

SPIS TREŚCI

Uniwersalny domowy integrator bez tranzystorowy <i>Doc. dr Piotr Mankiewicz</i>	str. 1
Gwiazdy nowe <i>Prof. dr Józef Smak</i>	str. 4
Zadania	str. 6
To samo na wiele sposobów	str. 7
Czarna magia? <i>Tomasz Natkaniec</i>	str. 8
«Mała Delta»	str. 10
Laboratorium w domu <i>Dr Jan A. Gaj</i>	str. 14
O paradoksie przyspieszeń <i>Dr Marek Artur Abramowicz</i>	str. 15

W następnym numerze rozpoczynamy druk cyklu artykułów poświęconych kosmologii.

„Delta”
matematyczno-fizyczny miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa Matematycznego i Polskiego Towarzystwa Fizycznego
wydawany przy poparciu Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny
doc. dr J. Bartke
prof. dr Grzegorz Białkowski — przewodniczący
doc. dr A. Bączyński
doc. dr B. Gleichgewicht
doc. dr K. Goebel
doc. dr B. Iwazskiewicz
doc. dr T. Iwiński
doc. dr A. Januszajtis
prof. dr L. Jeśmanowicz — wiceprzewodniczący
mgr H. Kaczorek
prof. dr B. Karczewski
prof. dr M. Kuczma
mgr A. Mąkowski
prof. dr Z. Pawlak
prof. dr A. Piekara

prof. dr Z. Semadeni
prof. dr J. Stankowski
prof. dr M. Subotowicz
doc. dr S. Turnau
doc. dr J. Wdowczyk

Redaguje Kolegium w składzie:
doc. dr T. Hofmokl — z-ca red. nac.
dr T. B. Iwiński
dr M. Kordos — red. nac.
mgr K. Prażmowski — red. techn. graf.
doc. dr M. Świącki
D. Tys — sekr. red.

Adres Redakcji
ul. Hoża 69 pok. 151,
00-681 Warszawa.

Zakład Narodowy im. Ossolińskich — Wydawnictwo.
Wrocław, Oddział w Warszawie
Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.
wyd.: 2,50 ark. druk.;
papier offsetowy III kl., 80 g, 61 × 86
Wydrukowano w Drukarni im. Rewolucji Październikowej,
Warszawa, ul. Mińska 65.
Nr zam. 198/76 J-101

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60,— cena prenumeraty półrocznej zł 30,—

Prenumeratę na kraj przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch” oraz urzędy pocztowe i doręczyciele — w terminach:
— do 25 listopada na styczeń, I kwartał, I półrocze roku następnego i na cały rok następnny
— do dnia 10 miesiąca, poprzedzającego okres prenumeraty na pozostałe okresy roku bieżącego.
Jednostki gospodarki społecznej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne składają zamówienie w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch”.
Zakłady pracy i instytucje w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW oraz prenumeratorki indywidualni, zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.
Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa—Książka—Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej.

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.
Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.

Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, konto PKO nr 1531-912. Oddział w Warszawie.

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław
w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa
w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Orders for this periodical from abroad can be placed with „Ars Polona” Krakowskie Przedmieście 7 00-068 Warszawa, Poland or with

— Kubon & Sagner, Inhaber Otto Sagner, D8 München 34, Postfach 68, Bundesrepublik Deutschland.
— Earls Court Publications Ltd., 130 Shepherd Bush Centre, London W 12, Great Britain,
— Licosa Commissionaria Sansoni, Via Lamarmora 45, 50 121 Firenze, Italy.

Cena 1 egzemplarza zł 5,—

nr indeksu 35723/35550



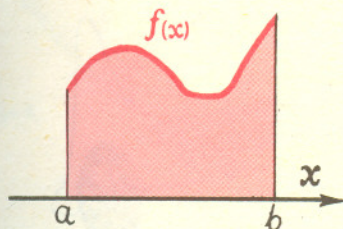
Planimetr model UDBT 1

Instrukcja obsługi

Informacje ogólne. Skonstruowany przez inżynierów ZTS Uniwersalny domowy Integrator Beztanzystorowy inaczej zwany Planimetrem UDBT 1 jest prostą w obsłudze maszyną analogową służącą do pomiaru pól figur płaskich ograniczonych krzywymi zamkniętymi. Pamiętając o tym,

że $\int_a^b f(x)dx$ jest polem figury zawartej między osią x -ów

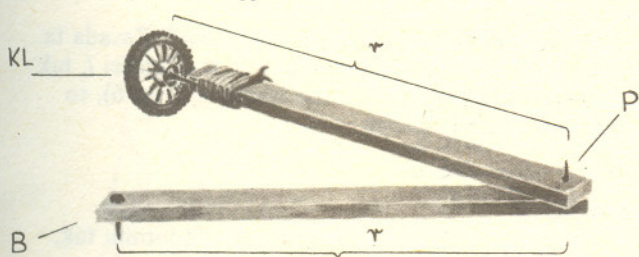
a wykresem funkcji $f(x)$ (por. rys. 1) możemy używać planimetru do numerycznego obliczania całek (tzn. do całkowania). Ze względu na swą wyjątkowo przystępną cenę Planimetr UDBT 1 jest w zasadzie dostępny dla każdego.



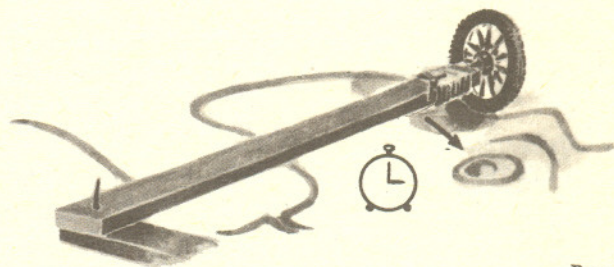
Rys 1

Budowa Planimetru UDBT1. Planimetr UDBT 1 składa się z dwóch ramion o długości r połączonych przegubem P oraz bieguna B i kółka liczącego KL umocowanego prostopadłe do ramienia (rys. 2). Kółko liczące może obracać się swobodnie dokoła swojej osi.

Posługiwanie się Planimetrem UDBT 1. Aby zmierzyć pole figury \mathcal{F} ograniczonej krzywą \mathcal{L} wbijamy biegun B w dowolnym miejscu, tak jednak, by cała figura \mathcal{F} znalazła się w zasięgu ramion planimetru, oraz umieszczamy kółko liczące w dowolnym punkcie krzywej \mathcal{L} (rys. 3). Następnie nie zmieniając położenia bieguna B , suwamy kółkiem wzdłuż krzywej \mathcal{L} w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, tak by po przejściu całej krzywej \mathcal{L} wrócić do punktu wyjścia.



Rys 2: Planimetr UDBT1; r — ramiona, P — przegub, B — biegun, KL — kółko liczące



Rys. 3

Odczytywanie wskazań kółka liczącego. W trakcie suwania kółka liczącego wzdłuż krzywej, obraca się ono raz w jedną raz w drugą stronę. Obroty kółka w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara należy liczyć ze znakiem plus, a obroty w stronę przeciwną — ze znakiem minus (rys. 4). Odczytanie wskazań kółka liczącego polega na obliczeniu wielkości

$$W = O_+ - O_-$$

gdzie O_+ jest ilością obrotów kółka w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara (tzn. dodatnim), a O_- jest ilością obrotów w kierunku przeciwnym (tzn. ujemnym). W praktyce najłatwiej jest liczyć o ile więcej było obrotów w kierunku dodatnim niż w kierunku ujemnym.

Uwaga. Wielkość W jest zawsze dodatnia!

Dokonywanie pomiarów pól. Pole figury \mathcal{F} obliczamy ze wzoru planimetru:

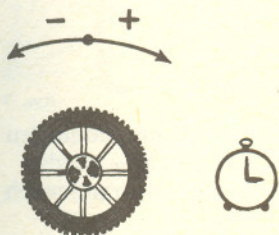
$$\text{Pole } \mathcal{F} = W \cdot r \cdot d,$$

gdzie r jest długością ramienia planimetru, a d jest obwodem kółka liczącego.

Przykład. Podczas pomiaru pola pewnej figury \mathcal{F} planimetrem o ramieniu 15 cm i obwodzie kółka liczącego 3 cm, kółko liczące obróciło się najpierw w kierunku ujemnym o $2\frac{2}{3}$ obrotu, następnie o $4\frac{1}{2}$ w kierunku dodatnim, a na końcu o $\frac{1}{4}$ w kierunku ujemnym.

Zatem $W = -2\frac{2}{3} + 4\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 1\frac{7}{12}$. Ze Wzoru Planimetru

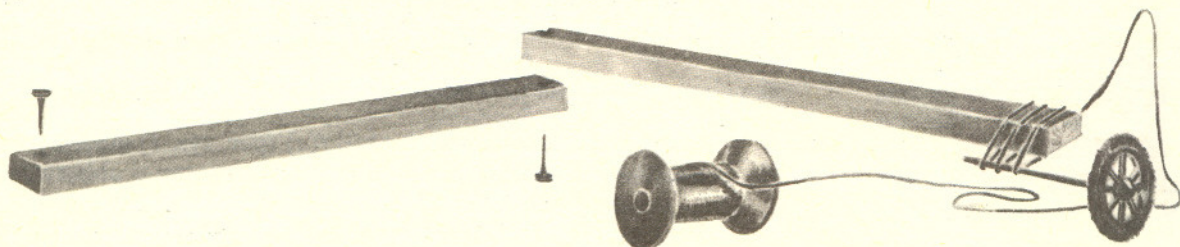
$$\text{Pole } \mathcal{F} = 1\frac{7}{12} \cdot 15 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 66\frac{1}{4} \text{ cm}^2.$$



Rys. 4

Po przeczytaniu powyższej Instrukcji Obsługi, Czytelnik może zacząć podejrzewać tu jakieś oszustwo. Od biedy można się zgodzić, że możliwy jest przyrząd mierzący pole dowolnych figur płaskich. Stanisław Lem nazwałby taki przyrząd Uniwersalnym Integratorem. Ale żeby był on (przyrząd, nie Lem) tak zupełnie pozbawiony tranzystorów?

Taki Uniwersalny Integrator istnieje jednakże naprawdę i nazywa się planimetrem. Co więcej, każdy może stać się posiadaczem planimetru, znaną od wielu pokoleń metodą **Zrób To Sam**. W tym celu wystarczy zaopatrzyć się w dwie cienkie listewki równej długości, dwa małe gwoździki, kółko obracające się swobodnie na ośce, oraz kawałek nitki, a następnie złożyć to wszystko razem tak jak to pokazano na rysunku 5. Aby ułatwić sobie odczytywanie ułamków obrotów kółka liczącego można podzielić obwód kółka kolorowymi flamastrami na kilka (np. 8) równych sektorów. Przyjemnych pomiarów.



Rys. 5

Uwaga. W handlu dostępne są planimetry typu profesjonalnego (drogie) o dużym stopniu precyzji pomiaru i nieco innej konstrukcji. Zdjęcie takiego profesjonalnego planimetru można obejrzeć na okładce.

Dla tych wszystkich, którym nie wystarcza świadomość istnienia planimetru i chcieliby jeszcze zrozumieć jak on działa, zamieszczamy

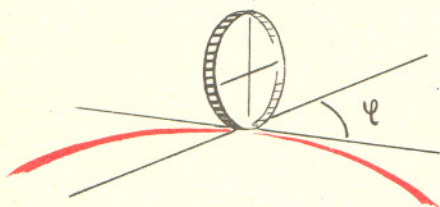
TEORIĘ PLANIMETRU

Działanie planimetru oparte jest na zasadzie „ślizgającego się kółka”. Zasada ta stwierdza, że jeżeli kółko będziemy posuwać wzdłuż krzywej \mathcal{L} o długości l , tak by kąt pomiędzy płaszczyzną kółka a krzywą \mathcal{L} był stale równy φ (rys. 6), to kółko obróci się tak jak by było toczone po drodze

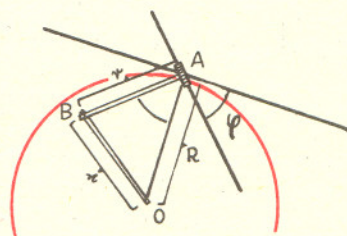
$$D = l \cos \varphi.$$

W dalszym ciągu będziemy mówili, że:

- kółko obróciło się o a ($a > 0$), jeżeli obróciło się w kierunku dodatnim tak, jakby było toczone po drodze długości a ,
- kółko obróciło się o $-a$, jeżeli obróciło się w kierunku ujemnym tak, jakby było toczone po drodze o długości a .



