delta

SPIS TREŚCI

W następnym numerze:

Nowa gra
Dwa konkursy
Spis wielościanów

„Delta"
matematyczno-fizyczny miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa Matematycznego i Polskiego Towarzystwa Fizycznego
wydawany przy poparciu Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Adres Redakcji
ul. Hoża 69 p. 151,
00-681 Warszawa,

Zakład Narodowy im. Ossolińskich — Wydawnictwo.
Wrocław, Oddział w Warszawie
Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark. wyd.: 2,50 ark. druk.;
papier offsetowy III kl., 80 g, 61×86
Wydrukowano w Drukarni im. Rewolucji Październikowej,
Warszawa, ul. Mińska 65.
Nr zam. 888/75 B-58

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60,— cena prenumeraty półrocznej zł 30,—

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły — mające siedzibę w miastach wojewódzkich i powiatowych, zamawiać mogą prenumeratę wyłącznie za pośrednictwem miejscowych oddziałów i delegatur RSW Prasa-Książka-Ruch w terminie do dnia 25 listopada na rok następny.

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły — mające siedzibę na wsi lub miejscowościach w których nie ma oddziałów RSW Prasa-Książka-Ruch, winny opłacać prenumeratę w terenowo właściwych urzędach pocztowych.

Prenumeratę krajową dla czytelników indywidualnych przyjmują urzędy pocztowe, listonosze i Centrala Kolportażu RSW Prasa-Książka-Ruch, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, konto PKO 1-6-100020 w terminie do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty.
Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 40% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje Biuro Kolportażu Wydawnictw Zagranicznych RSW Prasa-Książka-Ruch, 00-840 Warszawa ul. Wronia 23, konto PKO nr 1-6-100024.

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTĘ":

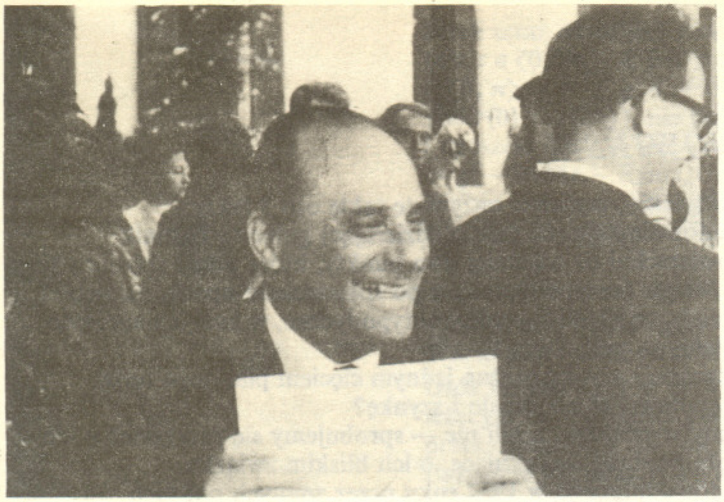
w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.
Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, numerów bieżących i archiwalnych; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.
Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, konto PKO nr 1-6-100312

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Cena 1 egzemplarza zł 5,— nr indeksu 35723/35550



Profesor Doktor Andrzej Stanisław Mostowski
ur. 01.11.1913 we Lwowie zmarł w trakcie podróży naukowej
w Vancouver (Kanada) 22.08.1975.
Jeden z najwybitniejszych matematyków polskich,
światowej klasy specjalista w dziedzinie Podstaw Matematyki,
Laureat Nagród Państwowych I i II stopnia,
Członek Rzeczywisty Polskiej Akademii Nauk,
Członek Zagraniczny Fińskiej Akademii Nauk,
Profesor Zwyczajny Uniwersytetu Warszawskiego,
Prezydent Sekcji Logiki, Metodologii i Filozofii Nauk
Międzynarodowej Unii Historii i Filozofii Nauk.
Członek Komitetów Redakcyjnych wielu pism naukowych
krajowych i zagranicznych,
w tym „Fundamenta Mathematicae" i „Annals of Mathematical Logic".
Artykuły Profesora drukowaliśmy w numerach
1974.2, 1974.3, 1974.10, 1974.11

