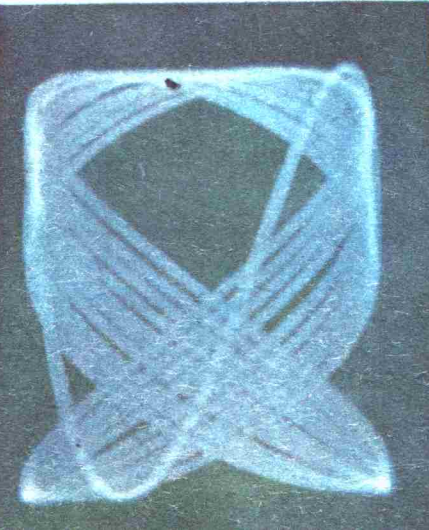
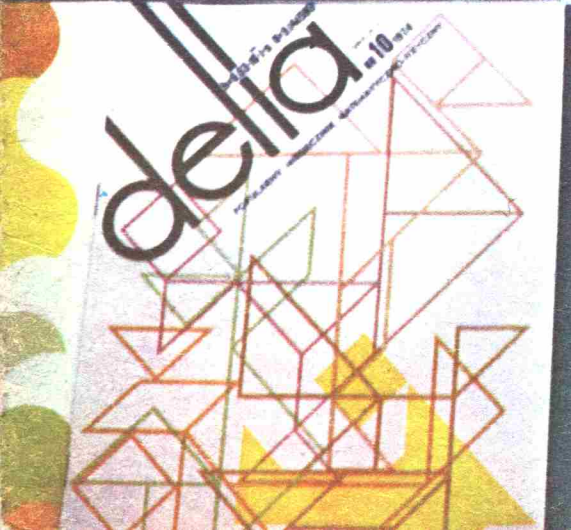
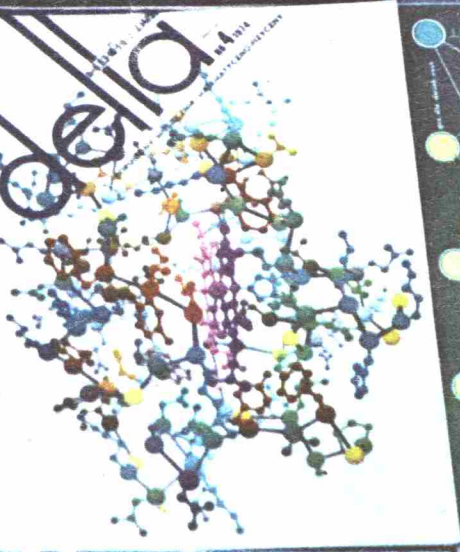
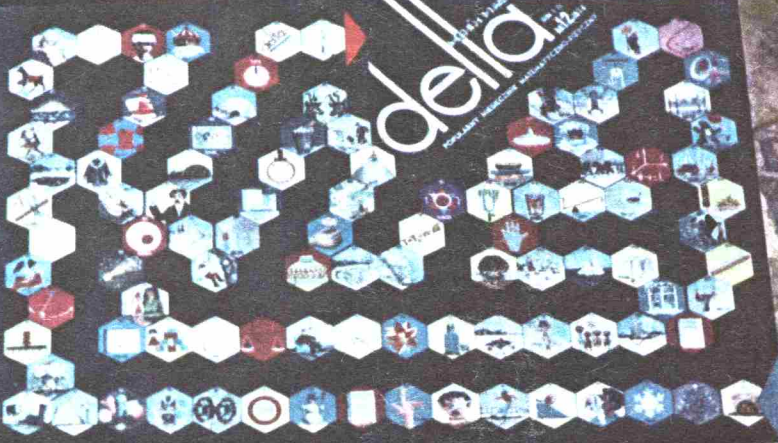
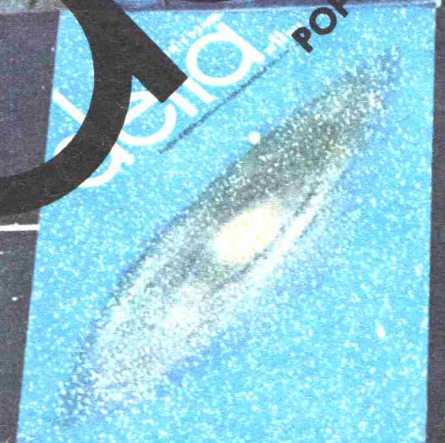
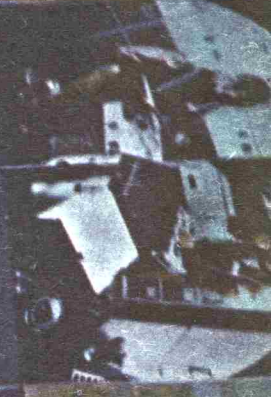
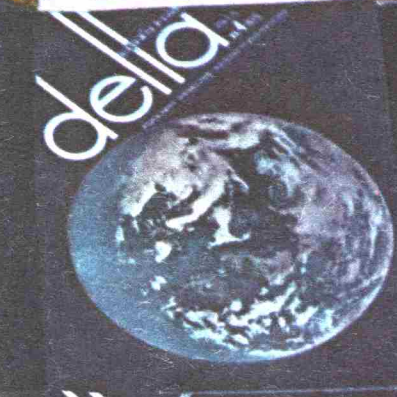


24
74-63

delia
h-0-63-10-1 s II-3,14,15

delia
1976
LNO-FIZYCZNY

delia



SPIS TREŚCI

Czy odkrycie monopola magnetycznego? <i>Prof. dr Janusz Zakrzewski</i>	str. 2
Co komu po monopolach? <i>Dr Kazimierz Rzązewski</i> <i>Doc. dr Michał Świącki</i>	str. 4
Wyniki konkursu wakacyjnego	str. 6
Jeszcze raz o wzorze Eulera, czyli zastosowanie stawów i grobli w stereometrii <i>Dr Jan A. Rempala</i>	str. 7
Zadania	str. 8
Mała Delta	str. 9
Laboratorium w domu <i>Dr Jan A. Gaj</i>	str. 13
Metody Monte Carlo (IV) <i>Dr Ryszard Zieliński</i>	str. 14
O totemach i matematykach oraz co mamy zamiast Nobla <i>Mgr Małgorzata Dubiel</i>	str. 16

W następnym numerze:
Probabilistyczny Abak

„Delta”
matematyczno-fizyczny miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa Matematycznego i Polskiego Towarzystwa Fizycznego
wydawany przy poparciu Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny
doc. dr J. Bartke
prof. dr Grzegorz Białkowski — przewodniczący
doc. dr A. Bączyński
doc. dr B. Gleichgewicht
doc. dr K. Goebel
doc. dr B. Iwaskiewicz
doc. dr T. Iwiński
doc. dr A. Januszajtis
prof. dr Leon Jeśmianowicz — wiceprzewodniczący
mgr H. Kaczorek
prof. dr B. Karczewski
prof. dr M. Kuczma
mgr A. Mąkowski
prof. dr Z. Pawlak
prof. dr A. Piekara

prof. dr Z. Semadeni
prof. dr J. Stankowski
prof. dr M. Subotowicz
doc. dr S. Turnau
doc. dr J. Wdowczyk

Redaguje Kolegium w składzie:
doc. dr T. Hofmokl — z-ca red. nac.
dr T. B. Iwiński
dr M. Kordos — red. nac.
mgr K. Prażmowski — red. techn. graf.
doc. dr M. Świącki
D. Tys — sekr. red.

Adres Redakcji
ul. Hoża 69 p. 151,
00-681 Warszawa,

Zakład Narodowy im. Ossolińskich — Wydawnictwo.
Wrocław, Oddział w Warszawie
Nakład 30 000 egz. Objętość 2 ark.
wyd.: 2,50 ark. druk.;
papier offsetowy III kl., 80 g, 61 × 86
Wydrukowano w Drukarni im. Rewolucji Październikowej,
Warszawa, ul. Mińska 65.
Nr zam. 888/75 B-58

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60, — cena prenumeraty półrocznej zł 30, —

Institucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły — mające siedzibę w miastach wojewódzkich zamawiać mogą prenumeratę wyłącznie za pośrednictwem miejscowych oddziałów i delegatur RSW Prasa-Książka-Ruch w terminie do dnia 25 listopada na rok następny.

Institucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły — mające siedzibę na wsi lub miejscowościach, w których nie ma oddziałów RSW Prasa-Książka-Ruch, winny opłacać prenumeratę w terenie właściwych urzędach pocztowych.

Prenumeratę krajową dla czytelników indywidualnych przyjmują urzędy pocztowe, listonosze i Centrala Kolportażu RSW Prasa-Książka-Ruch, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, konto PKO 1-6-100020 w terminie do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 40% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje Biuro Kolportażu Wydawnictw Zagranicznych RSW Prasa-Książka-Ruch, 00-840 Warszawa ul. Wronia 23, konto PKO nr 1-6-100024.

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Institucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTA”:

w Księgarni Ośrodek Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.

Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.

Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, konto PKO nr 1-6-100312

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Cena 1 egzemplarza zł 5, —

nr indeksu 35723/35550

Matematyka i fizyka
nazywane są naukami ścisłymi,
co ma wyrażać
pewność i sprawdzalność
prawd przez te nauki głoszonych.

Posługujemy się nimi na co dzień
jako prawdami uznanymi.
Nietrudno jednak zauważyć,
że w bardzo wielu przypadkach
twierdzeń matematyki
ani
praw fizyki
sprawdzić byśmy nie umieli.

Czy zatem owa ścisłość
matematyki i fizyki
wątpliwą się staje?

Ratować ją można dwojako:
Z uznanych źródeł czerpać wiedzę
w autorytetach pokładając wiarę,
że wszystko sprawdzili
i że oszukać nas nie chcą.

Ambitniejszym i pewniejszym
wydaje się sposób drugi,
by ustawicznie umysł
kształcić i gimnastykując
myśleć,
tak jak żyć wypada:
na własną odpowiedzialność.

Wierząc głęboko,
że proponujemy nie autorytety,
a pomoc w myśleniu,
oddajemy w Wasze ręce
ten numer
— jest to już dwudziesta piąta

DELTA.

Relacjonując naszym Czytelnikom najnowsze doniesienia dotyczące istnienia monopolu magnetycznych musimy również powiedzieć, że w okresie kilku miesięcy jakie upłynęły od nadejścia pierwszej wiadomości nie nadeszło potwierdzenie odkrycia. Większość fizyków jest obecnie zdania, że zarejestrowane zdarzenie można wyjaśnić nie uciekając się do koncepcji monopola magnetycznego. O takiej możliwości pisze prof. J. Zakrzewski w artykule. Można więc powiedzieć, że istnienie monopolu magnetycznych **NIE ZOSTAŁO POTWIERDZONE DOŚWIADCZALNIE**



Czy odkrycie monopola magnetycznego?

Prof. dr Janusz ZAKRZEWSKI

Zainteresowanie fizyków monopołem magnetycznym trwa od roku 1931, kiedy to angielski fizyk-teoretyk P. A. M. Dirac wysunął hipotezę istnienia elementarnej cząstki magnetyzmu

o „ładunku” magnetycznym $g = n \cdot \frac{e}{2\alpha} = n \cdot 68,5e$, gdzie e jest elementarnym ładunkiem

elektrycznym, $\alpha \approx 1/137$ stałą struktury subtelnej, a n — liczbą naturalną. Monopoli magnetycznych poszukuje się w promieniowaniu kosmicznym, w próbkach poddanych długotrwałemu naświetleniu promieniami kosmicznymi, np. w meteorytach, wśród produktów oddziaływania cząstek z akceleratorów wielkich energii. Jako detektorów używa się, między innymi, emulsji fotograficznych oraz detektorów dielektrycznych. W detektorach takich cząstki naładowane elektrycznie pozostawiają wskutek jonizacji ośrodką ślad, który można ujawnić poddając detektor odpowiedniej obróbce chemicznej.

Spodziewamy się, że monopol magnetyczny również będzie wywoływać jonizację ośrodką i że jego tor możemy zaobserwować podobnie jak tor cząstki naładowanej elektrycznie w detektorze wizualnym. Między jonizacją monopola magnetycznego o ładunku magnetycznym g a cząstką o ładunku elektrycznym e powinien zachodzić związek:

$$(\text{jonizacja monopola magnetycznego}) : (\text{jonizacja cząstki elektrycznej}) \approx \left(\frac{g}{e}\right)^2 \cdot \beta^2,$$

gdzie $\beta = v/c$ jest prędkością monopola w jednostkach prędkości światła c . Jeśli monopol porusza się z prędkością v bliską c , tzn. β jest nieco mniejsza od 1, wówczas jonizuje on

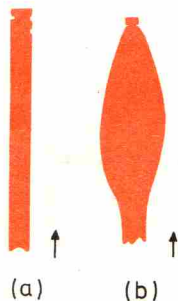
$\left(\frac{g}{e}\right)^2 \approx (68,5)^2 \approx 4692$ razy silniej niż cząstka o ładunku elektrycznym e , a więc podobnie jak jądro o liczbie atomowej $Z \approx 68$ (dla $n = 1$). Zauważmy, że dla prędkości niezbyt dużych $v \ll c$, jonizacja cząstki o ładunku elektrycznym e jest w przybliżeniu proporcjonalna do $1/\beta^2$.

