delta

SPIS TREŚCI

„Delta"
matematyczno-fizyczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i Polskiego Towarzystwa Fizycznego wydawany przy poparciu Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny
prof. dr G. Białkowski
doc. dr A. Blikle
prof. dr A. Hrynkiewicz
doc. dr B. Iwaszkiewicz
prof. dr J. Janik
doc. dr J. Jatczak
prof. dr Leon Jeśmanowicz — przewodniczący
prof. dr Z. Krygowska
prof. dr K. Leibler
mgr W. Łucznik
mgr A. Mąkowski
prof. dr A. Pełczyński
prof. dr Arkadiusz Piekara — wiceprzewodniczący
prof. dr J. Rayski
prof. dr A. Schinzel
prof. dr Z. Semadeni
prof. dr M. Subotowicz
dr A. Wakulicz
doc. dr W. Zawadowski

Redaguje Kolegium w składzie:
doc. dr T. Hofmokl — z-ca red. nacz.
dr T. B. Iwiński
dr M. Kordos — red. nacz.
mgr K. Prażmowski — red. techn. graf.
doc. dr M. Święcki
D. Tys — sekr. red.

Adres Redakcji
ul. Hoża 69 p. 151,
00-681 Warszawa,

Zakład Narodowy im. Ossolińskich — Wydawnictwo. Wrocław, Oddział w Warszawie
Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark. wyd.: 2,50 ark. druk.; papier offsetowy III kl., 80 g, 61×86
Wydrukowano w Drukarni im. Rewolucji Październikowej, Warszawa, ul. Mińska 65.
Nr zam. 1114/75 B-58

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60,— cena prenumeraty półrocznej zł 30,—

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły — mające siedzibę w miastach wojewódzkich i powiatowych, zamawiać mogą prenumeratę wyłącznie za pośrednictwem miejscowych oddziałów i delegatur RSW Prasa-Książka-Ruch w terminie do dnia 25 listopada na rok następny.

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły — mające siedzibę na wsi lub miejscowościach, w których nie ma oddziałów RSW Prasa-Książka-Ruch, winny opłacać prenumeratę w terenowo właściwych urzędach pocztowych.

Prenumeratę krajową dla czytelników indywidualnych przyjmują urzędy pocztowe, listonosze i Centrala Kolportażu RSW Prasa-Książka-Ruch, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, konto PKO 1-6-100020 w terminie do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 40% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje Biuro Kolportażu Wydawnictw Zagranicznych RSW Prasa-Książka-Ruch, 00-840 Warszawa ul. Wronia 23, konto PKO nr 1-6-100024.

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTĘ:"

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.
Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.
Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, konto PKO nr 1-6-100312

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

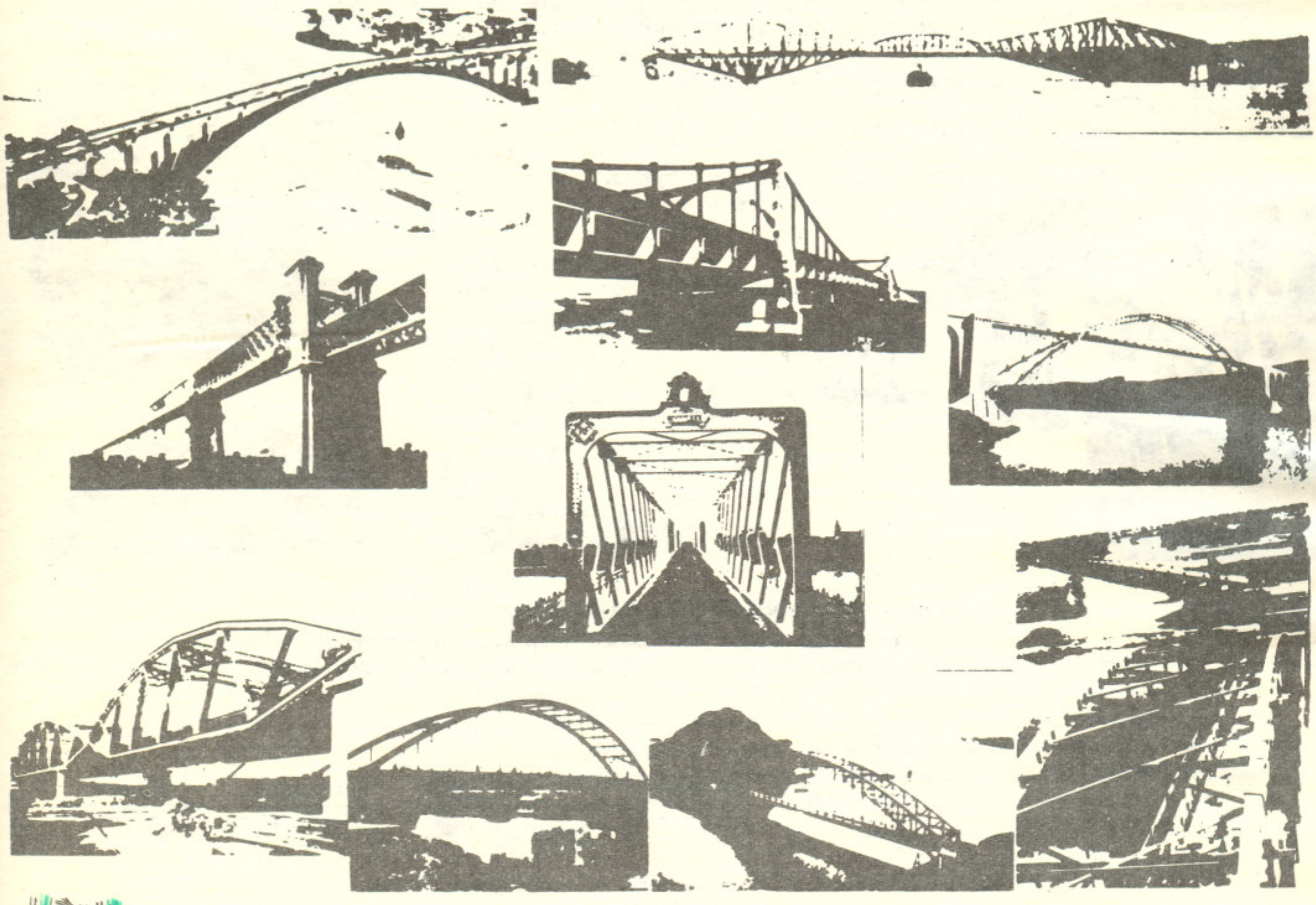
w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

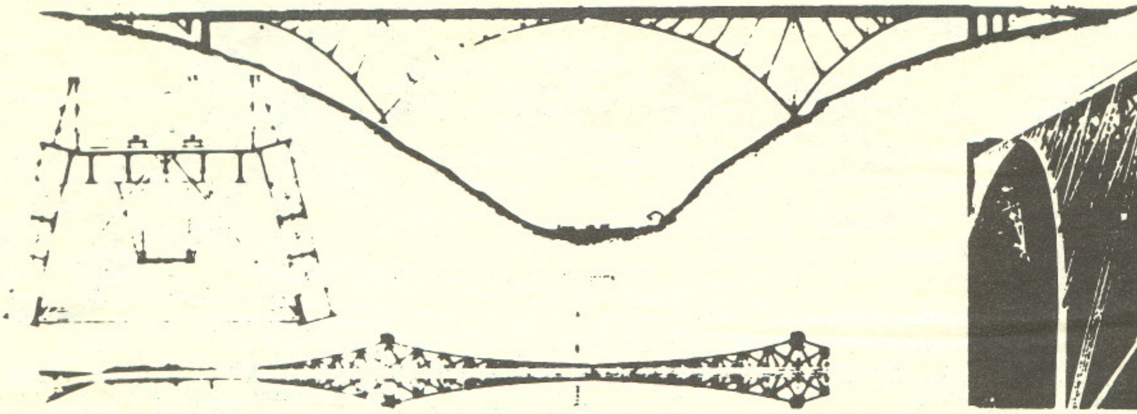
Cena 1 egzemplarza zł 5,— nr indeksu 35723/35550

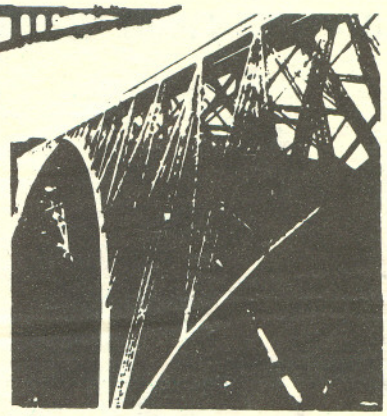
Laboratorium w domu

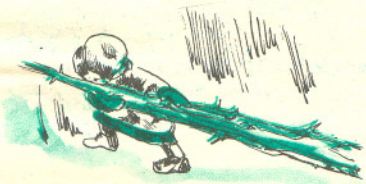
Każdy z Was widział zapewne różne typy mostów, a nawet różne typy mostów stalowych, tj. takich, w których oprócz filarów, na jakich opiera się most, i ewentualnie nawierzchni (jezdni, chodników, podkładów pod tory itp) cała konstrukcja jest stalowa. Przyjrzyjcie się takim mostom.



A warto, bo właśnie ogłaszamy konkurs pod hasłem
BUDUJEMY MOSTY
ale nie „dla pana starosty", bo takowych nie ma, tylko dla podniesienia swoich kwalifikacji z zakresu mechaniki, a dokładniej jej gałęzi zwanej statyką, a także z zakresu rękodzieła.
Aby poczta była w stanie przyjąć prace konkursowe nadesłane na adres „Delta", ul. Hoża 69, p. 151, 00-681 Warszawa
z zaznaczeniem na opakowaniu
BUDUJEMY MOSTY
musimy przyjąć pewne
OGRANICZENIE ROZMIARÓW
— most musi się mieścić w prostopadłościanie
400 × 400 × 600 oczywiście milimetrów.



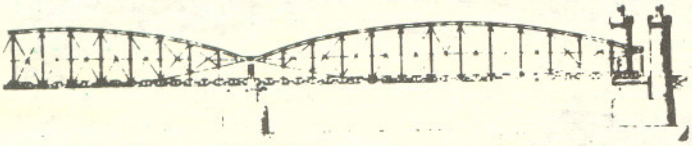


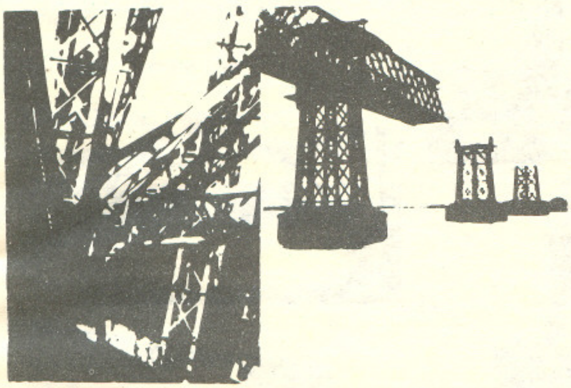


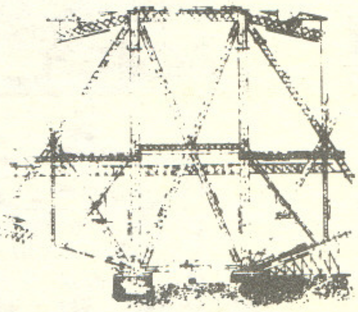
Z kolei dla wyrównania szans uczestników przyjmiemy

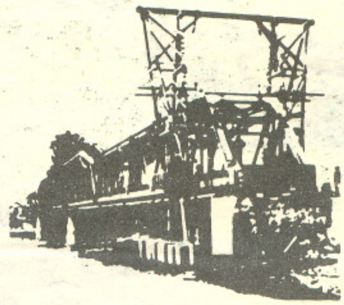
DWA OGRANICZENIA MATERIAŁOWE

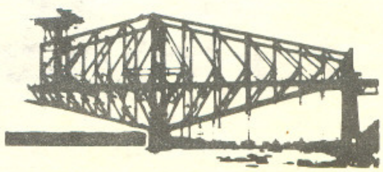
— materiał, z którego będziemy wykonywali mosty, to kartony z bloków technicznych
BN-71 7383-06,
czyli zwyczajnych, za 6 zł. sztuka;
— kartonową „stal" naszych mostów łączymy ze sobą dowolnym klejem (polecamy „Hermol", „Universal", „Klejnot").