Matematyka jaką uprawia każdy z nas jest zależna od indywidualnych zdolności, pracowitości i cech charakteru twórcy. Oprócz pracy naukowej, której wyniki publikowane są w czasopismach, działalność matematyka może przejawiać się w różny sposób; na przykład nauczanie — od przekazywania wiedzy elementarnej, aż do najbardziej wyrafinowanych osiągnięć myśli ludzkiej. Matematyk obdarzony talentem inspiratora posiada jeszcze jedną umiejętność — potrafi trafnie przewidzieć, które zagadnienia okażą się najbardziej istotne dla postępu wiedzy w danej dziedzinie i, dzięki temu, ustalić najciekawszą problematykę badań dla siebie i innych. Z trzech wskazanych (a są i inne) form działalności przeciętny matematyk uprawia zazwyczaj drugą lub pierwszą i drugą. Są ludzie — wizjonerzy — poświęcający się przede wszystkim trzeciej. Rzadko — bardzo rzadko — zdarza się by wszystkie trzy nurty, na najwyższym poziomie, były realizowane przez jednego człowieka. Jeśli więc znajdzie się ktoś, kto jest zdolny nieść tak wielki ciężar i odejdzie od nas w pełni sił, kiedy zadania jego nie są jeszcze wypełnione, jeśli przytem jest to człowiek w pełnym tego słowa znaczeniu, mądry, wrażliwy, życzliwy ludziom, to ogrom straty trudno oddać na kilku kartkach papieru.
Profesor Andrzej Mostowski bez wątpienia był właśnie uczonym najwyższej rangi, a działalność jego łączyła harmonijnie wspomniane trzy nurty aktywności matematycznej. Od połowy lat trzydziestych, kiedy to ukazały się pierwsze Jego prace, do końca każda Jego nowa publikacja była czytana i dyskutowana w głównych środowiskach logików i matematyków zajmujących się Podstawami, szereg tych prac inicjowało nowe kierunki badań i bardzo wiele wyników — co jest największym zaszczytem dla matematyka — stało się powszechnie stosowaną techniką matematyczną, o autorstwie której wspominają już tylko wstępy i pierwsze rozdziały podręczników i monografii, nie odsyłając nawet do literatury.
Tak stało się z techniką modeli permutacyjnych (zwaną Metodą Fraenkela i Mostowskiego), hierarchią arytmetyczną (hierarchia Kleene'ego i Mostowskiego), techniką kontrakcji relacji ufundowanych (Lemat Mostowskiego i Shepherdsona) i szeregiem innych wyników. Tam gdzie działy się rzeczy aktualnie w Podstawach Matematyki najważniejsze, wśród tych którzy pierwsi wskazywali kierunek dalszych badań zawsze znaleźć można było Profesora Mostowskiego. Harmonijne łączenie własnej pracy z inspirowaniem innych — tak jak robił to Profesor Mostowski — może być uważane za wzór.
Z drugiej strony dydaktyka. Niewielu czytelników tej noty miało okazję słuchać Profesora i niestety nigdy nie zobaczymy Go już przy tablicy. Wykłady Jego, zawsze precyzyjnie przygotowane, inspirowały słuchaczy i — prócz technicznych wyników — wskazywały myśl przewodnią przedmiotu. Gama zagadnień, które Profesor wykładał w ostatnich latach, obejmowała prawie całe Podstawy Matematyki. Specyficzna atmosfera tych wykładów i rzeczywisty dialog ze słuchaczami, dyskusje na przerwach, a czasem i w trakcie wykładu, dygresje i bardzo żywy tok narracji człowieka który „przy tym był" pozostawią niedosyt, kiedy słuchać będziemy innych wykładowców. Współpracownicy Szefa stracili jeszcze więcej: godziny rozmowy w Jego gabinecie. Miał bowiem Profesor Mostowski jedną jeszcze cechę wyjątkową — potrafił słuchać i włączać się w tok myśli kolegów. Uczniowie Jego, doktoranci i magistranci wiedzą jak wiele prac nigdy by nie powstało, gdyby nie pomoc Profesora — właściwy lemat właśnie wtedy, gdy był najbardziej potrzebny, pomocna rada, bądź wskazanie właściwej literatury przedmiotu.
Żal może mógłby być mniejszy, gdyby nie wyjątkowe cechy osobowości Profesora. Prawy i życzliwy, zawsze gotów do przyjścia z pomocą, zawsze zainteresowany życiem pozanaukowym swych współpracowników Był Profesor nieobojętnym na sprawy otaczającego świata, skłonny własny interes poświęcić dla dobra innych i gotów bronić niepopularnej opinii wbrew zdaniu większości, jeśli tylko pewien był słuszności sprawy.
Ci, którzy z Nim współpracowali wiedzą, że świat ich, że Podstawy Matematyki nie będą takie, jak wtedy, gdy był z nimi Szef.

Twierdzenie o antypodach

Mgr Krzysztof NOWIŃSKI

Czy skłonny jesteś, Czytelniku, uznać za oczywiste takie oto 3 fakty:
1) Rozpłaszczywszy w dowolny sposób (nie rozdzierając) gumowy balonik znajdziemy na jego powierzchni co najmniej dwa punkty, które przed spłaszczeniem były średnicowo przeciwległe (antypodyczne), a po spłaszczeniu upadły na siebie?
2) W każdej chwili istnieją na Ziemi 2 punkty antypodyczne, w których zarówno temperatura jak i ciśnienie są jednakowe?
3) Każdą kanapkę z masłem i szynką można jednym cięciem płaskiego noża przekroić tak, aby przepołowić chleb, masło i szynkę?
Jeżeli tak — gratulujemy wyobraźni. Jeżeli nie — sprobujemy się przekonać o ich prawdziwości, i co może bardziej zaskakujące, o ich bliskim związku.
Fakty te wynikają z udowodnionego w 1937 roku przez znanych polskich matematyków, Borsuka i Ulama,

TWIERDZENIA O ANTYPODACH

mówiącego, że:
Jeżeli S jest sferą w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej, a f — jej przekształceniem ciągłym w płaszczyznę, to istnieje para punktów x i y symetrycznych względem środka sfery S (antypodycznych) *i takich, że* $f(x) = f(y)$.