Z powyższych związków wynika, że dla monopola jonizacja jest proporcjonalna do $\left(\frac{g}{e}\right)^2$,

a więc nie zależy od jego prędkości β . Zdolność jonizacyjna monopola nie będzie się więc zmieniała wzdłuż jego toru, w odróżnieniu od zdolności jonizacyjnej jądra o $Z = 68$. Ta ostatnia wprawdzie wzrasta przy zmniejszającej się prędkości a następnie maleje, gdyż jądro przy końcu swego zasięgu chwyta i traci elektrony a proces ten, zmniejszając efektywnie jego ładunek, zmniejsza zarazem zdolność jonizacyjną (rys. 1).

Po tych uwagach o metodach detekcji monopolu magnetycznych, możemy przejść do opisu obserwacji, która w sierpniu ub. roku zelektryzowała fizyków w całym świecie. Obserwacji tej dokonała grupa fizyków amerykańskich: P. B. Price i E. K. Shirk z Uniwersytetu Kalifornijskiego w Berkeley oraz M. Z. Osborne i L. S. Pinsky z Uniwersytetu Houston. Badali oni skład pierwotnego promieniowania kosmicznego, poszukując superciężkich jąder o liczbach atomowych $Z \geq 60$ w bloku złożonym z fotograficznej emulsji jądrowej i detektorów plastikowych (Lexan). Jądra superciężkie występują w promieniowaniu kosmicznym bardzo rzadko; do chwili obecnej we wszystkich eksperymentach wykonanych na świecie od ich odkrycia w meteorytach w roku 1965, zaobserwowano przy użyciu detektorów wizualnych około 200 przypadków o $Z > 70$, w tym około 28 o $Z > 86$. Fizycy amerykańscy naświetlali, we wrześniu 1973 roku przez około 2,5 dnia wielowarstwowy blok o powierzchni 20 m², złożony z emulsji jądrowej, radiatora czerenkowskiego wraz z filmem oraz 33 warstwy plastiku w locie balonowym nad miastem Sioux w stanie Iowa (USA). Od tego czasu prowadzą systematyczną analizę uzyskanego materiału, poszukując torów jąder superciężkich w poszczególnych częściach bloku. Przy użyciu mikroskopu optycznego przeglądają warstwę emulsji i oceniają liczbę atomową Z i prędkość β jąder dających znalezione tory, a następnie śledzą je dalej w warstwach plastiku.

Jeden ze znalezionych torów wzbudził szczególne zainteresowanie badaczy amerykańskich.

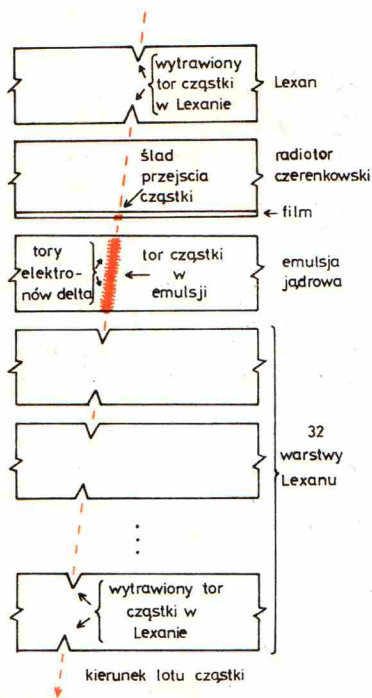


Rys. 1

Szkic toru

(a) monopola magnetycznego

(b) jądra ciężkiego pierwiastka w emulsji fotograficznej



Rys. 2

Szkic bloku złożonego z emulsji jądrowej, radiatora czerenkowskiego wraz z filmem oraz 33 warstw plastiku (Lexan).

W fizyce jądrowej grubość materiału określa się w g/cm². Tak określona wielkość powstaje w wyniku pomnożenia geometrycznej grubości przez gęstość materiału.

W poprzednich badaniach nigdy nie zaobserwowano jądra o $Z > 96$.

Na konferencji w Monachium w sierpniu ub. roku autorzy podwyższyli tę ocenę do około 600 mas protonowych.



Liczbę atomową i prędkość cząstki dającej ten tor w emulsji jądrowej oceniono jako $Z \approx 80$ oraz $\beta = 0,5_{-0,05}^{+0,1}$. Na podstawie danych zarejestrowanych w detektorze Czerenkowa, prędkość cząstki oszacowano jako $\beta < 0,68$. Stwierdzono dalej, że cząstka porusza się w kierunku od emulsji do warstw Lexanu, o czym świadczy rozkład kierunków emisji elektronów wybitych w procesie jonizacji z atomów ośrodka (tzw. elektronów delta): stosunek liczby torów elektronów idących „w dół” do liczby elektronów idących „do góry” równa się około 5:1. Kiedy jednak uczeni przeszli do analizy toru w warstwach Lexanu (cząstka przebiegła przez cały blok i opuściła go, rys. 2), czekała ich niespodzianka: długości wytrawionych torów nie zmieniły się przy przechodzeniu od warstwy do warstwy tak, jak powinny dla cząstki o podanych wyżej Z i β ! Trzeba bowiem wiedzieć, że długość

wytrawionego toru w warstwach Lexanu jest w przybliżeniu proporcjonalna do $\left(\frac{Z}{\beta}\right)^4$; rośnie

zatem, gdy prędkość β jądra o liczbie atomowej Z maleje. Tymczasem zmierzone długości torów pozostawały stałe, tak jakby przez warstwy Lexanu przeszła cząstka o $Z \approx 137$ oraz $\beta \approx 1$. Przeprowadzając przez punkty doświadczalne, tzn. długości wytrawionych torów w różnych warstwach Lexanu, krzywą pasującą do danych na poziomie ufności 84%, uczeni amerykańscy uzyskali ocenę $Z \approx 125$ oraz $\beta \approx 0,92$ — a więc nadal bardzo różną od tej, którą otrzymali z emulsji jądrowej i detektora czerenkowskiego.

Podsumujmy wyniki obserwacji: przez cały blok (o grubości 1,6 g/cm²) przeszła cząstka, bez zatrzymania, silnie jonizująca, o niezminiającej się zdolności jonizacyjnej. Wartości jej liczby atomowej i prędkości, ocenione na podstawie analizy śladu w trzech detektorach, nie dają się ze sobą pogodzić:

detektor	Z	β
Czerenkowa	> 70	$< 0,68$
emulsja jądrowa	≈ 80	$0,5_{-0,05}^{+0,1}$
Lexan	> 125	$> 0,92$

Nawet jeżeli zrezygnujemy z oceny Z i β pochodzącej z Lexanu, pozostaje trudna do wytłumaczenia obserwacja cząstki o prędkości $\approx 0,5$ c jonizującej silnie i bez zmiany przy przechodzeniu przez grubą warstwę ośrodka.

W tej sytuacji fizycy amerykańscy rozważyli inną interpretację przypadku: przyjęli, że mają do czynienia z monopolem magnetycznym o ładunku magnetycznym $g = 137e$ ($n = 2$) i o prędkości $\beta \approx 0,5$. Usunęli w ten sposób zasadniczą trudność, jaką stanowi niezmiennosc jonizacji w Lexanie: wszak zdolność jonizacyjna monopola magnetycznego nie zależy od jego prędkości! Co więcej, analizując tor pozostawiony przez cząstkę w emulsji jądrowej i porównując go z torami około 100 superciężkich jąder promieniowania kosmicznego zarejestrowanych we wcześniejszych badaniach, uczeni amerykańscy stwierdzili, iż jego struktura jest taka, jakiej należałoby oczekiwać dla monopola o powyższych własnościach. Spośród dwóch rozważanych interpretacji: jądra superciężkiego o $Z > 125$, $\beta > 0,92$ lub monopola magnetycznego o $g = 137e$, $\beta \approx 0,5$ fizycy amerykańscy opowiedzieli się za drugą. Stwierdzili (cytujemy): „wykryliśmy monopol magnetyczny $g = 137e$ i prędkości $\beta = 0,5_{-0,05}^{+0,1}$. Na to, by przejść przez blok Lexanu o grubości 1 g/cm², jego energia musi przewyższać 32 GeV, co znaczy, że jego masa musi przewyższać 200 mas protonowych.” Informacja o odkryciu monopola poszła w świat: rozmowy telefoniczne, listy, notatki prasowe, wywiady, referaty na konferencjach, przedruk publikacji...

Jak należy się odnieść do tego wydarzenia? Zawsze gdy odkrycie nowej cząstki oparte jest na jednej obserwacji, pojedynczym przypadku, budzą się wątpliwości: mamy je i my, fizycy ośrodka warszawskiego. Zauważmy bowiem, iż podstawą interpretacji przypadku jako monopola magnetycznego jest założenie, że przez cały blok przechodzi ta sama cząstka, tzn. że informacje o Z i β , pochodzące z różnych detektorów muszą być spójne. Jeśli jednak założenie to nie jest słuszne? Gdyby cząstka doznała po drodze zderzenia z jądrem detektora, zarówno Z jak i β mogłyby ulec zmianie. Wątpliwości takie żywili uczestnicy konferencji w Monachium. Jeden z najwybitniejszych autorytetów w zakresie poszukiwania jąder superciężkich w promieniowaniu kosmicznym, współtwórca techniki emulsyjnej, fizyk angielski P. H. Fowler z Uniwersytetu Bristolskiego zauważył, że wystarczy by jądro o $Z \approx 80$ i $\beta \approx 0,7$ straciło w zderzeniu jądrowym w pobliżu warstwy emulsji cząstkę alfa, by cały ciąg zdarzeń zarejestrowanych w bloku dał się spójnie wyjaśnić. Fizycy amerykańscy nie przedyskutowali tej możliwości w swej pracy, nie oszacowali prawdopodobieństwa takiego zdarzenia.

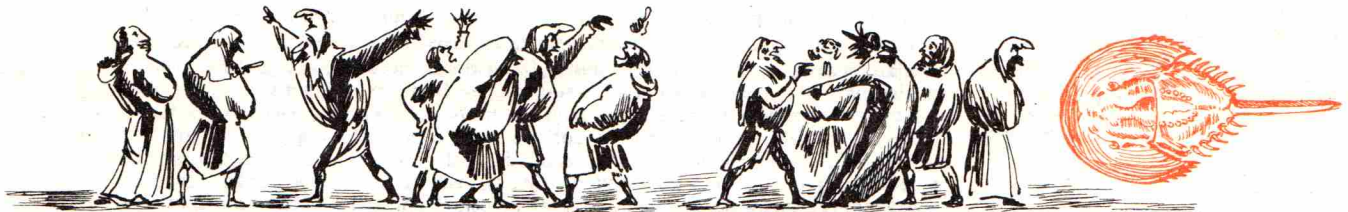
Wątpliwości budzą się też przy rozważaniu podstaw ekstrapolacji wzoru empirycznego ustalającego zależność między długością toru wytrawionego w Lexanie a zdolnością

jonizacyjną cząstki. Zależność typu $\left(\frac{Z}{\beta}\right)^4$ została uzyskana przy analizie torów jąder o $Z \approx 60$;

czy można ją stosować w zakresie większych wartości Z ? Wykładnik potęgowy znany jest z dokładnością nie lepszą niż około 10%; jaki wpływ ma ten błąd na ocenę Z w Lexanie, a więc na interpretację wyników? Przedruk pracy uczonych amerykańskich nie zawiera odpowiedzi na te pytania.

A może cząstka w rzeczywistości poruszała się „z dołu do góry” —wbrew stwierdzeniu zawartemu w pracy a opartemu na obserwacji elektronów delta? Należałoby zbadać tory jąder superciężkich w emulsji jądrowej, o których wiemy jaki był kierunek ich lotu, i sprawdzić jakie jest prawdopodobieństwo uzyskania w pojedynczej warstwie wyniku takiego, jak w rozważanym przypadku. I na to pytanie brak obecnie odpowiedzi.

Wydaje się więc, że rzetelność naukowa nakazuje wstrzymać się na razie od przyjęcia proponowanej interpretacji zdarzenia jako wykrycia monopola magnetycznego. Fizycy amerykańscy chyba zbyt wcześnie ogłosili światu o „odkryciu monopola”: jest to tylko jedna — lecz nie jedyna — z możliwych interpretacji. Musimy poczekać na odpowiedzi, jakich niewątpliwie udzielą oni na zgłoszone zastrzeżenia i wątpliwości. W najgorszym razie — poczekać na następną, bardziej przekonującą obserwację. Ale tak już jest w fizyce: zawsze rzetelny eksperyment ma głos decydujący.



Co komu po monopolach?