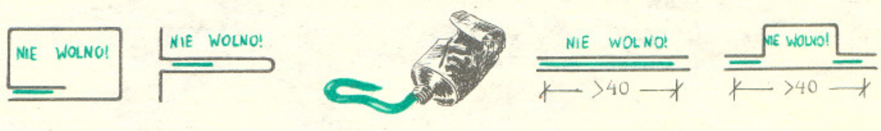




No i jeszcze

DWA OGRANICZENIA KONSTRUKCYJNE

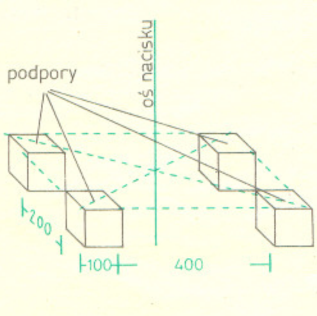
— nie wolno sklejać jednego kawałka kartonu samego ze sobą;
— pole, na jakim sklejamy dwa kawałki kartonu, musi mieścić się w kole o średnicy 40 mm.



Wreszcie

ZAŁOŻENIA PROJEKTOWE:

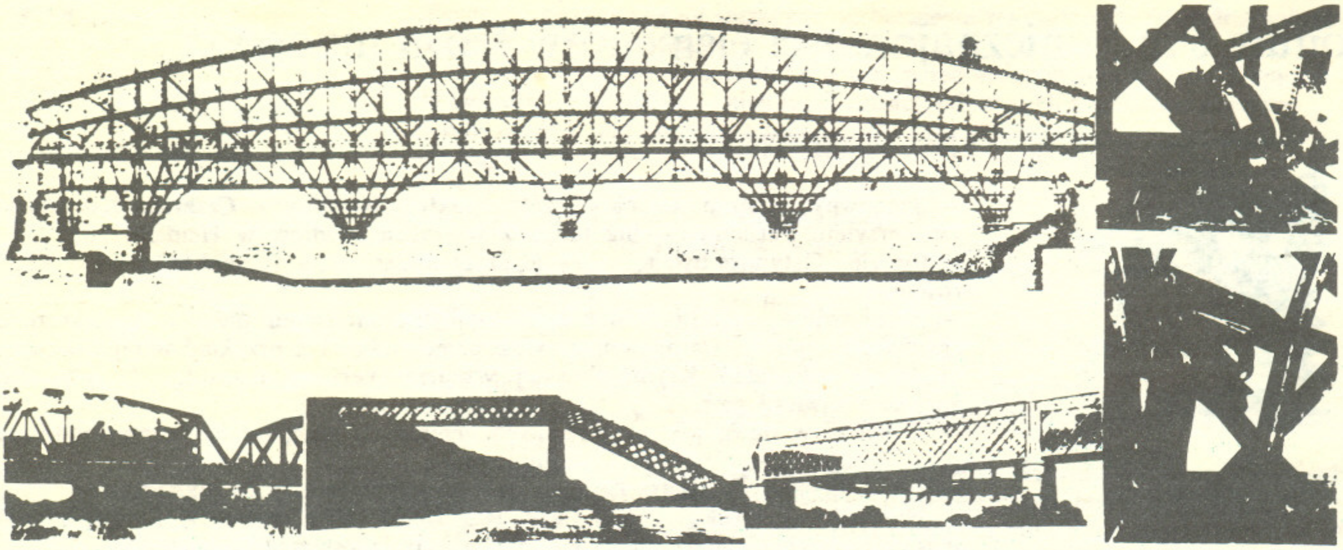
Most jest przeznaczony do postawienia na czterech podporach — sześcianach drewnianych o boku 100 mm (rozmieszczonych jak na rysunku) bez żadnego zamocowania. Obciążany będzie wzdłuż linii pionowej biegnącej przez środek geometryczny podpór za pośrednictwem płytki stalowej o wymiarach 600 × 150 mm. Trzeba więc w naszym moście zbudować „jezdnię", na której będzie leżała ta płytka. Do płytki podwieszone będzie naczynie napełniane stopniowo wodą — aż do załamania się konstrukcji.



No to wiadomo już, że mosty zostaną zniszczone nie wiadomo tylko

KTO WYGRA

Przed zniszczeniem mostów Komisja Konkursowa sfotografuje wszystkie mosty oraz zważy je. Następnie zanotuje, jakie obciążenie każdy z nich wytrzymał.



STOSUNEK WYTRZYMAŁOŚCI DO CIĘŻARU
to liczba, która będzie decydowała o wyniku konkursu — który most osiągnie największy stosunek, tego konstruktor wygra konkurs

BUDUJEMY MOSTY
Na prace konkursowe czekamy do 1.03.1976 r.
Aby formalności stało się zadość, przedstawiamy listę członków Komisji Konkursowej

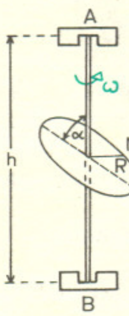
1. mgr inż. A. Niemierko z Instytutu Badawczego Dróg i Mostów
2. doc. dr T. Hofmokl z-ca red. nacz. „Delty"
3. dr Jan A.Gaj z Instytutu Fizyki Doświadczalnej UW

oraz listę nagród

1. domowa spawarka elektryczna TD — 101 U2,
2. mini obrabiarka K — 1U4,
3. lutownice 60 W,

Zadania

Redaguje dr Andrzej ZIEMIŃSKI



F 24. Cienka metalowa płyta w kształcie koła została osadzona na sztywno na osi przechodzącej przez jej środek masy i nachylonej do powierzchni płyty pod kątem α. Masa płyty wynosi M, promień R, natomiast długość osi równa się h. Następnie końce osi zostały umocowane we wspornikach A i B (patrz rys.). Z jaką siłą i jak skierowaną oś naciska na wsporniki, jeżeli płytę obracamy ze stałą prędkością kątową ω względem prostej AB. Ciężar i rozmiary osi oraz grubość płyty należy zaniedbać.
Rozwiązanie na str. 8

Redaguje mgr Andrzej MĄKOWSKI

M 70. Podać przykład nieskończonego zbioru punktów płaszczyzny o tej własności, że każde trzy punkty tego zbioru są wierzchołkami trójkąta rozwartokątnego.
Rozwiązanie na str. 4

M 71. Udowodnić, że jeżeli a i b są liczbami wymiernymi dodatnimi to na elipsie o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

leży nieskończenie wiele punktów o obydwu współrzędnych wymiernych.
Rozwiązanie na str. 5 (W. Mnich)

M 72. Na płaszczyźnie dane jest n różnych punktów Dowieść, że jeżeli $1 \leqslant k < n$, to istnieje koło zawierające w swym wnętrzu dokładnie k spośród danych punktów.
Rozwiązanie na str. 7 (W. Mnich)

Ponure skutki nieznajomości elementów teorii mnogości

Wiktor MAREK

— Szanowny Mistrzu Leonie — rzekł Doktor Bazylius z Cesarsko-Książęcego Uniwersytetu Pafladocji — już przecież w trakcie studiów w Heidelbergu, Oxfordzie i Getyndze byłem o wiele lepszym studentem, a przecież wiedza ma wciąż rośnie.
— Nieprawda — odrzekł Mistrz Leon. — Tylko mocnemu piwu w tej karczmie zawdzięczać należy twe niepohamowane przechwałki. Na przykład w tegorocznym konkursie Akademii Krympollińskiej wziąłem pierwszą nagrodę! A ty? — Tu znacząco zawiesił głos.
— Wolałem w ogóle nie wysyłać mych genialnych prac, by nie kompromitować przeciwników: zwykła litość nad głupszymi.
— Ha — zapienił się Mistrz Leon — krew moja lub Pańska to rozstrzygnie!
— Niewielka to sztuka — rzekł Bazylius — wszak Waść ważysz 8 pudów, a pięść masz niby bochen chleba, ale głowa, głowa — tu ja jestem silniejszy!
— I tu przegrasz — krzyknął Mistrz Leon — A dyplomy Akademii Paryskiej, Rzymskiej i Petersburskiej? Wszystkie mam i wiem...
— Widać Waści dyplomy mózg zastąpiły — mruknął Bazylius. — Ale dobrze, warunki proponuj.
— Dobrze — rzekł Mistrz Leon. — Kto trudniejszy dowód twierdzenia wymyśli, ten lepszy.
— Czyżby? — rzekł jadowicie Bazylius. — A cóż to znaczy „trudniejszy"? W naszym oświeconym XVIII wieku trzeba by definicję „trudniejszego" podać. A zresztą, trudniejszy dla kogo? Co trudne dla ciebie, może być łatwe dla mnie.
— I na odwrót — basem dodał Mistrz Leon.
— Więc może dłuższy dowód? — zaproponował Mistrz Leon nieco zakłopotany.
— Nie zawsze co dłuższe, to mądrzejsze — rzekł Bazylius. — Zawsze wolę dowód krótki i jasny niż rozwlekły, a zawikłany.
— Więc jak? — mruknął Mistrz Leon — Trudno z Waszeci sztuczkami dyskutować.
— Może by tak po prostu przekonać się, kto więcej twierdzeń wymyśli — rzekł Bazylius. — Ja wymyślę, Wasze wymyśli, a za trzy dni się spotkamy i policzymy.
— Jak to: policzymy? — rzekł Mistrz.
— Zwyczajnie, policzymy Twoje, moje i będziemy wiedzieli, kto wymyślił więcej.
— Hm — chrząknął mistrz Leon. — A jak liczyć będziemy?
— Po prostu, Ty policzysz swoje, ja policzę swoje i porównamy.
— Nie wierzę Waszeci! — krzyknął Mistrz. — Na pewno sobie dodasz jeden dziesiątek i drugi.
— Tak — mruknął Bazylius — po tobie też się tego można spodziewać. To może na odwrót? Wasze moje, a ja Twoje.
— Znam wszystkie Twoje sztuczki — rzekł Mistrz Leon. — Tu potrzeba uczciwego rozjemcy. Wołaj komendanta straży! — zawołał do syna karczmarza. — Byle szybko.
Komendat miejscowego oddziału Żandarmów Pieszych, wysłuchawszy w czym rzecz, rzekł:
— To nie jest takie proste, Panowie. Jestem człowiekiem honoru ...
— Jeśli chodzi o pieniądze — rzekł szybko Bazylius — to ...
— Panowie — rzekł Komendant — jestem człowiekiem honoru, ale jeśli chodzi o liczenie to niestety u nas, Panowie rozumieją ... — Tu znacząco zawiesił głos.
— Temu na szczęście można zaradzić — rzekł Bazylius. — Oto ustawimy przed Tobą dwie skrzynki. Każda zawierać będzie karteczki. Wasze z mojej lewą ręką, a ze skrzynki mego przeciwnika prawą wybierać będziesz po karteczce. W ten sposób, jeśli w którejś skrzynce zostanie po zakończeniu liczenia kartka, będzie to znaczyć, że ten z nas miał twierdzeń więcej, a więc wygrał.
— Świetnie! — krzyknął Mistrz Leon. — Spieszę do mego pokoju i zasiadam do pracy.
Tej nocy każdy z przeciwników, nim zasnął, miał dziwny sen — widzenie. Ot, zjawiał się dziwny jakiś twór, ni człowiek to, ni kozioł, i rzekł: „Pomogę Ci wygrać ten spór. Dostarczę Ci nieskończenie wiele twierdzeń. A Ty mi tylko, drobnostka, podpiszesz ten pergamin krwią z serdecznego palca. Ponieważ Twój przeciwnik będzie miał tylko skończoną liczbę twierdzeń, a więc, prędzej czy później, jego skrzynka opróżni się, podczas gdy Twoja nigdy nie będzie pusta".