Rys. 6



Rys. 7

Jeżeli teraz \mathcal{F} jest kołem o promieniu R i środku O i jeżeli biegun planimetru umieścimy w punkcie O (rys. 7), to łatwo można zauważyć, że kąt φ między płaszczyzną kółka a okręgiem będzie równy $\sphericalangle OAB$ (twierdzenie o ramionach kąta przeciętych prostymi), a zatem

$$\cos \varphi = \frac{R}{2r} = \frac{R}{2r}.$$

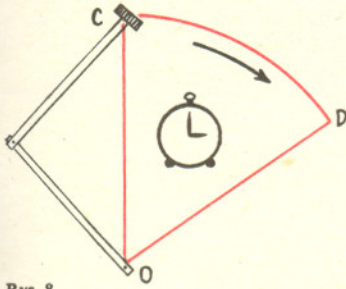
W związku z tym, zgodnie z zasadą „ślizgającego się kółka”, jeżeli będziemy suwać kółkiem liczącym planimetru wzdłuż okręgu tak, by wrócić do punktu wyjścia, to kółko obróci się o

$$W = 2\pi R \cdot \cos \varphi = 2\pi R \cdot \frac{R}{2r} = \frac{\pi R^2}{r},$$

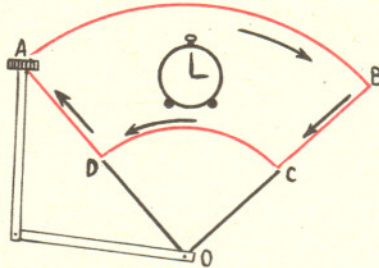
czyli o pole koła podzielone przez długość ramienia planimetru.

Wniosek. Jeżeli w takiej sytuacji będziemy suwać kółkiem liczącym wzdłuż pewnego łuku CD tego okręgu (rys. 8), to kółko obróci się o pole wycinka kołowego COD podzielone przez r .

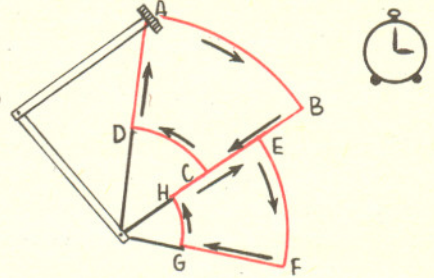
Jeżeli mamy do czynienia z wycinkiem pierścienia kołowego $ABCD$ (rys. 9), to z Wniosku wynika, że kółko suwając się od A do B obróci się o S_1/r , gdzie S_1



Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10

jest polem wycinka kołowego AOB . Następnie kółko suwając się od B do C obróci się o pewną wielkość x , a dalej, na drodze od C do D , o $-S_2/r$ (będzie się ono obracało w stronę ujemną), gdzie S_2 jest polem wycinka COD . W końcu na drodze od D do A kółko obróci się dokładnie o tyle samo, co na drodze od B do C , tyle, że w przeciwną stronę, tzn. obróci się o $-x$. W sumie kółko obróci się o

$$W = \frac{S_1}{r} + x - \frac{S_2}{r} - x = \frac{S_1 - S_2}{r},$$

czyli obróci się o pole wycinka $ABCD$ podzielone przez r . Rozważmy teraz figurę \mathcal{F} będącą sumą dwu wycinków pierścieni kołowych o wspólnym środku O (rys. 10). Jeżeli będziemy suwać kółko planimetru kolejno wzdłuż brzegu jednego wycinka pierścienia, a następnie wzdłuż brzegu drugiego wycinka, to na mocy poprzedniego wzoru obróci się ono o

$$W = \frac{\text{pole pierwszego wycinka}}{r} + \frac{\text{pole drugiego wycinka}}{r} = \frac{\text{pole } \mathcal{F}}{r}.$$

Z drugiej strony, łatwo można zauważyć, że w tym wypadku kółko obróci się dokładnie o tyle samo, co w przypadku, gdyby było suwane po drodze $ABEFGHCDA$ (czyli po obwodzie figury \mathcal{F}), oraz dodatkowo od C do E i od E do C . Ponieważ od E do C kółko obróci się dokładnie o tyle samo, co od C do E , tyle, że w przeciwną stronę, otrzymujemy, że kółko suwane po obwodzie figury \mathcal{F} obróci się o W . Na mocy poprzedniego wzoru

$$W = \frac{\text{pole } \mathcal{F}}{r}.$$

Rozumowanie to można uogólnić na figury będące sumą dowolnej skończonej ilości takich wycinków pierścieni kołowych o wspólnym środku. Otrzymamy wtedy **Twierdzenie.** Jeżeli \mathcal{F} jest sumą skończonej ilości wycinków pierścieni kołowych o środku O i jeżeli biegun planimetru jest umieszczony w punkcie O , to kółko liczące planimetru suwane wzdłuż obwodu figury \mathcal{F} obróci się o

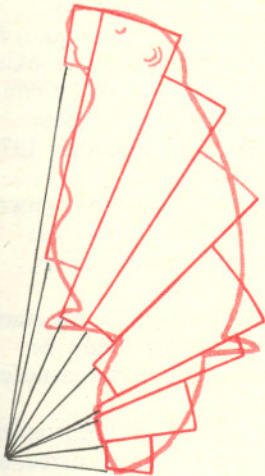
$$W = \frac{\text{pole } \mathcal{F}}{\text{długość ramienia planimetru}}.$$

Ponieważ każdą figurę ograniczoną krzywą zamkniętą można „przybliżyć” sumą takich koncentrycznych wycinków pierścieni kołowych (rys. 11), więc, dokonując tzw. przejścia granicznego, możemy wywnioskować następującą zasadę pozwalającą mierzyć planimetrem pola dowolnych figur płaskich:

Zasada planimetru. Jeżeli \mathcal{F} jest figurą płaską ograniczoną krzywą zamkniętą \mathcal{L} i jeżeli biegun planimetru umieścimy w dowolnym punkcie płaszczyzny, to kółko liczące planimetru suwane wzdłuż krzywej \mathcal{L} tak, jak to opisano w instrukcji „Posługiwanie się planimetrem” obróci się tak (por. „Odczytywanie wskazań kółka liczącego”), jakby było toczone po drodze równej polu figury \mathcal{F} podzielonemu przez długość ramienia planimetru.

Z Zasady Planimetru, przyjmując, że obwód kółka liczącego wynosi d , a długość ramienia r , otrzymujemy Wzór Planimetru, o którym była mowa w Instrukcji Obsługi:

$$\text{Pole } \mathcal{F} = \text{liczba obrotów kółka liczącego} \cdot r \cdot d.$$



Rys. 11



Rozwiązanie zadania M 87

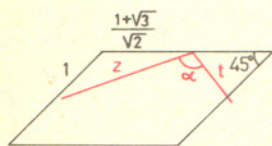
Ponieważ $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2 + \sqrt{3}$, więc z twierdzenia cosinusów mamy

$$\begin{aligned} z^2 &= 1+2+\sqrt{3}+1+\sqrt{3} = 4+2\sqrt{3}, \\ t^2 &= 1+2+\sqrt{3}-1-\sqrt{3} = 2, \\ \text{skąd } \frac{z^2}{t^2} &= 2+\sqrt{3}, \quad \frac{z}{t} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Dalej

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{z^2+t^2-(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2}{2zt} = \\ &= \frac{4+2\sqrt{3}+2-8-4\sqrt{3}}{2\sqrt{4+2\sqrt{3}}\sqrt{2}} = \frac{-2-2\sqrt{3}}{4\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \\ &= \frac{-2-2\sqrt{3}}{4 \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}, \end{aligned}$$

skąd $\alpha = 135^\circ$.



Wynika stąd, że równoległoki \mathcal{R} i \mathcal{S} są podobne. Można skonstruować wiele równoległoków o własności wymienionej w zadaniu, przysługującej równoległokowi \mathcal{R} . Ogłaszamy więc minikonkurs (nagrody!) na wykrycie błędu w rozwiązaniu zadania

M 67 opublikowanym w „Dziele” 11/1975. Rozwiązania prosimy nadsyłać do dnia 1 lipca br.

Jeszcze w średniowieczu niebo gwiazdziste uchodziło powszechnie za coś trwałego i niezmiennego. Dziś wiemy, że procesy rozwojowe, którym podlegają gwiazdy, przebiegają niesłychanie powoli — w skali milionów, albo nawet miliardów lat. Nic więc dziwnego, że w skali życia ludzkiego, czy całej naszej cywilizacji, procesy takie są praktycznie niedostrzegalne. Ale już w średniowieczu zdawano sobie sprawę z istnienia pewnych zjawisk, które najwyraźniej wyłamywały się z owego schematu stałości i niezmienności. Do zjawisk takich należały między innymi gwiazdy zmienne oraz gwiazdy nowe. Oto od czasu do czasu w jakimś miejscu nieba, gdzie atlasy i katalogi astronomiczne nie rejestrowały dotąd żadnego obiektu, pojawiała się niespodziewanie jakaś gwiazda; nic dziwnego, że w takiej sytuacji otrzymywała nazwę „nowej”. Z biegiem czasu jednak gwiazda taka słabła, by po kilku lub kilkunastu tygodniach zniknąć równie tajemniczo jak się pojawiła.

W czasach bardziej nam współczesnych obserwacje teleskopowe pozwoliły stwierdzić, że zjawiska pojawień się gwiazd nowych są dość częste, tyle tylko, że najczęściej gwiazda nowa jest zbyt słaba, by mogła być dostrzeżona gołym okiem. Obecnie gwiazdy nowe odkrywane są masowo — po kilka w ciągu roku, z tym, że raz na kilka lat trafia się obiekt wyjątkowo jasny, widoczny bez pomocy teleskopu. Tak było w sierpniu 1975 roku, kiedy rozblęsta Nowa Łabędzia 1975, której współodkrywcami stali się m.in. dwaj licealiści z Grudziądza. Czy gwiazda nowa znika bezpowrotnie, tak jak to zdawały się sugerować dawne obserwacje? Okazuje się, że nie. Gwiazda słabnie wprawdzie tak bardzo, że przestaje być dostrzegalna gołym okiem, czy nawet przez niewielki teleskop, ale wreszcie jasność jej ustala się mniej więcej na stałym poziomie.

W niektórych wypadkach można też dokonać identyfikacji obiektu na zdjęciach wykonanych przed „pojawieniem” się gwiazdy nowej. Okazuje się wtedy, że gwiazda nowa była wtedy słabiutkim obiektem, o takiej w przybliżeniu jasności jak jej jasność końcowa.

Podsumujemy teraz krótko te informacje, jakich o gwiazdach nowych dostarczają nam obserwacje. Za stan normalny możemy przyjąć umownie sytuację przed, albo tuż po wybuchu. W tym stanie gwiazda nowa jest obiektem o bardzo wysokiej temperaturze. Typowe wartości, to kilkanaście lub kilkadziesiąt tysięcy stopni. Przypomnijmy, że temperatura powierzchni Słońca wynosi tylko niecałe sześć tysięcy stopni. Ale mimo tak wysokich temperatur gwiazdy nowe świecą znacznie słabiej niż Słońce. Wnioskujemy stąd, że rozmiary gwiazd nowych muszą być dużo mniejsze od rozmiarów Słońca.