Dr Kazimierz RZAŻEWSKI, doc. dr Michał ŚWIĘCKI

Ładunek magnetyczny — pojęcie pomocnicze wprowadzone w magnetostatyce w analogii do ładunku elektrycznego w elektrostatyce. W odróżnieniu od ładunku elektrycznego, ładunek magnetyczny w rzeczywistości nie istnieje...
Encyklopedia Fizyki Tom 2, Warszawa PWN 1973

A jednak wielu fizyków wciąż spekuluje na temat: co by było, gdyby ładunki magnetyczne istniały. Dlaczego fizykom zależy na monopolach magnetycznych? Od czasu sformułowania przez J. C. Maxwella równań pola magnetycznego wskazywano na zagadkową różnicę między polem elektrycznym (E), a polem magnetycznym (B). Podczas gdy linie sił pola elektrycznego zaczynają się i kończą na ładunkach lub w nieskończoności, linie sił pola magnetycznego są zawsze zamknięte. Zgodnie z tzw. prawem Gaussa, całkowity strumień pola elektrycznego przez powierzchnię zamkniętą równa się zawartemu wewnątrz ładunkowi. Natomiast całkowity strumień pola magnetycznego przez zamkniętą powierzchnię jest równy zeru. A fizycy tak lubią symetrię! Więc może są gdzieś ładunki magnetyczne i istnieją punkty, w których mogłyby się kończyć linie sił pola magnetycznego? Wiemy dobrze jak wygląda siła Coulomba oddziaływania dwóch punktowych ładunków elektrycznych.

A gdyby istniały w przyrodzie cząstki obdarzone zarówno ładunkiem elektrycznym (e), jak i ładunkiem magnetycznym (g)? Jak wyglądałaby siła ich wzajemnego oddziaływania? Przede wszystkim centralna (a więc proporcjonalna do wektora r) siła Coulomba byłaby sumą oddziaływania elektrycznego i magnetycznego

$$(1) \quad F_c = F_{ce} + F_{cg} = \frac{e_1 e_2 + g_1 g_2}{r^2} \cdot \frac{r}{r}$$

ale to nie wszystko. Przecież pierwszy z dyonów wytwarza także pole magnetyczne. Zatem jeśli cząstki poruszają się względem siebie, to działa dodatkowo siła Lorentza. Podobną, choć o przeciwnym zwrocie siłę wywiera pole elektryczne na poruszający się ładunek magnetyczny. Dla dyonu otrzymujemy w tym przypadku

$$(2) \quad F_L = F_{Le} + F_{Lg} = (e_1 g_2 - e_2 g_1) \frac{(v_2 - v_1) \times r}{cr^3},$$

gdzie v_1 i v_2 oznaczają odpowiednio wektory prędkości pierwszego i drugiego ładunku, a c — jest prędkością światła.

Pojawienie się niecentralnej, zależnej od prędkości, siły oddziaływania między dyonami odróżnia zachowanie się układu cząstek o obu ładunkach od zachowania się zwykłych cząstek obdarzonych jedynie ładunkiem elektrycznym. Ale tu uważny Czytelnik może spytać: Czy rzeczywiście tak łatwo dostrzec ładunki magnetyczne? Załóżmy przez moment, że wszystkie naładowane elektrycznie cząstki elementarne mają prócz ładunku elektrycznego także ładunek magnetyczny

o takiej własności, że stosunek $\frac{e}{g}$ jest fundamentalną, uniwersalną stałą. Wówczas wszystkie

siły Lorentza (2) znikają. Więcej, można wówczas łatwo udowodnić, że przez odpowiednie przedefiniowanie pola elektrycznego i magnetycznego można się całkowicie wyzволić od ładunków magnetycznych. Zatem powiedzieć, że nie ma ładunków magnetycznych, to tyle, co powiedzieć, że występują one zawsze w stałej proporcji wraz z ładunkiem elektrycznym. Nasz punkt wyjścia, argument o symetrii między elektrycznością a magnetyzmem nie jest więc zbyt mocny. Wkrótce podamy lepszy argument na rzecz monopoli. Na razie załóżmy, że mamy dwa dyony, dla których

$$\frac{e_1}{g_1} \neq \frac{e_2}{g_2}$$

Zagadnienie ruchu dwóch ciał oddziałujących między sobą siłą Coulomba odegrało doniosłą rolę w rozwoju fizyki. Przypomnijmy, że rozwiązanie równania ruchu dla tego problemu pozwoliło Newtonowi uzasadnić odkryte na drodze obserwacji astronomicznych tzw. prawa Keplera, a na początku naszego stulecia przyjęcie dla tego ruchu tzw. postulatów kwantowania przez N. Bohra pozwoliło wyjaśnić najważniejsze własności widma promieniowania elektromagnetycznego atomu wodoru.

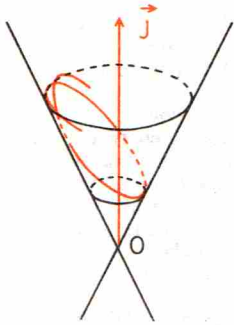
$$F_c = \frac{e_1 e_2}{r^2} \cdot \frac{r}{r}$$

Fizycy lubią nadawać nazwy wszelkim cząstkom, nawet takim, których istnienie nie zostało potwierdzone przez doświadczenie. J. Schwinger zaproponował nazwę „dyon” dla cząstki obdarzonej obu rodzajami ładunku.

Siła Lorentza działająca na ładunek elektryczny e

$$F_L = eE + \frac{e}{c} v \times B$$

Dla dyonu wzór ten trzeba zmodyfikować, podobnie jak siła Coulomba została zmodyfikowana we wzorze (1).



Komitet Główny Olimpiady Fizycznej wolał uniknąć mówienia o monopolech i w tekście zadania występuje biegun długiego magnesu!

Gdyby dyony istniały podobnie fundamentalną rolę odgrywałaby znajomość ruchu dyonium, czyli układu dwóch dyonów. Wymienimy kilka prostych własności tego ruchu: Moment pędu dwu dyonów w układzie środka masy $L = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ nie jest stałą ruchu. Jest jednak wektorowa stała ruchu podobna do L , którą odkrył Poincaré jeszcze w 1896 roku:

$$(3) \quad \mathbf{J} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} - \frac{(e_1 g_2 - e_2 g_1)}{r} \cdot \mathbf{r};$$

m w tym wzorze oznacza tzw. masę zredukowaną: $\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$, a \mathbf{v} jest wektorem prędkości względnej.

Dokładniejsze rozważania pozwalają wykryć, że dodatkowy człon we wzorze (3) to moment pędu pola elektromagnetycznego wytworzonego przez układ dwóch cząstek. Jest to piękne przypomnienie fizyczności pola. W zwykłym problemie Coulomba mamy oddzielnie zachowane obie części momentu pędu: mechanicznego i polowego. Łatwo o tej drugiej części zapomnieć.

Zatem \mathbf{J} dane wzorem (3) jest po prostu całkowitym momentem pędu. Ponieważ iloczyn skalarny

$$\mathbf{J} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = - \frac{(e_1 g_2 - e_2 g_1)}{c}$$

jest w czasie ruchu wielkością stałą, więc kąt jaki tworzy wektor cząstki z kierunkiem wektora \mathbf{J} nie zmienia się w czasie ruchu. Miejsce geometryczne takich punktów, których wektory wodzące pozostają pod stałym kątem do pewnego kierunku tworzy powierzchnię stożka. Trajektoria dyonium leży więc na stożku (Stożek ten przechodzi w płaszczyznę gdy $e_1 g_2 - e_2 g_1 = 0$). Zamiast keplerowskich elips dla ruchu dyonium otrzymujemy rozetki jak na rysunku. W pewnym szczególnym przypadku może także wystąpić ruch po okręgu. Przypadek ten był dyskutowany w zadaniu z jednej z ostatnich Olimpiad Fizycznych i proponujemy jego samodzielny analizę Czytelnikowi.

Czy pamiętamy, że zgodnie z mechaniką kwantową rzut wektora momentu pędu na pewien kierunek nie może być wielkością dowolną? Taki rzut jest skwantowany, może być jedynie całkowitą wielokrotnością stałej Plancka \hbar podzielonej przez 2π , oznaczanej też symbolem \hbar . Jeśli zasadę kwantowania momentu pędu można rozciągnąć na dyony, to wynika z niej, że

$$(4) \quad J_r = \mathbf{J} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = - \frac{(e_1 g_2 - e_2 g_1)}{c} = n\hbar,$$

gdzie n jest liczbą naturalną lub też

$$(5) \quad - \frac{(e_1 g_2 - e_2 g_1)}{c} = \frac{1}{2} n\hbar,$$

jeśli przyjąć, że J_r może się zachowywać jak spinowy moment pędu np. elektronu, który może przyjmować wartości połowkowe. W postaci (5) wyprowadził zasadę kwantowania ładunku J. Schwinger. Wiele lat wcześniej, w 1931 roku P.A.M. Dirac na całkowicie odmiennym drodze argumentował, że dla każdej cząstki o obu ładunkach powinno być

$$(6) \quad \frac{e \cdot g}{c} = n\hbar,$$

Ten właśnie wzór wywołał pewne zainteresowanie ładunkiem magnetycznym w czasach nam współczesnych. W uznaniu zasług Diraca mówi się nawet często o monopole Diraca. Dlaczego wzór (6) jest tak ważny?

Wiemy, że ładunek elektryczny występuje w przyrodzie jedynie w wielokrotnościach ładunku elementarnego e_0 . Wzór (6) nakłada zatem warunek na możliwy ładunek magnetyczny towarzyszący elementarnemu ładunkowi elektrycznemu. Elementarny ładunek magnetyczny byłby więc równy

$$(7) \quad g_0 = \frac{\hbar c}{e_0}.$$

Jak wiemy zwykle oddziaływania elektromagnetyczne są stosunkowo słabe, ponieważ bezwymiarowa stała α , tak zwana stała struktury subtelnej, równa się

$$(8) \quad \alpha = \frac{e_0^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}.$$

Podobna stała dla oddziaływania monopolu magnetycznych wynosi

$$(9) \quad \beta = \frac{g_0^2}{\hbar c} \approx 137.$$

jak wynika z wzoru (7). Tu kryje się cała asymetria między ładunkami, mówią zwolennicy monopolu. Siła przyciągania dwóch elementarnych monopolu jest przecież ponad 10 000 razy większa niż siła przyciągania elementarnych ładunków.

Zastanówmy się teraz, jakie konsekwencje dla oddziaływań między cząstkami elementarnymi mogłoby mieć istnienie cząstek obdarzonych ładunkiem monopolowym. Czy ewentualne odkrycie takich cząstek mogłoby nam pomóc w zrozumieniu mikroświata i rządzących nim praw? Przypomnijmy, że istnieje w świecie cząstek elementarnych pewien bardzo ważny rodzaj sił, które są odpowiedzialne za wiązania protonów i neutronów w jądra atomowe, a także rządzą oddziaływaniami między większością spośród kilkuset znanych dotychczas cząstek. Obecność tych oddziaływań, zwanych silnymi, od przeszło dwudziestu już lat spędza sen z powiek fizykom. Nasze zrozumienie istoty oddziaływań silnych jest jeszcze bowiem wciąż bardzo fragmentaryczne. W bardzo dużym uproszczeniu podstawowy problem

$$e_0 = 1,60218(92 \pm 46) \cdot 10^{-19} \text{C}.$$



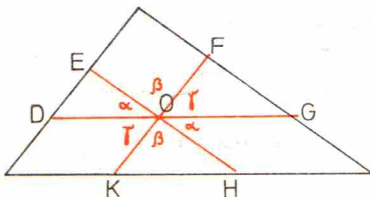
Rozwiązanie zadania M75.

Mamy (patrz rysunek)

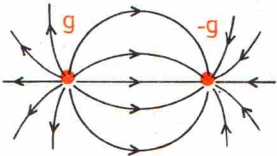
$$T = \frac{1}{2} DO \cdot EO \cdot \sin \gamma + \frac{1}{2} KO \cdot HO \sin \beta$$

$$+ \frac{1}{2} GO \cdot FO \sin \gamma$$

Iloczyn pól równoległoboków wynosi $DO \cdot KO \cdot \sin \gamma + HO \cdot GO \sin \alpha + EO \cdot FO \cdot \sin \beta$ czyli 8T.



sprowadza się do tego, że protony, neutrony i wiele innych cząstek zwanych hadronami (jak powiedzieliśmy znamy już kilkaset hadronów) wydają się być zbudowane z trzech lub czterech podstawowych cząstek nazwanych kwarkami. W każdym razie taki obraz struktury wewnętrznej hadronów zdają się sugerować tysiące przeprowadzonych dotąd doświadczeń. Nie ma wśród nich jednak najważniejszego doświadczenia, jakim byłoby zaobserwowanie swobodnego kwarku. Nawet bombardowanie protonów cząstkami o gigantycznych energiach nie doprowadziło do rozbicia struktury wewnętrznej na oddzielne kwarki. Atomy składają się z jąder i elektronów, jądra atomowe z protonów i neutronów i tory tych cząstek (z wyjątkiem neutralnego elektrycznie neutronu) obserwujemy w naszych doświadczeniach. A kwarków wciąż nie ma. Czyżby istniały one wyłącznie wewnątrz hadronów? Jeśli tak, to jaka siła wiąże je w struktury, których nie można rozbić? Otóż okazuje się, że gdyby kwarki miały niezerowy ładunek monopolowy, mogłyby być to zwykła siła przyciągania elektromagnetycznego.