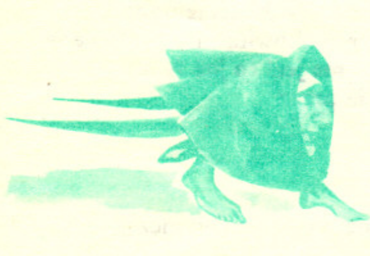
Rozwiązanie zadania M70.
Zbiorem takim będzie np. dowolny łuk okręgu oparty na kącie środkowym mniejszym niż π.

Rozwiązanie zadania M71.
Łatwo sprawdzić, że dla dowolnego t punkty $\left(a\frac{2t}{1+t^2},\ b\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$ leżą na danej elipsie i jeżeli t jest liczbą wymierną to obydwie współrzędne tych punktów są wymierne. Dla różnych t otrzymujemy różne punkty.

Nazajutrz rano obaj słali służących do balwierza po maść przeciw zadrapaniom dziwnym, w nocy powstałym.
I oto po trzech dniach spotkali się uczeni przeciwnicy w oberży „Pod Kopytem Wicekróla". Za każdym z nich niósł służący olbrzymich rozmiarów skrzynię. Komendant Straży spojrzał na nie bardzo zakłopotany.
— Czy aby wytrzymam? — rzekł zaniepokojony. — Siły ludzkie nie są niewyczerpane.
Pierwszy zorientował się w sytuacji Bazylius.
— Nabrał nas obu, kuternoga — pomyślał w duchu.
— Nic to — powiedział. — Przecież nie samo liczenie jest ważne, lecz sposób liczenia. Kto sposób zna, ten licząc bardzo szybko ...
— Nieskończenie szybko — zjadliwie rzekł Mistrz Leon.
— ... liczenia dokona — rzekł nie speszony Bazylius.
— A liczyć będzie się tak — dodał. — Weź z mojej skrzynki 3 kartki z twierdzeniami i odłóż na bok. A teraz postępuj, jak umówiliśmy się. Po jednej z każdej skrzynki, lewą i prawą ręką.
Komendant Straży coraz szybciej rękami kartki ze skrzynki wyciągał (a za każdym razem wyjęcie pary kartek zajmowało mu połowę czasu, który zajmowało mu wyjęcie pary poprzedniej). Że zaś kartki były ponumerowane kolejnymi liczbami naturalnymi, szybko rzecz całą ukończył. Mistrz Leon w osłupieniu patrzał na stos kartek i trzy kartki Bazyliusa. Ten zaś mówił:
— I co, zostały trzy moje, a więc wygrałem.
— Jeszcze chwilka — krzyknął Mistrz Leon. — Powtórzmy liczenie, ale ja teraz pokażę, jak liczyć. I włożywszy błyskawicznie wszystkie kartki do pudeł rzekł:
— Mości Komendancie, inaczej liczyć będziemy. Biorąc ze skrzynki Doktora kartkę, postąpisz jak następuje: jedną kartkę moją pominiesz, a weźmiesz następną.
Komendantowi dwa razy powtarzać nie trzeba było, z zadaniem uporał się błyskawicznie. I oto w skrzynce Mistrza Leona kartek niemal nie ubyło, choć może nieco rzadziej były ułożone, podczas gdy skrzynka Bazyliusa była pusta.
— I widzisz — rzekł Mistrz Leon. — Zostało mi tyle, że raz jeszcze można by je z Twoimi porównać. A więc nawet każdemu Twojemu dwa moje twierdzenia można przypisać, tak więc mam dwa razy więcej ...
— Nieprawda! — krzyknął Bazylius. — Twój sposób nieważny ...
Ale tu wtrącił się Komendant Straży i rzekł surowo:
— Panowie, czuję w tym czartowską moc jakąś. A i te kartki nieco siarką trącą. Albo mi to wszystko zaraz, co tu się działo, objaśnicie, albo do Sądu Diecezjalnego Was oddam, a tam już sposoby swoje mają i wiedzą, co z takimi robić.
— To nie jest takie proste! — odpowiedzieli jednocześnie przeciwnicy.

*

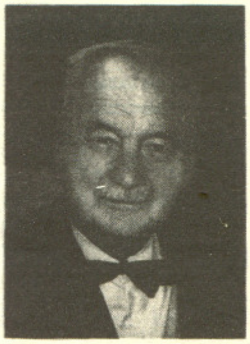
Stojąc na stosie drewna, mocno przywiązany do słupa, mówił Mistrz Leon do Doktora Bazyliusa:
— A właściwie to chciałbym wiedzieć, który z nas ten zakład wygrał?



Aby zrozumieć, że w paradoksie, który wzburzył Kapitana Żandarmów Pieszych, nie ma nic szatańskiego, należy wiedzieć, że:
Dwa zbiory są równoliczne (mają „tyle samo" elementów), gdy istnieje różnowartościowa funkcja przeprowadzająca jeden z nich na drugi. Np. zbiór mędrców stających do zawodów i zbiór skrzyń z twierdzeniami były równoliczne, a funkcję ustalili pachołkowie niosąc różne skrzynie za różnymi mędrcami.
Przy tej, dziś powszechnie przyjętej, definicji okazuje się, że zbiory nieskończone mogą być równoliczne z pewnymi spośród swoich podzbiorów właściwych. Np. funkcja $f(x) = x^2$ ustala równoliczność zbioru liczb naturalnych ze zbiorem kwadratów takich liczb, funkcja $f(x) = 2x$ — równoliczność zbioru liczb naturalnych ze zbiorem liczb parzystych dodatnich (co zostało zastosowane przez Mistrza Leona), funkcja $f(x) = \operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$ — równoliczność przedziału $(-1,1)$ i zbioru wszystkich liczb rzeczywistych. Nie należy wątpić, że Czytelnicy potrafią znaleźć jeszcze wiele przykładów, co, mam nadzieję, na stos żadnego z nich nie zaprowadzi.

O teorii dyfrakcji Younga-Rubinowicza

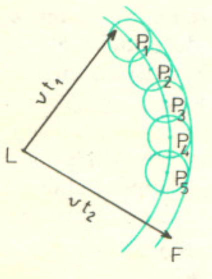
Prof. dr Bohdan KARCZEWSKI



Wojciech Rubinowicz (1889-1974)

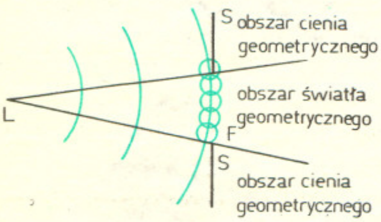
Nie popełnię chyba zbyt wielkiego błędu mniemając, iż każdemu z Czytelników znana jest tzw. zasada Huygensa, sformułowana przez tego znakomitego badacza holenderskiego w 1678 r.

Chcąc jednak mieć pewność, że wszystkie dalsze rozważania nie wzbudzą zbyt wielu wątpliwości, pozwolę sobie tę zasadę przypomnieć. Orzeka ona, że wszystkie punkty powierzchni falowej w chwili t_1 można uważać za źródła fal kulistych, przy czym położenie powierzchni falowej w chwili $t_2 > t_1$ dane jest przez powierzchnię styczną do tych elementarnych fal kulistych. Źródła, o których tu mowa, nazywamy często źródłami wtórnymi. Przypuśćmy, iż pierwotne źródło fali monochromatycznej znajduje się w punkcie L. W pewnej chwili t_1 powierzchnia falowa jest po prostu powierzchnią kulistą o promieniu vt_1, gdzie v oznacza prędkość rozchodzenia się fali. Na pytanie, gdzie znajdzie się powierzchnia falowa w chwili t_2, odpowiada rys. 1, sporządzony ściśle w duchu zasady Huygensa.



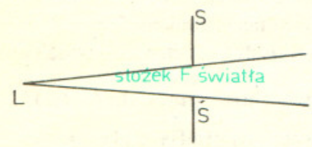
Rys. 1.
Ilustracja zasady Huygensa. Punkty $P_1, P_2, P_3, \ldots$ są właśnie wtórnymi źródłami fal kulistych. Fale te interferując ze sobą tworzą wypadkową falę kulistą, której powierzchnia falowa oznaczona jest przez F.

Zasada Huygensa brzmi bardzo przekonująco i nader skutecznie apeluje do naszej intuicji. Nic więc dziwnego, że przytaczana jest ona w każdym szanującym się podręczniku fizyki. Z jej pomocą uzasadnia się w prosty, modelowy sposób propagację fal, prawa ich odbicia i załamania a także i zjawiska dyfrakcji fal. Tej ostatniej klasie zjawisk poświęcimy w dalszym ciągu uwagę szczególną. Wyobraźmy sobie, że pierwotne źródło promieniowania znajduje się znowuż w punkcie L. W pewnej odległości od źródła umieszczamy ekran S, w którym wycięty jest otwór F (rys. 2). Zakładamy przy tym, iż ekran S pochłania całkowicie padającą nań falę. Z bardzo dobrym przybliżeniem możemy również przyjąć, iż dla źródła L dostatecznie odległego od ekranu wycinek kulistej powierzchni falowej docierającej do otworu F pokrywa się z powierzchnią tego otworu. Rys. 2 dowodnie ilustruje, w jaki sposób fala przenika do obszaru tzw. cienia geometrycznego, czyli do tego obszaru, w którym zgodnie z prawami optyki geometrycznej żadnego ruchu falowego być nie powinno. Każdy chyba przyzna, iż zasada Huygensa jasno tłumaczy ugięcie fali. Jako ciekawostkę odnotujemy fakt, iż sam Huygens, słusznie uważany za jednego z twórców falowej teorii światła, w dyfrakcję światła w ogóle nie wierzył. Wyjaśnienie zjawisk ugięcia fal, przedstawione powyżej, zawdzięczamy wybitnemu fizykowi francuskiemu A. Fresnelowi (1778–1827 r.). W 1818 r. Fresnel opierając się na zasadzie Huygensa ilościowo opisał zjawiska dyfrakcji. Ostateczny i możliwie ścisły kształt matematyczny nadał ideom Huygensa w 1882 r. niemiecki fizyk S. Kirchhoff. Gwoli ścisłości zaznaczymy, iż Kirchhoff w swej teorii nawet rozszerzył pierwotne idee Huygensa, wprowadzając oprócz wtórnych pojedynczych źródeł fal kulistych również tzw. wtórne źródła podwójne, o których w zasadzie Huygensa w ogóle nie ma mowy. Zgodnie z rzeczywistością w teorii Kirchhoffa nie występują tzw. fale wsteczne, do których istnienia nieuchronnie prowadzi zasada Huygensa (patrz rys. 1 i 2). Wg Kirchhoffa pole falowe w punkcie obserwacji P położonym za ekranem S (rys. 3) powstaje w wyniku interferencji fal emitowanych przez wtórne źródła pojedyncze i podwójne rozłożone z określonymi gęstościami na nieskończenie małych elementach powierzchniowych dF otworu uginającego. Jeśli zatem całkowitą falę emitowaną przez element powierzchni dF oznaczamy przez du — **nie jest to już fala kulista** — to całe pole falowe w punkcie P dane będzie przez



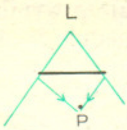
Rys. 2.
Jakościowe wyjaśnienie zjawiska dyfrakcji fali na otworze F przy pomocy zasady Huygensa. Fala powstająca w wyniku działania źródeł wtórnych na F nie będzie już falą kulistą!

$$u(P) = \iint_F du, \quad (1)$$



Rys. 3.

gdzie całka podwójna, będąca naturalnym uogólnieniem całki pojedynczej,



Rys. 4.
Schematyczne przedstawienie dyfrakcji fali kulistej na włosie, oznaczonym grubą czarną kreską. P oznacza punkt obserwacji.