Przestrzeń euklidesowa — przestrzeń, której elementami są układy n liczb rzeczywistych $(x_1, \dots, x_n)$, odległość $\varrho((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n))$ określa się wzorem $\sqrt{(x_1-y_1)^2+ \dots +(x_n-y_n)^2}$, a sferą nazywa się jak zwykle miejsce geometryczne punktów odległych o ustaloną liczbę R od punktu x_0 (środka).

Widać już teraz, że pierwszy fakt jest po prostu „naiwnym" sformułowaniem naszego twierdzenia. Z kolei traktując powierzchnię Ziemi jako sferę, a temperaturę t i ciśnienie p jako współrzędne obrazu punktu x na płaszczyźnie (czyli pisząc $f(x) = (t(x), p(x))$), otrzymamy znów sytuację opisaną w twierdzeniu o antypodach — ciągła zależność temperatury i ciśnienia powietrza w ustalonej chwili od punktu na powierzchni Ziemi jest chyba oczywista. Fakt trzeci nie jest już tak bezpośrednim wnioskiem, jego dowodowi poświęcimy drugą część artykułu
Zanim zaczniemy dowód twierdzenia o antypodach, przypomnimy kilka faktów z artykułu *Urojony sprzymierzeniec* M. Skwarczyńskiego («Delta», 1974, 3).
Płaszczyznę, o której mowa w twierdzeniu, będziemy traktować jako zbiór C liczb zespolonych. W cytowanym artykule został zdefiniowany *przyrost logarytmu* zespolonego na krzywej $z(t)$ określonej na przedziale a, b i o wartościach w płaszczyźnie zespolonej z usuniętym początkiem układu. Można tam znaleźć również definicję indeksu krzywej zamkniętej $z(t)$. (Jest to ścisła definicja liczby obiegów punktu 0 przez krzywą $z(t)$).
Podstawową własność indeksu krzywej opisuje następujący fakt: Jeżeli $w_r(t)$ jest ciągłą rodziną krzywych zamkniętych, taką, że $w_r(t) \neq 0$ dla każdego r i t, to $\operatorname{ind} w_r(t)$ nie zależy od r. Własność ta została też zasygnalizowana (i wykorzystana przy dowodzie podstawowego twierdzenia algebry) w *Urojonym sprzymierzeńcu*. Pokażemy jeszcze, że jeżeli $w(t)$ jest krzywą zamkniętą, określoną na przedziale $\langle 0,2\pi\rangle$, i taką, że $w(t+\pi) = -w(t)$, to $\operatorname{ind} w(t)$ jest liczbą nieparzystą.
Rozpatrzmy w tym celu krzywą $z(t)$ $t \in \langle 0, \pi\rangle$ taką, że $e^{z(t)} = w(t)$ (patrz *Urojony sprzymierzeniec*). Ponieważ $e^{z(\pi)} = -e^{z(0)}$, $z(\pi) = z(0)+(2k+1)\pi i$.
Zauważmy teraz, że przedłużając krzywą z na odcinek $\langle \pi, 2\pi\rangle$ wzorem $z(t) = z(t-\pi)+(2k+1)\pi i$ otrzymamy
$e^{z(t)} = e^{z(t-\pi)+(2k+1)\pi i} = e^{z(t-\pi)} \cdot e^{(2k+1)\pi i} = -e^{z(t-\pi)} = -w(t-\pi)$, co zgadza się z założeniem o krzywej w. Krzywa $z(t)$ określona na przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$ spełnia więc warunek $e^{z(t)} = w(t)$ i wobec tego

$$\operatorname{ind} w(t) = \frac{z(2\pi)-z(0)}{2\pi i} = \frac{2(2k+1)\pi i}{2\pi i} = 2k+1.$$

Możemy już teraz przystąpić do dowodu naszego twierdzenia. Ustalmy przede wszystkim układ współrzędnych tak, aby środek sfery znalazł się w początku układu. Parami punktów symetrycznych względem środka sfery będą wtedy po prostu pary postaci x i $-x$ (czyli (x_1, x_2, x_3) i $(-x_1, -x_2, -x_3)$). Załóżmy teraz, że teza naszego twierdzenia nie zachodzi. Oznaczałoby to, że dla każdego x $f(x) \neq f(-x)$.
Wprowadzimy pomocnicze przekształcenie g określone wzorem $g(x) = f(x)-f(-x)$. Z założenia uczynionego wyżej wynika, iż $g(x) \neq 0$ dla każdego x. Równocześnie przekształcenie g jest ciągłe i spełnia równość $g(-x) = -g(x)$.

