowym równaniem różniczkowym, które można rozwiązać wykonując proste całkowanie. Zapiszmy w tym celu równanie (4) w postaci

$$\frac{\rho}{t} = \sqrt{1+p^2} \frac{dp}{dx},$$

gdzie $p = p(x) = \frac{dy}{dx}$. Całkując stronami ostatnią równość dostajemy związek

$$\int \sqrt{1+p^2} dp = \int \frac{\rho}{t} dx.$$

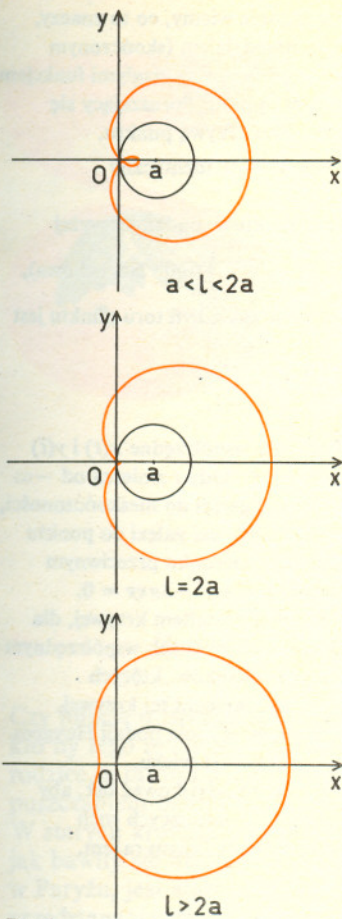
Stąd

$$(5) \quad \ln(p + \sqrt{1+p^2}) = \frac{\rho}{t} x + C.$$

Układ współrzędnych wprowadziliśmy tak, że dla $x = 0$ jest:

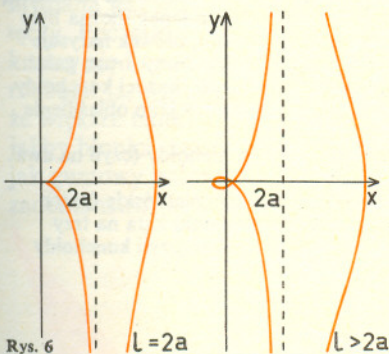
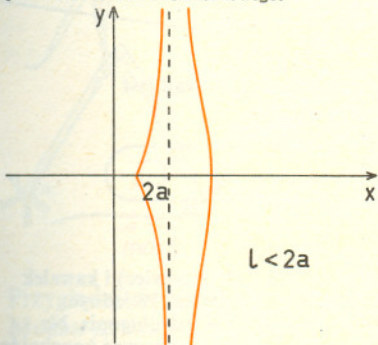
$p = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha = 0$. Zatem w równaniu (5) mamy $C = 0$ i wobec tego

$$(6) \quad p + \sqrt{1+p^2} = e^{\frac{\rho}{t} x}.$$



Rys. 4

Blaise Pascal (1623–62), francuski fizyk, matematyk, pisarz i filozof. Sformułował zasadę indukcji matematycznej oraz część podstaw rachunku prawdopodobieństwa, badał zjawiska ciśnienia atmosferycznego, prekursor rachunku różniczkowego.



Rys. 6

Nikomedes, żył w III wieku p.n.e., matematyk grecki, rozwiązał zagadnienie trysekcji kąta (konstrukcyjnego podziału dowolnego kąta na 3 równe części). Omawiana konchoida wynaleziona była przez niego.

Łatwo sprawdzić, że

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{a}{t}x} - e^{-\frac{a}{t}x} \right)$$

jest rozwiązaniem równania (6). Rozwiązanie to całkujemy względem x i dostajemy

$$(7) \quad y(x) = \frac{t}{2a} \left(e^{\frac{a}{t}x} + e^{-\frac{a}{t}x} \right) + C_1.$$

Przyjmijmy teraz, że długość odcinka OA równa jest $\frac{t}{a} = a$, wtedy dla $x = 0, y = a$

i z równania (7) mamy $C_1 = 0$. Poszukiwana krzywa, nazwana linią łańcuchową, ma równanie

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right).$$

Jej wykres przedstawia rys. 2.

Leży ona powyżej paraboli $y = a + \frac{x^2}{2a}$. W pobliżu punktu $(0, a)$ odległości odpowiednich

punktów linii łańcuchowej i paraboli są niewielkie, natomiast powiększają się, gdy oddalamy się od tego punktu.

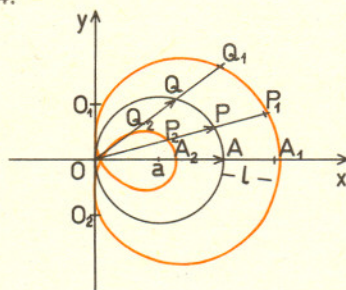
Dotychczas mówiliśmy o krzywej nie określając, co to takiego jest. Choć próby zdefiniowania krzywej były czynione jeszcze w starożytności, dopiero wybitny myśliciel francuski René Descartes (Kartezjusz) podał oparte na wprowadzonym przez siebie pojęciu współrzędnych zadowalające jej określenie.

Niech x, y będą współrzędnymi punktu na płaszczyźnie. Zbiór punktów (x, y) nazywać będziemy krzywą, jeżeli ich współrzędne spełniają związek $F(x, y) = 0$. Funkcja F dwu zmiennych x i y może być dowolna; jeżeli jest wielomianem stopnia n , to krzywą nazywamy algebraiczną stopnia n . Krzywe niealgebraiczne nazywamy przestępnymi. Zgodnie z tą definicją linia łańcuchowa jest krzywą przestępną.

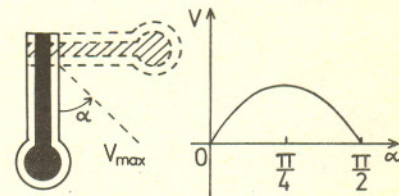
Przykładem krzywej algebraicznej jest tzw. ślimak Pascala. Jest to krzywa stopnia czwartego określona równaniem

$$(x^2 - y^2 - 2ax)^2 - l^2(x^2 + y^2) = 0.$$

Stałe a i l mają następującą interpretację geometryczną. Rozpatrzmy w kartezjańskim układzie współrzędnych x, y okrąg o promieniu a i środku w punkcie $(a, 0)$. Promieniem wodzącym dowolnego punktu P z tego okręgu będzie wektor OP . Ustalmy l jako długość pewnego odcinka, (rys. 3). Ślimakiem Pascala dla tak ustalonych a i l będzie zbiór punktów, który otrzymuje się przez powiększenie i zmniejszenie promienia wodzącego każdego punktu okręgu o odcinek długości l . Zbiór punktów, który otrzymuje się przez dodawanie l (punkty oznaczone indeksem 1) nazywa się gałęzią zewnętrzną, natomiast zbiór punktów otrzymany przez odejmowanie l (punkty oznaczone indeksem 2) nazywa się gałęzią wewnętrzną. Rysunek 3 przedstawia ślimaka Pascala w przypadku $a > l$. Gdy $a < l < 2a, l = 2a$ i $l > 2a$ ślimaki Pascala mają kształt jak na rys. 4.



Rys. 3



Rys. 5

Ślimak Pascala spełniający warunek $l = 2a$ nosi nazwę kardioidy. Jedną z części mechanizmu podnoszącego i opuszczającego semafor ma kształt ślimaka Pascala, dla którego $a < l < 2a$. W rezultacie prędkość ramienia semafora osiąga maksymalną wartość nie na końcu, lecz w środku ruchu ramienia, tj. dla $\alpha = \pi/4$, (rys. 5). Inaczej mówiąc, dzięki ślimakowi ramię semafora jest hamowane łagodnie.

Inne efektywne zastosowanie znalazł ślimak Pascala w maszynie do szycia — w urządzeniu do nawijania nici na szpulę czółenka. Zamienia on tam ruch obrotowy na ruch jednostajny prostoliniowy.

Ogólniej, rozpatrywać można krzywe, które powstają przez powiększanie i zmniejszanie o dany odcinek l promienia wodzącego każdego punktu pewnej ustalonej krzywej zwanej krzywą bazową. Krzywe takie nazywa się konchoidami (od greckiego konchoeides — podobny do muszli). Tak więc ślimak Pascala jest konchoidą, której krzywą bazową jest okrąg. W przypadku, gdy krzywą bazową jest prosta, otrzymujemy tzw. konchoidę Nikomedesa (rys. 6).

Wyobraźmy sobie teraz, że po płaszczyźnie porusza się punkt. Intuicyjnie wiemy, co to znaczy, ale jak to wyrazić analitycznie? Otóż, niech (t_0, t_1) będzie pewnym przedziałem (skończonym lub nie), którego punkty t nazywać będziemy czasem. Jeżeli współrzędne x, y są ciągłymi funkcjami czasu: $x = x(t), y = y(t)$, to zależność tę nazywać będziemy ruchem punktu. Poruszający się punkt wyznacza zbiór $\{(x(t), y(t))\}_{t \in (t_0, t_1)}$, który nazwiemy torem albo krzywą punktu.

Rugując czas z równań $x = x(t), y = y(t)$ otrzymamy związek $F(x, y) = 0$ identyczny z równaniem definiującym krzywą w sensie Kartezjusza.