rozciągnięta jest na powierzchnię otworu uginającego. Ścisłe wyrażenie na du proporcjonalne do dF jest zbyt złożone; dlatego go tutaj nie podajemy.
Mimo swego przybliżonego charakteru teoria Kirchhoffa jest w zadziwiająco dobrej zgodności z doświadczeniem, szczególnie w tych obszarach, gdzie zjawiska ugięcia zaznaczają się najsilniej, a więc w pobliżu granicy cienia geometrycznego lub, innymi słowy, w pobliżu powierzchni stożka światła (patrz rys. 3).
W podręcznikach i w literaturze naukowej teoria Kirchhoffa zdobyła sobie trwałe prawa obywatelskie, w dziedzinie zaś dyfrakcji światła — stanowisko niemal monopolistyczne. Bez przesady można powiedzieć, iż nurt badań wypływający z idei Huygensa i prac Kirchhoffa był i jest w dziedzinie dyfrakcji dominujący. Tymczasem, niezależnie od tego nurtu, rozwijał się nurt zupełnie inny, oparty na zasadniczo odmiennych przesłankach ideowych. Jego inicjatorem był sławny uczony angielski T. Young (1773–1829), słusznie uważany za jednego z współtwórców falowej teorii światła. Otóż w 1803 r. a więc jeszcze przed Fresnelem, Young, po raz pierwszy w historii fizyki, próbował opisać zjawiska dyfrakcji światła traktując światło jako falę. Rozważał on ugięcie światła na włosie.
Aby wytłumaczyć powstawanie obrazu dyfrakcyjnego, utworzonego w tym przypadku z jasnych i ciemnych prążków, Young wysunął hipotezę wg której prążki w obszarze cienia geometrycznego powstają w wyniku interferencji fal w pewien sposób odbitych od dwóch „krawędzi” włosa (patrz rys. 4), od jego „brzegów”. Występowanie natomiast prążków w obszarze światła geometrycznego tłumaczy się interferencją fali wprost padającej ze źródła L z falą odbitą od krawędzi włosa. Występowanie tych fal odbitych możemy przypisać działaniu jakichś źródeł wtórnych rozmieszczonych na krawędzi otworu uginającego F.
Youngowska interpretacja ugięcia światła również apeluje skutecznie do naszej wyobraźni i intuicji. Nie wzbudza wewnętrznych sprzeciwów. Miała ona jednak pierwotnie charakter czysto jakościowy i, być może, właśnie dlatego nie zdobyła sobie takiego uznania, jakim od samego początku cieszyła się zasada Huygensa. Gdy Fresnel opierając się na zasadzie Huygensa sformułował swą teorię dyfrakcji, potwierdzoną od razu przez doświadczenie, Young, dowiedziawszy się o tym, zrezygnował całkowicie ze swojej interpretacji zjawisk dyfrakcji światła. Dał zresztą temu wyraz w liście do Fresnela z 16.10.1818 r. Tragiczna decyzja Younga spowodowała, iż na niemal 100 lat jego idee zapadły w głęboką niepamięć. I choć w latach późniejszych różni badacze, a w ich liczbie i Kirchhoff, byli bliscy idei Younga, to jednak z zapomnienia idei tej nie wydobyli. Dopiero w 1917 r. polski fizyk W. Rubinowicz (1889–1974) dokonał pełnej rehabilitacji poglądów Younga na istotę zjawisk dyfrakcji.
Rubinowicz ściśle wykazał, że w ramach teorii Kirchhoffa całkowite pole falowe za ekranem S (patrz rys. 3) można przedstawić w postaci sumy fali wprost padającej i fali brzegowej, pochodzącej od krawędzi otworu uginającego.
Zatem, jeśli pole falowe w punkcie P oznaczymy przez u(P) (porównaj wzór (1)), to

$$u(P) = \varepsilon u_G(P) + u_B(P) \tag{2}$$

gdzie $\varepsilon = 1$ lub 0 zależnie od tego, czy punkt P leży w obszarze światła geometrycznego, czy też cienia; u_G oznacza falę wprost padającą (w rozważanym przypadku $u_G = \frac{e^{ikR}}{R}$, gdzie R oznacza odległość punktu L od P); u_B oznacza falę ugiętą, emitowaną przez odpowiednie źródła wtórne rozłożone z określoną gęstością na brzegu otworu uginającego F.
Z matematycznego punktu widzenia możemy powiedzieć, że W. Rubinowicz dwuwymiarową całkę Kirchhoffa po otworze uginającym F przekształcił w jednowymiarową całkę po brzegu B tego otworu. Jeśli teraz w pełnej analogii do rozważań poprzedzających wzór (1) przez du_B oznaczamy falę emitowaną przez element długości ds łuku krzywej ograniczającej F (**nie jest to już fala kulista**!), to całe ugięte pole falowe w punkcie P dane będzie przez

$$u_B(P) = \int_B du_B, \tag{3}$$

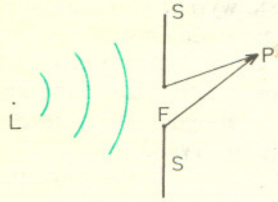
gdzie całkowanie wykonujemy po brzegu (krawędzi) otworu uginającego F. Ścisłe wyrażenie na du_B proporcjonalne do ds jest dosyć skomplikowane i dlatego nie przytaczamy go tutaj.
Możemy zatem powiedzieć, że jeśli punkt P leży w obszarze światła geometrycznego, to (wzór (2)) pole falowe w P powstaje w wyniku interferencji fali wprost padającej u z całkowitą falą ugiętą u_B (wzór (3)). Jeśli natomiast

Rozwiązanie zadania M72.

n punktów wyznacza $\frac{1}{2}n(n-1)$ odcinków które mają $\frac{1}{2}n(n-1)$ symetralnych. Niech X będzie punktem nie należącym do żadnej z tych symetralnych. Wszystkie odległości punktu X od danych punktów są więc różne Jeśli oznaczymy dane punkty przez $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tak, by

$$XA_1 < XA_2 < \ldots < XA_n,$$

to koło o środku X i promieniu r, gdzie $XA_k < r \leqslant XA_{k+1}$, zawiera w swym wnętrzu dokładnie k spośród danych punktów.
Można oczywiście zażądać, by promień koła był liczbą wymierną (lub niewymierną).



Rys. 5.
Ilustracja zjawiska dyfrakcji fali kulistej na otworze F wg teorii Younga-Rubinowicza. Punkt P leży w cieniu geometrycznym. Strzałki przedstawiają kierunki propagowania się dwóch cząstkowych fal brzegowych u_B, pochodzących od dwóch elementów krawędziowych ds.

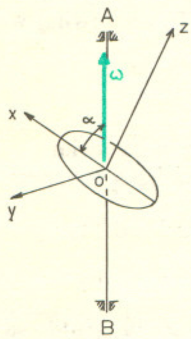
punkt P leży w cieniu geometrycznym, to pole falowe w P powstaje w wyniku interferencji cząstkowych fal ugiętych, emitowanych przez odpowiednie źródła wtórne rozłożone na brzegu B otworu uginającego F (wzór (3), rys. 5). Stwierdzenia te są ścisłym, matematycznym wyrazem idei Younga. W dalszych badaniach nad falą ugiętą u_B Rubinowicz pokazał, iż fala ta na granicy stożka światła jest nieciągła. Nieciągłość ta jest jednak skompensowana przez skok, jakiego na tejże granicy doznaje fala wprost padająca u_G (patrz wzór (2)).
W wyniku tego całkowity ruch falowy u(P) jest oczywiście ciągły, jak też być powinno. Rubinowicz pokazał również, co należy rozumieć przez „odbicie" fali wprost padającej od krawędzi B otworu uginającego, o którym mówił Young. Okazało się przy tym, że źródła wtórne rozłożone na różnych elementach długości ds krzywej B emitują promieniowanie o różnym natężeniu. Promieniowanie pewnych elementów ds jest szczególnie intensywne. Elementy te nazwał Rubinowicz elementami czynnymi i wykazał, że w pierwszym przybliżeniu fala ugięta u_B powstaje w wyniku interferencji fal emitowanych przez owe elementy czynne.
Tak więc Wojciech Rubinowicz nie tylko przywrócił ideom Younga prawa obywatelskie, ale wprowadził do nich nieodzowne zmiany i zbadał wszystkie wnioski stąd wypływające. Dodajmy tu jeszcze, że teoretyczne przewidywania Rubinowicza zostały w całej rozciągłości potwierdzone przez doświadczenie.
W dalszych pracach Rubinowicza i Jego uczniów okazało się, iż idee Younga można z powodzeniem zastosować nie tylko do dyfrakcji światła, ale i do badań nad zjawiskami ugięciowymi innych rodzajów fal.
Fundamentalne wyniki W. Rubinowicza przyniosły Mu sławę i trwałe międzynarodowe uznanie. Znalazły też swoje pełne odbicie w literaturze naukowej, w której powszechnie przyjął się termin: teoria Younga-Rubinowicza. Pragnąc być obiektywnymi i chcąc oddać każdemu to, co mu się należy, powinniśmy dzisiaj mówić i pisać nie tylko o teorii dyfrakcji Huygensa-Kirchhoffa, ale i o pięknej teorii Younga-Rubinowicza. Obie te teorie, choć tak różne od siebie, są przecież w pełni równoważne.

Rozwiązanie zadania F 24

Równanie ruchu bryły sztywnej jest postaci:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

gdzie $\vec{M}$ oznacza moment przyłożonej siły, a $\vec{L}$ moment pędu ciała. Zastanówmy się najpierw, czy w przypadku opisanego ruchu moment pędu zmienia się, a jeżeli tak, to w jaki sposób.
Ruch obrotowy płyty odbywa się wokół osi nie będącej osią symetrii ciała. Wygodniej jest rozłożyć ten ruch na ruchy wokół trzech osi symetrii płyty. Wprowadzamy układ współrzędnych xyz związany sztywno z płytą. Oś z niech będzie prostopadłą do płaszczyzny płyty, a oś x niech leży w płaszczyźnie określonej przez wektor $\vec{\omega}$ i oś z.
Liczymy składowe wektora $\vec{\omega}$ oraz $\vec{L}$ w tym układzie. Korzystamy ze związku: $L_i = I_i\omega_i$, $i = x, y, z$, gdzie I_i jest momentem bezwładności ciała względem danej osi. Otrzymujemy:



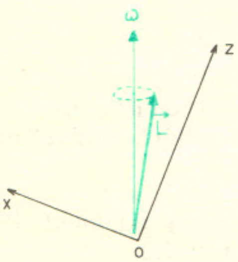
$$L_x = 1/4\ MR^2\omega\cos\alpha$$
$$L_y = 0$$
$$L_z = 1/2\ MR^2\omega\sin\alpha$$

Ponieważ wartości momentów bezwładności względem osi x i z są różne, wypadkowy kierunek momentu pędu $\vec{L}$ nie pokrywa się z kierunkiem $\vec{\omega}$. Długość wektora $\vec{L}$ jest stała.
Układ xyz obraca się wraz z płytą wokół kierunku wyznaczonego przez wektor $\vec{\omega}$. Również koniec wektora $\vec{L}$ będzie zataczał okrąg wokół kierunku $\vec{\omega}$ w płaszczyźnie prostopadłej do $\vec{\omega}$ z prędkością kątową ω. Oznacza to, że moment pędu jako wektor ulega zmianie. Zauważcie analogię z ruchem jednostajnym punktu materialnego po okręgu.
W rozważanym przypadku rolę wektora położenia odgrywa wektor momentu pędu. Dla ruchu po okręgu zmianę wektora położenia $\vec{r}$ w czasie opisywało równanie:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Podobnie dla wektora momentu pędu:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{L}$$



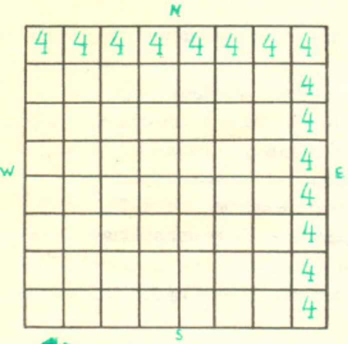
Symbol $\times$ oznacza w obu wzorach iloczyn wektorowy.
Oczywiście moment siły związany ze zmianą momentu pędu skierowany jest w danej chwili prostopadle do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\vec{\omega}$ i $\vec{L}$. Natomiast para sił wywołująca ten moment pochodzi od sił nacisku wsporników A i B. Siły te są skierowane prostopadle do osi obrotu i leżą w płaszczyźnie wyznaczonej przez wektory $\vec{\omega}$ i $\vec{L}$.
Wartość każdej siły nacisku wynosi:

$$N = \frac{|\vec{M}|}{h} = \frac{|\vec{\omega} \times \vec{L}|}{h} = \frac{|\omega_x L_z - \omega_z L_x|}{h} = \frac{MR^2\omega^2 \sin 2\alpha}{8h}$$

Sztuka wygrywania

Tym razem odwracamy role. Od Was oczekujemy odpowiedzi na pytanie

JAK WYGRYWAĆ



	→	↑
⚀	2	1
⚁	1	3
⚂	-2	2
⚃	1	-1
⚄	1	1
⚅	3	2

w grze opisanej poniżej. Ogłaszamy bowiem KONKURS na najlepszą propozycję strategii rozgrywania tej gry przez obu graczy. Przez strategię rozumiemy, jak zwykle, *regułę rozgrywania* — jednoznaczną zasadę postępowania w każdej mogącej się wydarzyć sytuacji.