Podczas wybuchu jasność gwiazdy nowej rośnie kilkadziesiąt tysięcy razy. Równocześnie ulegają wyrzuceniu w przestrzeń zewnętrzne warstwy gwiazdy. Typowa gwiazda nowa traci w wyniku wybuchu ilość materii równą w przybliżeniu jednej tysięcznej masy Słońca. Typowe prędkości wyrzutu — to tysiąc do kilku tysięcy kilometrów na sekundę. Terminu „wybuch” nie musimy już chyba szerzej uzasadniać. Czasem ilość wyrzucanej materii jest tak znaczna, że w kilka lub kilkanaście lat po wybuchu można ją dostrzec w formie otaczającej gwiazdę nową mgławicy, której rozmiary wzrastają z roku na rok. Niektóre spośród gwiazd nowych powtarzają swoje wybuchy. Charakterystyczne odstępy czasu między kolejnymi wybuchami wynoszą przy tym po kilkadziesiąt lat. Te obiekty nazywamy gwiazdami nowymi powrotnymi.



Rozwiązanie zadania M 85

Mamy tożsamości

$$(1) \quad (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca),$$

$$(2) \quad (a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 +$$

$$+ 3(a+b+c)(ab+bc+ca) - 3abc.$$

Z (1) na podstawie danych wynika, że

$$ab+bc+ca = 0.$$

Z tożsamości (2) otrzymujemy

$$1 = 1 + 3 \cdot 1 \cdot 0 - 3abc,$$

$$\text{skąd } abc = 0.$$



Rozwiązanie zadania F 29

Przykład A:

Ruch spadochroniarza od momentu otwarcia

spadochronu opisuje równanie:

$$M \cdot a = M \frac{dv}{dt} = M \cdot g - k \cdot v.$$

Stąd otrzymujemy związek:

$$\int_{v_0}^v \frac{M dv}{Mg - kv} = \int_{t_0}^t dt,$$

gdzie v_0 jest prędkością spadochroniarza

w chwili t_0 , w której otworzył spadochron.

Oczywiście, jeżeli pominiemy opór powietrza

działający na swobodnie spadającego

spadochroniarza w pierwszej fazie skoku, to

$$v_0 = \sqrt{2gh} \approx 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 10 \text{ s}.$$

Po obliczeniu całek występujących w równaniu

(2) otrzymujemy

$$v = \frac{Mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{M}(t-t_0)} \right) + v_0 e^{-\frac{k}{M}(t-t_0)}$$

Łatwo zauważyć, że dla $t \gg t_0$ jest $v =$

$$= \frac{Mg}{k} \approx 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Oznacza to, że od pewnego momentu

spadochroniarz będzie opadał ze stałą

prędkością, czyli ruchem jednostajnym.

Wykres zależności v od t został

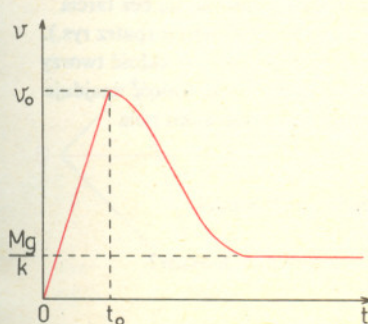
naszkicowany na rysunku. W bilansie

energetycznym należy uwzględnić obok

energii potencjalnej i kinetycznej skoczka

energię przekazaną powietrzu w procesie

hamowania.



Od wielu lat astrofizycy czynili liczne próby wyjaśnienia zagadki gwiazd nowych. Do niedawna jednak próby takie zawodziły. Głównym powodem tych niepowodzeń, był, jak się zdaje, fakt, że w łańcuchu danych obserwacyjnych i wnioskowań teoretycznych brakowało kilku zasadniczych ogniw. Dopiero odkrycia ostatnich lat kilkunastu przyniosły istotny postęp w tej dziedzinie. Pierwszym z nich było przypadkowe odkrycie, że Nowa Herkulesa z 1934 roku jest gwiazdą zaćmieniową, tj. takim układem złożonym z dwu gwiazd, w przypadku którego obserwujemy zmiany jasności wywołwane wzajemnym zakrywaniem się składników. Odkrycie to wzbudziło zrozumiałe zainteresowanie i wywołało falę pytań i spekulacji. Czy Nowa Herkulesa miałyby być obiektem wyjątkowym wśród gwiazd nowych, czy też może wszystkie one są gwiazdami podwójnymi? A jeżeli tak, to czy istnieje jakiś związek między podwójnością i wybuchami tych obiektów?

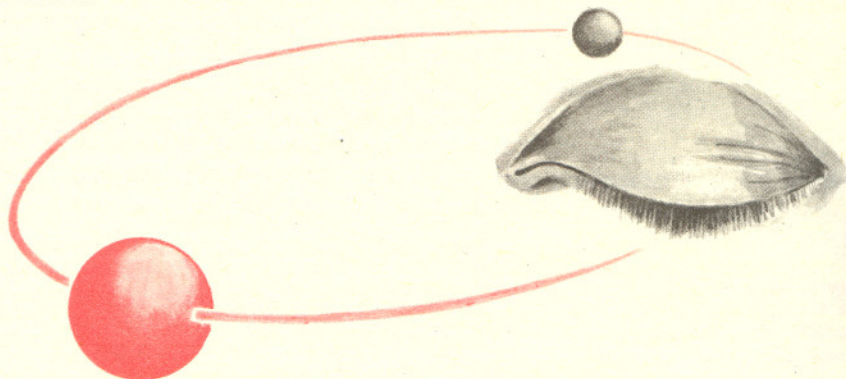
Dla stwierdzenia, czy wszystkie gwiazdy nowe są gwiazdami podwójnymi, konieczne było wykonanie obserwacji ich widm i sprawdzenie, czy linie widmowe podlegają okresowym przesunięciom (zjawisko Dopplera), świadczącym o ruchu składników wokół wspólnego środka masy.

Zebranie odpowiedniego materiału obserwacyjnego było jednak trudne; wymagało użycia największego teleskopu świata — pięciometrowego reflektora w Obserwatorium na Mount Palomar — i wielu nocy obserwacyjnych. Program taki został jednak wreszcie zrealizowany przed kilkunastu laty, przez amerykańskiego astrofizyka Roberta Krafta. Jego wyniki przyniosły pełne potwierdzenie domysłów, że wszystkie gwiazdy nowe są układami podwójnymi.

Szczególnie ważne informacje o gwiazdach tworzących układ podwójny można jednak uzyskać tylko wtedy, gdy mamy do czynienia z tzw. układami zaćmieniowymi. A więc należało także podjąć program zmierzający do odkrycia, a następnie dokładnego przebadania takich układów. To zadanie podjął współpracujący z Kraftem astrofizyk polski Wojciech Krzemieński. Dzięki dostępowi do dużych teleskopów w kilku obserwatoriach w Kalifornii i Arizonie oraz francuskim obserwatorium Haute Provence wykonał on kilkadziesiąt tysięcy pomiarów jasności wielu gwiazd nowych. Materiał ten pozwolił na odkrycie kilku układów zaćmieniowych. Należy do nich między innymi Nowa Strzały, która wybuchła dwukrotnie — w roku 1913 i 1946 — a która odznacza się rekordowo krótkim okresem obiegu składników, wynoszącym zaledwie 88 minut. Odkrycie podwójnego charakteru gwiazd nowych stanowiło tylko pierwszy krok na drodze do wyjaśnienia ich zagadki. Krok drugi, to podanie opisu własności fizycznych składników i procesów zachodzących w tych układach. Wiemy już teraz, że gorący składnik będący właściwą gwiazdą nową, to tzw. biały karzeł, zaś jego towarzysz — to słaba gwiazda o niskiej temperaturze powierzchni. Współistnienie takich dwu gwiazd nie ogranicza się jednak tylko do obiegania wspólnego środka masy układu. Gdyby tak było, procesy rozwoju takich dwu gwiazd przebiegałyby niemal zupełnie niezależnie. W wypadku gwiazd nowych, podobnie jak w wypadku wielu innych układów podwójnych, obserwujemy proces przepływu materii od jednego składnika do drugiego. Wynikiem takiego procesu jest nie tylko zwiększanie się masy jednego ze składników kosztem masy drugiego, ale także zmiany jakie muszą zajść w strukturze gwiazdy. W naszym wypadku przepływ materii następuje od gwiazdy chłodniejszej do gwiazdy gorętszej. Konsekwencje tego procesu można przewidzieć na podstawie rozważań teoretycznych.

Zastanówmy się, jak reaguje ów gorący składnik układu, do którego dopływa materia od towarzysza. Co wiemy o białych karłach? Wiemy, że są to gwiazdy znajdujące się w końcowych stadiach swego rozwoju. W stadiach wcześniejszych w ich wnętrzach zachodziły reakcje jądrowe, w wyniku których wyzwały się znaczne ilości energii, dzięki którym gwiazda mogła świecić. Wynikiem reakcji jądrowych była jednak także zmiana składu chemicznego. Biały karzeł jest gwiazdą, która nie dysponuje już żadnymi zapasami jądrowego „paliwa”, w szczególności wodoru. Jej wnętrze jest jednak nadal gorące — nawet na powierzchni temperatura wynosi kilkadziesiąt tysięcy stopni — tak, że powolne stygnięcie takiej gwiazdy trwać może miliardy lat. Jeżeli biały karzeł jest gwiazdą pojedynczą, nic już nie zmienia jego losu. Ale oto mamy do czynienia z układem podwójnym. Chłodny towarzysz przekazuje materię białemu karłowi. Obserwacje pokazują, że materia ta bogata jest w wodór; najwyraźniej dwa składniki różnią się bardzo pod względem swego składu chemicznego. Na powierzchni białego karła tworzy się więc cienka warstewka materii bogatej w wodór. Z biegiem czasu robi się coraz grubsza. Na razie nic się nie dzieje. Temperatura w obrębie tej warstewki wynosi zaledwie kilkadziesiąt lub kilkaset tysięcy stopni, a to nie wystarcza do zachodzenia reakcji jądrowych spalania wodoru. Ale wreszcie warstwa ta staje się na tyle gruba, że gdzieś głęboko pod powierzchnią gwiazdy temperatura

wynosi już kilka milionów stopni. Analiza teoretyczna pokazuje, że przebieg reakcji jądrowych, jakie muszą już zajść w tej temperaturze będzie bardzo gwałtowny. Nastąpi wybuch, w ramach którego gwiazda wyrzuci w przestrzeń swą ciekłą otoczkę. A więc wybuch gwiazdy nowej... A co dalej? Proces przepływu materii trwa nadal i cały cykl powtórzy się na nowo. Skoro znamy już teraz, przynajmniej w ogólnych zarysach, przyczyny i mechanizm wybuchów gwiazd nowych, czy można by uznać że te obiekty przestały już należeć do klasy „najciekawszych” obiektów astronomicznych? Chyba nie. Oto w ostatnich latach, gdy odkryto istnienie kosmicznych źródeł promieniowania rentgenowskiego, okazało się, że dość liczną ich klasę stanowią układy podwójne i to pod wieloma względami podobne do gwiazd nowych. Zarówno te podobieństwa, jak i oczywiste różnice, a dalej — sprawa wyjaśnienia, jakie układy podwójne i w jaki sposób stają się na pewnym etapie swego rozwoju gwiazdami nowymi lub źródłami rentgenowskimi, wszystko to są problemy oczekujące wyjaśnienia...



Zadania

Redaguje mgr Andrzej MAKOWSKI

M 85 Wiedząc, że $a + b + c = a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^3 + c^3 = 1$, obliczyć abc .

Rozwiązanie na str. 14

M 86 Rozwiązać układ nieskończenie wielu równań

$$x \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) + y \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + z \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 0, \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

Rozwiązanie na str. 14

M 87 Udowodnić, że równoległobok \mathcal{R} o kącie ostrym 45° i bokach długości 2 i $\sqrt{2} + \sqrt{6}$ jest podobny do równoległoboku \mathcal{S} o wierzchołkach będących środkami boków równoległoboku \mathcal{R} . (Por. zadanie M 67, Delta 11/1975).