Rozpatrzone krzywe: linia łańcuchowa i ślimak Pascala są torami punktu w podanym wyżej

sensie. Zapisać je bowiem można w postaci $x = t, y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{t}{a}} - e^{-\frac{t}{a}} \right)$ (linia łańcuchowa),

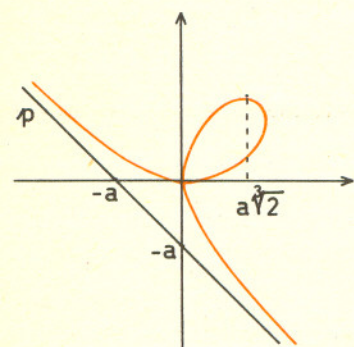
$x = a \cos^2 t + t \cos t, y = a \cos t \sin t + t \sin t$ (ślimak Pascala). Innym przykładem toru punktu jest liść Kartezjusza (rys. 7), określony równaniami

$$(8) \quad x(t) = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y(t) = \frac{3at^2}{1+t^3}, \quad a > 0, \quad t \neq -1.$$

Krzywa ta ma asymptotę o równaniu $x + y + a = 0$. Przy $t \rightarrow \pm \infty$ obie współrzędne $x(t)$ i $y(t)$ dążą do 0. Punkt $(0,0)$ otrzymuje się więc dwukrotnie dla $t = 0$ i $t = \infty$. Gdy t zmierza od $-\infty$ do -1 , to punkt (x, y) wychodząc z punktu $(0,0)$ oddala się po prawej gałęzi do nieskończoności, gdy t zmienia się od -1 do 0, to punkt ten wraca z nieskończoności po lewej gałęzi do punktu $(0,0)$, wreszcie przy wzrastaniu t od 0 do $+\infty$ punkt przebiega pętlę w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Rugując z równań (8) czas otrzymujemy $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

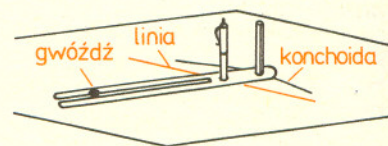
Związek ten pochodzi od Kartezjusza, który zastanawiał się (1638) nad kształtem krzywej, dla której suma objętości sześcianów utworzonych z odcinków o długościach równych współrzędnym punktu (x, y) jest równa objętości prostopadłościanu utworzonego z odcinków, których długości są równe x, y oraz pewnej stałej. Niedługo potem znaleziono fragment tej krzywej, mianowicie środkową pętlę, i nazwano ją „liściem jaśminu”. Pełny wykres liścia podali Huygens i Bernoulli. Nazwa liść Kartezjusza utrwaliła się dopiero na początku XVIII wieku.

Przedstawione krzywe są krzywymi płaskimi. Podane definicje można zmodyfikować tak, aby opisywały krzywe przestrzenne. Istnieje wiele interesujących przykładów opisujących ruch w trójwymiarowej przestrzeni fizycznej, ale do tych problemów powrócimy innym razem.

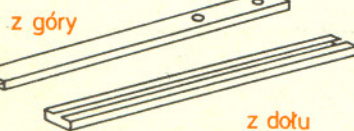
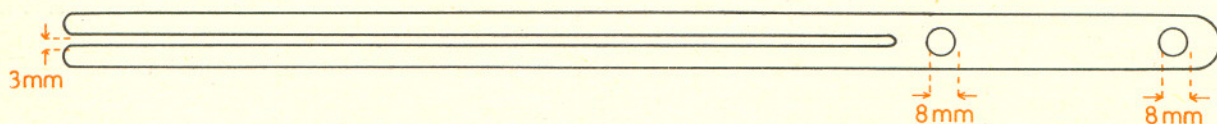


Rys. 7

Rysujemy konchoidy



Wytnijcie ze sklejki (0,5 do 1,0 cm) kształt jak na rysunku. Otrzymany przyrząd jest najprostszym konchoidografem, a więc służy do rysowania konchoid.



Potrzebny nam jeszcze będzie gwoździć o dużym łepku (np. tapicerski lub papowiec) i kawałek płyty (lub stół sosnowy, w który wolno nam wbijać gwoździe), jako podkładka. W jednym z otworów konchoidografu mocujemy ołówek, w drugi wkładamy wypisany już długopis. Na podkładce kładziemy arkusz papieru z narysowaną linią, dla której chcemy narysować konchoidę i przypinamy go pineskami. Następnie wbijamy gwoździć tak, żeby pod jego łepkę można było wsunąć wycięcie konchoidografu. Gdy będziemy wodzili długopisem po linii, ołówek narysuje nam jedną gałąź konchoidy. Po zamianie miejscami ołówka i długopisu uzyskamy drugą gałąź. Na pewno każdy zauważył, że nie można takim konchoidografem narysować każdej konchoidy. Można jednak z cienkiej blaszki wykonać lepszy. Sądzę, że rysunek wystarczy jako objaśnienie jak to zrobić.

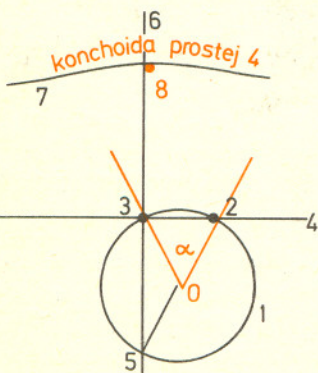
A czy umielibyście zrobić konchoidograf rysujący od razu obie gałęzie konchoidy (czyli na dwa ołówki)?

Jest rzeczą ciekawą, że konchoidografem można wykonać tzw. konstrukcje platońskie (patrz artykuł M. Bryńskiego »Delta« 6/1976). Obok podajemy konstrukcję podziału kąta na trzy równe części. Potrzebna do tego jedna (zewnątrzna) gałąź konchoidy prostej (czyli konchoidy Nikomedesa). Sprawdźcie, że konstrukcja jest poprawna.

a – odległość środków konchoidografu,

okrąg 1 ma promień $\frac{a}{2}$.

Gdy gwoździć wbijemy w 0, to $\sphericalangle 308 = \frac{1}{3} \alpha$.

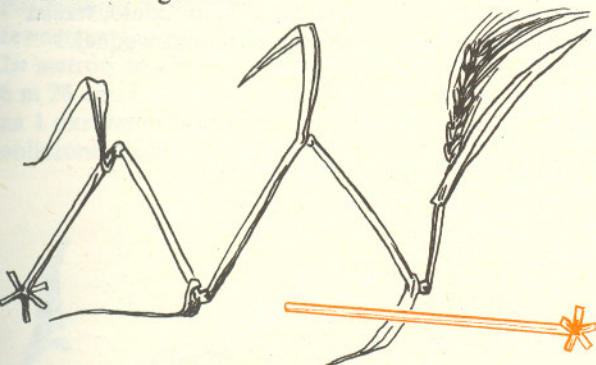


Smata delta

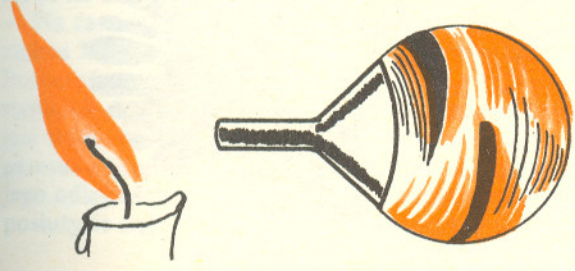


Bańki mydlane

Czy lubicie puszczać bańki mydlane? Myślę, że tak, bo kto by tego nie lubił. Jest to zabawa stara jak świat. Wasi rodzice, a także i dziadkowie, bardzo chętnie bawili się puszczeniem baniek mydlanych, gdy byli jeszcze dziećmi. W starych kronikach nie ma, niestety, wzmianek o tym jak bawiły się dzieci w dawnych czasach, ale w Luwrze, w Paryżu, jest starożytna waza etruska z rysunkiem przedstawiającym dzieci wydychające bańki za pomocą rurek. Ciekawe tylko, jakiego mydła używały dzieci etruskie do tego celu.



Przeglądaj się bańkom, które wypuszczasz w powietrze. Można zauważyć różne ciekawe rzeczy. Chociaż woda mydlana jest szara, bańka mieni się wszystkimi kolorami tęczy. Początkowo bańka unosi się do góry, następnie kurczy się i opada. Gdybyś przed wypuszczeniem bańki rozbujał ją, wprawiliby to ją w drgania. Można zauważyć, że większe bańki drgają wolniej niż małe. Wygląda to tak, jakby błonka, tworząca bańkę była sprężysta — podobnie jak gumowy balonik. Tę sprężystość bańki mydlanej można zademonstrować w ciekawy sposób



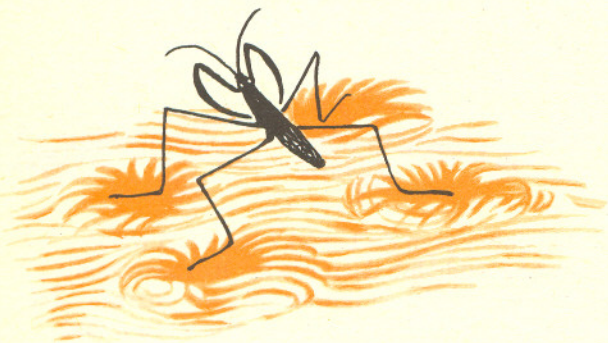
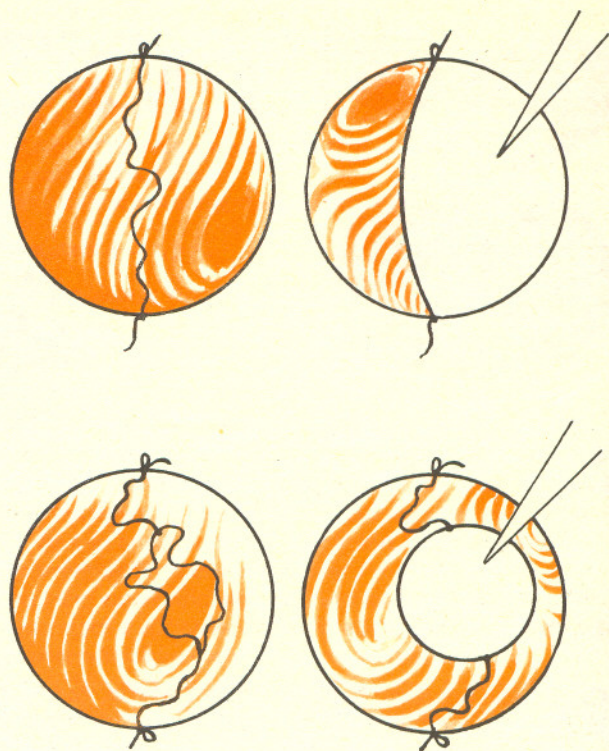
Jak zrobić dobry płyn do baniek? Najlepiej wziąć przegotowaną wodę lub deszczówkę. Rozpuszczamy w niej kawałek mydła, aż powstanie gęsty roztwór. Żeby bańki były trwalsze, można do tego roztworu dodać trochę cukru. Potrzebna jest jeszcze rurka. Najlepsza jest słomka z końcem rozszczepionym w kształcie krzyża. Dzieci mieszkające w mieście mogą mieć trudności ze znalezieniem kawałka słomki. Można się wtedy zadowolić zwiniętą w rurkę kartką papieru — kiedy przemoknie można zrobić drugą. Bańki można również wydychać za pomocą lejka lub drucianego pierścienia. Oba te przyrządy przydadzą nam się zresztą do następnych doświadczeń z bańkami mydlanymi



Postaw na stole zapaloną świecę. Wydychaj bańkę na szerokiej części lejka. Następnie zatkać czubek lejka palcem i zbliż do płomienia świecy. Kiedy usuniesz palec, powietrze z bańki będzie dmuchało na płomień i odchyli go w bok. To błonka bańki mydlanej kurczy się i wypycha na zewnątrz zawarte w bańce powietrze. Możesz jeszcze raz wydychać bańkę i przyłożyć otworek lejka do twarzy. Wyraźnie poczujesz powiew powietrza wypchanego z bańki.