Jeżeli teraz określimy równik naszej sfery jako krzywą $r(t) = (R\cos t,\ R\sin t,\ 0)$ (dla $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, R jest promieniem sfery) i złożymy przekształcenie $r: \langle 0, \pi \rangle \to S$ z $g: S \to C$, to otrzymamy krzywą $w(t)$ zamkniętą $\big($bo $r(0) = r(2\pi)\big)$, nie przechodzą przez 0 (bo $g(x) \neq 0$ dla każdego $x \in S$), i wreszcie taką, że $w(t+\pi) = g(R\cos(t+\pi),\ R\sin(t+\pi),\ 0) =$
$= g(-R\cos t, -R\sin t, 0) = g\big(-(R\cos t,\ R\sin t,\ 0)\big) = -g\big(r(t)\big) = -w(t)$.
Wobec tego $\operatorname{ind} w(t) = 2k+1 \neq 0$.
Ale $w(t)$ jest elementem ciągłej rodziny krzywych $w_\varrho(t)$ zdefiniowanych wzorem:

$$w_\varrho(t) = g(\sqrt{R^2-\varrho^2}\cos t,\quad \sqrt{R^2-\varrho^2}\sin t,\ \varrho)$$

$\big($jest tu oczywiście $w_0(t) = w(t)\big)$.
Warto przez chwilę zastanowić się nad geometryczną interpretacją rodziny $w_\varrho(t)$. Otóż krzywa $r_\varrho(t) = (\sqrt{R^2-\varrho^2}\cos t,\ \sqrt{R^2-\varrho^2}\sin t,\ \varrho)$ jest równoleżnikiem sfery leżącym na wysokości ϱ nad równikiem, a krzywa $w_\varrho(t)$ opisuje „zachowanie się” przekształcenia g na tym równoleżniku.
Pozostaje już teraz tylko zauważenie, że z jednej strony $\operatorname{ind} w_R(t) = \operatorname{ind} w_0(t) \neq 0$, z drugiej strony jednak „krzywa” $w_R(t) = g(0, 0, R)$ ma obraz złożony z jednego punktu i wobec tego $\operatorname{ind} w_R(t) = 0$. Tak więc z założenia, że dla każdej pary punktów antypodycznych x, $-x$ jest: $f(x) \neq f(-x)$, doszliśmy do sprzeczności — wykazując tym samym istnienie co najmniej jednej pary $(x, -x)$ takiej, że $f(x) = f(-x)$, czym zakończyliśmy dowód.
Powiedzmy na zakończenie słów parę o (trudnych już w dowodzie) uogólnieniach naszego twierdzenia. Jedno z nich, naturalne w świetle zadania będącego właściwie uproszczoną wersją twierdzenia o antypodach i naszego artykułu, brzmi tak:
Jeżeli S jest sferą w n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej oraz f jest przekształceniem ciągłym S w przestrzeń n-1-wymiarową, to istnieje para punktów antypodycznych x i y takich, że $f(x) = f(y)$.
Bardziej nieoczekiwane jest twierdzenie, w którego założeniach znika symetria. Sformułujemy je w przypadku dwuwymiarowym.
Jeżeli $h: S \to S$ jest przekształceniem ciągłym sfery na siebie takim, że $h(h(x)) = x$ dla każdego $x \in S$ (przekształcenia takie nazywa się inwolucjami: symetria jest oczywiście inwolucją) *i f jest przekształceniem ciągłym sfery na płaszczyznę, to istnieje punkt x taki, że $f(x) = f(h(x))$.*
Być może, ktoś z Czytelników spróbuje udowodnić takie twierdzenie o okręgu. Uprzedźmy jednak, że i w tym przypadku dowód jest dość trudny.

Zadania

Redaguje dr Andrzej Ziemiński

F23. Naczynie z wodą o temperaturze bliskiej 0°C zostało umieszczone pod kloszem pompy próżniowej o dużej wydajności pompowania. Opiszcie zjawiska jakie wystąpią po uruchomieniu pompy. Można przyjąć, że wszystkie procesy odbywają się bez wymiany ciepła z otoczeniem, tzn. adiabatycznie. Ciepło parowania wody w temperaturze 0°C wynosi 596 $\frac{\text{cal}}{\text{g}}$, ciepło krzepnięcia wody 79,8 $\frac{\text{cal}}{\text{g}}$, a ciepło sublimacji lodu 677 $\frac{\text{cal}}{\text{g}}$.
(Zadanie II-go stopnia XII Olimpiady Fizycznej — 1963 rok)
Rozwiązanie na str. 5

Redaguje mgr Andrzej Mąkowski

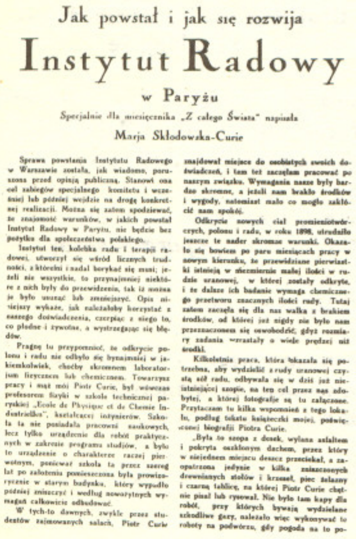
M67. Łącząc środki sąsiednich boków pewnego czworokąta otrzymano czworokąt podobny do wyjściowego. Jaki to czworokąt?
Rozwiązanie na str. 14