Jak widzieliśmy poprawność teorii wymaga, żeby ładunek monopolowy był ogromny, dziesięć razy większy niż odpowiednia stała oddziaływania między protonami i neutronami w jądrze atomowym. Tak więc na rozerwanie dipola magnetycznego (patrz rysunek) trzeba by wykonać pracę znacznie większą niż praca wykonywana przy rozbiciu jądra. Energia „jonizacji” takiego dipola byłaby ogromna. A co ze stosunkowo małą w tej skali energią oddziaływania protonów z neutronami. Otóż w opisywanej sytuacji hadrony byłyby właśnie dipolami, a czasem tripolami magnetycznymi z sumarycznym ładunkiem monopolowym równym zero. Już z praw fizyki klasycznej (niekwantowej) wynika, że na odległościach dużych w porównaniu z rozmiarami dipoli działałaby na nie znacznie mniejsza siła, podobnie jak to ma miejsce dla dwóch dipoli elektrycznych. W mniejszych odległościach, na których widać już oddzielne dyony siła znacznie szybko rośnie. W ten sposób moglibyśmy wytłumaczyć bardzo ważną własność sił jądrowych, a mianowicie wyjątkowo krótki zasięg ich działania. Mówiąc o oddziaływaniach dwóch dipoli magnetycznych posługiwaliśmy się elektrodynamiką klasyczną. Tymczasem przy tak silnych oddziaływaniach i małych odległościach świat przestaje być klasyczny i właściwym językiem do opisu powinna być elektrodynamika kwantowa. Jednak nawet wtedy jakościowe cechy opisanego obrazu oddziaływania nie zmieniają się. Dobrą analogią może być tu zagadnienie oddziaływań międzycząsteczkowych, którego nie da się rozwiązać bez pomocy równań fizyki kwantowej. Obojętne elektrycznie cząsteczki chemiczne przyciągają się stosunkowo słabymi i krótkozasięgowymi siłami, chociaż elektrony i jądra oddziałują między sobą siłami silniejszymi o zasięgu nieskończonym. Niestety konieczność stosowania metod fizyki kwantowej do opisu oddziaływania dużych ładunków bardzo utrudnia praktycznie wszystkie obliczenia. Sprowadzenie wszystkich oddziaływań silnych do znanych dobrze oddziaływań elektromagnetycznych byłoby bardzo miłym gestem ze strony przyrody. Nawet jednak na tak dobrze znanym terenie ładunków, monopoli i magnesów nie potrafimy sobie dobrze radzić, gdy oddziaływania między nimi są za silne. I dlatego wszystkie powyższe rozważania o kwarkach — dyonach należy ciągle jeszcze traktować jako zbiór ciekawych hipotez, a nie jako matematycznie niesprzeczną teorię fizyczną.

Na zakończenie spróbujemy odpowiedzieć na pytanie: Czy możliwa jest sytuacja, w której monopole w ogóle nie mogłyby opuścić hadronów? Nawet przy dostarczeniu im największych energii. Okazuje się, że tak. W dipolu magnetycznym linie sił pola magnetycznego rozchodzą się po całej przestrzeni (patrz rysunek). Mówimy, że taka sytuacja jest najdogodniejsza energetycznie, energia pola jest wtedy minimalna. Możemy jednak, włączając dodatkowe oddziaływania, np. z pewnymi hipotetycznymi nowymi cząstkami, zmienić warunki energetyczne. Przebieg linii sił zmieni się wtedy. Okazuje się, że można tak dobrać te dodatkowe oddziaływania, żeby najkorzystniejsza energetycznie była sytuacja, w której linie sił zajmują jak najmniejszą objętość. Tworzą one wtedy jakby wąską rurkę rozciągającą się między monopolami. W rurce tej gęstość linii jest ogromna, a pole magnetyczne jednorodne. Na dyony działa wtedy nie zależąca od odległości stała siła. Na rozerwanie ich (oddalenie na odległość nieskończoną) trzeba teraz wykonać nieskończoną pracę. Taka rurka (z polem przypominającą strunę, na której końcach umieszczone są kwarki, ma szereg bardzo ciekawych własności. Przekracza to jednak ramy tego i tak długiego artykułu.



WYNIKI KONKURSU WAKACYJNEGO

Teoria tęczy została przedstawiona w Delcie nr 10, 1975 i teraz dla wszystkich jest chyba oczywiste, jakie błędy popełnił Wacław Szymanowski. Prawie wszyscy uczestnicy konkursu trafnie zauważyli, że układ barw tęczy na reprodukowanym obrazie jest odwrócony w porównaniu z barwami obserwowanymi w rzeczywistości i że Słońce, środek okręgu tęczy i obserwator (bez względu na to, gdzie umieszciliby siebie w tej roli) nie leżą na obrazie w jednej płaszczyźnie. Znacznie mniej Czytelników zwróciło uwagę na to, że namalowany łuk tęczy nie jest częścią okręgu. Dwie osoby oceniły wysokość Słońca na podstawie długości cienia kobiety. Wprawdzie ocena taka jest wątpliwa ze względu na skrót perspektywny oraz niejasną interpretację kształtu cienia, ale wydaje się, że rzeczywiście Słońce dające taki cień jak na obrazie ma wysokość znacznie większą niż $42,5^\circ$. Jeżeli tak jest, to nawet w lekko pofalowanym terenie tęczy w ogóle nie moglibyśmy zobaczyć. Chcielibyśmy jeszcze zwrócić uwagę, że tęcza nie musi, jak sądzą niektórzy Czytelnicy, dochodzić do samego horyzontu. Zależy to od rozmieszczenia chmur deszczowych czy też mgły.

Nagrody książkowe otrzymują: Anna Bęc — Sandomierz, Marek Szyjewski — Częstochowa, Wiesława Towińska — Grodzisk Maz., Robert Tridl — Puławy i Bronisław Zajac — Jastrzębie.
Nagrody wysyłamy pocztą.

Jeszcze raz o wzorze Eulera, czyli zastosowanie stawów i grobli w stereometrii

Dr Jan A. REMPAŁA

W 1752 roku znakomity matematyk szwajcarski Leonard Euler, podówczas profesor Akademii Nauk w Berlinie, odkrył zadziwiający związek między liczbami s , k , w ścian, krawędzi i wierzchołków dowolnego wielościanu wypukłego W . Związek ten jest obecnie nazywany *wzorem Eulera dla wielościanów* i zwykle zapisuje się go w postaci

$$s - k + w = 2.$$

Podamy elementarny i chyba nader zabawny dowód tego wzoru. Zauważmy przede wszystkim, że jeśli nasz wielościan W poddamy dowolnemu przekształceniu f nie „rozrywającemu” i nie „sklejającemu” (homeomorfizmowi), to otrzymany zbiór $W' = f(W)$ może już nie być wielościanem, ale możemy mówić o jego „ścianach”, „krawędziach” i „wierzchołkach” przyjmując, że są to obrazy odpowiednio ścian, krawędzi i wierzchołków W . Oczywiście przy takiej umowie liczby „ścian”, „krawędzi” i „wierzchołków” dla W' są takie same jak dla W .

Wyobraźmy sobie, że powierzchnia S wielościanu W jest cienką, elastyczną powłoką np. gumową, wewnątrz pustą — a przekształcenie f jest deformacją W na kulę W' otrzymaną przez nadmuchiwanie powłoki S . Kula W' nie jest co prawda wielościanem, ale może być pogładowo interpretowana jako globus i wtedy jej powierzchnia S' jest mapą na globusie. Kraje na mapie S' to obszary powierzchni kuli będące obrazami ścian W , granice krajów są obrazami krawędzi, zaś punkty rozgałęzienia granic (wierzchołki mapy) są obrazami wierzchołków W . Mapa ta zawiera więc wszelkie informacje potrzebne do dowodu wzoru Eulera. Możemy także, jak to zwykle zresztą się czyni z mapami, przedstawić S' na płaszczyźnie.

Wyobraźmy sobie, że wykonano to w ten sposób, że rozcięto sferę wzdłuż pewnej krzywej zawartej wewnątrz jednego ustalonego kraju. Obrazem S' jest więc płaska mapa S'' , na której jeden kraj otacza wszystkie inne. Możliwości wyobraźni są nieograniczone, więc korzystajmy z nich nadal. Wyobraźmy sobie teraz, że naszą mapę S'' odtworzono w terenie w taki sposób, że krajem zewnętrznym jest pewien zbiornik wody (np. staw), a kraje wewnętrzne są poletkami rozgrodzonymi groblami. Poletka tworzą wyspę na stawie — i to jedyną wyspę — bo są obrazem części powierzchni wielościanu W , otrzymanej przez usunięcie jednej ściany (tej, której obrazem w realizacji mapy jest staw), a ta jest oczywiście spójna. Załóżmy teraz, że przez przerwanie pewnych grobli zalaliśmy wodą wszystkie poletka działając przy tym tak efektywnie, jak matematykom przystoi, tzn. przerywając przy tym najmniejszą liczbę grobli. Obliczenie liczby A grobli przerywanych i liczby B grobli nie przerywanych doprowadzi nas do wzoru Eulera. Oczywiście $A + B = k$, bo wszystkich grobli jest tyle ile granic, więc także tyle, ile krawędzi w W . Poletek przeznaczonych do zalania było $s - 1$. Przerwanie jednej grobli pozwala zalać nie więcej niż jedno poletko, a przy naszym wymaganiu efektywności działania każde przerwanie grobli musi powodować zalanie nowego poletka — zatem $A = s - 1$. W celu obliczenia B zauważmy, że z ustalonego wierzchołka P można przejść po nienaruszonych groblach do dowolnego innego wierzchołka Q , przy czym można to zrobić tylko na jeden sposób, jeśli założyć, że żaden odcinek drogi nie jest przebywany więcej niż jeden raz (tzn. „tam i z powrotem”). Istotnie przejście z P do Q było możliwe przed rozpoczęciem nawadniania, a więc gdyby po zakończeniu było niemożliwe — to musiałaby istnieć grobla, która przed przerwaniem była z obu stron oblana wodą. Przerwanie takiej grobli nie zwiększyłoby liczby zalanych poletek, a więc byłoby sprzeczne z naszym założeniem efektywności postępowania.



1. W tym przypadku spójność „kraju” polega na tym, że każde dwa jego punkty można połączyć łamaną zawartą całkowicie w tym zbiorze.



Rozwiązanie zadania F 25

W ciągu godziny pierwsza rura napelnia jedną piątą basenu, druga opróżnia jedną dziesiątą basenu. Gdy obie rury są otwarte, to w ciągu godziny zapelnia się:

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{1}{10} \text{ pojemności basenu.}$$

Do napelnienia basenu potrzeba dziesięciu godzin.

Czy fizyk może zgodzić się z tym rozumowaniem? Porównajcie Waszą opinię z rozważaniami zamieszczonymi na str. 17.



2. Czytelnikowi zainteresowanemu dalszymi informacjami o wzorze Eulera i związanej z nim problematyką polecamy książki:

I. Dynkin, W. Uspienski: *Ciekawe zagadnienia matematyczne*. PZWS, W-wa 1956.

H. Rademacher, O. Toeplitz: *O liczbach i figurach*. PWN, W-wa 1956 r.

R. Courant, H. Robbins: *Co to jest matematyka*. PWN, W-wa 1959 r.

Gdyby zaś istniały dwie różne drogi po nienaruszonych groblach łączące P i Q , to musiałyby istnieć droga zamknięta utworzona z tych grobli, a więc ograniczony przez nią zespół poletek nie byłby zalany. Widzimy więc, że istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między nie przerwanyymi groblami a wierzchołkami różnymi od P , zatem $B = w - 1$.

Stąd

$$k = A + B = s - 1 + w - 1 = s + w - 2,$$

czyli udowodniliśmy wzór Eulera,

$$s - k + w = 2.$$

Rzućmy jeszcze raz okiem na przeprowadzony dowód. Cała jego istota zawarta jest w rozumowaniu „hydrologicznym”, dotyczącym nawadniania poletek przez przerywanie możliwie najmniejszej liczby grobli. Stąd łatwo zauważyć, że taki sam wzór jest prawdziwy dla dowolnej „mapy na globusie” — rozumianej jako układ krajów, granic i wierzchołków — przy czym granica jest częścią wspólną dwóch różnych krajów, zaś wierzchołek jest punktem przecięcia się różnych granic. Tak rozumiana „mapa” jest tworem ogólniejszym niż „mapa” otrzymana przez deformację powierzchni wielościanu (którą można by nazwać zdeformowaną siatką wielościanu). Dla takich ogólniejszych map wzór Eulera pozostaje słuszny, jeśli tylko żaden kraj nie rozdziela mapy na dwie rozłączne części — tzn. żaden kraj nie otacza więcej niż jednej wyspy. Jeśli któryś z Czytelników uznał, że przedstawiony wyżej dowód wzoru Eulera jest zbyt mało matematyczny, to powinien zastanowić się nad większym sformalizowaniem całego postępowania. Zauważy wtedy niewątpliwie, że nie jest to wcale takie łatwe. A więc czasem proste intuicje nie dają się szybko ująć w formalne rozumowanie. Przytoczmy jeszcze dwa zadania związane z wzorem Eulera.

1. Udowodnić, że w każdym wielościanie wypukłym suma liczby ścian trójkątnych i liczby kątów trójściennych jest ≥ 8 .
2. Udowodnić, że liczbami ścian wielościanu foremnego mogą być tylko liczby 4, 6, 8, 12, 20.