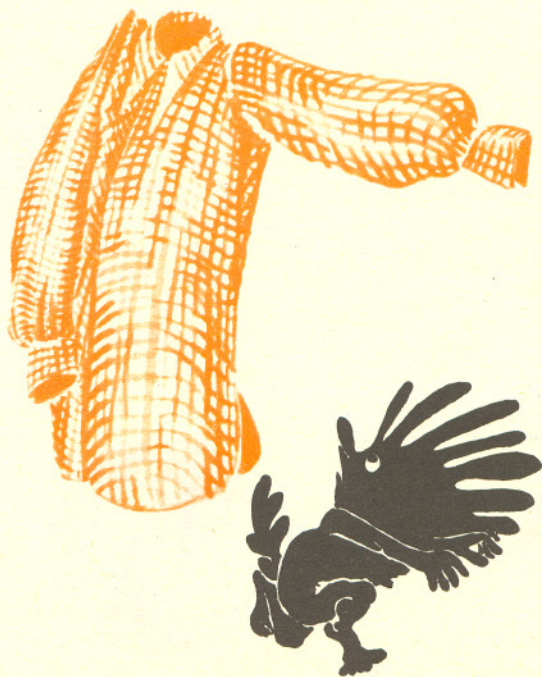


Zrobimy teraz inne doświadczenie, które ma na celu zbadanie własności bańki mydlanej. Potrzebny nam będzie pierścień z drutu. Można kawałek drutu wygiąć na butelce lub innym walcowatym przedmiocie. Do pierścienia przywiązujemy w dwóch oddalonych od siebie punktach dwa końce nitki. Następnie zanurzamy pierścień w mydlanym roztworze. Kiedy powstanie bańka mydlana, przebijemy ją igłą, której koniec rozgrzaliśmy przez chwilę nad płomieniem. Zauważymy, że błonka pękła tylko z jednej strony nitki. Ta część, która pozostała, stara się jak najbardziej zmniejszyć swoją powierzchnię. Napina więc nitkę tak, że nitka przyjmuje kształt łuku. Usuńmy teraz tę nitkę i przywiążmy inną nitkę, z pętelką w środku. Nitka musi być dłuższa niż średnica pierścienia i nie powinna być napięta. Znowu utwórzmy na pierścieniu błonkę mydlaną i przekłujmy ją wewnątrz pętelki. Błonka, która pozostała na zewnątrz pętelki stara się zająć jak najmniejszą powierzchnię. Nadaje więc pętelce taki kształt, by powierzchnia wewnątrz niej była jak największa. Jaka figura geometryczna ma największą powierzchnię przy danym obwodzie? — Oczywiście koło. Na wielkość powierzchni pozostałej błonki nie wpływa to, gdzie ta pętelka się znajduje — możemy ją przesunąć dowolnie w obrębie pierścienia. Można to zrobić ostrożnie igłą zamoczoną uprzednio w wodzie mydlanej.



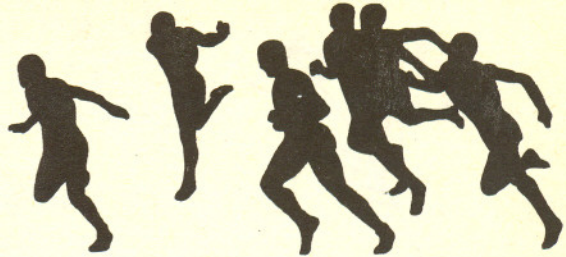
Nie tylko woda mydlana ma własność tworzenia sprężystej błonki. W podobny sposób jest napięta powierzchnia każdej cieczy. Żeby się o tym przekonać, możesz położyć płasko na powierzchni wody igłę lub żyłkę. Zobaczysz, że przedmioty te mogą utrzymywać się na wodzie, mimo, że są od niej cięższe. Oczywiście, żeby się to udało, trzeba uważać, żeby nie przebić tej delikatnej błonki wodnej.

Żeby porównać napięcie różnych rodzajów cieczy, zróbmy następujące doświadczenie: nalejmy do naczynia niewielką ilość wody, tak, żeby tylko przykryła jego dno. Na środek powierzchni wody upuśćmy kropelkę spirytusu. Obie cieczy stają teraz w zawody. Każda ma swoją błonkę powierzchniową, która stara się skurczyć, ciągnie więc linię granicy cieczy w swoją stronę. Zwycięża ta ciecz, której błonka jest silniej napięta. Okazuje się, że jest nią woda. Ciągnie ona za sobą na wszystkie strony spirytus, a dno naczynia w tym miejscu, gdzie był spirytus, pozostaje suche. O tym ostatnim doświadczeniu warto pamiętać, kiedy przyjdzie nam wywabić tłustą plamę na ubraniu. Jak to zrobimy? Zwykle, w miejsce, gdzie znajduje się plama, spuszczamy kilka kropel benzyny i trzemy watką lub gałgankiem. Tak postępuje prawie każdy człowiek, włączając sporą część fizyków. Po chwili, ku swojemu zmartwieniu stwierdza on, że plama rozpostarła się na wszystkie strony. Dolewa więc benzyny, co pogarsza sprawę. Im więcej benzyny, tym większa plama. Wreszcie stwierdza ze złością, że należało chodzić z małą plamką, lub oddać ubranie do pralni. A co naprawdę należało zrobić? Najpierw spuścić parę kropli benzyny wokół plamy, a dopiero potem na środek. Benzyna załuszczone ma większe napięcie powierzchniowe niż czysta, więc pociąga czystą benzynę ku środkowi. Tłuszcz zbiera się w małą kulkę, którą łatwo zebrać czystą szmatką.



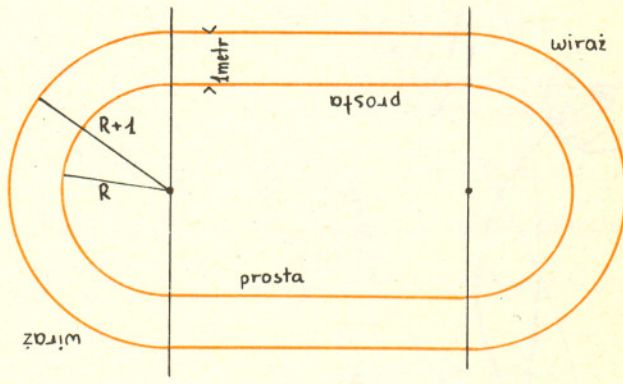
Start do biegu na 400 metrów.

Zawodnicy podchodzą do bloków startowych i przyklękają. Za chwilę padnie strzał. Widać teraz wyraźnie, że miejsca startu zawodników są przesunięte względem siebie. Różnice są znaczne. Zawodnik biegnący po ostatnim zewnętrznym torze wysunięty jest do przodu ponad 40 metrów w stosunku do najbardziej cofniętego zawodnika, który wystartuje po wewnętrznym torze.



Wyrównania,

bo tak się to fachowo nazywa, są konieczne, jeśli na wirażach zawodnicy będą biegali po torach. Ciekawe, że do obliczenia wyrównań, czym się zaraz zajmujemy, wystarczy wiedzieć tylko jedno: Jaka jest szerokość torów. Jeśli, jak nakazują przepisy, tory mają szerokość jednego metra, wtedy wyrównania do biegu na jedno okrążenie są zawsze jednakowe — praktyczna wiadomość dla tych, którzy na nietypowym boisku (np. na trzystumetrowej bieżni o ostrych wirażach) chcieliby zorganizować bieg po torach. Wyjaśnimy to teraz. Przypuśćmy, że dwóch zawodników przebiegło po sąsiednich torach jedno okrążenie. Każdy z nich przebiegł dwa wiraże i dwie proste. Po prostych przebiegli oczywiście tyle samo (najlepiej tłumaczy to rysunek). Po wirażach każdy z nich przebiegł łącznie długość jednego okręgu, z tym że biegli po okręgach o różnych promieniach. Literą R oznaczmy długość w metrach promienia mniejszego okręgu i zabierzmy się do liczenia (niestety, trudno tego uniknąć). Porównując tabelki stwierdzamy, że zawodnik biegnący po zewnętrznym torze przebiegł o 2π więcej niż jego kolega. 2π metrów to z dokładnością, jaka tu zupełnie wystarczy, 6 m 28 cm. I tyle właśnie wynosi wyrównanie do biegu na 1 okrążenie bieżni — oczywiście obliczone dla sąsiednich torów.



Tor wewnętrzny	
promień na wirażu	R
długość drogi na wirażach	$2\pi R$

Tor zewnętrzny	
promień na wirażu	$R + 1$
długość drogi na wirażach	$2\pi(R + 1) = 2\pi R + 2\pi$



Przenieśmy się teraz na skocznia, gdzie rozgrywany jest skok w dal. Po szybkim rozbiegu nie jest zadaniem łatwym trafić właściwą nogą na deskę — wiele czasu na treningach zajmuje ćwiczenie tej umiejętności. Spróbujcie poradzić zawodnikowi ćwiczącemu tę konkurencję w takiej sytuacji. Zawodnik rozpoczyna rozbieg zawsze z prawej nogi i odbija się z nogi lewej. W pierwszej próbie trafił idealnie na deskę... ale nogą prawą. Zawodnik wie, że pierwszy krok rozbiegu jest długości 80 cm, natomiast tuż przed odbiciem biegnie krokami długości 2 m 25 cm. O ile powinien przesunąć miejsce, skąd rozpoczyna bieg — o 80 cm, czy też o 2 m 25 cm?