M68. Przeciąć kwadrat na pięć części tak, by można z nich było ułożyć dwa kwadraty.
Rozwiązanie na str. 10

M69. Wykazać, że odległość dowolnego punktu ćwiartki okręgu od jego rzutu na jej cięciwę jest średnią geometryczną odległości tego punktu od jego rzutów prostokątnych na styczne do okręgu poprowadzone z końców rozważanej ćwiartki.
Rozwiązanie na str. 8

Jak powstał i jak się rozwija Instytut Radowy w Paryżu

W pierwszym numerze miesięcznika «Z Całego Świata» z roku 1925 ukazał się artykuł Marii Skłodowskiej-Curie *Jak powstał i jak rozwija się Instytut Radowy w Paryżu*, z którego fragment obok przedrukowujemy, zachowując oryginalną pisownię autorki.
Sądzimy, że przypomnienie historii odkrycia radu i początków powstania Instytutu Radowego opowiedziane przez naszą Wielką Rodaczkę zainteresuje Czytelników.


Jak powstał i jak się rozwija

Instytut Radowy

w Paryżu

Specjalnie dla miesięcznika „Z całego Świata" napisała

Marja Skłodowska-Curie

Sprawa powstania Instytutu Radowego w Warszawie została, jak wiadomo, poruszona przed opinją publiczną. Stanowi ona cel zabiegów specjalnego komitetu i wcześniej lub później wejdzie na drogę konkretnej realizacji. Można się zatem spodziewać, że znajomość warunków, w jakich powstał Instytut Radowy w Paryżu, nie będzie bez pożytku dla społeczeństwa polskiego.

Instytut ten, kolebka radu i terapji radowej, utworzył się wśród licznych trudności, z któremi i nadal borykać się musi; jeżeli nie wszystkie, to przynajmniej niektóre z nich były do przewidzenia, tak iż można je było usunąć lub zmniejszyć. Opis niniejszy wykaże, jak należałoby korzystać z naszego doświadczenia, czerpiąc z niego to, co płodne i żywotne, a wystrzegając się błędów.

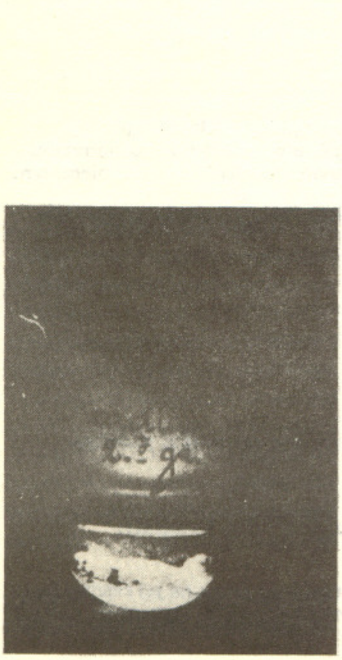
Pragnę tu przypomnieć, że odkrycie polonu i radu nie odbyło się bynajmniej w jakiemkolwiek, choćby skromnem laboratorjum fizycznem lub chemicznem. Towarzysz pracy i mąż mój Piotr Curie, był wówczas profesorem fizyki w szkole technicznej paryskiej „Ecole de Physique et de Chemie Industrielles", kształcącej inżynierów. Szkoła ta nie posiadała pracowni naukowych, lecz tylko urządzenie dla robót praktycznych w zakresie programu studjów, a było to urządzenie o charakterze raczej pierwotnym, ponieważ szkoła ta przez szereg lat po założeniu pomieszczona była prowizorycznie w starym budynku, który wypadło później zniszczyć i według nowożytnych wymagań całkowicie odbudować.

W tych-to dawnych, zwykle przez studentów zajmowanych salach, Piotr Curie znajdował miejsce do osobistych swoich doświadczeń, i tam też zaczęłam pracować po naszym związku. Wymagania nasze były bardzo skromne, a jeżeli nam brakło środków i wygody, natomiast mało co mogło zakłócić nam spokój.

Odkrycie nowych ciał promieniotwórczych, polonu i radu, w roku 1898, utrudniło jeszcze te nader skromne warunki. Okazało się bowiem po paru miesiącach pracy w nowym kierunku, że przewidziane pierwiastki istnieją w niezmiernie małej ilości w rudzie uranowej, w której zostały odkryte, i że dalsze ich badanie wymaga chemicznego przetworu znacznych ilości rudy. Tutaj zatem zaczęła się dla nas walka z brakiem środków, od której już nigdy nie było nam przeznaczonem się oswobodzić, gdyż rozmiary zadania wzrastały o wiele prędzej niż środki.