Zadania

Redaguje mgr Andrzej MAKOWSKI

M 73. Jaka jest maksymalna liczba wyrazów, które może mieć po wykonaniu redukcji wyrazów podobnych wielomian n -tego stopnia m zmiennych?

(Stopniem wielomianu wielu zmiennych nazywamy największy ze stopni występujących w nim jednomianów, stopniem zaś jednomianu $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_k^{a_k}$ nazywamy liczbę $a_1 + a_2 + \dots + a_k$).
Rozwiązanie na stronie 15.

M 74. Dany jest trójkąt ABC , którego środkowe \overline{AD} i \overline{BE} przecinają się w punkcie G . Udowodnić, że jeżeli promienie kół wpisanych w trójkąty AGE i BGD są równe, to $AC = BC$.

Rozwiązanie na stronie 16.

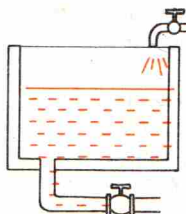
M 75. Proste równoległe do boków trójkąta i przechodzące przez jego punkt wewnętrzny O podzieliły ten trójkąt na trzy trójkąty i trzy równoległoboki. Iloczyn pól trójkątów wynosi T . Obliczyć iloczyn pól równoległoboków.

Rozwiązanie na stronie 5.

Redaguje dr Andrzej ZIEMIŃSKI

F 25. Pamiętajcie na pewno ze szkoły podstawowej klasyczne zadanie o basenie: „Do basenu prowadzą dwie rury. Pierwsza może napęlić basen w ciągu 5 godzin, druga może go opróżnić w ciągu 10 godzin. W jakim czasie można napęlić basen, jeżeli otworzy się obie rury równocześnie?” (patrzcie, rysunek obok).

Na stronie 7 zamieszczamy rozwiązanie od wieków pokutujące w podręcznikach szkolnych. Przyjrzyjcie się temu rozwiązaniu jako fizycy.



Smata delta



Sprawiedliwa — czy niesprawiedliwa

Rzucamy monetą. Jeśli wypadnie orzeł — wygrywam ja, jeśli reszka — wygrywa mój przeciwnik. Czy jest to gra sprawiedliwa? Uważam, że tak. A oto inna gra. Rzucamy kostką do gry. Jeśli wypadnie szóstka — wygrywa mój przeciwnik, jeśli co innego — wygrywam ja. W moim odczuciu ta gra jest niesprawiedliwa, niekorzystna dla mojego przeciwnika. Czy zgadzacie się ze mną? Jeśli tak, to w porządku, rozumiemy się doskonale. Zaproponuję teraz inną grę. Rzucamy monetą wielokrotnie — aż do momentu, kiedy w kolejnych trzech rzutach wypadną trzy orły albo trzy reszki. W tym pierwszym wypadku wygrywam ja, w drugim mój przeciwnik. Zasady gry proste, choć na rozstrzygnięcie trzeba czasem czekać dość długo. Oto przykład rozgrywki rozstrzygniętej dopiero po dwunastu rzutach.

OROORORORRR — wygrał mój przeciwnik.

Czy jest to gra sprawiedliwa? Niewątpliwie tak. Spróbujmy jednak zmienić nieco jej przepisy. Ja będę czekał na taki ciąg kolejnych wyników: orzeł, reszka, reszka; mój przeciwnik natomiast wyczekuje rezultatu: reszka, reszka, orzeł.

Rzucamy aż do skutku.

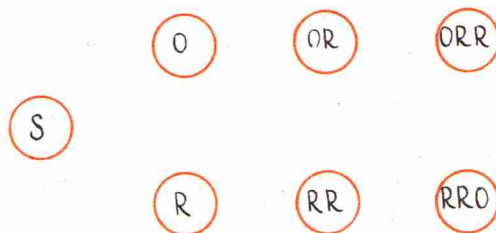
Gra bardzo podobna do poprzedniej — radziłbym jednak dobrze się zastanowić nim odpowiecie na pytanie, czy jest ona sprawiedliwa. A najlepiej wykonajcie eksperyment. Poszukajcie sobie cierpliwego partnera i rozegrajcie 40 partii, ostatecznie można grać nawet z samym sobą. Jeśli około 30 z nich przyniesie wygraną graczowi, który obstawił wynik ORR — to — uchylę Wam rąbka tajemnicy — nie będzie to przypadkiem. W tej grze szanse nie są równe. Spróbujmy jednak wydedukować, dlaczego.

Dla porównania szans obydwu graczy przywołamy na pomoc interesującą i bardzo skuteczną metodę — przełożywszy reguły naszej gry na język *grafów*. Sądzę, że potrafię wyjaśnić Wam, o co chodzi.

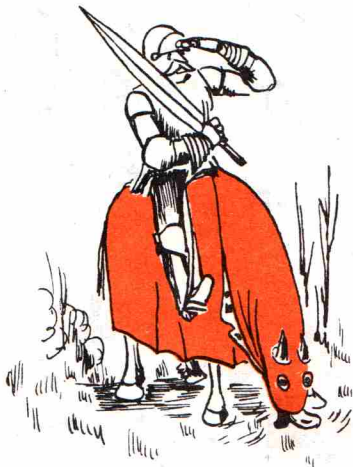
Wypiszmy kolejne rezultaty po drodze do sukcesu jednego z graczy:

O, OR, ORR

i drugiego: R, RR, RRO. Dorzućmy do tego sytuację przed wykonaniem pierwszego rzutu i oznaczmy ją literą S — jak start. Otrzymamy w ten sposób 7 stanów: O, OR, ORR, R, RR, RRO, S. Teraz będziemy rysować między nimi strzałki.

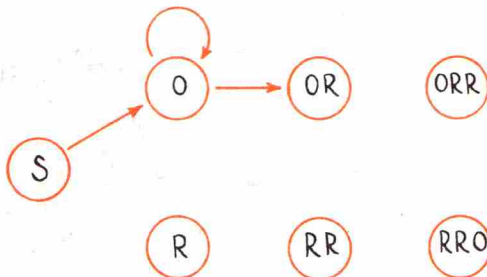


GRAF

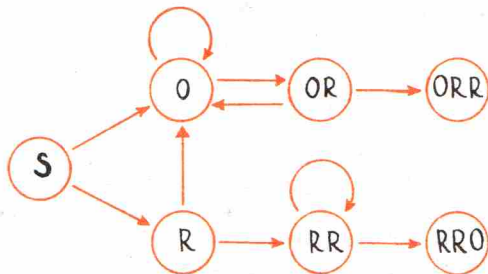


Zacznijmy od pierwszego wypisanego stanu, O. Wczujmy się dobrze w sytuację i wyobraźmy sobie, że gra dopiero się rozpoczęła, rzuciliśmy monetą raz i wypadł orzeł. Co się może zdarzyć dalej? W drugim z kolei rzucie wypadnie orzeł lub reszka. Jeśli reszka, przejdziemy ze stanu O do stanu OR, natomiast jeśli wypadnie orzeł — przechodzimy do stanu OO. Takiego stanu wprowadzić brak na naszej liście, ale też wcale nie jest on nam potrzebny. Z punktu widzenia dalszej rozgrywki sytuacja OO jest dokładnie taka sama jak sytuacja O.

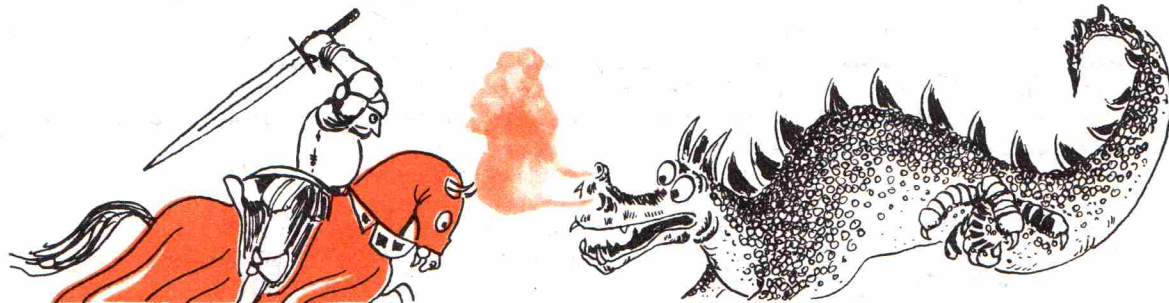
Dlatego narysujemy takie dwie strzałki: pierwszą od stanu O do stanu OR i drugą od stanu O do ... tego samego stanu O. Na rysunku, który zaczyna przekształcać się w graf, wyglądać to będzie tak:



A cały graf przybierze ostatecznie taką postać (sprawdźcie, czy wszystkie strzałki są narysowane poprawnie):



Mając do pomocy graf nietrudno zorientować się w szansach obydwu graczy. Okazuje się, że wynik gry jest przesądzony po drugim, jeśli już nie po pierwszym rzucie. Dojść po strzałkach do stanu RRO, co odpowiada wygranej drugiego gracza, można tylko wtedy, jeśli zarówno w pierwszym, jak i w drugim rzucie wypadnie reszka. Inne możliwości a konkretnie: OO, OR i RO nieuchronnie prowadzą do stanu ORR, a więc do wygranej gracza pierwszego. Można się więc domyślać, że szanse graczy będą w stosunku 3:1 na korzyść pierwszego z nich. Że tak jest w rzeczywistości — przekonajcie się przeprowadzając doświadczenie, które Wam zaproponowałem.



A na zakończenie mam dla Was kilka zadań. Pomóżcie się nad nimi trochę oczekując na ukazanie się następnego numeru Małej Delt. Zdradzę wam tajemnicę, że znajdziecie tam opis Probabilistycznego Abaku, czyli maszyny do rozwiązywania różnych ciekawych zadań z rachunku prawdopodobieństwa.

Zadanie 1. Narysujcie odpowiedni graf i porównajcie szanse graczy w takiej grze. Jeden z graczy obstawia wynik ROO, drugi RRO. Tak jak w poprzedniej grze rzuca się monetą aż do skutku.

Zadanie 2. Jeden z graczy wybiera dowolny ciąg trzech kolejnych wyników rzutu monetą. Drugi z graczy wybiera dowolny inny. Tak jak poprzednio rzuca się monetą aż do skutku. Czy wolelibyście wybierać wynik jako pierwszy, czy jako drugi?

Zadanie 3. Spróbujcie narysować graf i porównać szanse graczy w takiej grze: rzuca się kostką do gry dopóty, dopóki nie wypadnie parzysta liczba oczek lub 1 i 3 obojętnie w jakiej kolejności i niekoniecznie pod rząd. W pierwszym przypadku (wyrzucenie liczby parzystej przed 1 i 3) wygrywa gracz pierwszy, w innym wypadku, gracz drugi. Dla uniknięcia nieporozumień podam dwa przykłady rozgrywek:

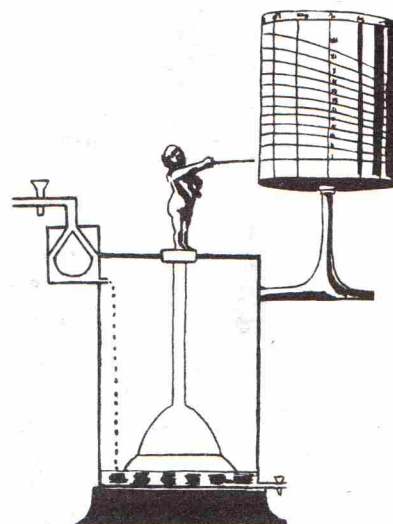
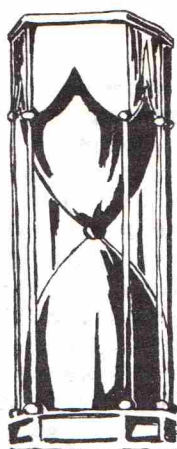
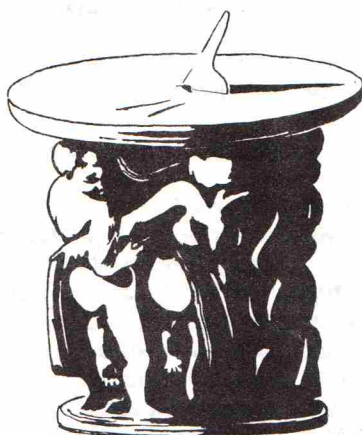
1, 1, 5, 4 — wygrał gracz pierwszy

3, 5, 3, 1 — wygrał gracz drugi



Co się może zdarzyć w mgnieniu oka

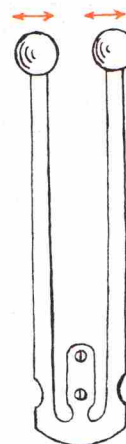
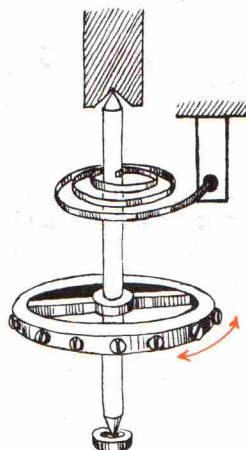
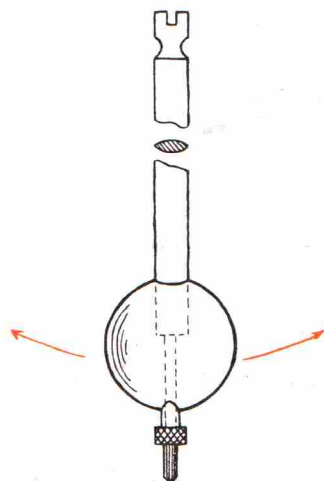
Czy „mgnienie oka” trwa długo, czy krótko? — To zależy dla kogo! Dla człowieka jest to najkrótsza chwila, jaką potrafi on sobie uzmysłowić. Dla naszego oka trwa to tak krótko, że nawet nie dostrzega ono chwilowego przesłonięcia pola widzenia. Nie możemy jednak do wszystkiego przykładać naszej ludzkiej miarki. Dokładne pomiary wykazały, że mgnienie oka trwa $\frac{2}{5}$ sekundy. W tym czasie lecąca mucha wykonuje ponad 100 ruchów skrzydełkami. Sprinter przebiega w mgnieniu oka około 4 metrów, samolot przebywa drogę 100 metrów, a światło aż 120 000 km. W życiu codziennym nie interesujemy się tak szybkimi ruchami, nie potrzebujemy więc bardzo dokładnych zegarów.