Niech odpowiedź na to pytanie będzie pierwszym sportowym zadaniem do rozwiązania. A oto dalsze:
 — Dlaczego w rzucie dyskiem korzystniej jest rzucać pod wiatr?
 — Obliczcie wyrównanie dla zawodnika startującego do biegu na 200 metrów na ósmym torze (zewnętrznym).
 — Na zamieszczonych obok schematycznych rysunkach czarna kropka — to napastnik szykujący się do strzału. Pomarańczowa kropka oznacza bramkarza broniącego dostępu do bramki. Odpowiedzcie na pytanie, czy bramkarz jest dobrze ustawiony? Spróbujcie poprawić jego ustawienie przesuwając go tylko w linii poziomej (nie zmieniając jego odległości od bramki). Jaką geometryczną konstrukcją posłużycie się, żeby rozwiązać to zadanie?



Dr Marek KORDOS

W artykule M. Bryńskiego («Delta», 6, 1976) podane zostało kryterium analityczne (czyli rachunkowe), jakie spełniają wszystkie punkty konstruowalne (z pewnego układu danych wyjściowych) za pomocą cyrkla i linijki. Tutaj spróbuję przekonać Czytelników, że jeżeli ograniczymy środki konstrukcyjne eliminując linijkę, to zbiór punktów konstruowalnych nie zmieni się. Czyli, że samym cyrklem można skonstruować wszystkie te punkty, które mogą być skonstruowane cyrklem i linijką. Udowodnił to matematyk włoski *Mascheroni* (maskeroni) i opublikował w 1797 roku w pracy *Geometria del compasso* (geometria cyrkla). Wiedzano o tym zresztą już sto lat wcześniej (np. Duńczyk *Mohr* (mor) w książce *Euklides Danicus* (Euklides duński)), ale zwyczajowo przypisuje się ten rezultat Mascheroniemu ze względu na ścisłość i kompletność jego pracy. Umówimy się, że dalej małe litery łacińskie a, b, c, d oznaczać będą proste, duże litery łacińskie A, B, C, D, O, P — punkty. Napis $pr. AB$ oznacza prostą przechodzącą przez punkty A i B , $o(A, BC)$ — okrąg o środku A i promieniu BC . Napis

$$a: \quad a \perp b \wedge A \in a$$

będziemy odczytywać: a jest prostą prostopadłą do b przechodzącą przez A . Sądzę, że po tych ustaleniach dalej używane wzory będą zrozumiałe.

W szczególności konstrukcje cyrklem i linijką pozwalają nam wykonywać następujące czynności:

jeśli punkty A, B, C , proste a, b i okręgi o_1, o_2 są dane bądź uzyskane w poprzednich etapach konstrukcji, to możemy uzyskać jeszcze

$$1. \quad c: \quad c = pr. AB$$

$$2. \quad o_3: \quad o_3 = o(A, BC)$$

$$3. \quad D: \quad \{D\} = a \cap b$$

(o ile proste a i b nie są równoległe)

$$4. \quad D_1, D_2: \quad \{D_1, D_2\} = a \cap o_1$$

(o ile prosta a nie leży za daleko od środka okręgu o_1)

$$5. \quad D_1, D_2: \quad \{D_1, D_2\} = o_1 \cap o_2$$

(o ile okręgi nie leżą zbyt daleko, ani zbyt blisko).

Rezultat Mascheroniego polega na wykazaniu, że skreślenie z tej listy czynności 1, 3 i 4 nie zmieni otrzymanego zbioru punktów. Abyśmy i my mogli ten rezultat uzyskać, musimy udowodnić, że odpowiednio wykonując czynności 2 i 5 możemy (*) mając dane A, B, A_1, B_1 takie, że $A \neq B$ i $A_1 \neq B_1$ znaleźć

$$C: \quad \{C\} = pr. AB \cap pr. A_1 B_1,$$

o ile $pr. AB \not\parallel pr. A_1 B_1$

(**) mając dane o_1 i A, B takie, że $A \neq B$ znaleźć

$$D_1, D_2: \quad \{D_1, D_2\} = pr. AB \cap o_1.$$

Czynności (*) i (**) zastępują czynności 3 i 4. Czynności 1 nie musimy zastępować, bo nie prowadzi ona do uzyskania nowych punktów.

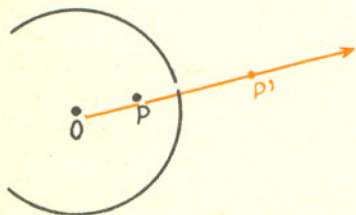
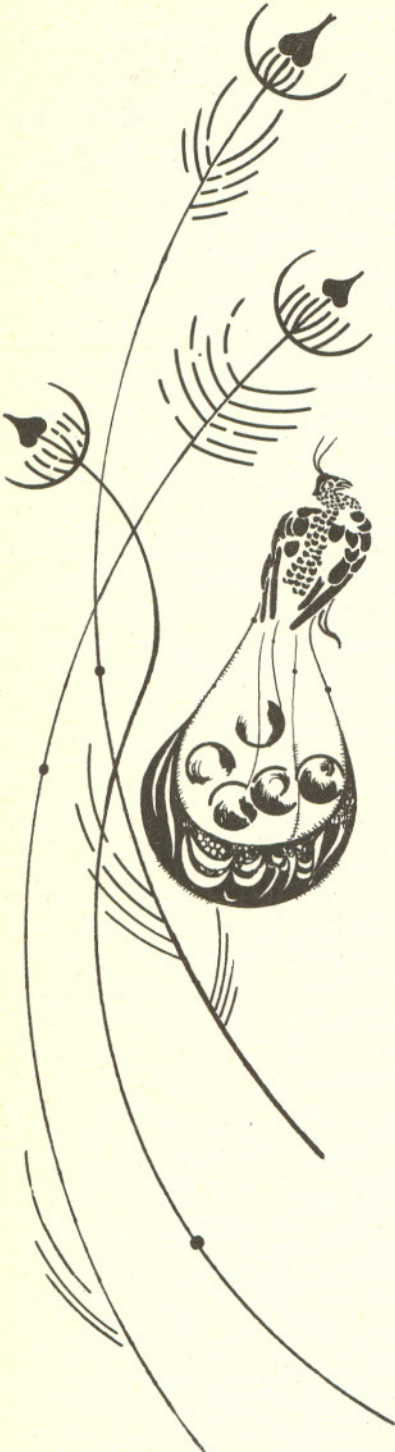
INWERSJA

zwana też *symetrią względem okręgu* będzie naszym głównym narzędziem. Zapomnijmy więc na chwilę o naszym zamierzeniu i zajmijmy się badaniem własności tego pojęcia. Trzeba je najpierw zdefiniować.

Punkty P i P' są symetryczne względem okręgu $o(O, \alpha)$, gdzie α jest liczbą dodatnią, wtedy i tylko wtedy, gdy leżą na tej samej półprostej o początku w O i $OP \cdot OP' = \alpha^2$.

Zauważmy, że nie istnieje punkt symetryczny do O względem $o(O, \alpha)$, zaś punkty okręgu $o(O, \alpha)$ są same do siebie symetryczne.

Inwersją względem $o(O, \alpha)$ nazywamy przekształcenie przyporządkowujące każdemu punktowi $P \neq O$ punkt P' symetryczny do P względem $o(O, \alpha)$.



Potrzebne nam własności inwersji są prostymi konsekwencjami następującego twierdzenia:

Jeśli punkty A i B są symetryczne względem $o(O, \alpha)$ do punktów A' i B' , to $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OB'A'$.

Dowód: Trójkąty OAB i $OB'A'$ są podobne, bo mają kąt wspólny ($\sphericalangle AOB$) oraz

$$OA = \frac{\alpha^2}{OA'} \quad \text{i} \quad OB = \frac{\alpha^2}{OB'}$$

czyli $\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'}$. Stąd teza.

Wynika stąd, że

(I) Obrazem okręgu przechodzącego przez O w inwersji względem $o(O, \alpha)$ jest prosta nie przechodząca przez O .

Jest nią mianowicie prosta prostopadła do średnicy przekształcanego okręgu przechodzącej przez O i przechodząca przez obraz drugiego końca tej średnicy. Dowód odczyta Czytelnik z rysunku.

(II) Obrazem prostej nie przechodzącej przez O w inwersji względem $o(O, \alpha)$ jest okrąg przechodzący przez O .

Jest tak dlatego, że dwukrotne wykonanie inwersji względem tego samego okręgu jest tożsamością.

(III) Obrazem prostej przechodzącej przez O w inwersji względem $o(O, \alpha)$ jest ta sama prosta.

To chyba nie wymaga dowodu. I wreszcie

(IV) Obrazem okręgu nie przechodzącego przez O w inwersji względem $o(O, \alpha)$ jest okrąg.

Przekształcamy mianowicie średnicę \overline{AB} (patrz rysunek) a następnie stwierdzamy, że dla dowolnego punktu P okręgu przekształcanego kąt $A'P'B'$ jest prosty.

Jako zadanie dla Czytelników pozostawiamy wykazanie, że (V) Jeżeli styczne do okręgu o_1 poprowadzone w punktach przecięcia o_1 z $o(O, \alpha)$ przechodzą przez O , to obrazem o_1 w inwersji względem $o(O, \alpha)$ jest o_1 .

PROSTE KONSTRUKCJE CYRKLEM

Zadanie: Znaleźć obraz symetryczny P' punktu P względem prostej AB .

Rozwiązanie: Dane A, B, P (parami różne). Konstruujemy

$$\begin{aligned} o_1: & \quad o_1 = o(A, AP) \\ o_2: & \quad o_2 = o(B, BP) \\ P': & \quad \{P, P'\} = o_1 \cap o_2 \end{aligned}$$

Prawda?

A co otrzymamy z następującej konstrukcji?