Kilkoletnia praca, która okazała się potrzebna, aby wydzielić z rudy uranowej czystą sól radu, odbywała się w dziś już nieistniejącej szopie, na ten cel przez nas zdobytej, a której fotografje są tu załączone. Przytaczam tu kilka wspomnień z tego lokalu, podług tekstu książeczki mojej, poświęconej biografji Piotra Curie.

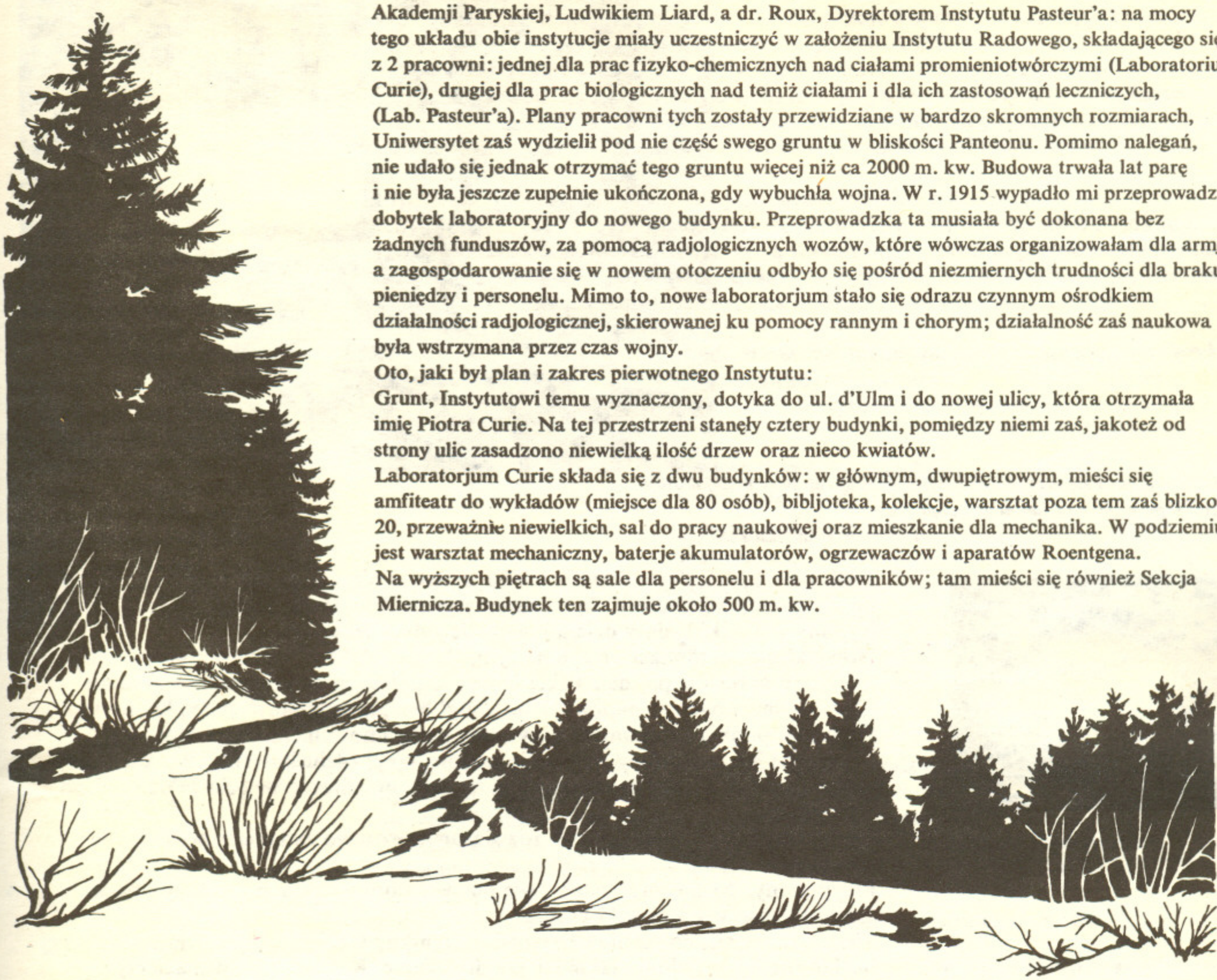
„Była to szopa z desek, wylana asfaltem i pokryta oszklonym dachem, przez który w niejednem miejscu deszcz przeciekał, a zaopatrzona jedynie w kilka zniszczonych drewnianych stołów i krzeseł, piec żelazny i czarną tablicę, na której Piotr Curie chętnie pisał lub rysował. Nie było tam kapy dla robót, przy których bywają wydzielane szkodliwe gazy, należało więc wykonywać te roboty na podwórzu, gdy pogoda na to po-