Dawniej ludzie przy ocenie czasu kierowali się ruchem dziennym Słońca i to im całkowicie wystarczało. Na starych zegarach, pochodzących sprzed wieku XVIII nie ma wcale wskazówki minutowej. Wskazówka sekundowa pojawiła się dopiero pod koniec XIX wieku, ale na co dzień nawet dzisiaj nie jest nam ona potrzebna. Nie oznacza to jednak, że nigdy nie korzystamy z dokładniejszych zegarów. Chcąc badać procesy przebiegające bardzo szybko, musimy umieć mierzyć czas z bardzo dużą dokładnością.

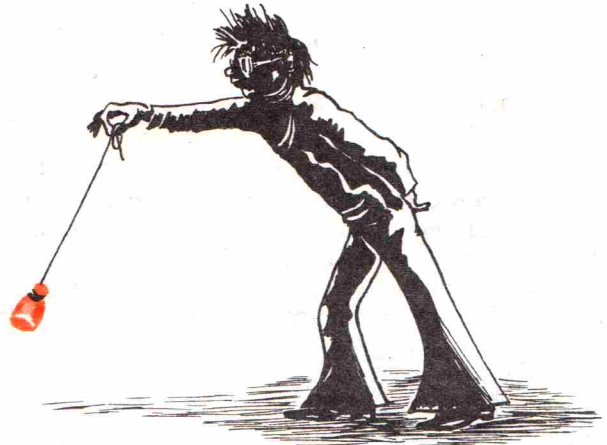
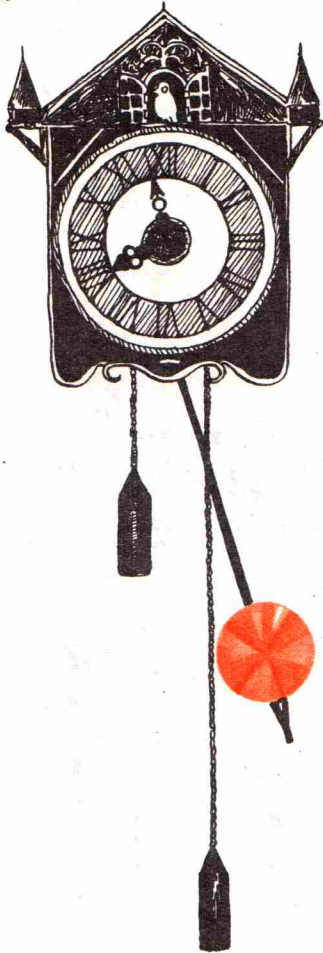
Na czym polega działanie większości zegarów?

Na ogół w zegarach wykorzystuje się regularnie powtarzający się ruch jakiegoś ciała, tzw. ruch okresowy. Przykładem takiego ruchu są wahania małego ciężarka zawieszonoego na nitce.



Zrób sam wahadło sekundowe

Weź mały ciężarek, np. stalową nakrętkę na śrubie i przywiąż ciężarek do końca mocnej nitki. Trzymając drugi koniec nitki w ręce, wpraw ciężarek w ruch wahadłowy o niedużych wychyleniach. Uważaj, żeby ani ciężarek, ani nitka niczego nie dotykały. Czas potrzebny na to, by ciężarek przebył drogę od jednego położenia krańcowego do drugiego i z powrotem, nazywa się okresem wahań wahadła. Czas ten zależy od długości nitki. Im dłuższa nitka, tym dłuższy okres wahań.

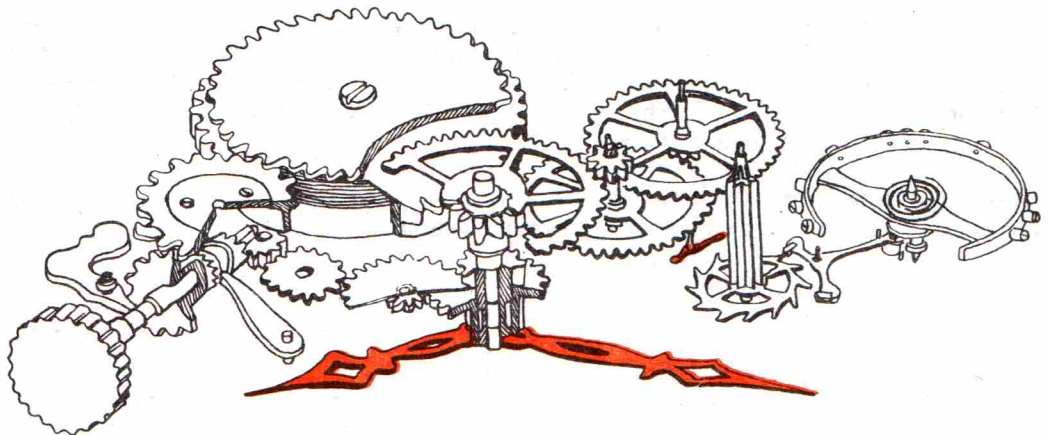


Możesz tak dobrać długość nitki, by okres wahań wyniósł dwie sekundy. Ruch w jedną stronę trwa wtedy, oczywiście, jedną sekundę. Takie wahadło nazywa się „sekundowym”. Możesz skorzystać z podanej na marginesie zależności między długością nitki l , a okresem wahań, T .

Jeśli wolisz, wyznacz długość wahadła sekundowego doświadczalnie. Trzeba wypróbować wahadła o różnej długości, np. wydłużać nić po 5 cm począwszy od 80 cm. Za każdym razem mierz czas trzydziestu pełnych wahań tam i z powrotem. Jeśli wyniesie on 60 sekund, to będzie oznaczało, że udało ci się skonstruować wahadło sekundowe. Powinieneś otrzymać takie wahadło długości około metra. Wystarczy teraz liczyć wahania, żeby wiedzieć z dokładnością do sekundy, ile czasu upłynęło od chwili wprawienia w ruch twojego zegara. Oczywiście, w prawdziwym zegarze jest mechanizm, który „liczy” wahania i tłumaczy liczbę wahań na godziny, minuty i sekundy.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

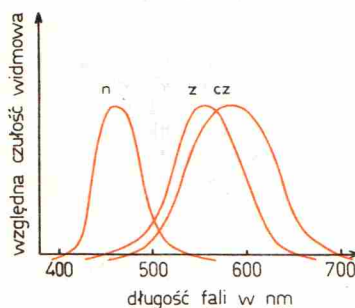
$$g = 9,81 \frac{m}{s^2}$$



Można łatwo zwiększyć dokładność zegara, jeśli skorzysta się z wahadła o mniejszym okresie wahań. W najdokładniejszych zegarach, tzw. atomowych, nie ma wahającego się ciężarka. Jego rolę odgrywają drgania elektromagnetyczne w atomach. Dokładniejszy opis działania zegarów atomowych znajdziesz w *Delcie* 2/1975. Zegary atomowe mogą mierzyć czas z dokładnością do miliardowej części sekundy. Takie zegary mylą się nie więcej niż o jedną sekundę na kilkaset lat.

OKO I BARWA

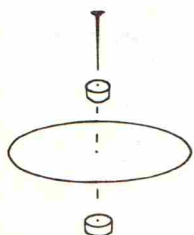
Każdy z nas miał z pewnością okazję przekonać się, że białe światło słoneczne można rozdzielić na wszystkie kolory tęczy. Ile ich jest? Najczęściej wymienia się sześć lub siedem; gdyby liczyć wszystkie odcienie — byłoby ich okropnie dużo. Naturalne jest pytanie, czy wszystkie te kolory są niezależne, czy też niektóre z nich można otrzymać mieszając inne w określonych proporcjach. Odpowiedź jest powszechnie znana: przez mieszanie można z trzech odpowiednio wybranych barw podstawowych otrzymać wszystkie inne. Zasadę tę wykorzystuje się w kolorowej fotografii, druku i telewizji. Można sobie wyobrazić jak strasznie te dziedziny techniki musiałyby być skomplikowane, gdyby nasze oczy nie dawały się tak oszukiwać. Żeby sobie uświadomić, dlaczego nie potrafimy odróżnić np. czystej widmowo barwy pomarańczowej od mieszaniny barw żółtej i czerwonej, musimy sobie przypomnieć



Rys. 1 — Rozkłady widmowe czułości trzech rodzajów receptorów barwnych oka (według Encyklopedii Fizyki)

JAK OKO ODBIERA BARWY?

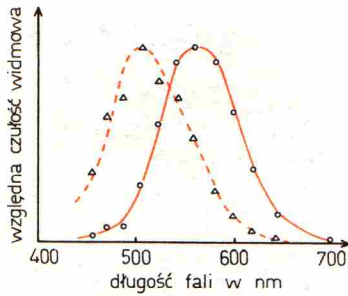
Przede wszystkim możliwe jest to tylko przy odpowiednio dużym natężeniu światła. Najczulsze receptory siatkówki oka — *pręciki* — nie rozróżniają bowiem barw. Przy silniejszym oświetleniu zaczynają działać *czopki*. Posiadają one trzy rodzaje odbiorników światła o różnych widmowych rozkładach czułości (rys. 1). Światło barwne wpadające do oka wytwarza więc w czopkach trzy sygnały. W zależności od barwy światła będą one pozostawać w różnych proporcjach. Widać teraz dlaczego człowiek nie jest w stanie przeprowadzić okiem pełnej analizy widmowej — otrzymuje trzy sygnały, a zbioru wszystkich możliwych trójek liczb (przestrzeni trójwymiarowej euklidesowej) nie można przekształcić homeomorficznie na zbiór wszystkich rozkładów widmowych. Już przy mieszaninie czterech składników nie dałoby się określić, ile każdego z nich składa się na określoną barwę — taką samą dla oka barwę można by realizować mieszając je w różnych proporcjach. Dla ścisłości należy dodać, że wbrew temu, co powiedziałem na wstępie, nie da się dobrać takich trzech barw podstawowych, które pozwalałyby na otrzymanie wszystkich możliwych barw — wynika to z nakładania się trzech krzywych z rys. 1. Do celów praktycznych trzy barwy podstawowe w zupełności jednak wystarczają. Ponieważ maksima czułości trzech rodzajów odbiorników wypadają dla światła niebieskiego, zielonego i czerwonego, rozsądne wydaje się przyjęcie tych trzech barw jako podstawowych. Jakie to daje wyniki? Spróbujmy sami, a przekonamy się. Na okładce (ostatnia strona) znajduje się szereg krążków podzielonych na sektory o barwach podstawowych (nr 1—5). Wycinając je i przekładując szpilkami można zrobić z nich małe bączki (rys 2). Kręcąc nimi możemy mieszać barwy namalowane na krążkach — zobaczycie co wyjdzie. O ile druk odda zadowalająco oryginalne kolory, piąty krążek da barwę zbliżoną do białej. Żebyście nie popadli w samozadowolenie — dwie zagadki: Myślicie, że krążek nr 6 z barwami żółtą i niebieską da zieloną? Zobaczcie co wyjdzie. Krążek nr 7 jest czarno-biały. Jeśli zakręcicie nim, to wpatrując się uważnie zobaczycie kolor na jednym z ciemniejszych pierścieni. Kręcąc w stronę przeciwną — zobaczycie kolor na drugim z nich. Upprzedzam, że nie wiem, skąd się te barwy biorą. Co do krążka nr 6 proponuję zainteresowanym zajrzeć do Encyklopedii Fizyki lub podręcznika Feynmana. Znajdą tam szereg ciekawych rzeczy o widzeniu barwnym, a wśród nich informacje potrzebne do rozwiązania tej zagadki. Poświęciliśmy tyle uwagi czopkom z siatkówki oka, że każdy spyta:



Rys. 2 — Wykonanie bączka do mieszania barw

A PRĘCIKI?

Przy silnym oświetleniu są nieczynne. Znajdujący się w nich barwnik — purpura wzrokowa — rozkłada się bowiem pod wpływem światła. Dopiero po jakimś czasie przebywania po ciemku barwnik się regeneruje — wzrok przyzwyczaja się do ciemności.