Do gry potrzebne są:
— szachownica 8×8, ewentualnie uzupełniona oznaczeniami jak na rysunku,
— kostka do gry, zwykła lub z naklejonymi na ściankach parami liczb wg „słowniczka" podanego obok,
— 15 żetonów (kartoników) mieszczących się w pojedynczych polach szachownicy z wypisanymi na nich następującymi liczbami:

— jeden pion.

Zasady gry.

1. Gracz I otrzymuje kostkę i piona, Gracz II — wszystkie żetony.
2. Pojedynczy ruch Gracza I, w zależności od jego decyzji, polega
   a. albo na przesunięciu piona o jedno pole w kierunku NE (tzn. o 1 w prawo i o 1 w górę, ale bez przechodzenia przez pole pośrednie)
   b. albo na rzuceniu kostką i przesunięciu piona najpierw o tyle w prawo, ile wynosi pierwsza z liczb na wyrzuconej ściance, i następnie o tyle w górę, ile wskazuje druga liczba (liczby ujemne oznaczają odpowiednio przesunięcia w lewo i w dół). Jeśli zgodne z tą zasadą przesuwanie piona oznaczałoby opuszczenie szachownicy, to pion zatrzymujemy na ostatnim polu znajdującym się na jego drodze. (Podkreślamy: przesuwamy piona najpierw poziomo, a potem pionowo i zatrzymujemy na ostatnim polu przed opuszczeniem szachownicy).

   W przypadku, gdy pion zatrzymał się na jednym z pól przy brzegach N lub E — gra się kończy; jeśli natomiast został zatrzymany na jednym z pozostałych pól brzegowych — gra toczy się dalej.

Grę można również rozgrywać „metodą dwu ołówków" na szachownicy narysowanej na papierze.

Reguły gry pozwalają więc m.in. w ogóle nie używać kostki — wtedy Gracz I dotrze do „rogu północno-wschodniego".

3. Pojedynczy ruch Gracza II polega, w zależności od jego decyzji,
   a. albo na położeniu co najmniej 3 dowolnych żetonów na 3 dowolnych polach przy brzegach N lub E (oznaczonych liczbą 4),
   b. albo na zezwoleniu („czekam") Graczowi I na wykonanie następnego ruchu. „Czekać" wolno co najwyżej trzy razy przed zakończeniem rozmieszczania żetonów.

Reguły umożliwiają więc Graczowi II m.in. rozmieszczenie wszystkich żetonów w pierwszym, drugim, trzecim lub czwartym ruchu — i czekanie na wynik działań Gracza I

4. Gracze wykonują ruchy na przemian. Rozpoczyna I startując z rogu południowo-zachodniego (ozn. X). Jeśli Gracz II rozmieści wszystkie żetony przed zakończeniem gry (zob. reg. 2a), to Gracz I samotnie kontynuuje grę aż do zatrzymania się przy brzegu N lub E.

Przegrana 4 jest więc dla II „karą" za niedość szybkie rozmieszczenie wszystkich żetonów.

5. Liczba umieszczona na polu, na którym zatrzymał się ostatecznie pion Gracza I (tzn. 4, jeśli brak tam żetonu, lub liczba umieszczona na żetonie) oznacza wygraną Gracza I od Gracza II; liczba ujemna oznacza oczywiście przegraną Gracza I do Gracza II.

Tyle zasad gry. Zadaniem Waszym jest zaproponowanie takich strategii, które każdemu z graczy pozwolą oczekiwać możliwie dużej wygranej — lub jak najmniej przegrać. Być może nie uda się Wam znaleźć strategii, o których będziecie potrafili udowodnić, że są najlepsze. Nie przejmujcie się tym. Jury Konkursu w składzie
1. prof. dr Z. Pawlak, Dyrektor Centrum Obliczeniowego PAN,
2. dr W. Guzicki z Instytutu Matematycznego Uniwersytetu Warszawskiego
3. dr T. B. Iwiński, redaktor działu matematyki DELTY

będzie bowiem oceniało nadesłane propozycje (w objętości do 4 stron papieru podaniowego!) według następujących kryteriów:
— precyzja i elegancja opisu proponowanych strategii,
— rzeczywista wartość proponowanych strategii obu graczy,
— rzeczowość uzasadnienia wyboru tych strategii.

Na tych, którzy nadeślą swe propozycje do dnia 1.02.1976 r, oczekują następujące nagrody:
— namiot
— dwie rakiety tenisowe
— piłka siatkowa
— komplet tenisa stołowego.

Czekamy!

Wielościany regularne, półregularne i równoforemnościenne

Pragniemy z okazji Świąt ofiarować Czytelnikom pełną listę „bardziej prawidłowych" wielościanów wypukłych — tj. wielościanów wymienionych w tytule — wraz ze wskazówkami, jak układa się taką listę.
Mówimy, że wielościan ma *jednakowe ściany*, jeżeli każda z nich ma jednakową liczbę krawędzi. Mówimy (niezupełnie analogicznie), że wielościan ma *jednakowe naroża*, jeżeli, dla dowolnego n, każdy wierzchołek należy do tej samej liczby ścian n-kątnych. Wielościany o jednakowych narożach nazywamy *półregularnymi*. Wielościan półregularny o ścianach będących wielokątami foremnymi nazywamy *archimedesowym*. Wielościany półregularne o jednakowych ścianach nazywamy *regularnymi*. Wielościan regularny o ścianach foremnych nazywamy *platońskim*. Wielościany o jednakowych ścianach foremnych nazywamy *równoforemnościennymi*. Okazuje się, że dla każdego wielościanu półregularnego (i regularnego) istnieje wielościan archimedesowy (platoński) mający, dla dowolnego n, tę samą liczbę ścian n-kątnych w każdym narożu. Wszystkie rysunki będą przedstawiały takie właśnie wielościany.
Pozostawiamy Czytelnikowi do zbadania, jakie mogą być wielościany o ścianach jednakowych (nie koniecznie foremnych). Czy każdemu z nich odpowiada pewien wielościan równoforemnościenny?
Wielościan o w wierzchołkach, k krawędziach i s ścianach oznaczać będziemy symbolem $W^{(w,\,k,\,s)}$. Oczywiście (patrz «Delta», 1975, 5)

(1) $$w-k+s=2.$$

Rozwiązanie równań podobnych do tego wzoru (wzór Eulera) pozwoli nam ustalić naszą listę.

Wielościany regularne

Niech $W_{(m,\,l)}$ oznacza wielościan regularny o ścianach m-kątnych i narożach l-ściennych. Niech

$$W_{(m,\,l)} = W^{(w,\,k,\,s)}.$$

Aby uzyskać liczbę krawędzi wielościanu regularnego, zliczamy najpierw krawędzie każdej ze ścian:

(2) $$m\cdot s = 2\cdot k,$$

bo każda krawędź należy do dwóch ścian. Podobnie zliczamy krawędzie schodzące się w wierzchołku:

(3) $$l\cdot w = 2\cdot k.$$

Podstawiając (2) i (3) do (1) otrzymujemy

$$\frac{2k}{l}-k+\frac{2k}{m}=2,$$

czyli

(4) $$\frac{1}{l}+\frac{1}{m}=\frac{1}{2}+\frac{1}{k}.$$

Ponieważ $k \geqslant 6$ (dlaczego?), więc m i l muszą spełniać nierówności

(5) $$\frac{1}{2}<\frac{1}{l}+\frac{1}{m}\leqslant\frac{2}{3}.$$

Z tej nierówności znajdujemy l i m. Oczywiście $l \geqslant 3$ i $m \geqslant 3$

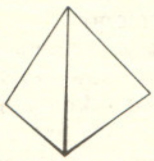
Niech więc na początek $l = 3$. Wówczas mamy

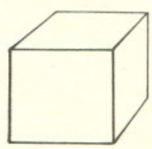
$$\frac{1}{2}<\frac{1}{3}+\frac{1}{m}\leqslant\frac{2}{3},$$

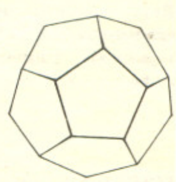
czyli

$$\frac{1}{6}<\frac{1}{m}\leqslant\frac{1}{3},$$

a stąd $m \in \{3, 4, 5\}$.







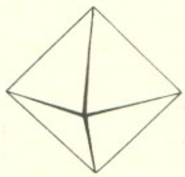
Niech z kolei $l = 4$. Wówczas

$$\frac{1}{2}<\frac{1}{4}+\frac{1}{m}\leqslant\frac{2}{3},$$

czyli

$$\frac{1}{4}<\frac{1}{m}\leqslant\frac{5}{12},$$

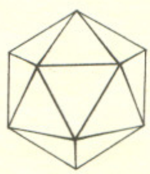
a więc $m = 3$.



Analogicznie dla $l = 5$ otrzymujemy

$$\frac{3}{10}<\frac{1}{m}\leqslant\frac{7}{15},$$

a stąd $m = 3$.



Postępując analogicznie dla $l \geqslant 6$ otrzymamy

$$\frac{1}{3}\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{l}<\frac{1}{m}\leqslant\frac{2}{3}-\frac{1}{l},$$

skąd wynika $m < 3$, co jest niemożliwe. Innych rozwiązań nierówności (5) wobec tego nie ma. Czytelnik zechce sprawdzić, znajdując odpowiednie k, że każdemu z otrzymanych rozwiązań nierówności (5) odpowiada rozwiązanie równania (4).