Z. Piesyk

Rozwiązanie na str. 4

Redaguje dr Andrzej ZIEMIŃSKI

F 29 Oto dwie, pozornie różne, sytuacje:

A. Spadochroniarz o masie $M = 80$ kg skacze z samolotu lecącego na wysokości $H = 8$ km.

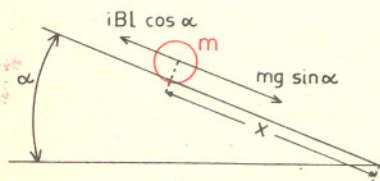
Po przeleceniu w kierunku pionowym $h = 500$ m, spadochroniarz otwiera spadochron, który doznaje siły oporu powietrza proporcjonalnej do chwilowej prędkości spadochroniarza ($F_{op} = k \cdot v$). Współczynnik proporcjonalności k wynosi 200 kgs^{-1} .

B. Pręt metalowy o długości l , masie m i oporze omowym R zaczyna ześlizgiwać się bez tarcia po równoległych szynach przewodzących nachylonych do poziomu pod kątem α (patrz rys.). Dolne końce szyn połączone są poprzeczną szyną, równoległą do pręta, tak, że całość tworzy zamknięty, prostokątny obwód przewodzący. Opory szyn są zaniedbywalne. Całość znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B , równoległym do kierunku pola grawitacyjnego.

Rozważcie następujące zagadnienia:

1. Jaką prędkość w danej chwili czasu, t , licząc od początku ruchu, będzie miał spadochroniarz (pręt)?
2. Jak należy rozumieć zasadę zachowania energii dla rozpatrywanych przypadków?
3. Czy prędkość pręta zależy od zwrotu wektora indukcji B ?

Rozwiązanie na str. 5 (przykład A) i str. 9 (przykład B).



To samo na wiele sposobów

Każdy chyba słyszał o piątym postulatcie Euklidesa. Jest to zdanie, którego umieszczenie w aksjomatyce geometrii budziło przez dwa tysiąclecia poważne wątpliwości. Rozważanie zaś tych wątpliwości dało nam odkrycie geometrii Bolyai-Łobaczewskiego, teorii, w aksjomatyce której ów piąty postulat jest poprzedzony zwrotem: „a właśnie, że nie”.

Oryginalny piąty postulat brzmi:

Jeżeli dwie proste przecięte trzecią tworzą z nią kąty jednostronne wewnętrzne o sumie mniejszej od dwóch kątów prostych to proste te przecinają się i to z tej samej strony.

Oto szereg zdań równoważnych piątemu postulatowi — każde z nich może zastąpić ów postulat w aksjomatyce geometrii euklidesowej.

Jeżeli dwie proste nie przecinają się, to tworzą z dowolną przecinającą je prostą kąty jednostronne wewnętrzne o sumie równej dwóm kątom prostym.

Jeżeli dwie proste mają punkt wspólny i obie nie przecinają trzeciej, to są równe.

Na każdym trójkącie można opisać okrąg.

Wysokości każdego trójkąta przecinają się.

Suma kątów trójkąta jest równa dwóm kątom prostym.

Istnieje prostokąt (choćby jeden).

Istnieją dwa trójkąty o odpowiednich kątach równych, ale o różnych bokach.

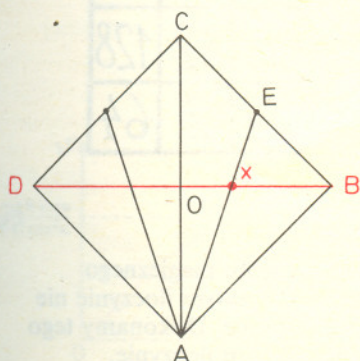
Przez dowolny punkt wewnętrzny kąta ostrego można poprowadzić prostą przecinającą oba jego ramiona.

Istnieją trzy różne punkty jednakowo odległe od pewnej prostej i współliniowe.

Jeżeli w czworokącie $ABCD$ kąty A i B są proste, a kąt C ostry, to $AD < BC$.

Jeżeli dwie proste nie przecinają się, to odległość punktów jednej z nich od drugiej jest ograniczona (wystarczy założyć tylko ograniczenie z góry lub z dołu).

Zainteresowanych tą problematyką odsyłamy do książki Stefana Kulczyckiego „Geometria nieeuklidesowa”, PWN, Warszawa 1956.



CZYTELNICY PROPONUJĄ

Jerzy Zarakowski (III kl. LO w Żyrardowie) pisze: Jestem Waszym stałym czytelnikiem. Dzięki Wam zostałem kierownikiem Wydziału Matematyki Amatorskiego Ośrodka Badań i Problemów Matematyczno-Fizycznych. W jednej z „Delt” znalazłem rubrykę „Czytelnicy proponują”. Chciałbym zaproponować podział odcinka na trzy równe części:

Red. Konstrukcję kol. Zarakowskiego podajemy obok. ($CE = EB$, $x = \frac{1}{3} DB$).

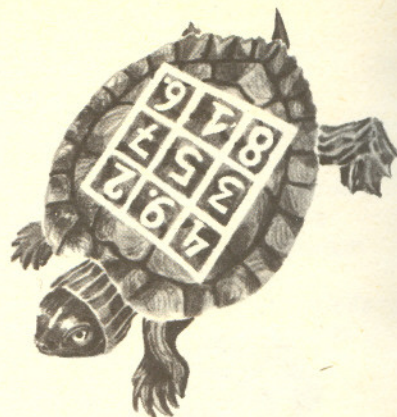
Warto zauważyć, że $ABCD$ nie musi być kwadratem, co pozwala uprościć konstrukcję. Jak?

Czarna magia?

„Co jest najmądrzejsze? — Liczba.
Co jest najpiękniejsze? — Harmonia.
Czym jest cały świat? — Liczbą i harmonią.”
(z filozofii pitagorejczyków).

Tomasz NATKANIEC

Autor w momencie nadesłania artykułu był uczniem IV kl. LO w Skarżysku Kamiennej



Stara legenda chińska, która sięga 2200 roku p.n.e. opowiada, iż na pancerzu boskiego żółwia, który wyłonił się z morza, znajdował się kwadrat magiczny. Tak miała powstać ta dziwna figura łącząca w sobie mądrość liczb i piękno harmonii.

Z pewnością każdy z Czytelników zetknął się wcześniej z pojęciem kwadratu magicznego. Zazwyczaj były to jednak kwadraty o stałej sumie tj. takie, że suma liczb w każdym wierszu, w każdej kolumnie i na obu przekątnych jest stała. Kwadratem takim jest kwadrat Dürera, umieszczony na jednym z dzieł tego malarza, zatytułowanym — „Melancholia” (dwie środkowe liczby dolnego wiersza tworzą rok powstania dzieła).

Typowe kwadraty magiczne o stałej sumie budowane są z liczb postępu arytmetycznego.

O wiele mniej rozpowszechnione są kwadraty magiczne o stałym iloczynie. Kwadratem magicznym o stałym iloczynie nazywamy kwadrat rozbity na pewną ilość mniejszych kwadratów (pól), w które tak wpisano różne liczby naturalne, że iloczyn liczb w każdym wierszu, kolumnie i przekątnej jest stały. Ten stały iloczyn nazwiemy iloczynem magicznym π , zaś liczbę pól w każdej kolumnie (wierszu) — rzędem kwadratu magicznego.

Kwadraty magiczne o stałym iloczynie mają właściwości analogiczne do właściwości kwadratów magicznych o stałej sumie. Podamy bez dowodów dwie z nich:

I Kwadrat magiczny nie straci swej magiczności, jeżeli wszystkie liczby składowe pomnożymy przez daną liczbę całkowitą.

II Iloczyn dowolnej ilości kwadratów magicznych n -tego rzędu jest również kwadratem magicznym. (Mnożenie kwadratów magicznych polega na mnożeniu liczb znajdujących się na odpowiadających sobie polach).

W teorii kwadratów magicznych o stałej sumie typowym zadaniem jest budowa kwadratów z liczb postępu arytmetycznego (o dodatniej różnicy). Analogicznie w teorii kwadratów magicznych o stałym iloczynie — budowa kwadratów z liczb postępu geometrycznego (o ilorazie większym od 1). Znając zasady układania kwadratów magicznych o stałej sumie można w prosty sposób zbudować kwadrat magiczny o stałym iloczynie. Metoda ta opiera się na znanej zasadzie mnożenia potęg o równych podstawach.

4	9	2
3	5	7
8	1	6



2^4	2^9	2^2
2^3	2^5	2^7
2^8	2^1	2^6



16	512	4
8	32	128
256	2	64

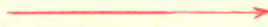
kwadrat magiczny o stałej sumie

kwadrat magiczny o stałym iloczynie

Ba! Co jednak robić, gdy nie zna się zasad budowy kwadratu magicznego o stałej sumie? Spróbujmy zbudować kwadrat magiczny o stałym iloczynie nie posługując się przy tym kwadratem magicznym o stałej sumie. Dokonamy tego za pomocą mnożenia dwóch kwadratów magicznych o stałym iloczynie.

a^2	1	a
1	a	a^2
a	a^2	1

b	1	b^2
b^2	b	1
1	b^2	b



a^2b	1	ab^2
b^2	ab	a^2
a	a^2b^2	b

12	1	18
9	6	4
2	36	3

Pierwsze dwa kwadraty można zbudować bez większych trudności, nie zadowolają one jednak naszych ambicji, gdyż poszczególne liczby powtarzają się. Otrzymany kwadrat III jest już bez zarzutu. Teraz wystarczy podstawić za a i b liczby (najlepiej pierwsze) np. $a = 2$, $b = 3$ i już mamy gotowy kwadrat magiczny o stałym iloczynie równym 216.

W podobny sposób możemy zbudować kwadrat magiczny czwartego rzędu. Krokiem wstępnym jest tu budowa 7 prostych kwadratów pomocniczych.

a	1	1	1
1	1	a	1
1	1	1	a
1	a	1	1

1	b	1	1
1	1	1	b
1	1	b	1
b	1	1	1

1	1	c	1
c	1	1	1
1	c	1	1
1	1	1	c

1	1	1	d
1	d	1	1
d	1	1	1
1	1	1	d

1	e	1	1
1	1	e	1
e	1	1	1
1	1	1	e

f	1	1	1
1	1	1	f
1	f	1	1
1	1	1	f

1	1	g	1
1	g	1	1
1	1	1	g
g	1	1	1



a	f	b	c	g	d
c	d	g	a	e	b
d	e	c	f	b	d
b	g	a	d	f	c

a^3	a^{16}	a^{10}	a^5
a^9	a^6	a^4	a^{15}
a^8	a^{11}	a^{13}	a^2
a^{14}	a	a^7	a^{12}

Po wymnożeniu tych kwadratów otrzymujemy właściwy kwadrat magiczny czwartego rzędu o iloczynie magicznym $\pi = abcdef$.

Załóżmy: $g = a$, $f = a^2$, $e = a^3$, $d = a^5$, $c = a^9$, $b = a^{13}$.

Podstawiając do naszego kwadratu otrzymujemy kwadrat taki, jak na marginesie. Doszliśmy do pierwszej metody; zatem metoda druga jest ogólniejsza.

Na zakończenie proponujemy co wytrwalszym Czytelnikom udowodnienie, że nie można zbudować kwadratu magicznego stopnia 3 lub 4 o stałym iloczynie z liczb postępu arytmetycznego.



Rozwiązanie zadania F 29.

Przykład B

Zeszlizgiwanie się pręta po szynach pod wpływem siły ciężkości powoduje zmianę strumienia indukcji magnetycznej przenikającej przez przewód utworzony z pręta i szyn.

Dlatego w obwodzie wystąpi siła elektromotoryczna indukcji skierowana tak, aby przeciwdziałała zmianie strumienia, czyli zsuwaniu się pręta. Na pręt, przez który płynie prąd indukcyjny o natężeniu i , działa siła oporu, równoległa do podstawy równi o składowej wzdłuż powierzchni równi skierowanej przeciwnie do zsuwającej pręt składowej siły ciężkości. Zwrot tej siły nie zależy od kierunku wektora B .

Liczymy wartość tej siły.

Strumień magnetyczny przenikający przez obwód w danej chwili t , gdy pręt jest odległy o odcinek x od dolnej szyny (patrz rysunek przy zadaniu) wynosi:

$$\Phi = B \cdot x \cdot l \cdot \cos \alpha.$$

Stąd

$$i = \frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{B \cdot l \cdot \cos \alpha}{R} \cdot v,$$

gdzie v jest chwilową prędkością pręta względem szyn.