Dane: A, B (różne)

$$\begin{aligned} o_1: & \quad o_1 = o(A, AB) \\ o_2: & \quad o_2 = o(B, BA) \\ P_1, P_2: & \quad \{P_1, P_2\} = o_1 \cap o_2 \\ o_3: & \quad o_3 = o(P_1, P_1A) \\ P_3: & \quad \{A, P_3\} = o_3 \cap o_2 \\ o_4: & \quad o_4 = o(P_3, P_3P_1) \\ C: & \quad \{P_1, C\} = o_4 \cap o_2 \end{aligned}$$

Oczywiście C jest obrazem symetrycznym punktu A względem punktu B . Możemy więc za pomocą samego cyrkla konstruować obrazy symetryczne punktu P względem (nie narysowanej!) prostej — oznaczać tę konstrukcję będziemy przez $S_{pr \cdot AB}(P)$ i względem punktu $-S_A(P)$. Można też znaleźć środek $M(AB)$ punktów A i B — przepis na marginesie — proszę wykonać rysunek.

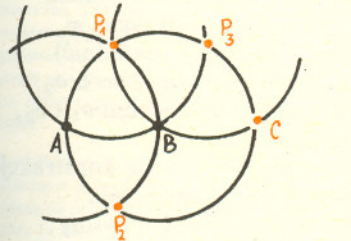
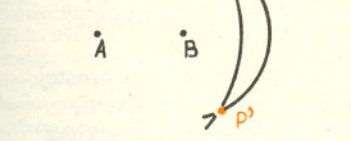
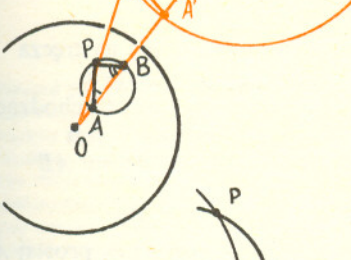
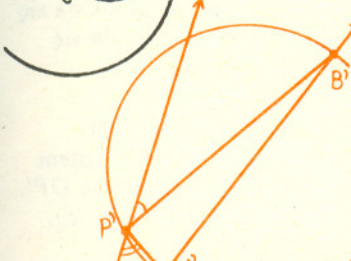
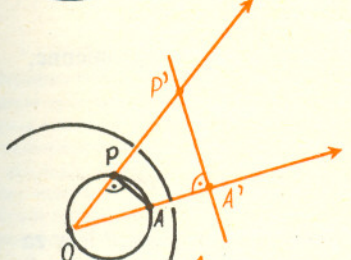
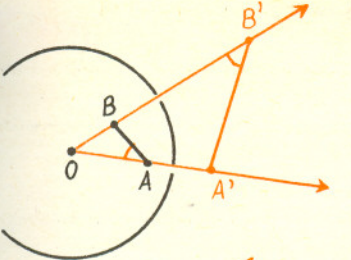
Możemy też znaleźć rzut prostokątny punktu P na prostą AB — jest to przecięcie

$$M(P S_{pr \cdot AB}(P)).$$

Możemy również znaleźć punkt prostej prostopadłej do $pr \cdot AB$ w punkcie B . Jest nim punkt

$$D: \quad \{B, D\} = o_3 \cap o_4$$

gdzie o_3 i o_4 uzyskujemy jak w konstrukcji symetrii środkowej.



Dane: A, B (różne)

$C: C = S_B(A)$

$o_1: o_1 = o(A, AB)$

$o_2: o_2 = o(B, BA)$

$P_1, P_2: \{P_1, P_2\} = o_1 \cap o_2$

$o_3: o_3 = o(P_1, P_1A)$

$o_4: o_4 = o(P_3, P_3P_1)$

$D: \{A, D\} = o_3 \cap o_2$

Trójkąty AP_1D i ACP_1 są podobne, bo mają

kąt wspólny i są równoramienne. Zatem

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AD}{AP_1} = \frac{AP_1}{AC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$$

Punkty A, B, D jako równoodległe od P_1 i P_2 leżą na jednej prostej. A więc D jest środkiem AB .

KONSTRUUJEMY OBRAZY INWERSYJNE

Najpierw inwersja punktu.

Dane: $o = o(O, \alpha)$ i $P \neq O$

- $o_1: o_1 = o(P, PO)$
- $A_1, A_2: \{A_1, A_2\} = o_1 \cap o$
- $o_2: o_2 = o(A_1, A_1O)$
- $o_3: o_3 = o(A_2, A_2O)$
- $P': \{O, P'\} = o_2 \cap o_3$

Trójkąty OA_1P i $OP'A_1$ są podobne, bo mają kąt wspólny i są równoramienne. Zatem

$$\frac{OP}{OA_1} = \frac{OA_1}{OP'}$$

czyli $OP \cdot OP' = (OA_1)^2 = \alpha^2$. Ponieważ punkty O, P, P' są jednakowo odległe od A_1 i A_2 , więc... udało się.

Jest jednak jedno „ale”: mogą nie istnieć punkty A_1 i A_2 . Gdy jednak P leży za blisko O , to zamiast P bierzemy $P_1 = S_P(O)$, gdy i dla P_1 konstrukcja nie da się wykonać, to bierzemy $P_2 = S_{P_1}(O)$ itd, aż konstrukcja dla pewnego P_n da się wykonać dając P'_n . Czytelnik zechce wykazać, że jeśli dla P'_n wykonamy analogiczne symetrie jak dla P , to otrzymamy żądany punkt P' .

Teraz znajdziemy obraz pr. AB w inwersji względem $o(O, \alpha)$. Wobec (III) wystarczy rozpatrzyć tylko przypadek, gdy $O \notin$ pr. AB . Niech P będzie rzutem prostokątnym O na pr. AB (umiemy go znaleźć). Niech C będzie środkiem OP' . Z (II) wynika, że $o(C, CO)$ jest obrazem pr. AB w inwersji względem $o(O, \alpha)$.

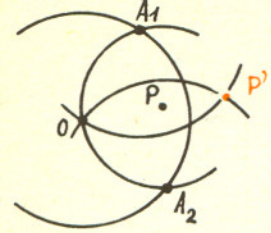
JAK MASCHERONI

Znalezienie za pomocą cyrkla przecięcia pr. AB i pr. CD teraz już nie nastęrcza trudności — znajdujemy obraz inwersyjny obu prostych względem okręgu $o(O, \alpha)$ takiego, że $O \notin$ pr. $AB \cap$ pr. CD . Otrzymujemy okręgi o_1 i o_2 przechodzące przez O . Oznaczmy przez P drugi punkt przecięcia o_1 i o_2 . Wówczas P' jest punktem przecięcia naszych prostych. Zaś gdy o_1 i o_2 są styczne, to proste AB i CD są równoległe.

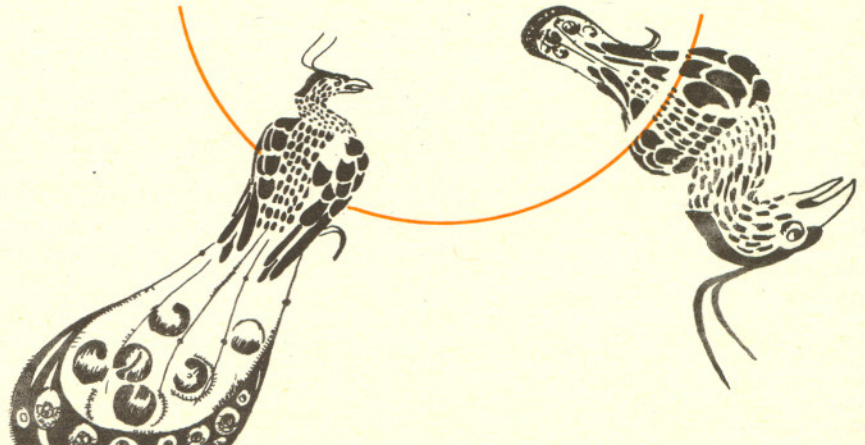
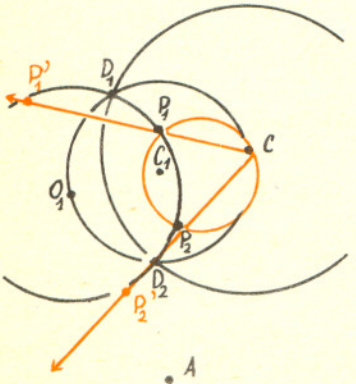
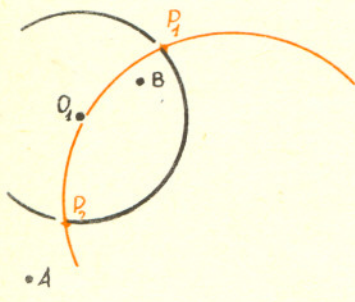
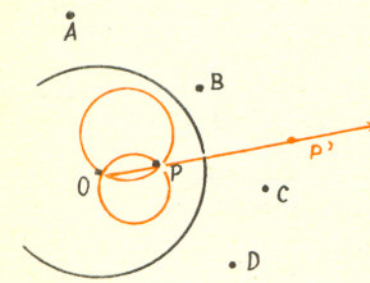
Gdy chcemy znaleźć przecięcie pr. AB z okręgiem $o_1 = o(O_1, \alpha_1)$ i gdy $O_1 \notin$ pr. AB , sprawa jest jeszcze mniej kłopotliwa. Znajdujemy obraz o_2 prostej AB w inwersji względem o_1 . Jeżeli P_1 i P_2 są przecięciami o_1 i o_2 , to są również przecięciami o_1 i pr. AB (czemu?).

Jedynym zatem kłopotliwym przypadkiem jest poszukiwanie przecięcia prostej AO_1 z okręgiem $o_1 = o(O_1, \alpha_1)$. W tym przypadku oieramy taki punkt C , który nie leży na prostej AO_1 i taki, że $CO_1 > \alpha_1$. Niech C_1 będzie środkiem CO_1 . Niech punkty D_1 i D_2 będą przecięciami $o(C_1, C_1C)$ z o_1 . Okrąg $o = o(C, D_1)$ ma styczne w D_1 i D_2 przechodzące przez O_1 (proszę uzasadnić). Wobec tego na mocy (V) obrazem o_1 w inwersji względem o jest o_1 . Niech o_2 będzie obrazem pr. AO_1 względem o . Jeśli zatem P_1 i P_2 są przecięciami o_1 i o_2 , to P'_1 i P'_2 (względem o) są przecięciami o_1 i pr. AB .

Udowodniliśmy zatem, że Mascheroni miał rację. Możemy więc każdą konstrukcję, wykonalną cyrklem i linijką, wykonać samym cyrklem. Wiemy nawet jak. Oczywiście na ogół istnieje konstrukcja prostsza od tej, którą uzyskalibyśmy naśladować w podany wyżej sposób znane konstrukcje cyrklem i linijką.