Każdemu rozwiązaniu równania (4) odpowiadają (liczne) wielościany regularne i (przy ustalonej długości krawędzi) jeden wielościan platoński. Oto ich lista:

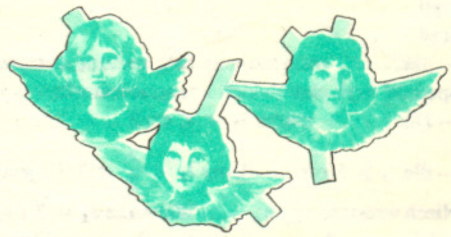
Nazwa wielościanu	l	m	w	k	s
czworościan	3	3	4	6	4
sześcian	3	4	8	12	6
dwunastościan	3	5	20	30	12
ośmiościan	4	3	6	12	8
dwudziestościan	5	3	12	30	20

Wielościany półregularne

Zajmiemy się tylko tymi wielościanami półregularnymi, które nie mają jednakowych ścian — te bowiem zostały już rozpatrzone wyżej. Weźmy pod uwagę taki wielościan $W^{(w,\,k,\,s)}$. Oznaczmy przez s_i liczbę ścian l_i-kątnych w dowolnym (jednakowym z każdym innym) wierzchołku. Jeżeli wielościan ma n rodzajów ścian, to (jak łatwo sprawdzić — analogicznie do (3)):

(6)
$$w\cdot\sum_{i=1}^{n} s_i = 2k.$$

Ponieważ liczba ścian l_i-kątnych w całym wielościanie wynosi $\frac{s_i}{l_i}\cdot w$, więc



(7)
$$s = w\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{s_i}{l_i}.$$

Wstawiając (6) i (7) do (1) otrzymujemy

$$w-\frac{w}{2}\cdot\sum_{i=1}^{n} s_i + w\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{s_i}{l_i} = 2,$$

czyli

(8)
$$\left(2-\sum_{i=1}^{n} s_i\left(1-\frac{2}{l_i}\right)\right)\cdot w = 4.$$

I z tego właśnie równania otrzymamy listę wielościanów istotnie półregularnych. Odrzucenie rozpatrzonych już wielościanów regularnych wyraża się w założeniu, że $n \geqslant 2$. Gdyby z kolei $n \geqslant 4$, to mielibyśmy

$$\sum_{i=1}^{n} s_i\left(1-\frac{2}{l_i}\right) \geqslant \left(1-\frac{2}{3}\right)+\left(1-\frac{2}{4}\right)+\left(1-\frac{2}{5}\right)+\left(1-\frac{2}{6}\right) = \frac{21}{10} > 2,$$

co jest sprzeczne z (8). Wobec tego n jest równe 2 lub 3. Dalej potrzebne nam będzie **spostrzeżenie**, że gdy l_1 jest liczbą nieparzystą, to $s_1 > 2$ lub $s_2 > 1$, lub $s_3 > 1$, czego sprawdzenie zostawiamy Czytelnikowi.

Wielościany półregularne o dwóch rodzajach ścian

Wzór (8) przybiera teraz postać

(8.1)
$$\left(2-(s_1+s_2)+2\left(\frac{s_1}{l_1}+\frac{s_2}{l_2}\right)\right)w = 4,$$

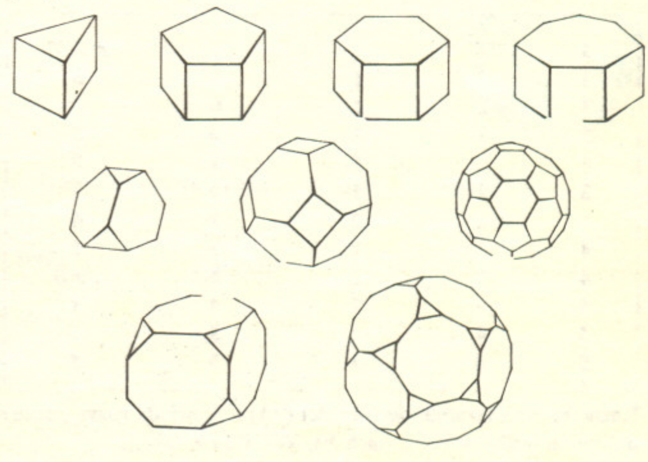
skąd wynika

(9.1)
$$2-(s_1+s_2)+2\left(\frac{s_1}{l_1}+\frac{s_2}{l_2}\right) > 0.$$

Ze względu na symetrię przyjmujemy, że $s_1 \geqslant s_2$.
Zauważmy, że $3 \leqslant s_1+s_2 < 6$ (dlaczego?). W każdym z możliwych — wobec tego trzech — przypadków rozwiążemy (9.1).
Niech $s_1+s_2 = 3$. Mamy więc $s_1 = 2$ i $s_2 = 1$. Wstawiając do (9.1) otrzymujemy

$$\frac{2}{l_1}+\frac{1}{l_2} > \frac{1}{2},$$

czyli
$$\frac{1}{l_2} > \frac{l_1-4}{2l_1}.$$



Ponieważ zarówno l_1, jak i l_2 są większe od 2 (na pewno?), więc:
— Dla l_1 nieparzystego rozwiązań na mocy **spostrzeżenia** nie ma.
— Dla $l_1 = 4$ otrzymujemy $l_2 > 0$, a więc rozwiązaniem jest każda liczba naturalna $l_2 > 3$ i $l_2 \neq 4$. Otrzymaliśmy zatem całą rodzinę *graniastosłupów*. Spośród brył platońskich graniastosłupem jest sześcian
— Dla $l_1 = 6$ otrzymujemy warunek $l_2 < 6$, czyli $l_2 \in \{3, 4, 5\}$.
— Dla $l_1 = 8$ mamy $l_2 < 4$, czyli $l_2 = 3$.
— Dla $l_1 = 10$ mamy $l_2 < \frac{10}{3}$, czyli też $l_2 = 3$.
— Dla $l_1 \geqslant 12$ otrzymujemy $l_2 < \frac{2l_1}{l_1-4} \leqslant \frac{24}{8} = 3$, co jest niemożliwe.

Niech z kolei $s_1+s_2 = 4$. Wówczas $s_1 = s_2 = 2$ lub $s_1 = 3$ i $s_2 = 1$.
Gdy $s_1 = s_2 = 2$, otrzymujemy z (9.1)

$$\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} > \frac{1}{2},$$

czyli

$$l_2 < \frac{2l_1}{l_1-2} = 2 + \frac{4}{l_1-2}.$$

Stąd
— dla $l_1 = 3$ otrzymujemy$_2 < 6$, czyli $l_2 \in \{4, 5\}$,
— dla $l_1 = 4$ ($l_1 = 5$) otrzymujemy $l_2 < 4$ $\left(l_2 < \frac{10}{3}\right)$, co daje $l_2 = 3$, a więc jest powtórzeniem poprzedniego rozwiązania,
— dla $l_1 \geqslant 6$ mamy $l_2 < 3$, co jest niemożliwe.
Gdy $s_1 = 3$ i $s_2 = 1$, otrzymujemy z (9.1)

$$\frac{3}{l_1} + \frac{1}{l_2} > 1,$$

czyli

$$\frac{1}{l_2} > \frac{l_1-3}{l_1}.$$

Stąd
— dla $l_1 = 3$ otrzymujemy całą rodzinę ***antygraniastosłupów*** ($l_2 > 3$).
Spośród brył platońskich antygraniastosłupem jest ośmiościan.
— Dla $l_1 = 4$ mamy $l_2 < 4$, czyli $l_2 = 3$,
— dla $l_1 \geqslant 5$ otrzymujemy $l_2 < \frac{5}{2} < 3$, co jest niemożliwe.

Niech wreszcie $s_1+s_2 = 5$. Wówczas $s_1 = 3$ i $s_2 = 2$ lub $s_1 = 4$ i $s_2 = 1$.
Gdyby $s_1 = 3$ i $s_2 = 2$, to z (9.1) otrzymalibyśmy

$$\frac{3}{l_1} + \frac{2}{l_2} > \frac{3}{2},$$

czyli

$$l_2 < \frac{4}{3}\,\frac{l_1}{l_1-2}.$$

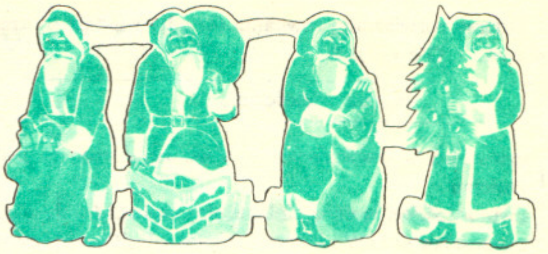
— Dla $l_1 = 3$ byłoby $l_2 < 4$, co jest wobec $l_1 \neq l_2$ niemożliwe,
— dla $l_1 \geqslant 4$ mamy $l_2 < \frac{8}{3} < 3$, co też jest niemożliwe.
Zatem $s_1 = 4$ i $s_2 = 1$. Z (9.1) otrzymujemy

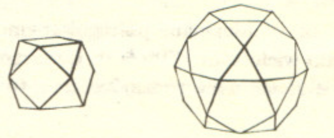
$$\frac{4}{l_1} + \frac{1}{l_2} > \frac{3}{2},$$

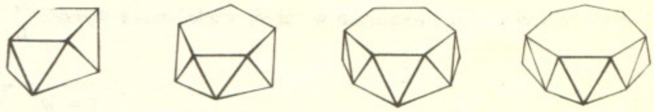
czyli

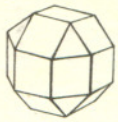
$$l_2 < \frac{2l_1}{3l_1-8}.$$

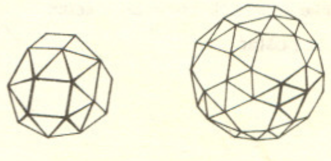
Stąd
— dla $l_1 = 3$ otrzymujemy $l_2 < 6$, czyli $l_2 \in \{4, 5\}$,
— dla $l_1 \geqslant 4$ mamy $l_2 < 2$, co jest niemożliwe.











W ten sposób zakończyliśmy wyliczenie wielościanów półregularnych o dwóch rodzajach ścian. Wyniki są zestawione w tabeli:

s_1+s_2	s_1	s_2	l_1	l_2	Liczba ścian l_1-	i l_2- -kątnych	w	k	s
3	2	1	4	$n \neq 4$	n	2	$2n$	$3n$	$n+2$
3	2	1	6	3	4	4	12	18	8
3	2	1	6	4	8	6	24	36	14
3	2	1	6	5	20	12	60	90	32
3	2	1	8	3	6	8	24	36	14
3	2	1	10	3	12	20	60	90	32
4	2	2	3	4	8	6	12	24	14
4	2	2	3	5	20	12	30	60	32
4	3	1	3	$n \neq 3$	$2n$	2	$2n$	$4n$	$2n+2$
4	3	1	4	3	18	8	24	48	26
5	4	1	3	4	32	6	24	60	38
5	4	1	3	5	80	12	60	150	92

Każdemu rozwiązaniu nierówności (9.1) odpowiada rozwiązanie równania (8.1). Proszę sprawdzić. Warto również pomyśleć, w jaki sposób obliczono liczby w kolumnach VI, VII, IX i X tabeli.

Wielościany półregularne o trzech rodzajach ścian

Wzór (8) ma w tym przypadku postać

$$(2-(s_1+s_2+s_3)+2\left(\frac{s_1}{l_1}+\frac{s_2}{l_2}+\frac{s_3}{l_3}\right)\Bigg) w = 4, \tag{8.2}$$

skąd wynika

$$2-(s_1+s_2+s_3)+2\left(\frac{s_1}{l_1}+\frac{s_2}{l_2}+\frac{s_3}{l_3}\right) > 0. \tag{9.2}$$

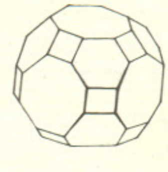
Tak jak poprzednio, $3 \leqslant s_1+s_2+s_3 < 6$, a zatem dla trzech możliwych przypadków rozwiążemy (9.2) przyjmując dla ustalenia uwagi, że $s_1 \geqslant s_2 \geqslant s_3$.