Równanie ruchu pręta wzdłuż równi:

$$(4) \quad m \frac{dv}{dt} = mg \sin \alpha - iB \cdot l \cos \alpha = mg \sin \alpha - \frac{B^2 l^2 \cos^2 \alpha}{R} \cdot v,$$

jest analogiczne do równania (1) otrzymanego w Przykładzie A. Ponieważ dla pręta $t_0 = 0$, $v_0 = 0$ stąd:

$$(5) \quad v = \frac{mgR \sin \alpha}{B^2 l^2 \cos^2 \alpha} \left(1 - e^{-\frac{B^2 l^2 \cos^2 \alpha}{Rm} t} \right).$$

Analizując postać tego wzoru dla małych wartości t (początek ruchu) otrzymujemy (rozwijając e^{-xt} w szereg Taylora): $v = g \sin \alpha t$, czyli ruch jednostajnie przyspieszony.

Natomiast dla dużych wartości t , zsuwanie się pręta będzie przebiegać jednostajnie z prędkością $v = \frac{mgR \sin \alpha}{B^2 l^2 \cos^2 \alpha}$.

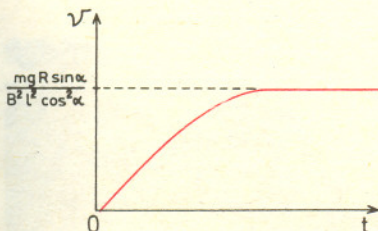
Wykres zależności v od t został naszkicowany na rysunku.

Ponieważ znamy wzór na pracę prądu elektrycznego, łatwo można sprawdzić, że strata energii potencjalnej pręta w przedziale czasu dt równa się ciepłu wydzielonemu przez prąd indukcyjny (rozważamy dla ułatwienia moment, gdy pręt zsuwa się już ruchem jednostajnym).

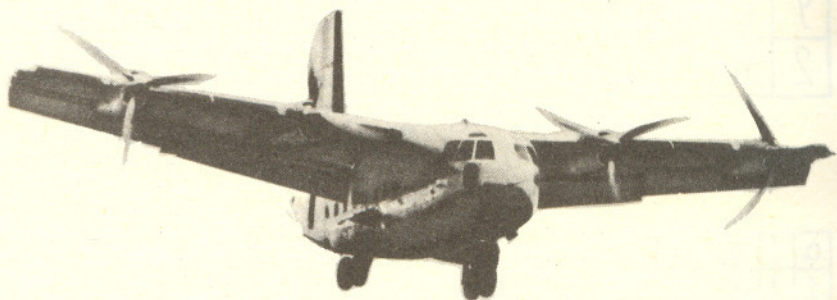
Mianowicie należy pokazać, że:

$$mg \sin \alpha \cdot dt = i^2 R dt.$$

Podstawienie odpowiednich wyrażeń na i i v pozostawiamy Czytelnikom.

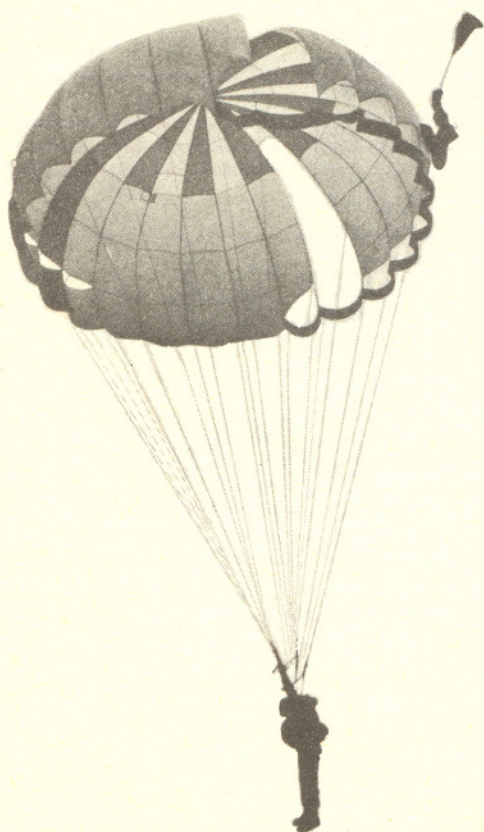


mała delta

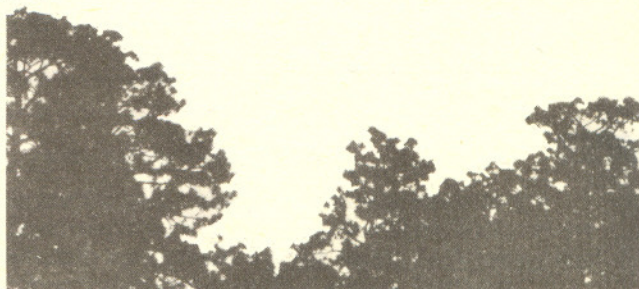


Jak opór powietrza ratuje ludziom życie

Powietrze, ten rzadki i delikatny ośrodek, którego prawie nie zauważamy, staje nam na przeszkodzie, ilekroć się szybko poruszamy. Najlepiej wiedzą o tym rowerzyści, dla których ten opór powietrza jest dużą przeszkodą. Konstruktorzy samochodów wyścigowych i samolotów starają się zmniejszyć jego działanie przez nadanie odpowiednich kształtów tym pojazdom. Nie zawsze jednak działanie oporu powietrza jest niepożądane. Gdyby nie on, padlibyśmy ofiarą kropli deszczu lub kulek gradowych, które spadając z chmur z przyspieszeniem ziemskim uderzałyby w nas z ogromną prędkością. Opór powietrza uratował też życie tysiącom ludzi, którzy skakali z dużych wysokości na spadochronach. Zróbmy sami spadochron!

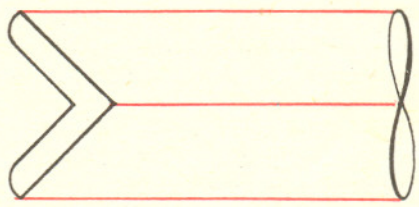
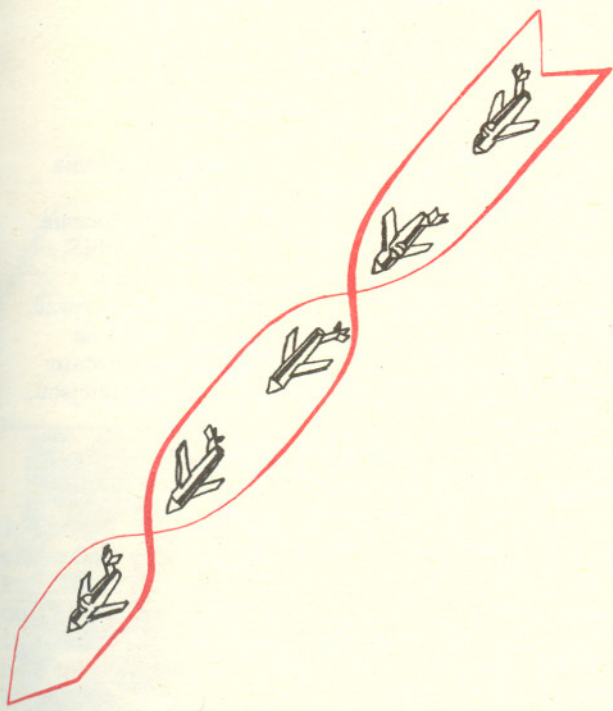


Można użyć do tego celu kawałka folii plastikowej lub chustki do nosa. Do każdego rogu przywiążemy nitkę o długości około 30 cm. Do końców nitek przymocujemy spadochroniarza — małą lalkę, najlepiej — mimo wszystko — z nietłukącego się materiału. Żeby lot był stabilny, można w samym środku folii zrobić mały otworek. Kiedy spadochron będzie gotowy, wypuść go na próbny lot — spod sufitu na tapczan. Jeśli lot ten powiedzie się, możesz startować z kolegami w zawody puszczając spadochrony z okna i obserwując, który spadochron utrzyma się dłużej w powietrzu i łagodniej wylądaje.



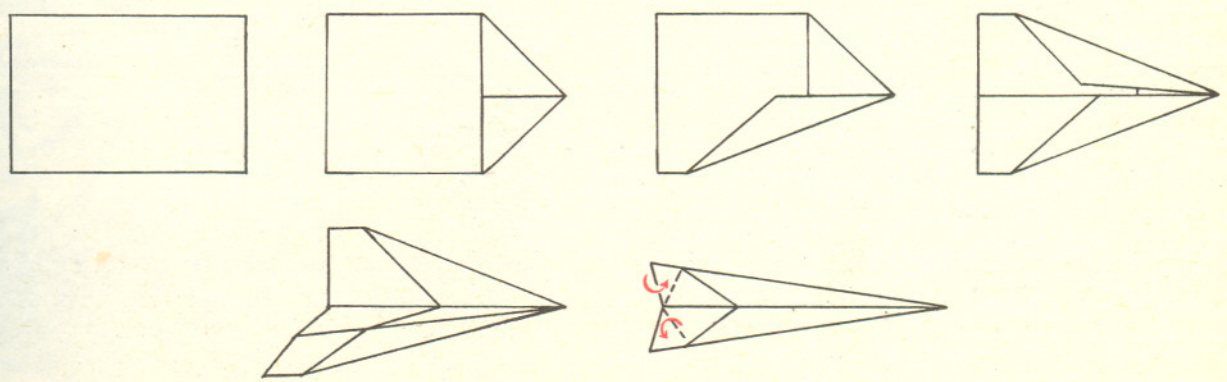
Bumerang

Ludzie pierwotni używali do polowań wygiętego kawałka drewna, zwanego bumerangiem. Szczególnie ciekawy rodzaj bumerangu zrobili pierwotni Australijczycy. Ich bumerangi były dodatkowo lekko zakrzywione spiralnie. Służyły im one do polowania na ptaki. Miały tę niezwykłą właściwość, że w razie nietrafienia do celu wracały do myśliwego i spadały u jego stóp. Bumerangi takie robi się także obecnie — do polowań na ptaki i do zabawy. Bumerang zawraca dzięki siłom oporu powietrza, ale warunkiem powodzenia jest odpowiedni rzut. Nie jest to łatwe, ale warto spróbować. Można potrenować rzuty w domu, ale do tego lepiej użyć bumeranga wyciętego z kartonu. Na rysunku obok pokazany jest przykład papierowego bumeranga w naturalnej wielkości. Rogi trzeba lekko zagiąć w dwie strony. Żeby wypuścić bumerang, trzymamy go lekko w palcach i dajemy prztyczka w jego koniec. Bumerang powinien polecieć kilka metrów, zatoczyć łuk i wrócić do naszych nóg.



Samolotowa beczka

Na pokazach lotniczych piloci wykonują różne imponujące manewry. Jednym z atrakcyjnych manewrów bywa „beczka” — lot poziomy z jednoczesnym obrotem samolotu wokół jego osi. Podczas takiego lotu pilot i pasażerowie widzą Ziemię na przemian to w dole, to nad swoimi głowami. Papierowy samolot, jaki na pewno nieraz puszczałeś, też może wykonać taki korkociąg. Jak zrobić taki samolot z kartki papieru, pokazuje rysunek. Po złożeniu dobrze jest skleić główną część. Ruch obrotowy tego samolotu zawdzięczamy zagiętym końcom — podczas lotu działa na nie para sił. Kąt zagięcia trzeba wypróbować, nie powinien on być większy, niż kąt prosty.