Maria SKŁODOWSKA-CURIE

Pragnę tu przypomnieć, że odkrycie polonu i radu nie odbyło się bynajmniej w jakiemkolwiek, choćby skromnem laboratorjum fizycznym lub chemicznym. Towarzysz pracy i mąż mój Piotr Curie, był wówczas profesorem fizyki w szkole technicznej paryskiej ,,Ecole de Physique et de Chemie Industrielles", kształcącej inżynierów. Szkoła ta nie posiadała pracowni naukowych, lecz tylko urządzenie dla robót praktycznych w zakresie programu studjów, a było to urządzenie o charakterze raczej pierwotnym, ponieważ szkoła ta przez szereg lat po założeniu pomieszczona była prowizorycznie w starym budynku, który wypadło później zniszczyć i według nowożytnych wymagań całkowicie odbudować.
W tych-to dawnych, zwykle przez studentów zajmowanych salach, Piotr Curie znajdował miejsce do osobistych swoich doświadczeń, i tam też zaczęłam pracować po naszym związku. Wymagania nasze były bardzo skromne, a jeżeli nam brakło środków i wygody, natomiast mało co mogło zakłócić nam spokój.
Odkrycie nowych ciał promieniotwórczych, polonu i radu, w roku 1898, utrudniło jeszcze te nader skromne warunki. Okazało się bowiem po paru miesiącach pracy w nowym kierunku, że przewidziane pierwiastki istnieją w niezmiernie małej ilości w rudzie uranowej, w której zostały odkryte, i że dalsze ich badanie wymaga chemicznego przetworu znacznych ilości rudy. Tutaj zatem zaczęła się dla nas walka z brakiem środków, od której już nigdy nie było nam przeznaczonem się oswobodzić, gdyż rozmiary zadania wzrastały o wiele prędzej niż środki.
Kilkoletnia praca, która okazała się potrzebna, aby wydzielić z rudy uranowej czystą sól radu, odbywała się w dziś już nieistniejącej szopie, na ten cel przez nas zdobytej. Przytaczam tu kilka wspomnień z tego lokalu, podług tekstu książeczki mojej, poświęconej biografji Piotra Curie.
,,Była to szopa z desek, wylana asfaltem i pokryta oszklonym dachem, przez który w niejednem miejscu deszcz przeciekał, a zaopatrzona jedynie w kilka zniszczonych drewnianych stołów i krzeseł, piec żelazny i czarną tablicę, na której Piotr Curie chętnie pisał lub rysował. Nie było tam kapy dla robót, przy których bywają wydzielane szkodliwe gazy, należało więc wykonywać te roboty na podwórzu, gdy pogoda na to pozwalała, albo też wewnątrz, zostawiając okna otwarte. Pracując bez pomocy nad znaczną ilością materjału, wypadało nam napełniać szopę ową wielkiemi naczyniami, zawierającymi płyny i osady, przenosić je i mięszać godzinami gotujące się masy, nie bez wielkiego sił wydatku. Drobiazgowe krystalizacje skoncentrowanych soli były stale utrudniane przez pył węgla i żelaza, od którego niepodobna się było uchronić. Cenne nasze preparaty, dla których brakło nam schronienia, znajdowały się zwykle na stołach lub na półkach, i gdy nam się zdarzało zajść nocną porą do naszego królestwa witały nas zewsząd swojem bladem światłem, i te rozproszone jakby zawisłe w ciemnościach światełka były dla nas zawsze nowem źródłem wzruszenia i zachwytu".
Jeden z szefów robót chemicznych w Sorbonie, wspominając ten lokal w liście, przesłanym mi na 25-o letnią rocznicę radu, wyraża się, jak następuje: ,,Przypominam sobie energję, z jaką podejmowała pani przemysłowe opracowanie rudy uranu w stajni, dostępnej wszelkim wichrom".
Gdy okazało się, iż praca na jeszcze większą skalę jest niezbędna dla otrzymania czystych soli radu, zorganizowaliśmy ją na sposób fabryczny, dzięki uzyskanej z kilku stron pomocy, i to pozwoliło mi cel osiągnąć i w 1902 r. oznaczyć ciężar atomowy radu. Nie ulega jednak wątpliwości, iż organizacja nasza miała poważne braki i nie pozwoliła wyciągnąć pełnej korzyści z materjału zawierającego rad otrzymanego z ówczesnej Austrji.
Przy obchodzie 25-letniej rocznicy radu wspominając tamte lata, wyraziłam się, że: ,,Odkrycie radu miało miejsce w trudnych warunkach, a szopa, która była kolebką, otoczona jest dzisiaj urokiem legendy. Ale nie należy myśleć, aby ten romantyczny element był pożądany: wynikło zeń zużycie sił i opóźnienie rezultatów".
W roku 1900 Piotr Curie otrzymał posadę w Sorbonie i niezwłocznie zaczął starania o laboratorjum: ponieważ jednak nie było ono przewidziane w gmachu przy ulicy Cuvier, gdzie odbywały się jego wykłady, niewiele można było uzyskać. Otrzymaliśmy parę czasowo pożyczonych sal i utworzyło się tam zaraz około nas małe grono pracowników. Ponieważ jednak rozwój badań nad radem przepowiadał pełną nadziei przyszłość, zarówno z punktu widzenia czystej nauki, jakoteż i w sferze zastosowania do terapji — nie przestawaliśmy zatem nalegać, aby specjalny instytut został założony dla prac w tym kierunku, postanawiając ofiarować na rzecz rad, który się nam udało przygotować za pomocą środków oraz stosunków osobistych jako też własną pracą.
W roku 1904 Piotr Curie otrzymał nowoutworzoną dla niego katedrę wraz z posadą dla mnie i jednego pomocnika oraz kredytem laboratoryjnym. Wszelako projekt nowego instytutu pozostawał w stagnacji.