Rys. 3 — Rozkłady widmowe czułości widzenia (według Feynmana): a — dziennego (czopki), b — zmierzchowego (pręciki)

Proponuję Wam zbadanie własności pręcików w następujący sposób: Wytnijcie z okładki prostokąty o różnych kolorach i postarajcie się ułożyć je według jasności. Zapiszcie kolejność. Następnie połóżcie je na stole i zaciemnijcie pomieszczenie. Musi być tak ciemno, żebyście w pierwszej chwili **zupełnie nic nie widzieli**. Po pewnym czasie (15–30 min) zaczniecie rozróżniać kontury przedmiotów w pokoju. To pręciki zaczynają działać (jeżeli przedobrzyliście z zaciemnieniem i nic nie widać, musicie trochę je „zepsuć”). Teraz ułóżcie kolorowe prostokąciki według jasności i zapalcie światło. Na pewno będziecie zdziwieni: kolejność będzie się znacznie różnić. Wynika to stąd, że maksimum czułości widmowej pręcików jest przesunięte w stronę fal krótkich (kolor niebieski) w porównaniu z wypadkową czułością czopków (rys. 3). Czy potraficie powiedzieć dlaczego?

Metody Monte Carlo (IV)

Dr Ryszard ZIELIŃSKI

OBLICZANIE CAŁEK

Po zorientowaniu się, o co w ogóle chodzi w metodach Monte Carlo (odcinek I) i po zapoznaniu się z podstawami teoretycznymi tych metod (odcinek II), możemy przystąpić do ich bardziej dokładnego studiowania.

Olbrzymia większość metod Monte Carlo jest związana z obliczaniem całek. Różne zadania z fizyki, techniki, ekonomii itd. oraz różne zadania numeryczne (takie np. jak rozwiązywanie układów liniowych równań algebraicznych lub równań różniczkowych) można „zredagować” jako zadania obliczania odpowiednich całek. Zadania rozważane przez nas w odcinku I były również zadaniami tego typu. Zajmiemy się więc teraz bardziej systematycznie takimi zadaniami.

Rozpoczniemy od bardzo prostego zadania obliczenia całki

$$(1) \quad I = \int_a^b f(x) dx,$$

zakładając o funkcji f , że jest nieujemna i ograniczona z góry, np. przez liczbę c . Uważny Czytelnik zorientuje się w toku dalszego wykładu, że nieujemność funkcji potrzebna jest tylko dla łatwiejszego wysłowienia niektórych dalszych sformułowań. Poważniejszą rolę odgrywa założenie o ograniczności funkcji, ale obliczanie całek funkcji nieograniczonych wymaga specjalnych metod i nie będziemy się tym zajmowali.

Najprostszą (choć najmniej dokładną) metodą obliczania całki I związana jest z szacowaniem prawdopodobieństwa sukcesu w odpowiednio skonstruowanym ciągu prób Bernoulli'ego. Będziemy używali nazwy metoda „orzęł — reszka”. A oto jej schemat.

W prostokątnym układzie współrzędnych wykreślmy funkcję f . Na rysunku obok zakreślono tę część prostokąta $ABCD$, która leży pod wykresem funkcji f . Całkę I możemy interpretować jako pole powierzchni zakreślonej figury. Figurę tę oznaczamy przez F .

Jeżeli na prostokąt $ABCD$ będziemy rzucali na chybił-trafił punkty i za sukces będziemy uważali zdarzenie polegające na tym, że punkt upadnie na figurę F , to prawdopodobieństwo sukcesu — oznaczmy je przez p — będzie równe stosunkowi pól figury F i prostokąta $ABCD$ (patrz artykuł o prawdopodobieństwach geometrycznych w Delcie 6/1975). Wtedy oczywiście całka I wyraża się wzorem

$$(2) \quad I = p \cdot \text{Pole}(ABCD),$$

Pole $(ABCD)$ jest oczywiście równe $(b-a) \cdot c$, więc dla oszacowania całki wystarczy oszacować prawdopodobieństwo p . Jest to bardzo łatwe zadanie rozważane przez nas już w poprzednich odcinkach: przypuśćmy, że na prostokąt $ABCD$ rzuciliśmy n punktów i że k spośród nich upadło na figurę F . Oszacowaniem prawdopodobieństwa p jest wtedy

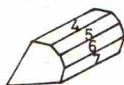
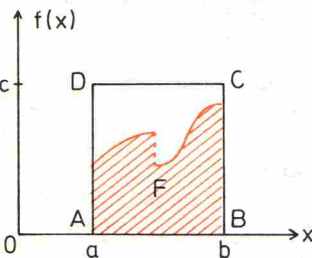
$$(3) \quad \hat{p} = \frac{k}{n},$$

a błąd tego oszacowania (patrz poprzednie odcinki) przyjmujemy $2 \cdot \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}$.

Oszacowaniem całki I jest oczywiście $\hat{I} = \hat{p} \cdot \text{Pole}(ABCD)$, a błąd tego oszacowania wynosi $2 \cdot \text{Pole}(ABCD) \cdot \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}$.

Dla praktycznego stosowania opisanej wyżej metody pozostaje nam nauczyć się jeszcze rzucania na chybił-trafił punktów na prostokąt $ABCD$. Najprościej sprawa przedstawia się wtedy, gdy $a = 0$ oraz $b = c = 1$. Wtedy oczywiście $\text{Pole}(ABCD) = 1$ i całka I jest równa po prostu prawdopodobieństwu sukcesu p . Przypuśćmy, że tak jest. Do rzucania punktów na kwadrat jednostkowy najlepiej jest użyć specjalnej „kostki” w kształcie bądź dwudziestościanu foremnego, który ma dwie ściany oznaczone cyfrą 0, dwie oznaczone cyfrą 1 itd., bądź w kształcie bączka wyciętego z prostopadłościanu o podstawie regularnego dziesięciokąta, którego boczne ściany oznaczone są kolejnymi cyframi 0, 1, 2, ..., 9.

Jeżeli np. decydujemy się na wykonywanie rachunków z dokładnością do czterech cyfr po przecinku, rzucamy osiem razy naszą kostką i zaobserwowane wyniki układamy w odpowiednie liczby. Np. po wyrzuceniu cyfr: 4, 6, 3, 0, 0, 5, 9, 2 układamy dwie liczby: $x = 0,4630$ oraz $y = 0,0592$.





Rozwiązanie zadania M 73.

Wielomian n -tego stopnia m zmiennych jest sumą jednomianów postaci

(*) $ax_1^{a_1}x_2^{a_2}\dots x_m^{a_m}$, gdzie $a_1 \geq 0$
 $a_1 + a_2 + \dots + a_m \leq n$.

Wobec równości

$$x_1^{a_1}x_2^{a_2}\dots x_m^{a_m} =$$

$$= x_1^{a_1}x_2^{a_2}\dots x_m^{a_m} \cdot 1^{n-(a_1+\dots+a_m)}$$

widzimy, że różnych jednomianów postaci (*)

jest tyle, ile jest ciągów $a_1, a_2, \dots, a_m, n -$

$-(a_1 + \dots + a_m)$, gdzie $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \dots,$

$a_m \geq 0, n - (a_1 + \dots + a_m) \geq 0$, a więc tyle,

ile jest rozwiązań równania

$$a_1 + a_2 + \dots + a_m + a_{m+1} = n$$

w liczbach całkowitych nieujemnych.

Na podstawie wyniku zadania M63

rozwiązań tych jest

$$\binom{m+1+n-1}{m} = \binom{m+n}{m}.$$

Liczby te traktujemy jako współrzędne punktu rzucałego losowo na kwadrat jednostkowy. Sukces ma miejsce oczywiście wtedy, gdy współrzędne (x, y) otrzymanego punktu spełniają warunek

$$(4) \quad y < f(x).$$

Można oczywiście wykonywać rzuty zwykłą sześcienną kostką do gry, ale wtedy szóstkę na tej kostce należałoby zastąpić zerem, a zapisaną liczbę traktować jako liczbę w szóstkowym układzie liczenia. Można również użyć zwykłej monety, pisząc np. zero, gdy w wyniku rzutu pojawi się orzeł, i jeden, gdy pojawi się reszka; teraz otrzymaną liczbę trzeba by traktować jako liczbę zapisaną w systemie dwójkowym. Są jeszcze inne metody losowania, specjalnie przystosowane do elektronicznych maszyn cyfrowych; pomówimy o nich w oddzielnym odcinku.

W ogólnym przypadku, gdy warunek $a = 0, b = c = 1$ nie jest spełniony, postępujemy w następujący sposób. Najpierw losujemy punkt z przedziału $(0,1)$ — tak jak to wyżej opisano. Dla otrzymania współrzędnej y „rozciągamy” ten przedział do przedziału $(0,c)$ mnożąc wylosowaną liczbę przez c . Dla otrzymania współrzędnej x rozciągamy przedział tak, aby miał długość równą $b-a$, a następnie przesuwamy go wzdłuż osi Ox tak, żeby jego początek miał odcięty równą a . Punkt (x', y') o współrzędnych

$$x' = a + (b-a) \cdot x,$$

(5)

$$y' = cy,$$

gdzie (x, y) jest punktem losowym w kwadracie jednostkowym, jest punktem losowym w prostokącie $ABCD$.

Reasumując, możemy sformułować następujący algorytm obliczania całki metodą „orzeł—reszka”:

1. wylosować dwie liczby x i y z przedziału $(0, 1)$;
2. obliczyć punkt (x', y') według wzorów (5);
3. sprawdzić, czy zachodzi nierówność

$$y' < f(x'),$$

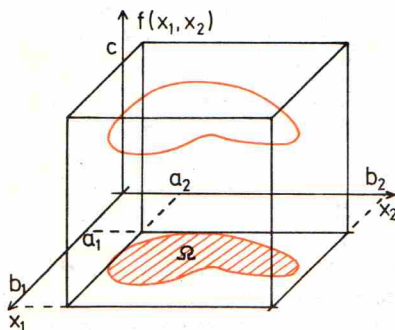
jeżeli tak — odnotować sukces, jeżeli nie — odnotować porażkę;

4. powtórzyć wszystkie powyższe czynności n razy. Jeżeli liczba sukcesów równa jest k , to oszacowaniem całki (1) jest

$$\hat{I} = \frac{k}{n} \cdot \text{Pole}(ABCD),$$

a błąd tego oszacowania wynosi

$$2 \cdot \text{Pole}(ABCD) \cdot \sqrt{\frac{k(1-\frac{k}{n})}{n}}.$$



Metoda „orzeł—reszka” w opisanej wyżej postaci jest w praktyce bardzo rzadko stosowana. Przyczyną tego jest nie tyle niedoskonałość samej metody, ile fakt istnienia innych, znacznie lepszych metod (również metod Monte Carlo) obliczania całek. Omawiana metoda bywa jednak nieraz stosowana w przypadku, gdy funkcja f jest funkcją wielu zmiennych i gdy obszar całkowania jest bardziej skomplikowany (w rozpatrywanym przed chwilą przypadku był to po prostu przedział). Wtedy zadanie polega oczywiście na oszacowaniu pewnej „objętości”. Sytuacje, jakie powstają, gdy całkuje się funkcję $f(x_1, x_2)$ dwóch zmiennych po pewnym obszarze Ω ilustruje rysunek obok.

Teraz losuje się punkt w prostopadłości zawierającym figurę, której podstawą jest obszar całkowania Ω i „sufitem” wykres funkcji $f(x_1, x_2)$. Algorytm obliczeń modyfikuje się w następujący sposób:

1. wylosować trzy liczby x_1, x_2, y w przedziale $(0, 1)$;
2. obliczyć punkt (x'_1, x'_2, y') według wzorów

$$x'_1 = a_1 + (b_1 - a_1) \cdot x_1,$$

$$x'_2 = a_2 + (b_2 - a_2) \cdot x_2,$$

$$y' = cy;$$

3. sprawdzić, czy spełnione są warunki:

$$(x'_1, x'_2) \in \Omega,$$

$$y' < f(x'_1, x'_2),$$

jeżeli tak — odnotować sukces; jeżeli chociaż jeden z tych warunków nie jest spełniony — odnotować porażkę.

Punkt czwarty algorytmu pozostaje bez zmiany, z tym że w odpowiednim wzorze pole prostokąta $ABCD$ należy zastąpić objętością prostopadłości zawierającego interesującą nas figurę; jest ona oczywiście równa $(b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot c$.

Czytelnik z pewnością bez trudu zauważy, że uogólnienie omawianej metody na przypadek całkowania funkcji większej liczby zmiennych po najbardziej wyszukanych obszarach nie nastrocza żadnych trudności.



MATEMATYCY ODZNACZENI MEDALEM FIELDSA:

1936 r. Oslo — M. L. Ahlfors i M. J. Douglas.

Następny kongres odbył się dopiero w 1950 r. w Cambridge, Massachusetts i tam medale otrzymali: A. Selberg, L. Schwartz.

1954 r. Amsterdam: K. Kodaira i J. D. Serre.

1958 r. Edynburg: K. F. Roth i R. Thom.

1962 r. Sztokholm: L. Hormander i J. Milnor.