$P'_{n-1} = S_{P'_n}(O)$
 $P'_{n-2} = S_{P'_{n-1}}(O)$
 itd.
 $P' = S_{P'_1}(O)$



Dr Bronisław KUCHOWICZ

DLACZEGO NIEBO JEST CIEMNE?

Do wykonania jednej z najbardziej podstawowych obserwacji kosmologicznych nie trzeba wielkich teleskopów, nie trzeba wielu nocy obserwacji. Wystarczy jedna gwiazdzista noc... i chwila zastanowienia. Zastanowienia nad tym, dlaczego niebo jest gwiazdziste.

W okresie, kiedy *Almagest* Klaudiusza Ptolemeusza stanowił podstawę wiedzy astronomicznej, zastanowienie takie wydawało się zbyt proste. Wszechświat stanowił jedną olbrzymią, puszczoną w ruch maszynę, której centrum stanowiła nieruchoma Ziemia, najdalszym ograniczeniem zaś była sfera gwiazd stałych, poza którą już nic być nie mogło. Zgodnie z koncepcjami Arystotelesa, które legły u podstaw tego modelu, przestrzeń pozbawiona materii nie istnieje, tak więc przedstawiony model Wszechświata był skończony, ograniczony przestrzennie. W modelu takim skończona liczba gwiazd przyczepionych do ostatniej sfery nie budzi zdziwienia. Warto nadmienić, że już starożytni atomiści z Demokrytem na czele głosili, iż Wszechświat składa się z nieskończonej ilości poruszających się atomów, że atomy te, jak w pojemniku, muszą poruszać się w nieskończonej rozciągłej pustej przestrzeni, poglądy te jednak nie zostały zaakceptowane przez współczesnych i nie były w stanie konkurować przez stulecia z klasycznym modelem geocentrycznym. Dopiero Newtonowi zawdzięczamy odrodzenie koncepcji nieskończonego (przestrzennie) Wszechświata, tym razem już na bazie ścisłych sformułowań mechaniki, a nie spekulacji filozoficznych. Ugruntowane przez Newtona koncepcje absolutnej przestrzeni i absolutnego czasu zapanowały na długo (aż do narodzin obu teorii względności: szczególnej i ogólnej) w fizyce. Przestrzeń kosmiczna istniała u Newtona jak gdyby nieskończonej rozciągłej pojemnik, obdarzony właściwościami geometrycznymi (oczywiście obowiązywała geometria euklidesowa, bo jakaż by mogła być inna), ale nie fizycznymi, wypełniony różnego rodzaju ciałami niebieskimi. A oto jak Newton uzasadniał sam nieskończoność Wszechświata: „Gdyby cała materia naszego Słońca i planet i wszelka w ogóle materia we Wszechświecie rozłożona była równomiernie na niebie, każda zaś cząstka wykazywała właściwe sobie ciężenie ku pozostałym, jednocześnie cały obszar przestrzeni wypełniony tą rozmieszczoną w nim materią był skończony, wtedy materia znajdująca się w zewnętrznych częściach tego obszaru dążyłaby w rezultacie własnej ciężkości ku materii wypełniającej jego wnętrze. Spadałaby więc ona w kierunku do środka całej przestrzeni, w wyniku czego powstałaby tam jedna wielka kulista masa. Gdyby jednak materia rozłożona była równomiernie w przestrzeni nieskończonej, nigdy nie mogłaby zebrać się w jedną bryłę. Część jej mogłaby utworzyć jedną masę, część zaś inną, i w ten sposób powstałaby nieskończona liczba wielkich mas rozrzuconych w dużych odległościach wzajemnych w całej tej nieskończonej przestrzeni. I tak właśnie powstać mogło Słońce i gwiazdy stałe” (Isaac Newton w liście do Richarda Bentleya z 10 grudnia 1962 r.).

Rozmowanie Newtona stanowiło próbę wyjaśnienia dlaczego „wbrew” siłom powszechnego ciężenia powstało wiele ciał niebieskich zamiast jednego. Nieskończoność przestrzeni ratowała w tym ujęciu Wszechświat przed zapaścią grawitacyjną do jednego miejsca. Ale rodziły się inne trudności, na które kolejno zwracali uwagę Halley i de Chéseaux, aż wreszcie wyraźnie sformułował je Olbers. Stąd nazwa: paradoks Olbersa.

Pod nazwą paradoksu fizykalnego rozumie się twierdzenie wysnute z podstawowych praw fizyki, lecz prowadzące do wniosków sprzecznych z wynikami obserwacji lub doświadczenia. Paradoksem w tym sensie był właśnie paradoks fotometryczny, jak niekiedy nazywa się paradoks Olbersa. Powtórzmy w uproszczeniu rozumowanie Olbersa, pochodzące sprzed ponad półtora wieku. Oto podstawowe założenia newtonowskiego modelu nieskończonego Wszechświata, z których w rozumowaniu swym wychodził Olbers:

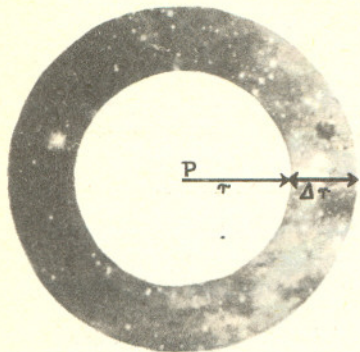
- I. Wszechświat jest nieskończony przestrzennie i niezmienny w czasie,
- II. W tej nieskończonej przestrzeni gwiazdy są rozłożone (średnio, ma się rozumieć) w sposób równomierny, liczba ich zaś jest nieskończona.
- III. Średnia na jednostkę objętości Wszechświata jasność gwiazd jest jednakowa. (To założenie okaże się nieistotne dla przeprowadzonego rozumowania).

Klaudiusz Ptolemeusz (II w.n.e.), astronom grecki, żył w Aleksandrii. W dziele nazwanym przez Arabów *Almagest* (*Wielka księga*) zestawił wszystkie znane ówczesnie teorie i obserwacje astronomiczne, tworząc zwarty, choć wyjątkowo skomplikowany, model układu planetarnego zwany systemem geocentrycznym albo systemem Ptolemeusza.

Edmund Halley (1656–1742), astronom angielski, profesor uniwersytetu w Oxfordzie, dyrektor obserwatorium w Greenwich. Współpracował blisko z Newtonem, wydał jego *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Obliczał orbity komet, odkrywając przy tym istnienie kometarnych eliptycznych orbit okresowych (np. nazwana jego imieniem kometa Halleya o okresie obiegu wokół Słońca wynoszącym 76 lat). W 1718 r. odkrył istnienie ruchów własnych gwiazd. Był autorem stosowanej w XVIII wieku metody wyznaczania odległości Słońca od Ziemi z obserwacji przejść Wenus przez tarczę słoneczną. Oto jego wypowiedź z 1720 roku w interesującej nas sprawie: „Gdyby liczba gwiazd stałych była większa od skończonej, wtedy cała powierzchnia ich pozornej sfery (tj. niebo — przypisek B.K.) powinna być jasna”.

Jean Philippe L. de Chéseaux (1718–1751), astronom szwajcarski, napisał w książce *Traité de la comète qui a paru en décembre 1743* (wydanej w Paryżu w 1744 r.): „Jeśli ilość gwiazd we Wszechświecie jest nieskończona, to dlaczego całe niebo nie jaśnieje jak powierzchnia pojedynczej gwiazdy? Dlaczego niebo jest ciemne? Dlaczego gwiazdy oddzielone są ciemnymi obszarami?” Nie mając jednak odwagi posunąć się zbyt daleko w swych wątpliwościach, de Chéseaux usiłuje odpowiedzieć na nie sam sobie: „Najpewniej chyba obłoki pyłu kryją przed nami światło odległych gwiazd. Do obserwatorów ziemskich dociera tylko promieniowanie z najbliższych gwiazd”.

Heinrich Wilhelm Matthias Olbers (1758–1840), lekarz z zawodu, żył i pracował w Bremie, stał się jednym z najwybitniejszych astronomów początku XIX w. (za *Wielką Encyklopedią Powszechną PWN*). Odkrył dwie małe planety: Pallas i Westa, oraz sześć komet. Rozwiązał problem wyznaczania parabolicznej orbity komety, podał teorię powstania małych planet z rozpadu pierwotnej większej planety.



Newtonowski model stanowił nieskończony, jednorodny, statyczny Wszechświat. Każdy punkt w tym Wszechświecie może być uważany za jego środek, żaden bowiem nie jest wyróżniony. Weźmy dowolny punkt P (ten na przykład, w którym się znajdujemy) i zacykmy wokół niego dwie powierzchnie kuliste, odpowiednio o promieniach r oraz $r + \Delta r$ (jak na rysunku). Oznaczmy literą M moc średnią pojedynczej gwiazdy, a literą N — liczbę gwiazd w jednostce objętości. Bierzemy oczywiście tak dużą jednostkę objętości, by wszelkie ewentualne fluktuacje gęstości rozmieszczenia gwiazd przestały odgrywać rolę. Objętość zawarta między obu zatoczonymi powierzchniami (przy założeniu $r \gg \Delta r$) równa jest $4\pi r^2 \Delta r$, w niej znajduje się łącznie $4\pi r^2 \cdot N \Delta r$ gwiazd, których łączna moc promieniowania wynosi $4\pi r^2 N \Delta r M$. Wiadomo, że natężenie promieniowania spada z kwadratem odległości, zatem z całej zaznaczonej objętości między obu powierzchniami kulistymi dociera do obserwatora

w punkcie P w jednostce czasu tylko $\frac{1}{r^2}$ część promieniowania:

$$\frac{1}{r^2} \cdot 4\pi r^2 N \Delta r M = 4\pi N M \Delta r.$$

Widać stąd, że ilość światła, docierająca w jednostce czasu do obserwatora w punkcie P z warstwy kulistej o promieniu r , nie zależy od promienia tej warstwy. Jeśli tylko grubości Δr dalszych warstw są takie same, to z każdej z nich dochodzi ta sama ilość światła. Obrazowo mówiąc, to co tracimy na natężeniu światła z pojedynczej gwiazdy (w wyniku spadku natężenia z kwadratem odległości), kompensuje nam wzrost (znow z kwadratem odległości) średniej liczby gwiazd w warstwie. Jeśli dodawać będziemy natężenia promieniowania z kolejnych warstw, to w nieskończonym Wszechświecie dostaniemy sumę nieskończenie wielu identycznych wyrazów (różnych od zera), a więc będzie to wielkość nieskończona. Ponieważ spodziewamy się, że prędzej czy później promień wyprowadzony z punktu P w jakimkolwiek kierunku zakończyć się musi na jakiejś gwiazdzie, więc całe niebo powinno być rozświetlone do jasności równej jasności pojedynczej gwiazdy. Tymczasem niebo jest czarne w nocy. Dlaczego tak jest?