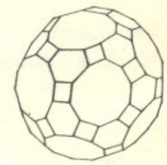
Niech $s_1+s_2+s_3 = 3$. Mamy więc $s_1 = s_2 = s_3 = 1$, co wraz z (9.2) daje

$$\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}+\frac{1}{l_3} > \frac{1}{2}. \tag{10}$$

Wobec **spostrzeżenia** l_1, l_2 i l_3 są parzyste. Niech więc na początek $l_1 = 4$. Wówczas mamy $l_2 \geqslant 6$ (i $l_3 \geqslant 6$) oraz

$$\frac{1}{l_2}+\frac{1}{l_3} > \frac{1}{4},$$





czyli

$$l_3 < \frac{4l_2}{l_2-4}.$$

Stąd

— dla $l_2 = 6$ mamy $l_3 < 12$, a więc $l_3 \in \{8, 10\}$,

— dla $l_2 = 8$ ($l_2 = 10$) mamy $l_3 < 8$ $\left(l_3 < \frac{20}{3}\right)$, co daje nam $l_3 = 6$ i jest powtórzeniem rozwiązania poprzedniego.

Niech następnie $l_1 \geqslant 6$, $l_2 \geqslant 6$ i $l_3 \geqslant 6$. Wówczas jednak wbrew (10), mielibyśmy

$$\frac{1}{l_2}+\frac{1}{l_3} \leqslant \frac{1}{8}+\frac{1}{10} = \frac{9}{40} < \frac{1}{3} = \frac{1}{2}-\frac{1}{6} \leqslant \frac{1}{2}-\frac{1}{l_1}.$$

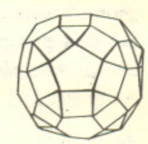
Niech z kolei $s_1+s_2+s_3 = 4$. Mamy więc $s_1 = 2$ i $s_2 = s_3 = 1$, co wraz z (9.2) daje

$$\frac{2}{l_1}+\frac{1}{l_2}+\frac{1}{l_3} > 1. \tag{11}$$

Ze względu na **spostrzeżenie** l_1 jest parzyste. Niech na początek $l_1 = 4$.

Wówczas mamy

$$\frac{1}{l_2}+\frac{1}{l_3} > \frac{1}{2},$$



czyli

$$l_3 < \frac{2l_2}{l_2-2}.$$

Stąd

— dla $l_2 = 3$ otrzymujemy $l_3 < 6$, a więc ponieważ jest $l_1 \neq l_3 \neq l_2$, to $l_3 = 5$,

— dla $l_2 = 5$ otrzymujemy $l_3 < \frac{10}{3}$, a więc $l_3 = 3$, co jest powtórzeniem rozwiązania poprzedniego,

— dla $l_2 \geqslant 6$ mamy $l_3 < 3$, co jest niemożliwe.

Niech następnie $l_1 \geqslant 6$. Wówczas jednak mielibyśmy

$$\frac{1}{l_2}+\frac{1}{l_3} \leqslant \frac{1}{3}+\frac{1}{4} = \frac{7}{12} < \frac{2}{3} = 1-\frac{1}{3} \leqslant 1-\frac{2}{l_1}$$

wbrew (11).

I to już wszystko. Dla $s_1+s_2+s_3 = 5$ mamy bowiem wobec (9.2)

$$\frac{s_1}{l_1}+\frac{s_2}{l_2}+\frac{s_3}{l_3} > \frac{3}{2},$$

a więc tym bardziej $\frac{s_1}{3}+\frac{5-s_1}{4} > \frac{3}{2}$,

z czego wynika, że $s_1 > 3$, a więc $s_1+s_2 < 2$, co jest niemożliwe.

Czytelnik zechce sprawdzić, że każdemu z rozwiązań nierówności (9.2) odpowiada rozwiązanie równania (8.2) oraz że prawidłowo wypełniliśmy poniższą tabelkę:

$s_1+s_2+s_3$	s_1	s_2	s_3	l_1	l_2	l_3	Liczba ścian l_1-,	l_2- i	l_3- -kątnych	w	k	s
3	1	1	1	4	6	8	12	8	6	48	72	26
3	1	1	1	4	6	10	30	20	12	120	180	62
4	2	1	1	4	3	5	30	20	12	60	120	62

Wielościany równoforemnościenne

Z definicji ściany ich są wszystkie i-kątami foremnymi. Ponieważ w jednym wierzchołku zbiegają się co najmniej 3 ściany, więc z obliczenia ich kątów przy tym wierzchołku wynika, że

$$3\cdot\frac{i-2}{i}\cdot\pi < 2\pi,$$

a więc $i < 6$.

Niech na początek $i = 5$. Ponieważ

$$4\cdot\frac{5-2}{5}\cdot\pi \geqslant 2\pi,$$

w każdym wierzchołku zbiegają się dokładnie 3 ściany, więc poszukiwanym wielościanem okazuje się bryła platońska — dwunastościan.

Niech następnie $i = 4$. Analogicznie mamy

$$4\cdot\frac{4-2}{4}\cdot\pi \geqslant 2\pi,$$

więc poszukiwanym wielościanem okazuje się sześcian.

Niech wreszcie $i = 3$. Nierówność

$$i\cdot\frac{3-2}{3}\cdot\pi < 2\pi$$

ma, wobec $i \geqslant 3$, trzy rozwiązania: 3, 4 i 5. Oznaczmy przez w_j liczbę wierzchołków, w których zbiega się j ścian. Przy tym oznaczeniu

$$w = w_3+w_4+w_5,$$

ponieważ zaś ściany są trójkątami, więc

$$2k = 3s;$$

zliczając wreszcie krawędzie każdego wierzchołka mamy

$$2k = 3w_3+4w_4+5w_5.$$

Po wstawieniu tych zależności do wzoru (1) otrzymamy

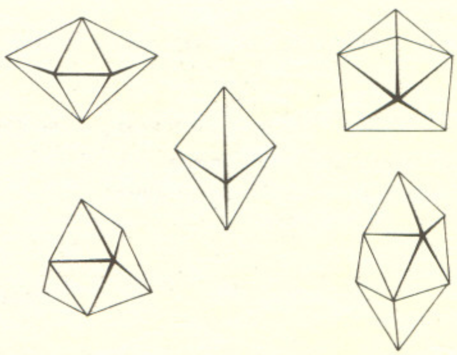
$$6(w_3+w_4+w_5)-3(3w_3+4w_4+5w_5)+2(3w_3+4w_4+5w_5) = 12,$$

czyli

(12) $$3w_3+2w_4+w_5 = 12.$$

Równanie (12) ma 19 rozwiązań (każde z nich jest trójką złożoną z liczb naturalnych i zer). Freudenthal i van der Waerden wykazali, że tylko ośmiu z tych rozwiązań odpowiadają wielościany wypukłe. Jednakże nikt dotychczas nie umie podać takiego warunku geometrycznego, aby odpowiadające mu równania czy nierówności, dołączone do równania (12), eliminowały owych 11 „złych" rozwiązań. Do dziś eliminuje się je indywidualnie, znajdując sposób na każde z osobna. Bardzo polecamy zastanowienie się nad tym — rozwiązanie byłoby wartościowym osiągnięciem.

Zostawiając Czytelnikom wyliczenie wszystkich rozwiązań podamy tu tylko te „dobre", dla których istnieją odpowiednie wielościany. W podanej niżej tabelce trzy wiersze, a mianowicie odpowiadające rozwiązaniom (4, 0, 0), (0, 6, 0) i (0, 0, 12), to bryły platońskie: czworościan, ośmiościan i dwudziestościan. Wygląd pozostałych podany jest na rysunkach; który odpowiada któremu wierszowi tabelki?



w_3	w_4	w_5	w	k	s
4	0	0	4	6	4
2	3	0	5	9	6
0	6	0	6	12	8
0	5	2	7	15	10
0	4	4	8	18	12
0	3	6	9	21	14
0	2	8	10	24	16
0	0	12	12	30	20

Jako świąteczną rozrywkę polecamy sklejenie brył, o których mówiliśmy. Sądzimy, że tabelki zawierają dostateczną do tego celu porcję informacji. Radzimy nie rysować całych tzw. siatek, a raczej sklejać oddzielnie poszczególne wierzchołki i dopiero potem łączyć je w cały wielościan.

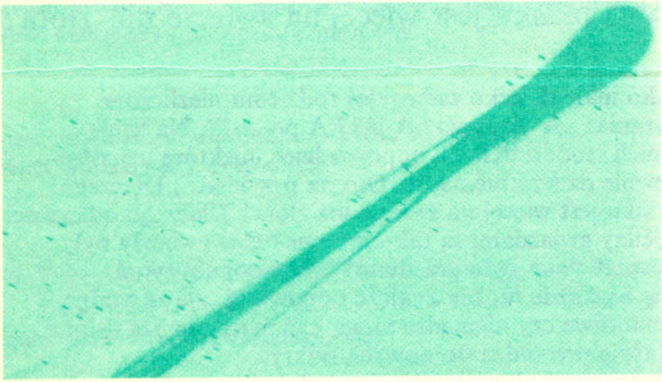
mała delta

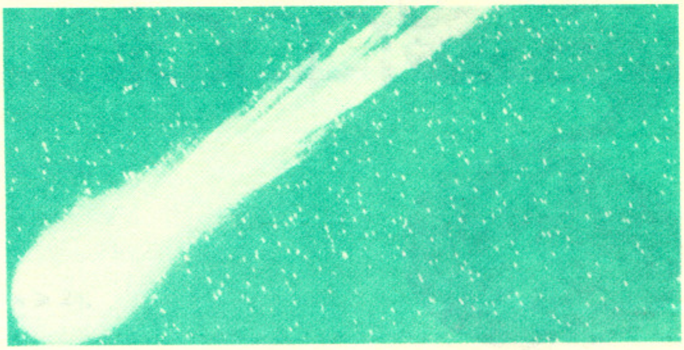
Dlaczego piasku jest więcej na świecie niż złota?

Jako małe dziecko zadawałeś rodzicom niezliczone pytania: „A dlaczego? A jak? A po co?”. Na wiele z nich trudno było Ci odpowiedzieć, niektóre uznałbyś pewnie dziś za niemądre. Oto na przykład: „Dlaczego piasku jest więcej na świecie niż złota? Dlaczego odległości między gwiazdami są tak ogromne? Czy gwiazdy były zawsze? A co było przedtem?”. Nie bój się pytań. Nie na każde można znaleźć odpowiedź, ale te trudne, kłopotliwe czy niemądre mogą być najcenniejsze — one właśnie prowadzą do nowych odkryć.
Dlaczego piasku jest więcej niż złota? A może szerzej: Dlaczego w dostępnej badaniom części wszechświata jednych pierwiastków jest dużo, a innych mało? Opowiem Wam o próbie odpowiedzi na to pytanie i na szereg podobnych.
W jaki sposób powstały znane nam pierwiastki i kiedy, nie wiemy. Możemy jednak próbować wyobrazić sobie, jak to się mogło stać. Zadanie jest bardzo trudne. Musimy zebrać całą naszą wiedzę o świecie, a więc astronomię, fizykę, chemię, i spróbować odtworzyć przeszłość wszechświata. Wiemy już (wydaje nam się, że dużo) o istniejących najdrobniejszych cząstkach materii, tak zwanych cząstkach elementarnych, i o tym, co powstaje w wyniku ich zderzeń. Astronomowie wiedzą o budowie odległych ciał niebieskich, potrafią obliczyć (chociaż niezbyt dokładnie) masę gwiazd i całych układów gwiezdnych. Potrafią podać o tych układach bardzo wiele informacji. Należy z tej wiedzy tylko skorzystać.
Wymyślono historyjkę (uczeni mówią: teorię lub hipotezę) opowiadającą o dziejach wszechświata w ostatnich stu tysiącach milionów lat. Oczywiście dobra historyjka musi być w zgodzie z tym, co wiemy; nie może na przykład twierdzić, że najbardziej rozpowszechnionym pierwiastkiem jest złoto, a wodoru jest bardzo mało.
W historyjce tej wszystko musi być tak, jakby mogło się zdarzyć naprawdę. Historyjka, którą opowiem, nie jest jedyna, nawet nie wiem, czy jest prawdziwa, wystarczy że tak stać się mogło, i tym różni się od innych nie mniej pięknych bajek, jak na przykład o Czerwonym Kapturku.