1966 r. Moskwa: M. F. Atiyah, P. J. Cohen, A. Grothendieck, S. Smale.

1970 r. Nica: A. Baker, H. Hironaka, S. Nowikow, J. G. Thompson.

1974 r. Vancouver: E. Bombieri, D. Mumford.

O totemach i matematykach oraz co mamy zamiast Nobla

Mgr Małgorzata DUBIEL

Jest na świecie miejsce tak bardzo oddalone od Polski, że ludzie chodzą tam już prawie „do góry nogami”. Tam właśnie, nad brzegiem Pacyfiku, u stóp Gór Skalistych, wśród pachnących żywicą lasów leży prześliczne kanadyjskie miasto Vancouver. Mieszkańcy są niesłychanie dumni z piękna swojej prowincji, Kolumbii Brytyjskiej, i wspaniałych, dziwacznie rzeźbionych i pomalowanych jaskrawymi farbami wysokich słupów drewnianych — totemów Indian kanadyjskich. Wielka ich kolekcja znajduje się w parku jednego z uniwersytetów w Vancouver, kilka zdobi także inne parki w mieście.

Odkąd Indianie stali się w Kanadzie rzadkością, zaczęto się interesować ich prymitywną, ale bardzo ciekawą sztuką. Współczesna grafika kanadyjska również bardzo często sięga po wzory, wyrzeźbione kiedyś na drewnianych słupach.

W sierpniu 1974 r. pojawiła się w Vancouver olbrzymia liczba nowych totemów.

Wszystkie były czarno-czerwono-białe, takie, jak ten niżej. Można je było zobaczyć na przystankach autobusów, kursujących pomiędzy oboma uniwersytetami i centrum miasta i w wielu salach uniwersyteckich. Na ulicach pojawiło się mnóstwo Białych, Żółtych i Czarnych Braci — było ich razem około sześciu tysięcy — którzy chodzili z małutkimi totemkami, zdobiącymi ich wizytówki z nazwiskiem i nazwą ojczystego kraju. Niektórzy z nich nosili granatowe teczki, też z totemkami, a w nich totemy na okładkach różnych znajdujących się tam książek. Właścicielami tych totemów byli uczestnicy odbywającego się tam wtedy Międzynarodowego Kongresu Matematyków. Szczęśliwy dla mnie los sprawił, że nosiłam jedną z dziewiętnastu wizytówek, na których było napisane POLAND. Matematycy oczywiście nie tylko chodzili po mieście dumnie obnosząc swoje totemy. Przez dziewięć dni słuchano referatów zaproszonych przez organizatorów Kongresu wykładowców — Polskę reprezentował Profesor Z. Ciesielski z Gdańska. W wolnych chwilach gorąco dyskutowano i opowiadano sobie o najnowszych wynikach i ciekawych problemach. Wiele rozmów dotyczyło także najważniejszego wydarzenia, towarzyszącego każdemu Międzynarodowemu Kongresowi Matematyków: wręczenia medali Fieldsa.

Wszyscy wiedzą, że matematycy nie otrzymują nagrody Nobla. Dużo mniej osób wie, że jest coś, co dla matematyków ma równie wysoką rangę i budzi w ich świecie równie gorące komentarze — jest to właśnie medal, o którym wspominałam przed chwilą. No więc, co to takiego?

Historia rozpoczyna się w Toronto w 1924 r. Odbywał się tam właśnie wtedy Międzynarodowy Kongres Matematyków. Przewodniczący Kongresowi, kanadyjski matematyk J. C. Fields, zaproponował, żeby z okazji każdego kongresu przyznawano dwa złote medale za wybitne osiągnięcia z matematyki.

Na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Zurichu w 1932 r., już po śmierci Fieldsa, propozycja jego została przyjęta. Pierwsze medale przyznano na następnym kongresie, w Oslo, w 1936 r.

O przyznaniu medali Fieldsa decyduje specjalny komitet, mianowany przez Międzynarodową Unię Matematyczną. Komitet ten ma oczywiście za każdym razem inny skład. W regulaminie medalu czytamy między innymi: „[...] Ponieważ istnieje i rozwija się wiele różnych gałęzi matematyki, a odstęp między kongresami wynosi cztery lata, za każdym razem powinny być przyznawane co najmniej dwa medale [...]”.



Rozwiązanie zadania M74.

Ponieważ $GD = \frac{1}{3} AD$, więc wysokość

trójkąta BGC jest równa $\frac{1}{3}$ wysokości

trójkąta BAC opuszczonej z wierzchołka A . Wynika stąd, że pole trójkąta BGC równe

jest $\frac{1}{3}$ pola trójkąta ABC . Podobnie

można wykazać, że pole trójkąta AGC

równe jest $\frac{1}{3}$ pola trójkąta ABC . Pola

trójkątów BGC i AGC są więc równe.

równe są też pola trójkątów BGD i AGE jako połowy pól trójkątów BGC i AGC .

Ponieważ pole trójkąta równe jest połowie

iloczynu promienia koła wpisanego

przez obwód trójkąta, więc z równości pól

trójkątów AGC i BGC oraz promieni kół

wpisanych w te trójkąty wynika równość

ich obwodów. Uwzględniając równość

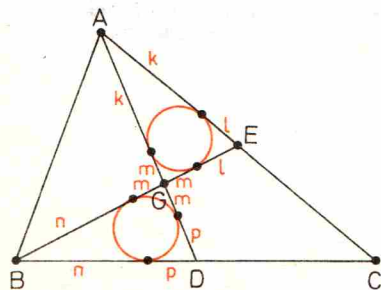
odcinków stycznych do okręgu

wychodzących z jednego punktu mamy

(patrz rysunek)

$$k + l + l + m + m + k = m + n + n + p + p + m,$$

$$AC = 2AE = 2k + l = 2(n + p) = 2BD = BC.$$



Najwięcej medali, bo aż cztery, przyznano na kongresie w Moskwie w 1966 r. Na ogół przyznaje się ich dwa. Tak było i w Vancouverze. Profesor Fields sugerował, żeby przyznanie takiego medalu było jednocześnie i wyrazem uznania dla wybitnych osiągnięć nagrodzonego, i zachętą do dalszej pracy. Zgodnie z tą zasadą postanowiono, że medale otrzymywać będą matematycy, którzy nie ukończyli jeszcze czterdziestego roku życia.

Medali dostarcza Mennica Królewska w Ottawie. Na każdym z nich wygrawerowane jest nazwisko nagrodzonego. Nazwisko Fieldsa nie jest tam umieszczone, widnieje tylko zaproponowany przezeń tekst: „Międzynarodowy Medal za wybitne odkrycia w matematyce”.

Z medalem związana jest nagroda pieniężna, symboliczna raczej w porównaniu z nagrodą Nobla: mniej więcej dwa tysiące dolarów kanadyjskich.

Nazwiska laureatów utrzymywane są w najgłębszej tajemnicy aż do uroczystej ceremonii otwarcia kongresu. Wtedy właśnie, po wielu okolicznościowych przemówieniach, wręcza się medale.

A więc — każdy liczy, ile lat pozostało mu do czterdziestki, i do roboty!



Rozwiązanie zadania F 25 (cd)

Oczywiście rozwiązanie ze str. 7 jest mylne. Wlewanie się wody do basenu, o ile odbywa się pod stałym ciśnieniem, przebiega równomiernie. Natomiast woda wypływa z basenu przy coraz to wyższym poziomie wody, czyli pod wpływem coraz wyższego ciśnienia hydrostatycznego. Wypływ wody będzie przebiegał nierównomiernie. Wiadomo bowiem, że prędkość wypływu cieczy przez otwór zależy od wysokości słupa ponad otwór, h . Zależność tę opisuje wzór $v = \sqrt{2gh}$, gdzie g jest przyspieszeniem ziemskim.

Jak wobec tego wygląda poprawne rozwiązanie?

Zmianę poziomu wody w basenie w jednostce czasu opisuje równanie:

$$(1) \quad \frac{dh}{dt} = \alpha - \beta \sqrt{h},$$

gdzie α i β są stałymi opisującymi odpowiednio wpływ i wypływ wody z basenu. Wartości α i β możemy wyliczyć z warunków podanych w treści zadania.

Oznaczmy głębokość basenu przez H , a czasy wypełniania i opróżniania basenu odpowiednio przez t_n i t_o ($t_n = 5$ godz, $t_o = 10$ godz).

Wówczas $\alpha = \frac{H}{t_n}$, natomiast β można wyliczyć z równania:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= -\beta \sqrt{h}, \\ \int_0^{t_o} \frac{dh}{\sqrt{h}} &= -\beta \int_0^{t_o} dt, \end{aligned}$$

skąd

$$\beta = \frac{\sqrt{H}}{2t_o}.$$

Należy jeszcze rozwiązać równanie (1). Rzeczywisty czas napełniania basenu t , obliczamy całkując:

$$\int_0^H \frac{dh}{\alpha - \beta \sqrt{h}} = \int_0^t dt.$$

Stąd:

$$(2) \quad t = \frac{2\alpha}{\beta^2} \left(\ln \frac{\alpha}{\alpha - \beta \sqrt{H}} - \frac{\beta \sqrt{H}}{\alpha} \right),$$

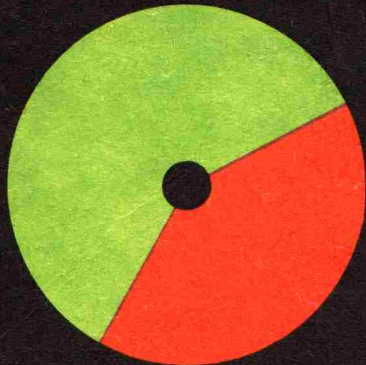
gdzie symbol $\ln x$ oznacza logarytm naturalny liczby x , tzn. logarytm przy podstawie $e = 2,7182\dots$

Podstawiając do równania (2) wartości α i β otrzymujemy:

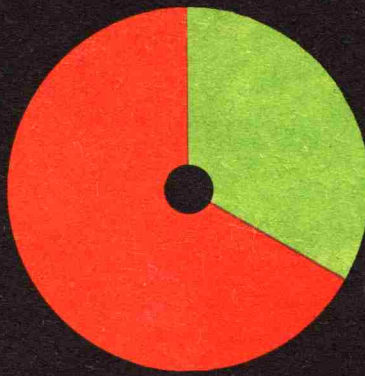
$$(3) \quad t = \frac{8t_o^2}{t_n} \left(\ln \frac{2t_o}{2t_o - t_n} - \frac{t_n}{2t_o} \right).$$

Okazuje się, że czas t nie zależy od głębokości basenu H . Podstawiając wartości liczbowe dla t_o i t_n otrzymamy $t \approx 6$ godz, czyli okres znacznie krótszy niż podany w rozwiązaniu klasycznym.

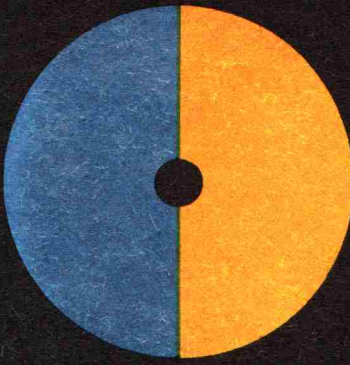
Bardziej zaawansowanym Czytelnikom polecamy sprawdzenie, ile musi wynosić stosunek t_n/t_o , aby czas t dany równaniem (3) był większy od t_n .



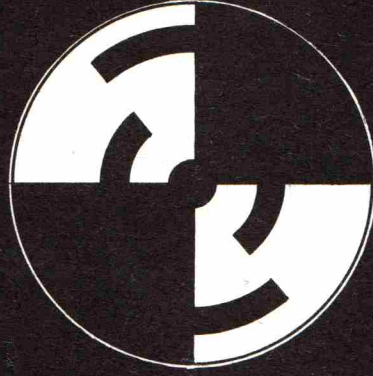
1



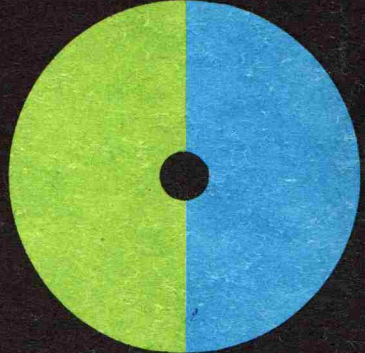
2



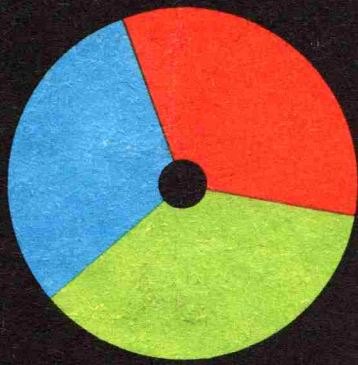
6



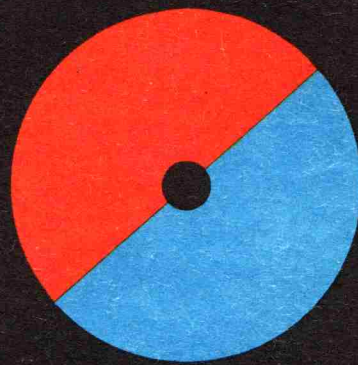
7



3



5



4