Nad zagadnieniem tym jeszcze przed Olbersem myślał de Chéseaux, któremu wydawało się, że znalazł wyjaśnienie. Obłoki ciemnej materii (pyłu) mogłyby zakrywać odległe gwiazdy. Było to jednak wyjaśnienie pozorne. Olbers poszedł dalej, rozpatrując krytycznie, co będzie się dziać z obłokiem, pochłaniającym padające nań promieniowanie. Obłok taki będzie się stopniowo nagrzewać, w końcu temperatura jego wzrośnie, ale wtedy i on będzie promieniować, rozżarzy się. Wiemy dziś, że przy ustaleniu się równowagi obłok taki będzie wypromieniowywać tyle energii, ile sam dostaje (choć może być to w innym zakresie widma). Tak więc ani wprowadzenie przesłaniających obłoków, ani też innych ciemnych (czy jasnych) ciał na drodze promieniowania, docierającego do nas, nie jest w stanie usunąć paradoksalnej konsekwencji rozumowania. Jeśli tak, to może któreś z założeń jest błędne? Okazało się, że trzecie założenie jest nieistotne dla rozumowania. Więc albo założenie I, albo też II jest błędne. Znaczący to, że albo przestrzeń nie jest nieskończona, albo skończoną jest przynajmniej liczba gwiazd w nieskończonej przestrzeni. Od chwili sformułowania paradoksu fotometrycznego przez Olbera w 1823 roku usiłowano doprowadzić do zgodności między newtonowską koncepcją nieskończonego Wszechświata a obserwacją nocnego nieba. Wymyślano różne sposoby uniknięcia paradoksu. A tu, jak na złość, przybył jeszcze jeden paradoks: paradoks grawitacyjny, przypisywany H. von Seeligerowi. Polega on na tym, że jeśli przyjąć równomierny (średnio) rozkład gwiazd w nieskończonej przestrzeni, wtedy w dowolnym punkcie tej przestrzeni każda masa ma nieskończoną energię potencjalną. I chociaż mamy zupełną swobodę w wyborze zerowego poziomu energii, to w opisanej sytuacji napotkalibyśmy na fundamentalne trudności przy próbach uznania jakiegokolwiek układu odniesienia za układ inercjalny. A przecież istnienie choć jednego układu inercjalnego jest podstawą całej mechaniki Newtona.

Aby wytłumaczyć paradoksy, uciekano się do takich hipotez, jak np. przyjęcie, że siła ciężenia maleje nie z kwadratem odległości, a nieco szybciej. Paradoksów można by też uniknąć, gdyby przyjąć, że obserwator w punkcie P — to obserwator w miejscu wyróżnionym, w którego okolicy najwięcej jest gwiazd w jednostce objętości. W takim razie byłby to punkt wyróżniony, który można by nazwać środkiem Wszechświata. A przecież już od decydującego kroku Kopernika, który położył kres systemowi geocentrycznemu, kosmologowie



Hugo von Seeliger (1849–1924), dyrektor obserwatorium monachijskiego. Opracował statystycznie kwestię rozkładu przestrzennego gwiazd w otoczeniu Słońca. Prace jego nad paradoksem grawitacyjnym ukazały się w latach 1895–96.

dochodzili do uznania, że nasze położenie (tj. położenie Ziemi, Słońca, Galaktyki, gromady galaktyk, w której się znajdujemy) jest typowe, niczym nie wyróżnione. Aby uniknąć powrotu do koncepcji wyjątkowości położenia sformułowali oni nawet specjalną zasadę, w myśl której obraz Wszechświata i zjawisk w nim nie zależy od położenia obserwatora. Zasada ta pozwoliła na dokonanie postępu przez rozszerzenie ziemskich praw fizyki, przez łatwe ekstrapolowanie obserwacji astronomicznych. Czy warto z tej zasady rezygnować? (W jednym z dalszych artykułów powiemy coś więcej o tej tzw. zasadzie kosmologicznej).

Choć przy formułowaniu paradoksu Olbersa mówiliśmy o gwiazdach, równie dobrze można na ich miejsce postawić galaktyki. Istota paradoksu nie ulegnie zmianie.

Nie chciałbym, aby w Czytelnikach tego artykułu wyrobić się miało przekonanie, iż paradoksu Olbersa nie udało się rozwiązać na gruncie newtonowskiego statycznego modelu nieskończonego Wszechświata z geometrią euklidesową. Rozwiązanie takie udało się szwedzkiemu astronomowi Charlierowi na początku XX wieku. Stworzył on model hierarchicznego Wszechświata. Był to twór statyczny, nieskończony, złożony z gromad kolejnych rzędów. Z gromad rzędu pierwszego (np. gwiazd) tworzyły się gromady rzędu drugiego (galaktyki), z tych gromady rzędu trzeciego, i tak dalej w nieskończoność. Średnia gęstość materii w gromadach kolejnych rzędów maleje przy tym w określony sposób ($\rho_i =$

$$= \frac{3M_i}{4R_i^3}), \text{ gdzie } M_i, R_i \text{ i } \rho_i \text{ oznaczają odpowiednio całkowitą masę, promień}$$

i gęstość gromady i -tego rzędu. Pozwala to na usunięcie i paradoksu grawitacyjnego, i fotometrycznego. Brakuje dziś przekonujących danych obserwacyjnych na rzecz modelu hierarchicznego Charliera, ponadto oba wspomniane paradoksy znacznie prościej tłumaczy się w ramach kosmologii einsteinowskiej rozszerzającego się Wszechświata. Dane wskazujące na rozszerzanie się Wszechświata, a więc jego niestatyczność, omówione będą w następnym numerze «Deltę».

A teraz, Czytelniku, przyznaj się przed sobą samym: Czy zdziwiło Cię kiedykolwiek, że niebo jest czarne? Pamiętaj: Zdziwienie to droga do paradoksów... i odkryć. Dziwił się dzieci (zanim je życie tego oduczycy)... i geniusze.



Zadania

Redaguje mgr Andrzej MAKOWSKI

M 91. Udowodnić, że jeżeli jedna ze współrzędnych środka okręgu na płaszczyźnie jest niewymierna, to na okręgu tym leżą najwyżej dwa punkty wymierne (tzn. mające obydwie współrzędne wymierne).
Rozwiązanie na str. 3.

M 92. Na płaszczyźnie danych jest n punktów ($n \geq 4$) o tej własności, że wśród każdych czterech z nich istnieją trzy leżące na jednej prostej. Scharakteryzować wszystkie możliwe wzajemne położenia tych punktów.
Rozwiązanie na str. 16.

M 93. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n , dla których liczba $n^{(n+1)} + (n+1)^n$ jest podzielna przez 3.
Rozwiązanie na str. 3.

Redaguje dr Andrzej ZIEMIŃSKI

F 31. Mamy do dyspozycji 1 litr gorącej wody o temperaturze t_1 i 1 litr wody chłodnej o temperaturze t_2 . Ogrzewamy następnie wodę chłodną wykorzystując w tym celu wodę gorącą. Czy można to zrobić w ten sposób, aby końcowa temperatura litra wody początkowo chłodnej była wyższa od końcowej temperatury litra wody początkowo gorącej?
Rozwiązanie na str. 2. (G. Wilk).

Dziś konkurs i to konkurs dla majsterkowiczów. Proponujemy Wam zbudowanie statku napędzanego siłą wiatru, który mógłby płynąć pod wiatr. Dosłownie pod wiatr i to tym szybciej im silniejszy wiatr wieje. Nie ma mowy o płynięciu zakosami, pod pewnym kątem do wiatru. Znane metody żeglarskie na nic się nie zdadzą. Należy zbudować coś nowego. Eric Lindahl i Peter Kauffman w Seattle (USA) zbudowali taki okręcik. Donosi o tym grudniowy numer Scientific American z ubiegłego roku. Zasada wydaje się być bardzo prosta. Spójrzcie na rysunek. Na dwóch drewnianych pływakach umieszczona jest cała konstrukcja napędowa. Śmigło znajduje się w powietrzu i połączone jest sztywną osią ze śrubą umieszczoną pod wodą. Konstrukcja podtrzymująca powinna stawiać minimalny opór wiejącemuwiatrowi. Wiatr wieje, śmigło się obraca i napędza śrubę. Śruba napędza statek. Jeżeli skrzydełka śruby są odpowiednio ustawione, to statek płynie pod wiatr. Tylko czy płynie i czy teoretycznie powinien płynąć. Otóż teoretycznie powinien płynąć, a czy popłynie, to tylko od Was zależy. Dlaczego powinien popłynąć? Dokładnych obliczeń nie możemy przytoczyć, ale przeprowadzimy proste rozważanie dotyczące pędu i energii. Siła, z jaką wiatr pcha śmigło, jest proporcjonalna do różnicy prędkości: $F_1 = k_2(v_1 - v_2)$. (Pamiętajmy, że pęd równa się popędowi: $F \cdot t = m \cdot v$). Załóżmy dalej, że nie ma żadnych strat energii przy obrocie osi napędzającej śrubę pod wodą. Cała energia jest przekazywana wodzie. (Łódka jest nieruchoma) $E_3 = k_3 v_3 = E_1$ a ciąg (siła z jaką łódka jest ciągnięta) $F_2 = k_4 v_3$. Nie znamy oczywiście współczynników k_2, k_3, k_4 . Przyjmując najbardziej uproszczoną wersję $k_2 = k_3 = k_4$ (co nie odpowiada rzeczywistości) mamy

$$F_2 = v_3 = \sqrt{v_1^2 - v_2^2}, \quad F_1 = v_1 - v_2,$$

$$\frac{F_2}{F_1} = \sqrt{\frac{(v_1 - v_2)(v_1 + v_2)}{(v_1 - v_2)(v_1 - v_2)}} = \sqrt{\frac{v_1 + v_2}{v_1 - v_2}} > 1.$$

Te bardzo uproszczone rozważania pokazują, na jakiej zasadzie możliwy jest większy ciąg śruby pod wiatr niż siła, z jaką wiatr pcha na śmigło. Łódź powinna więc po odkotwiczeniu (puszczeniu z rąk) raźnie ruszyć pod wiatr. Efekt będzie tym silniejszy im większa prędkość wiatru. Czy to się uda, zależy od konstrukcji łodzi, oporów przy kręceniu się osi i konstrukcji śmigła. Warto jednak spróbować.