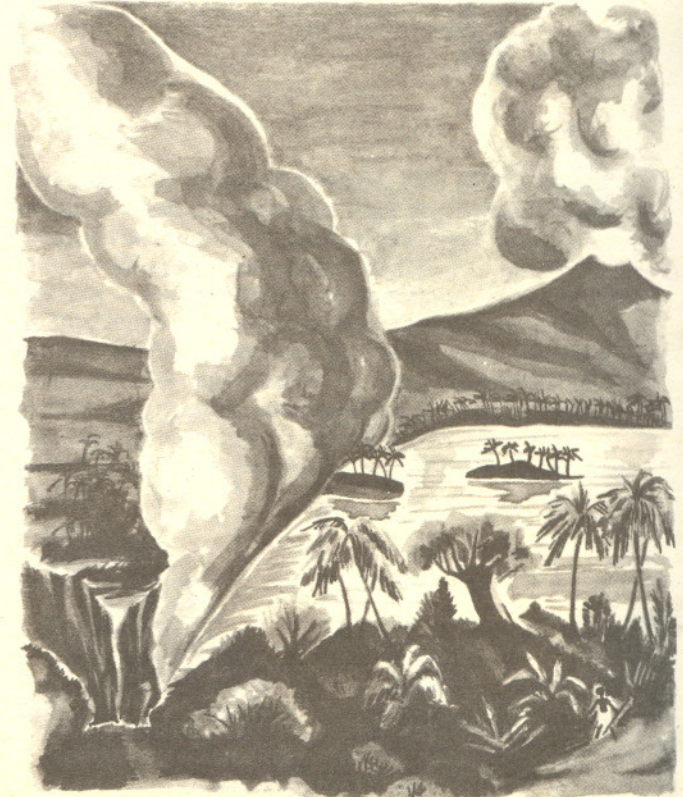
Jak zorganizować bank informacji

O banku informacji trenera Górskiego wiedzą chyba wszyscy. Żeby pocieszyć tych, którzy na piłce nożnej znają się nieszczerze, dodam od razu, że bank informacji nie jest niczym niezwykłym i każdy miał z nim do czynienia. Encyklopedia, katalog książek z biblioteki, słownik polsko-chiński — to tylko parę przykładów spośród wielu. Może wiecie z własnego doświadczenia, że wyszukanie w takim banku potrzebnej informacji często bywa zadaniem niewdzięcznym lub wręcz niewykonalnym. Chcąc na przykład zadzwonić do kogoś, o kim wiecie, że na imię ma Dionizy, jest lekarzem i mieszka na ulicy Floriańskiej. Udajcie się do banku informacji, czyli sięgacie po książkę telefoniczną... i przyjemnej lektury. Potrzebna informacja jest tam zapisana (gdyby dokładnie sprawdzić okazałoby się, że na ulicy Floriańskiej tylko jeden lekarz z imieniem Dionizy ma telefon), ba, ale jak się do niej dostać. Sposób uporządkowania informacji w książce telefonicznej nazywają matematycy porządkiem liniowym albo dobrym porządkiem. Jest on może i dobry, ale, niestety, tylko dla jednego sposobu wyszukiwania potrzebnej informacji. Na przykład książka telefoniczna jest bardzo wygodnym bankiem informacji tylko dla tych, którzy znają nazwisko i imię poszukiwanej osoby. Marzeniem roztargnionych byłoby zorganizowanie książki telefonicznej na doskonalszych zasadach.

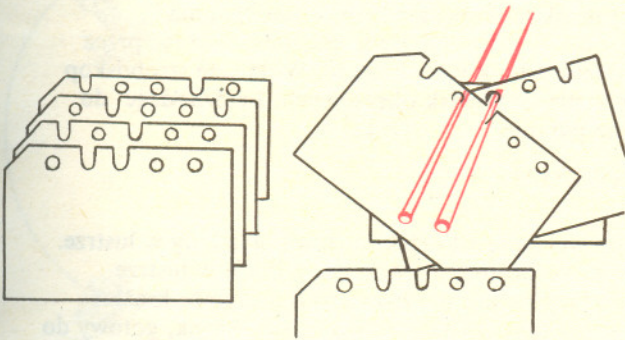
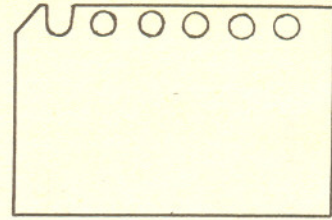


Wobec tego warto poznać inne zasady zorganizowania banku informacji. Jedną z nich jest system kart z perforowanym brzegiem. Sądzę, że jego zalety docenią nie tylko roztargnieni. Potrzebne karty można zrobić samemu. Na przykład ze starych pocztówek, jeśli je kiedyś zbieraliście, a teraz już Was przestały interesować. Dziurkujecie ich górny brzeg tak jak to pokazane na rysunku. Ważne, aby karty były jednakowego formatu i na wszystkich dziurki wypadały w tym samym miejscu.

Trzeba również ustalić lewy brzeg karty obcinając koniec jednego z rogów przy podziurkowanym brzegu — co również jest widoczne na rysunku. Aha, potrzebne jeszcze pudełko, w którym umieścimy karty w ten sposób, żeby ich dziurki wystawały ponad brzeg pudełka. No i oczywiście na karcie musi być trochę wolnego miejsca na zapisanie informacji. Jakich? Z dowolnej interesującej Was dziedziny. Na przykład z geografii. Zgromadziliście ciekawe wiadomości o różnych państwach i chcielibyście szybko wyszukiwać wszystkie państwa posiadające kopalnie złota, dalej takie, które należą do ONZ, które mają dostęp do morza, wysokie góry (wyższe od naszych Tatr) i co tylko jeszcze Was interesuje. Kiedy lista interesujących pytań już gotowa — przystępujemy do kodowania informacji na dziurkowanym brzegu kart. Najpierw trzeba ustalić, które dziurki będą odpowiadać jakim pytaniom. Umówmy się, że pierwsze pytanie z listy, np. „Czy są kopalnie złota?”, odnosi się do pierwszej dziurki licząc od obciętego rogu. Dalej, ustalamy, czy chcemy, żeby interesujące nas karty zostawały w pudełku, czy też były z niego wyciągane. Chcicie wyciągać? Dobrze, wobec tego przystępujemy do dzieła. Bierzymy pierwszą kartkę i podpisujemy: Polska. Oprócz nazwy możemy jeszcze wpisać różne notatki, np. w jakich książkach i na których stronach podane są interesujące nas szczegóły o Polsce. Następnie stawiamy sobie pytanie: „Czy w Polsce są kopalnie złota?”. Optymiści, dla których



liczą się nawet drobne ilości (wydobywane na Dolnym Śląsku) odpowiadają „tak” i... nic, zajmują się następną dziurką i kolejnym pytaniem. Pesymiści, zdaniem których nie ma w Polsce „prawdziwych” kopalni złota robią na karcie wcięcie — od pierwszej dziurki, na całą jej szerokość, do brzegu karty, tak jak pokazuje rysunek.



Podobnie kodujecie dalsze informacje: gdy odpowiedź na kolejne pytanie brzmi „tak”, pozostawiacie odpowiednie miejsce bez wycięcia, gdy odpowiedź brzmi „nie” — wycinacie. Jeżeli wykażecie się cierpliwością cechującą prawdziwego miłośnika geografii przygotujecie w taki sam sposób karty dla pozostałych państw i... bank informacji gotowy.

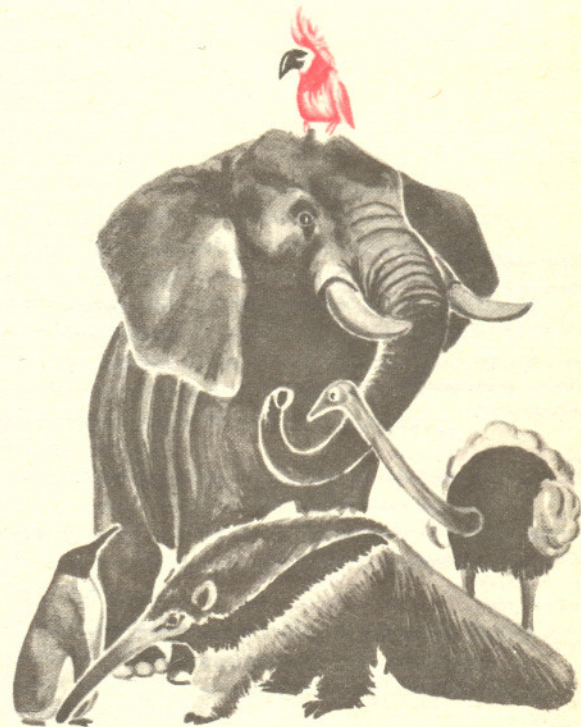
Chcicie wyszukać wszystkie państwa mające kopalnie złota? Nic prostszego! Układacie karty w pudełku, obciętym rogami w jedną stronę i tak, żeby dziurki kart wzajemnie się pokrywały. Bierzecie zwykły drut (taki od robienia na drutach jest bardzo dobry), wsuwacie drut w dziurki odpowiadające kopalniom złota, czyli pierwsze, licząc od obciętego rogu, i podnosicie drut do góry. Na drucie znajdą się wszystkie interesujące Was karty. A teraz kilka zadań na temat kartoteki kart.

1. W jaki sposób manipulować drutem (albo kilkoma drutami), żeby wybrać karty państw, które mają dostęp do morza i jednocześnie wysokie góry, wyższe od naszych Tatr?

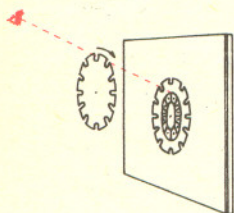
2. Chcemy zakodować informacje o tym, jaki obszar obejmuje terytorium danego państwa: mniejszy niż 100 000 km², od 100 tys. km² do 250 tys. km², od 250 tys. km² do 500 tys. km², od 500 tys. km² do 1 mln. km², od 1 mln. km² do 2 mln. km², od 2 mln. km² do 5 mln. km², od 5 mln. km² do 10 mln. km² i powyżej 10 mln. km² — łącznie 8 możliwości. Byłoby rozrzutnością poświęcać na ten cel aż 8 dziurek. Wystarczy na przykład 5. Spośród tych 5 dziurek wytnijmy dwie. Można to zrobić na co najmniej 8 sposobów (dokładnie na ile?). Ustalmy, które sposoby wycięcia dwóch dziurek będą odpowiadały jakim obszarom powierzchni. Jaka prosta manipulacja pozwoli nam wyciągnąć z pudełka niepotrzebne karty pozostawiając te, które nas interesują? Jak rozwiązać podobne zadanie, jeśli możliwości będzie 20, a nie 8? Ile dziurek trzeba przeznaczyć? W jaki sposób nacinać? Iloma na raz drutami i w jaki sposób manipulować?

3. Ile najmniej dziurek trzeba przeznaczyć na zakodowanie wszystkich ośmiu możliwości z poprzedniego zadania? (Manipulacje drutami mogą być bardziej skomplikowane)

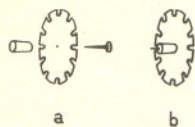
4. **Konkurs.** Zaplanujecie kartotekę dotyczącą ciekawego tematu i pomysłowo urządzoną. Ciekawi jesteście Waszych pomysłów.



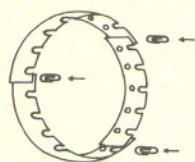
Małą Deltę opracowali: Przemysław Nowicki i Daria Ziemińska.



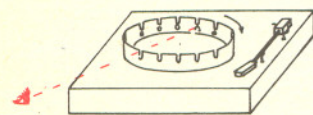
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

KINO KRÓTKICH FILMÓW CZYLI STROBOSKOP

JAK TO DZIAŁA?

Każdy wie. Wykorzystując bezwładność oka, czyli jego nieumiejętność rozdzielenia dwóch bodźców świetlnych następujących po sobie w czasie krótszym, niż około 0,1 sekundy, można wywołać złudzenie ruchu. Jak wiadomo, trzeba w tym celu pokazywać w krótkich odstępach czasu nieruchome obrazy przedstawiające kolejne fazy zmiennego w czasie zjawiska. Na tej zasadzie bazuje zarówno film, jak telewizja, w obu jednak przypadkach potrzebna jest precyzyjna i dość skomplikowana aparatura. Nasze proste stroboskopy pozwolą na zrealizowanie tego efektu nakładem niewielkiego wysiłku i bez żadnych inwestycji pieniężnych (nie licząc sumy, którą wydaliście na zakup tego numeru Deltę). W stroboskopie obrazy kolejnych faz ruchu, narysowane obok siebie na kawałku papieru lub kartonu, przesuwały się przed okiem obserwatora, przy czym każdy z obrazów odsłaniany jest jedynie na krótką chwilę w momencie, kiedy znajduje się na wprost oka. Wadą naszych stroboskopów będzie krótki czas trwania „wyświetlanych” w nich „filmów” — jedna lub dwie sekundy. Patrząc przez dłuższy czas będziemy widzieć nasz filmik wielokrotnie. Widać, że stroboskop nadaje się szczególnie do demonstracji zjawisk okresowych. Przechodząc do szczegółów zadajmy sobie teraz pytanie

JAK ZBUDOWAĆ STROBOSKOP?