Powinienem zacząć jak w prawdziwej bajce: Było to bardzo dawno temu. W pewnym miejscu wszechświata znalazła się okropnie gorąca i bardzo gęsta materia ... Bajka nie musi tłumaczyć, skąd się tam wzięła — znalazła się tam i koniec. Jak dawno? A no właśnie sto tysięcy milionów lat temu. Na samym początku była tak gęsta i tak gorąca, że trudno to sobie wyobrazić. Gdyby nawet całe nasze Słońce ścisnąć tak, aby było kulką o rozmiarach ziarnka maku, to jego gęstość byłaby śmiesznie mała wobec tego, co działo się na początku naszej bajki. Nie znamy i nie umiemy wytworzyć materii w tym stanie, więc nawet nie umiemy powiedzieć, co się wtedy działo.

Był to chaos. Stan ten trwał niezwykle krótko. Wszechświat zaczął się rozszerzać. Rozszerzanie to trwa do dziś. Temperatura gwałtownie spadała, malała również gęstość materii. Nie było jeszcze ani planet, ani gwiazd, ani atomów, ani nawet jąder atomowych. Były tylko najelementarniejsze składniki materii obdarzone ogromnymi energiami. Ze zmniejszaniem się temperatury malała energia cząstek.
Każdej energii odpowiadają inne możliwości oddziaływania pomiędzy cząstkami — a możliwości te znamy z doświadczeń — Możemy więc przewidzieć, co się będzie działo następnie.



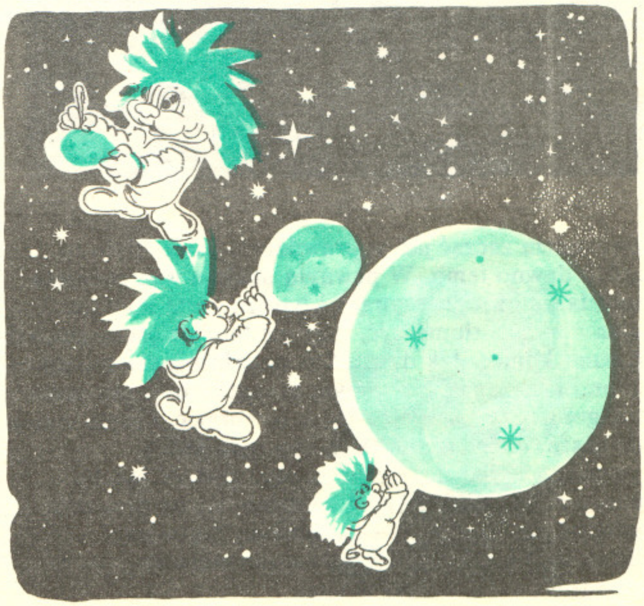


Otóż po 10 sekundach temperatura spadła do dziesięciu tysięcy milionów stopni. Zakończone zostały procesy wymagające najwyższych energii. We wszechświecie pozostało stosunkowo niewiele, w porównaniu ze stanem początkowym, cząstek zwanych nukleonami, z których będą wkrótce zbudowane jądra wszystkich znanych pierwiastków. Przestrzeń wypełniało promieniowanie elektromagnetyczne. Materia miała postać podobną do zawiesiny w przestrzeni wypełnionej intensywnym światłem o różnych długościach fal. Nie było wówczas żadnych istot żywych, więc nie miałoby sensu mówienie o świetle widzialnym. Było to promieniowanie elektromagnetyczne.

W tym okresie, zwanym erą promieniowania, powstawały jądra znanych dziś najlżejszych pierwiastków, a przede wszystkim helu. W ciągu pierwszych kilku minut został utworzony deuter. Jest to atom, którego jądro zawiera jeden proton (tak jak w wodorze) oraz jeden neutron. Deuter jest odmianą wodoru. W okresie późniejszym nie było już tak dogodnych warunków do powstawania deuteru i dlatego dokładne określenie jego zawartości we wszechświecie może wyjaśnić wiele nie rozwiązanych dotychczas zagadek.
Czas płynął. Era promieniowania trwała milion lat. Temperatura spadła do około miliona stopni, a gęstość materii była tylko tysiąc milionów razy większa niż obecnie. Rozpoczęła się era tworzenia gwiazd, która trwa do dzisiaj.
Pierwsza generacja gwiazd zbudowana była głównie z wodoru. Dopiero później, w wyniku procesów przebiegających w ich wnętrzu, powstawały pierwiastki cięższe. Nie wszystkie jednak mogły się wytworzyć w tej samej obfitości. Niektóre powstawały tylko w specjalnie dogodnych warunkach. Potężne eksplozje wyrzucały materię gwiezdną na zewnątrz. Z materii tej mogły się formować inne ciała niebieskie. Umiemy prześledzić te procesy przynajmniej teoretycznie i potrafimy wyjaśnić względną częstość występowania różnych pierwiastków. Historia nie odpowiada więc bezpośrednio na pytanie postawione w tytule, pokazuje za to drogę do odpowiedzi. Powstaje jednak od razu wiele nowych pytań. Co będzie dalej? Wszechświat ciągle się rozszerza. Można wyobrazić sobie, że kiedyś zacznie się kurczyć, aby powrócić znowu do stanu wyjściowego. Może będzie się rozszerzać już zawsze? Badanie zawartości deuteru we wszechświecie zdaje się wskazywać, że rozszerzanie nigdy się nie skończy. Historyjka nasza nie jest więc jeszcze zakończona. Poznajemy coraz to nowe zjawiska przyrody i musimy zmieniać i uzupełniać naszą opowieść. Może trzeba będzie zastąpić ją przez całkiem inną, której dzisiaj nawet wyobrazić sobie nie potrafimy. Może to właśnie Ty przyczynisz się kiedyś do wyjaśnienia historii wszechświata.

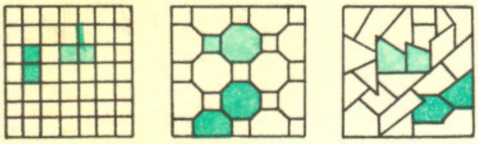
Model rozszerzającego się wszechświata

Możesz łatwo zrobić sobie model rozszerzającego się wszechświata. Potrzebne są do tego: nadmuchiwany balonik, farby i pędzelek. Nadmuchaj lekko balonik, a następnie zaznacz na nim pędzelkiem kilka małych punkcików. Każdy punkcik będzie odpowiadał galaktyce. Uczeni wierzą, iż wszechświat wygląda, jakby galaktyki były rozłożone na powierzchni sfery, tak że żadna galaktyka nie leży „w środku" wszechświata.
Możesz teraz mocniej nadmuchać balonik. W miarę, jak balonik rośnie, punkty zaznaczone na jego powierzchni oddalają się. Im dalej od siebie leżą dwa punkty, tym szybciej rośnie ich odległość. W podobny sposób oddalają się od siebie galaktyki we wszechświecie.

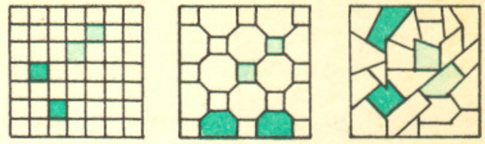


Gra «Małej Delty»

— Do rozgrywania służyć może każda z zamieszczonych tu i na okładce plansz.
— Plansza składa się z wielu **pól.** Pola **sąsiadujące** to takie pola, które mają wspólną granicę. Pól stykających się tylko rogami nie uważamy za sąsiadujące.

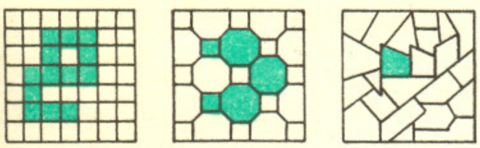


SĄSIEDNIE

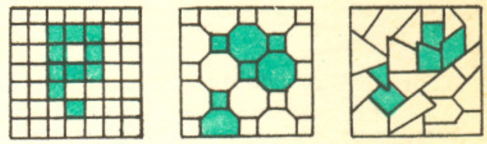


A TE NIE

— Kilka pól tworzy **obszar,** jeśli z każdego z nich można dojść do innego przechodząc jedynie poprzez pola sąsiadujące. Pojedyncze pole też jest obszarem.



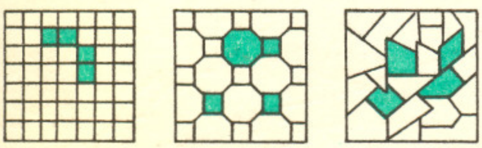
JEDEN OBSZAR



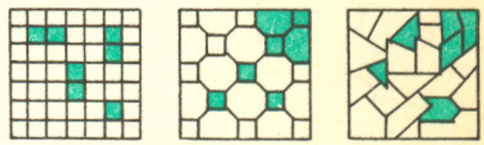
DWA OBSZARY

— Gra może być rozgrywana przez dwie lub trzy osoby. Gracze kolejno zajmują po jednym polu (stawiając na nim swojego pionka lub zamalowując pole swoim kolorem).
— Gracz może zajmować dowolne, nie zajęte jeszcze pole, przestrzegając jedynie następujące zasady:

ZBIÓR PÓL ZAJĘTYCH PRZEZ TEGO SAMEGO GRACZA NIE MOŻE W ŻADNEJ FAZIE GRY SKŁADAĆ SIĘ Z WIĘCEJ NIŻ TRZECH OBSZARÓW.

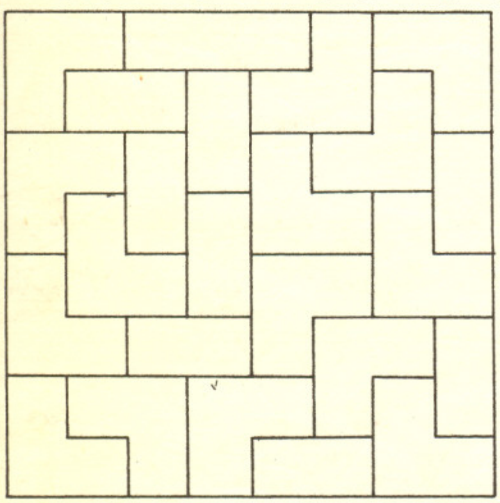


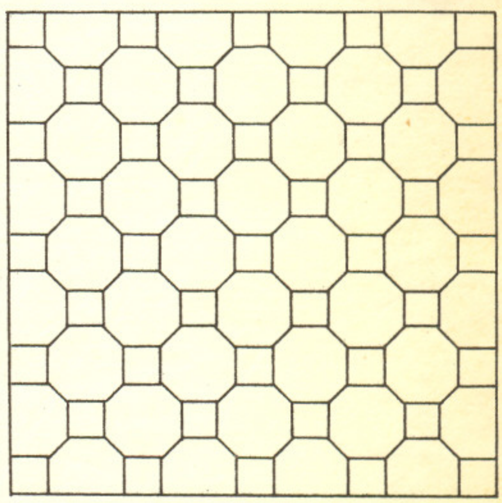
TAK WOLNO



A TAK NIE WOLNO

— Gracz, który nie jest w stanie wykonać ruchu zgodnego z tą zasadą, wypada z gry. Następnie:
— Jeśli grały dwie osoby, drugi gracz zajmuje wszystkie pola, które jest w stanie zająć nie naruszając tej zasady.
— Jeśli grały trzy osoby, pozostali dwaj gracze rozgrywają dalszy ciąg gry między sobą.
— Wygrywa ten gracz, który zajmie najwięcej pól.





Grę można rozgrywać na własnoręcznie sporządzonych planszach lub na mapie politycznej dowolnego kontynentu. Można też pomyśleć o analizie takich gier: na przykład zastanowić się, czy w grze 2-osobowej na szachownicy 4×4 któryś z graczy ma strategię wygrywającą. A dla szachownicy 8×8?

POWODZENIA! CZEKAMY NA UWAGI I POMYSŁY.

«Małą Deltę» opracowali: Tomasz Hofmokl, Przemysław Nowicki i Daria Ziemińska.