Założmy, że nasz stateczek już gotowy stoi zakotwiczony nieruchomo na spokojnej wodzie. Wieje silny wiatr, który napędza śmigło. Nie znamy ani kształtu śmigła, ani jego wymiarów, nasza niewiedza dotyczy w równej mierze śruby. Wiemy jednak, że istnieją zasady zachowania pędu i energii. Śmigło zyskuje energię na koszt wiatru, którego prędkość przed śmigłem wynosi v_1 , a tuż za śmigłem v_2 ($v_1 > v_2$). Energia przekazana śmigłu jest proporcjonalna do różnicy kwadratów prędkości $v_1^2 - v_2^2$ oraz do gęstości powietrza ρ_1 : $E = \alpha_1 \rho_1 (v_1^2 - v_2^2)$. Siła parcia, z jaką wiatr działa na śmigło, jest proporcjonalna do różnicy prędkości $v_1 - v_2$ oraz do gęstości: $F_1 = \alpha_2 \rho_2 (v_1 - v_2)$ (Przypominamy, że popęd równa się zmianie pędu $F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v$). Jeżeli cała energia uzyskana przez śmigło jest przekazana do śruby, a ta kręcąc się wprawia wodę w ruch z prędkością v_3 , to energia przekazana wodzie równa się $E = \alpha_3 \rho_2 v_3^2$, gdzie ρ_2 jest gęstością wody. Siła ciągu śruby będzie proporcjonalna do v_3 : $F_2 = \alpha_4 \rho_2 v_3$. Obliczmy stosunek F_2/F_1 :

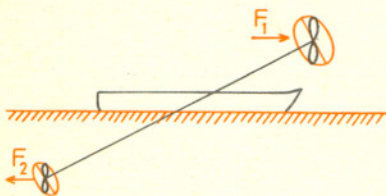
$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{\alpha_4 \rho_2 v_3}{\alpha_2 \rho_1 (v_1 - v_2)} = \frac{\alpha_4}{\alpha_2} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_3}} \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{v_1 + v_2}{v_1 - v_2}}$$

Współczynników $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ nie znamy, ale możemy tak dobrać kształt śmigła i śruby, aby $\frac{\alpha_4}{\alpha_2} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_3}} \geq \frac{1}{30}$. Ponieważ

$$\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \approx 30, \text{ więc nawet w tym skrajnym przypadku}$$

$$\frac{F_2}{F_1} \approx \sqrt{\frac{v_1 + v_2}{v_1 - v_2}} > 1.$$

Oczywiście uprościliśmy zagadnienie zaniedbując parcie wiatru na stateczek jako całość, straty energii przy obrocie osi itd. Dzisiejsze zadanie polega nie na obliczeniach teoretycznych, ale na skonstruowaniu takiego stateczku, który popłynie pod wiatr.



Rozwiązanie zadania M 92.

Spośród danych punktów wybierzmy dowolne cztery. Wśród nich są trzy, A, B, C , leżące na jednej prostej k . Niech wśród danych n punktów istnieją dwa, M i N , nie leżące na k . Jeżeli prosta MN jest równoległa do k , to wśród czterech punktów A, B, M, N nie ma trzech leżących na jednej prostej, co przeczy warunkom zadania. Prosta MN przecina więc prostą k . Dwa spośród punktów A, B, C na pewno są różne od punktu przecięcia tych prostych. Niech będą to punkty B i C . Wówczas wśród czterech punktów B, C, M, N nie ma trzech leżących na jednej prostej, co znowu przeczy warunkom zadania. Nasze założenie jest więc fałszywe, czyli poza prostą k leży najwyżej jeden punkt.

A oto warunki konkursu:

- 1) Zbudowanie stateczku,
- 2) Nadesłanie go w paczce przesyłką pocztową na adres redakcji wraz z podaniem informacji, w jakich warunkach był sprawdzony.
- 3) Termin nadsyłania: 1 października 1976.
- 4) Jury konkursu: doc. dr hab. Tomasz Hofmokl, doc. dr hab. Michał Świącki.
- 5) Wygrywa stateczek o największej sile ciągu w ustalonych warunkach (pomiar siły dynamometrem).
- 6) Nagrody książkowe.

Uwaga praktyczna. Strumień powietrza powinien być dostatecznie silny. Stateczek redakcyjny pokazany na ostatniej stronie okładki płynie pod wiatr wywołany odkurzaczem nastawionym na dmuchanie. Ciąg powietrza z suszarki do włosów okazał się niewystarczający.



D.c. rozwiązania zadania F 31.

Przyjmijmy, że w naczyniach A i B mamy po M gramów wody o temperaturach jak poprzednio, t_1 i t_2 ($t_1 > t_2$). Postępujemy jak poprzednio, z tym, że za każdym razem nalewamy do naczynia C m gramów wody chłodnej. Po pierwszej operacji, mamy w naczyniu D m gramów wody ogrzanej od t_2 do x_1 , a w naczyniu A M gramów wody oziębionej od t_1 do x_1 , przy czym

$$m(x_1 - t_2) = M(t_1 - x_1),$$

skąd

$$x_1 = \frac{M}{m+M} t_1 + \frac{m}{m+M} t_2 = (1-\alpha)t_1 + \alpha t_2, \text{ gdzie przez } \alpha \text{ oznaczyliśmy: } \alpha = \frac{m}{m+M} < 1.$$

Po drugiej operacji dolewamy do naczynia D nowych m gramów wody o temperaturze x_2 , zostawiając w naczyniu A wodę o tej samej temperaturze, przy czym teraz znowu

$$m(x_2 - t_2) = M(x_1 - x_2),$$

co daje nam

$$x_2 = \frac{M}{m+M} x_1 + \frac{m}{m+M} t_2 = (1-\alpha)x_1 + \alpha t_2.$$

Dla k -tej operacji mamy

$$x_k = (1-\alpha)x_{k-1} + \alpha t_2 = (1-\alpha)^k t_1 + \alpha \sum_{j=0}^{k-1} (1-\alpha)^j \cdot t_2.$$

Taka też jest po k operacjach temperatura końcowa wody początkowo gorącej w naczyniu A. Natomiast w naczyniu D mamy teraz $k \cdot m$ gramów wody o temperaturze:

$$\begin{aligned} T_k &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k x_j = \left[\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (1-\alpha)^j \right] t_1 + \left[\alpha \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \sum_{l=0}^{j-1} (1-\alpha)^l \right] t_2 = \left[\frac{1}{k} \frac{(1-\alpha)[1-(1-\alpha)^k]}{1-(1-\alpha)} \right] t_1 + \left[\alpha \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \frac{1-(1-\alpha)^j}{1-(1-\alpha)} \right] t_2 = \\ &= \frac{(1-\alpha)}{k\alpha} [1-(1-\alpha)^k] t_1 + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [1-(1-\alpha)^j] t_2 = \frac{(1-\alpha)}{k\alpha} [1-(1-\alpha)^k] t_1 + \left\{ 1 - \frac{(1-\alpha)}{k\alpha} [1-(1-\alpha)^k] \right\} t_2, \end{aligned}$$

gdzie kilka razy skorzystaliśmy z własności szeregu geometrycznego. Jeśli teraz zakończyliśmy już nasz proces, tzn.

$$k = \frac{M}{m}, \text{ czyli } \alpha = \frac{1}{1+k}, \text{ co daje } \frac{1-\alpha}{k\alpha} = 1,$$

dostaniemy dla końcowej temperatury wody, początkowo chłodnej, wyrażenie:

$$z = t_1 - (t_1 - t_2) (1-\alpha)^k = t_1 - \Delta t \left[1 - \frac{1}{1+k} \right]^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} t_1 - \Delta t \cdot \frac{1}{e}.$$

Po zupełnie analogicznych obliczeniach, końcowa temperatura wody początkowo gorącej dana jest przez

$$y = x_k = t_2 + \Delta t (1-\alpha)^k = t_2 + \Delta t \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{k}} \right)^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} t_2 + \Delta t \cdot \frac{1}{e}.$$

Zauważmy, że ponieważ ($e = 2,718...$)

$$z - y = \Delta t - \frac{2\Delta t}{e} = \Delta t \left(\frac{e-2}{e} \right) > 0$$

więc rzeczywiście $z > y$ jak pokazano już poprzednio.

Wygodniej może będzie zapisać powyższe końcowe wzory w nieco innej postaci:

$$z = t_2 + \Delta t \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k} \right] \xrightarrow{k \rightarrow \infty} t_2 + \Delta t \left(1 - \frac{1}{e} \right), \quad y = t_1 - \Delta t \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k} \right] \xrightarrow{k \rightarrow \infty} t_1 - \Delta t \left(1 - \frac{1}{e} \right)$$

gdzie widać od razu, że woda początkowo chłodna (o temperaturze t_2) rzeczywiście ogrzewa się do $z > t_2$, a woda początkowo gorąca oziębia się od t_1 do y .

Ponieważ nie występuje tutaj zupełne odwrócenie temperatur (bo $z < t_1$, a $y > t_2$), więc opisany powyżej proces jest procesem nieodwracalnym.

Weźmy dla przykładu: $t_1 = 100^\circ$, $t_2 = 0^\circ$; wtedy zależność z i y od k ilustruje tabela

k	z_k	y_k
1	50°	50°
2	$55,6^\circ$	$44,4^\circ$
3	$57,8^\circ$	$42,2^\circ$
∞	$63,2^\circ$	$36,8^\circ$

więc $z = 63,2^\circ$ jest maksymalną temperaturą, do której w danym przypadku można ogrzać wodę chłodną przy pomocy opisanego w zadaniu postępowania.