Bardzo łatwo. Najprostszą jego wersją jest krążek kartonu oglądany w lustrze. Ma on na obwodzie wycięcia, przez które patrzymy na odbicie w lustrze obrazków ilustrujących kolejne fazy ruchu, narysowanych na tymże krążku (rys. 1). Oczywiście krążek musi w tym czasie wirować. Taki krążek, gotowy do wycięcia, znajduje się na IV stronie okładki. Aby zapewnić mu możliwość ruchu obrotowego, musimy go jakoś ułożyskować, na przykład za pomocą gwoździka i korka (rys. 2). Jeżeli po wprawieniu krążka w ruch wirowy spojrzymy przez wycięcia na odbicie krążka w lustrze, naprawdę zobaczymy jak woda kapie z kranu!

Zwolennicy solidniejszych urządzeń, którzy w dodatku mają do dyspozycji adapter, mogą wyciąć paski kartonu (również gotowe na okładce) z odpowiednimi wycięciami i obrazkami i za pomocą kleju, zszywacza lub zwykłych spinaczy biurowych połączyć je w walec obrazkami do wewnątrz (rys. 3). Walec ten ustawiamy na talerzu gramofonu, dbając o ich współosiowość i po wprawieniu całości w ruch patrzymy przez wycięcia na obrazki znajdujące się po przeciwnej stronie walca (rys. 4). Zobaczymy dość zabawny efekt zderzeń układu trzech kul, zawieszonych obok siebie na niciach tworzących rodzaj wahadeł. Ci spośród Was, którym nie dało dostatecznej satysfakcji wykonanie rzeczywiste lub w wyobraźni stroboskopów, zapytają pewnie teraz

I PO CO TO WSZYSTKO?

Mogę tylko odpowiedzieć: dla zabawy. Ale zabawa może też kształcić. Dla dydaktyków — amatorów mam parę propozycji, które umożliwią im wykazanie się inwencją w budowie stroboskopowych pomocy naukowych: można na przykład tworzyć w ten sposób „filmy” obrazujące drgania elektryczne w obwodzie LC, powstawanie fali elektromagnetycznej lub po prostu ruch wahadła matematycznego.

Życzę Oskarów.

O innym znaczeniu słowa „stroboskop” napiszemy w następnym numerze.

Rozwiązanie zadania M 86

Dane równania można napisać w postaci

$$(*) \quad x + y + z - \frac{1}{2n+1} (4x + 2y + z) = 0$$

($n = 2, 3, 4, \dots$).

Odejmując stronami dwa takie równania otrzymujemy

$$4x + 2y + z = 0.$$

Musi więc być $x + y + z = 0$.

Napiszemy otrzymane równania w postaci

$$\begin{aligned} y + z &= -x, \\ 2y + z &= -4x. \end{aligned}$$

Odejmując stronami te równania otrzymamy

$y = -3x$, skąd $z = 2x$. Wstawiając te wartości y i z do równania (*) otrzymujemy $x - 3x +$

$$+ 2x - \frac{1}{n+1} (4x - 6x + 2x) = 0,$$

a więc układ jest spełniony przez każdą trójkę liczb $(x, -3x, 2x)$ i tylko przez takie trójki.

Widzimy więc, że układ nieskończenie wielu równań z trzema niewiadomymi może mieć nieskończenie wiele rozwiązań.

Dr Marek Artur ABRAMOWICZ

W tym artykule chcę przedstawić pewien paradoksalny wniosek wynikający z ogólnej teorii względności. Na jego trop wpadliśmy przypadkowo. Dwa lata temu pracowaliśmy wspólnie z Piotrem Lasotą i Bożeną Muchotrzeb (wówczas jeszcze studentką fizyki) nad problemem dotyczącym istnienia rozwiązania równań Einsteina opisujących pewne obracające się ciało. Pewnego dnia Bożena przyniosła nam wyniki rachunków, nad którymi siedziała całą noc. We wzorach powtarzała się stale liczba $2\sqrt{3}/27$. „To nie może być dobrze — powiedział jeden z nas żartem — takie liczby jak $2\sqrt{3}/27$ nie mogą się pojawiać w rozsądnych teoriach”. Próbowaliśmy obalić wyniki Bożeny wymyślając różne ich konsekwencje i szukając wśród nich zupełnie bezsensownych. W ten sposób odkryliśmy paradoks przyspieszeń i uznaliśmy na jego podstawie, że w rachunkach *jest* błąd. Jednak po dalszych rachunkach i dłuższym namyśle przekonaliśmy się, że paradoks przyspieszeń można wytłumaczyć. Wytłumaczenie to znajdziecie dalej.

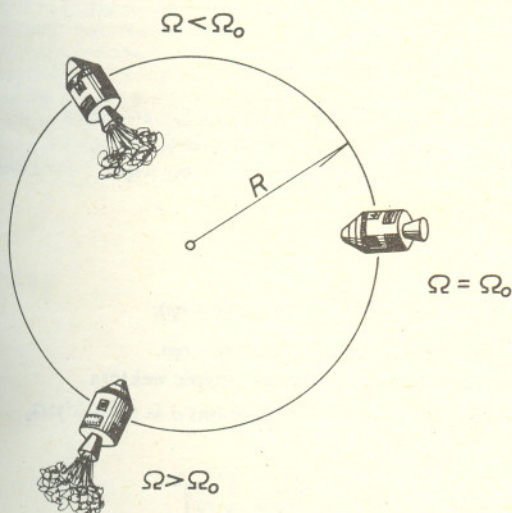
Najzabawniejszym momentem tej historii jest to, że Bożena istotnie popełniła błąd w rachunkach — gdyby nie on, nie odkrylibyśmy prawdopodobnie nigdy tego paradoksu.

A oto paradoks:

Wyobraźmy sobie wiele statków kosmicznych, krążących z różnymi, ustalonymi prędkościami kątowymi $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots$ po pewnej orbicie kołowej wokół planety o masie M . Jeżeli promień orbity wynosi R , to przyspieszenia nadawane przez siłę ciężkości są równe dla wszystkich statków i wynoszą GM/R^2 (przez G oznaczyliśmy stałą grawitacji). Tymczasem statki poruszające się po tej orbicie z prędkościami kątowymi $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots$ muszą mieć przyspieszenie dośrodkowe wynoszące $R\Omega_1^2, R\Omega_2^2, R\Omega_3^2, \dots$. Statek, którego prędkość kątowa równa jest

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$$

porusza się ruchem swobodnym; wszystkie inne statki, dla których $\Omega \neq \Omega_0$, muszą mieć włączone silniki (Rys. 1).



Rys. 1

Ciało poruszające się po okręgu ze stałą szybkością ma w układzie inercyjnym przyspieszenie dośrodkowe $R\Omega^2$. W układach nieinercyjnych otrzymujemy inne wartości przyspieszenia. I tak np. gdy ze środka okręgu śledzimy wzrokiem ciało kręcące się z prędkością kątową Ω , to nie postrzegamy żadnego ruchu tego ciała — w takim układzie odniesienia przyspieszenie (i prędkość) jest równe zeru (przyp. red.).

Powiedzmy, że pasażerowie jednego z tych statków (A) chcą zmierzyć z jakim przyspieszeniem porusza się względem nich inny statek (B). Są oni bardzo skrupulatni i wierzą tylko w takie pomiary, które mogą sami sprawdzić. Na powierzchni planety są dobrze widoczne punkty odniesienia, na sklepieniu nieba widać gwiazdy, bez trudu można więc zmierzyć własną prędkość kątową. Obustronna łączność radiowa pozwala zapytać, jaka jest prędkość kątowa statku (B). Astronauci ze statku A wiedzą więc, że różnica prędkości kątowych między ich statkiem a statkiem B wynosi $\omega = \Omega_B - \Omega_A$. Wiedzą oni także, że krążą wraz ze statkiem B po orbicie kołowej w odległości R od środka planety. Ponieważ znają prawa kinematyki, obliczyli korzystając z tych danych, że względne przyspieszenie wynosi $\omega^2 R$. Nie są jednak zadowoleni z tego wyniku.

„Nie wiemy, czy planeta rotuje. Nie wiemy, czy Wszechświat rotuje. Gdyby tak było, nasze wyznaczenie prędkości kątowej mogłoby być zupełnie fałszywe. Nie widzieliśmy aparatury pomiarowej na statku B i nie wiemy, czy funkcjonuje ona należycie. Ponieważ nie możemy także w żaden sposób skontrolować wyników pomiarów wykonanych na statku B, nie możemy mieć pewności, że są one prawidłowe.”

Wątpliwości astronautów ze statku A oraz ich pedanteria mogą wydać się przesadne. Są to jednak wątpliwości należące do pewnych podstawowych reguł uprawiania nauk przyrodniczych. Przyrodniczy (fizycy, astronomowie, biolodzy, chemicy) nie opierają się w swych badaniach na przekonaniach, lecz na faktach, na sprawdzonych faktach (to podejście różni nauki przyrodnicze od takich tworów ludzkiego intelektu jak filozofia, demonologia czy głośna obecnie parapsychologia).

Zaliczenie przez Autora filozofii do pseudonauk jest całkowicie sprzeczne z poglądem redakcji na tę sprawę (przyp. red.).

Tak więc astronauci ze statku A planują wykonanie następującego eksperymentu: w bardzo krótkich odstępach czasu t_0, t_1, t_2, \dots wyznaczanych na swoim zegarze będą mierzyli radarem odległości r_0, r_1, r_2, \dots do statku B oraz teodolitem kąty $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$, jakie tworzą kierunki na statek B z dowolnie obranym kierunkiem w płaszczyźnie orbity. Zegar, teodolit i radar statku A były wielokrotnie sprawdzane przed eksperymentem i astronauci ufają w rzetelność dokonywanych z ich pomocą pomiarów. Niezależnie od tego, istnieją na tym statku inne komplety zegar — radar — teodolit, na których także wykonywane są przez kogo innego pomiary. Wyniki pomiarów ze wszystkich kompletów są nieustannie porównywane. Po wykonaniu pomiarów astronauci zbudują tablicę

t	t_0	t_1	t_2	t_3	\dots
r	r_0	r_1	r_2	r_3	\dots
\dot{r}	\dot{r}_0	\dot{r}_1	\dot{r}_2	\dot{r}_3	\dots
\ddot{r}	\ddot{r}_0	\ddot{r}_1	\ddot{r}_2	\ddot{r}_3	\dots

gdzie $\dot{r} = (r_{k+1} - r_k) / \Delta t$, $\ddot{r} = (\dot{r}_{k+1} - \dot{r}_k) / \Delta t$ oraz $\Delta t = t_{k+1} - t_k$. Ponieważ astronauci dokonują wszystkich pomiarów w momencie tyknięcia ich zegara, odstęp pomiędzy dowolnymi kolejnymi tyknięciami, np. t_{10311} i t_{10312} jest stały i wynosi Δt . Podobną tablicę ułożą oni także dla wyników uzyskanych za pomocą teodolitu

t	t_0	t_1	t_2	t_3	\dots
φ	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	\dots
$\dot{\varphi}$	$\dot{\varphi}_0$	$\dot{\varphi}_1$	$\dot{\varphi}_2$	$\dot{\varphi}_3$	\dots
$\ddot{\varphi}$	$\ddot{\varphi}_0$	$\ddot{\varphi}_1$	$\ddot{\varphi}_2$	$\ddot{\varphi}_3$	\dots

gdzie $\dot{\varphi}_k$ i $\ddot{\varphi}_k$ są określone podobnie jak \dot{r}_k i \ddot{r}_k . Dane te posłużą astronautom do wyznaczenia przyspieszenia względnego. Będą to oni robić w następujący sposób: Niech osie Oy, Oz prostokątnego układu współrzędnych będą umieszczone tak, jak na Rys. 2. Mamy więc:

$$z = r \sin \varphi,$$

$$y = r \cos \varphi.$$

Można stąd łatwo obliczyć, że

$$\dot{z} = \dot{r} \sin \varphi + \dot{\varphi} r \cos \varphi; \quad \ddot{z} = \sin \varphi (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) + \cos \varphi (2 \dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}),$$

$$\dot{y} = \dot{r} \cos \varphi - \dot{\varphi} r \sin \varphi; \quad \ddot{y} = \cos \varphi (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) - \sin \varphi (2 \dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}).$$

Kropka nad literą oznacza taką samą operację jak w tabelach. Ponieważ długość wektora przyspieszenia, którą oznaczymy przez a , równa jest (z twierdzenia Pitagorasa) $a = (\dot{z}^2 + \dot{y}^2)^{1/2}$, więc:

$$a = \sqrt{(\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2)^2 + 4 \left(\dot{r} \dot{\varphi} + \frac{1}{2} r \ddot{\varphi} \right)^2}.$$

Pozwólmy astronautom zająć się pomiarami, a sami spróbujmy obliczyć ich rezultat (Rys. 3).

Z rysunku widać, że

$$\varphi = \frac{\omega t}{2},$$

$$r = 2R \cos \frac{\omega t}{2}.$$

Mamy zatem

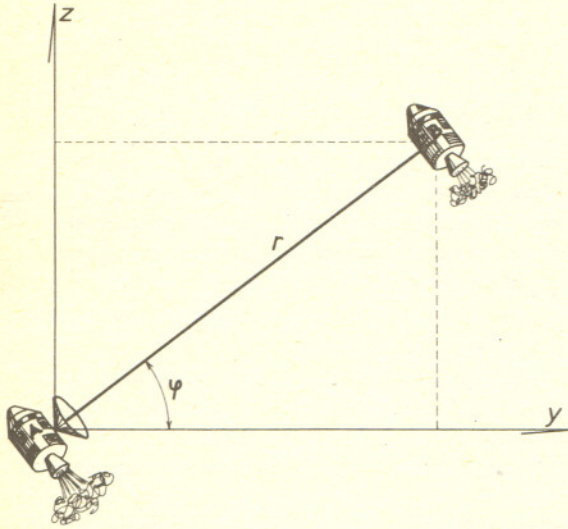
$$\dot{r} = -\omega R \sin \frac{\omega t}{2}; \quad \dot{\varphi} = \frac{\omega}{2}.$$

$$\ddot{r} = -\frac{\omega^2 R}{2} \cos \frac{\omega t}{2}; \quad \ddot{\varphi} = 0.$$

Wstawiając to do wzoru na przyspieszenie otrzymamy:

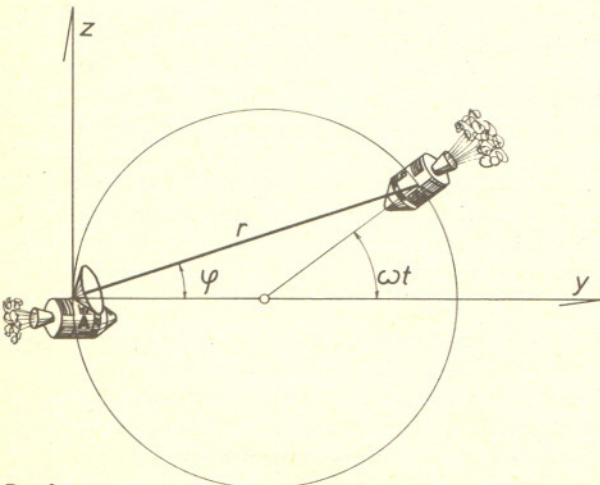
$$a = \left\{ \left(-\frac{\omega^2 R}{2} \cos \frac{\omega t}{2} - 2R \cos \frac{\omega t}{2} \cdot \frac{\omega^2}{4} \right)^2 + 4 \left(\frac{\omega^2 R}{2} \sin \frac{\omega t}{2} \right)^2 \right\}^{1/2} = \omega^2 R.$$

Oczywiście astronauci nie otrzymują wzoru na przyspieszenie ale wartość przyspieszenia (liczbę, np. 3,503 m/s²) w każdej chwili czasu.



Rys. 2

Różnica między ilorazami różnicowymi w tabelach i pochodnymi jest rzędu niższego niż Δt i dąży do zera, gdy $\Delta t \rightarrow 0$. W pomiarach zawsze operujemy skończonymi choć możliwie bardzo małymi odstępami czasu. Zastąpienie we wzorach ilorazów różnicowych (wyników eksperymentów) pochodnymi wprowadza błąd rzędu Δt , jeżeli tylko odpowiednie pochodne istnieją. W teoriach fizycznych zakłada się zawsze, że występujące w nich funkcje są ciągłe i gładkie wszędzie tam, gdzie nie istnieje żadna „fizyczna” przyczyna nieciągłości funkcji lub jej pochodnej (przyj. red.).



Rys. 3

Jak już pisałem, paradoks ten wymyśliliśmy wspólnie z Piotrem Lasotą. Przedstawialiśmy go wielu naszym kolegom i znajomym, wśród których znaleźli się wybitni fizycy z różnych krajów. Wszyscy w pierwszej chwili twierdzili, że to bzdura.

W teorii względności nie ma istotnej różnicy między masą i energią ciała ($E = mc^2$). Każde ciało poruszające się, a więc i promieniowanie elektromagnetyczne (fotony), ma pewną masę i zgodnie z teorią grawitacji podlega działaniu sił przyciągania grawitacyjnego. Promienie świetlne z gwiazd przechodząc w pobliżu Słońca odchylają swój bieg podobnie, jak komety tylko znacznie słabiej. Gdybyśmy masę Słońca zwiększyli 100 000 razy lub jego promień zmniejszyli do kilku kilometrów, to światło zaczęłoby krążyć po orbicie okołosłonecznej jak zwykła planeta. Światło, za pomocą którego oglądamy inne statki i mierzymy odległości od nich, krąży bez końca po okręgu. Z punktu widzenia statków na orbicie okrąg ten jest więc prostą i ruch po okręgu staje się jakby ruchem jednostajnym po prostej. Nie jest to jednak taki zwykły ruch po prostej. Każdy statek widzimy równocześnie jako doganiający nas od tyłu i uciekający do przodu. Zastanówcie się co się dzieje, gdy statek nas mija! (przyp. red.).

To, co teraz powiem, wyda się wielu spośród Was zupełną bzdurą. Prawdopodobnie wszystkim, którzy o tym jeszcze nie słyszeli. Przygotowanie z fizyki nie ma tu nic do rzeczy. Nazwę to paradoksem przyspieszeń. Otóż twierdzę, że jest rzeczą możliwą, iż w pewnej sytuacji astronauci ze statku A wyznaczą dla wszystkich statków kosmicznych krążących wraz z nimi po orbicie kołowej dokładnie to samo przyspieszenie. Więcej: będzie to przyspieszenie równe zeru! Powiecie, że nie jest to możliwe. Obliczyliśmy przecież, że względne przyspieszenie równe jest $\omega^2 R$, tzn. zależy od różnicy prędkości kątowej statków. Znikać zaś może tylko wtedy, gdy $\omega = 0$ (bo $R \neq 0$). Zgoda, obliczyliśmy ale astronauci nie obliczają, lecz mierzą przyspieszenia.

Nasze rachunki słuszne są tylko wtedy, jeżeli dokładnie równoważne są pomiarom radarowym. Tak jednak nie jest, a przynajmniej tak być nie musi. Chwila zastanowienia wystarczy, aby zrozumieć, że przedstawiony wyżej rachunek opiera się na dwóch założeniach:

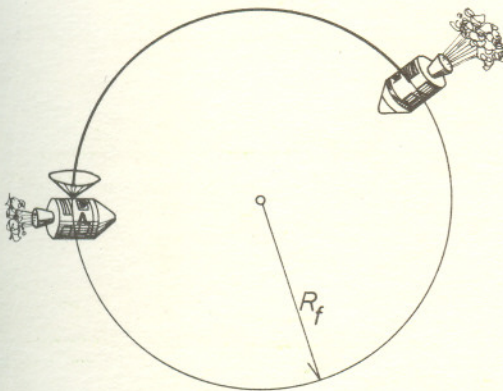
- Szybkość rozchodzenia się sygnałów radarowych jest nieskończenie wielka, albo przynajmniej tak wielka, że można ją w praktyce uznać za nieskończoną.
- Sygnały radarowe rozchodzą się po liniach prostych.

Oba te założenia przyjmowane są przez newtonowską teorię grawitacji i odrzucane przez ogólną teorię względności. Wiemy też z doświadczenia, że nie są one słuszne w świecie, w którym żyjemy.

Wyjaśnienie paradoksu przyspieszeń jest teraz zupełnie proste. Wystarczy powiedzieć, że zgodnie z ogólną teorią względności światło (a więc i sygnały radarowe) może krążyć po kołowej orbicie o promieniu

$$R = R_f = \frac{3GM}{c^2}, \quad (c \text{ jest prędkością światła}),$$

wokół ciała, którego promień jest mniejszy niż R_f . Zastanówmy się, jak będzie wyglądał eksperyment radarowy na orbicie $R = R_f$ (Rys. 4). Otóż sygnał wysłany przez A odbije się od B i powróci dokładnie z tego samego kierunku, w którym został wysłany w chwili t_0 , niezależnie od tego, gdzie znajduje się statek B. Zatem $\dot{\varphi} = \ddot{\varphi} = 0$. Nie ma zmiany kierunku!



Rys. 4

M. A. Abramowicz, J. P. Lasota, *Note on a Paradoxical Property of the Schwarzschild Solution*, Acta Phys. Polon., Vol. B5 (1974), No 2, str. 327. Tam też odsyłamy Czytelników orientujących się w teorii względności, którzy chcieliby poznać szczegóły.

Podobnie łatwo można się przekonać, że na orbicie $R = R_f$ także $\ddot{r} = 0$. Rzeczywiście, odległość pomiędzy A i B mierzona jest teraz nie po cięciwie \overline{AB} (nie ma sygnałów poruszających się po cięciwie), lecz po łuku \overline{AB} . Jest ona oczywiście proporcjonalna do czasu

$$r = \omega \alpha t$$

pomiędzy wysłaniem a odebraniem sygnału. Współczynnik α nie może zależeć od czasu, ponieważ oznaczałoby to, że odległość między dwoma ustalonymi punktami na okręgu zmienia się w czasie.

Zatem $\dot{r} = \omega \alpha$, $\ddot{r} = 0$. Wstawiając $\varphi = \dot{\varphi} = 0$ i $\dot{r} = \omega \alpha$, $\ddot{r} = 0$ do wzoru na a dowodzimy tym samym, że $a = 0$.

Warto chwilę zastanowić się nad tym wynikiem:

Jeżeli A i B poruszają się z różnymi prędkościami kątowymi, to oczywiście będą oni spotykali się regularnie co pewien czas. Mimo to ich względne przyspieszenie jest zawsze równe zeru!!!

Paradoks przyspieszeń nie ma zapewne głębszego znaczenia ani teoretycznego, ani praktycznego. Zdecydowaliśmy się na jego przedstawienie, ponieważ doszliśmy do wniosku, że można na jego przykładzie pokazać, jak bardzo może zawodzić nas intuicja i tzw. zdrowy rozsądek. Jeżeli bardzo wielu bardzo mądrych ludzi wierzy w postrzeganie pozazmysłowe lub w to, że przyspieszenia statków kosmicznych o różnych prędkościach kątowych są różne, to trzeba pamiętać, że wiara taka nie stwarza faktów. Dla fizyka ważne jest to, co pokazują zegary, teodolity i radary.