Po katastrofie, która w roku 1906 pozbawiła nas Piotra Curie, prowadziłam nadal sama zabiegi w celu utworzenia instytucji na cześć jego pamięci. Nareszcie stanął układ pomiędzy Rektorem Akademji Paryskiej, Ludwikiem Liard, a dr. Roux, Dyrektorem Instytutu Pasteur'a: na mocy tego układu obie instytucje miały uczestniczyć w założeniu Instytutu Radowego, składającego się z 2 pracowni: jednej dla prac fizyko-chemicznych nad ciałami promieniotwórczymi (Laboratorium Curie), drugiej dla prac biologicznych nad temiż ciałami i dla ich zastosowań leczniczych, (Lab. Pasteur'a). Plany pracowni tych zostały przewidziane w bardzo skromnych rozmiarach, Uniwersytet zaś wydzielił pod nie część swego gruntu w bliskości Panteonu. Pomimo nalegań, nie udało się jednak otrzymać tego gruntu więcej niż ca 2000 m. kw. Budowa trwała lat parę i nie była jeszcze zupełnie ukończona, gdy wybuchła wojna. W r. 1915 wypadło mi przeprowadzić dobytek laboratoryjny do nowego budynku. Przeprowadzka ta musiała być dokonana bez żadnych funduszów, za pomocą radjologicznych wozów, które wówczas organizowałam dla armji, a zagospodarowanie się w nowem otoczeniu odbyło się pośród niezmiernych trudności dla braku pieniędzy i personelu. Mimo to, nowe laboratorjum stało się odrazu czynnym ośrodkiem działalności radjologicznej, skierowanej ku pomocy rannym i chorym; działalność zaś naukowa była wstrzymana przez czas wojny.
Oto, jaki był plan i zakres pierwotnego Instytutu:
Grunt, Instytutowi temu wyznaczony, dotyka do ul. d'Ulm i do nowej ulicy, która otrzymała imię Piotra Curie. Na tej przestrzeni stanęły cztery budynki, pomiędzy niemi zaś, jakoteż od strony ulic zasadzono niewielką ilość drzew oraz nieco kwiatów.
Laboratorjum Curie składa się z dwu budynków: w głównym, dwupiętrowym, mieści się amfiteatr do wykładów (miejsce dla 80 osób), bibljoteka, kolekcje, warsztat poza tem zaś blizko 20, przeważnie niewielkich, sal do pracy naukowej oraz mieszkanie dla mechanika. W podziemiu jest warsztat mechaniczny, baterje akumulatorów, ogrzewaczów i aparatów Roentgena.
Na wyższych piętrach są sale dla personelu i dla pracowników; tam mieści się również Sekcja Miernicza. Budynek ten zajmuje około 500 m. kw.



Rozwiązanie zadania F23.

Przed uruchomieniem pompy pod kloszem nad wodą znajdują się powietrze i nasycona para wodna. Ciecz i para wodna są w stanie równowagi dynamicznej, tzn. w jednostce czasu tyle samo cząsteczek cieczy wyparowuje, co cząsteczek pary ulega skropleniu. Liczba wyparowanych (skraplanych) cząsteczek zależy od temperatury. Pompa usuwa powietrze i parę wodną spod klosza, co powoduje zachwianie wspomnianej równowagi dynamicznej.
Ciecz będzie nadal parować, natomiast liczba skraplanych cząsteczek gwałtownie zmaleje. Jednocześnie obniżenie ciśnienia panującego nad cieczą może doprowadzić do wrzenia wody.
Warunkiem wrzenia cieczy jest bowiem, aby prężność pary nasyconej była co najmniej równa ciśnieniu zewnętrznemu. Niezbędna również jest obecność powietrza (gazu) w cieczy dla powstawania banieczek z parą.
Powstawanie pary odbywa się kosztem ciepła odbieranego od reszty cieczy i od naczynia. Dlatego ciecz gwałtownie oziębia się i zaczyna krzepnąć. Przez pewien moment współistnieją lód i przechłodzona woda*
Powstający lód sublimuje. Ponieważ proces ten odbywa się tylko na powierzchni lodu oraz ciepło sublimacji lodu jest duże, przebieg tego procesu jest bardzo powolny.
Natomiast, ponieważ ciśnienie pary nasyconej nad przechłodzoną wodą jest wyższe niż nad lodem, część pary powstałej z cieczy będzie zestalała się na powierzchni lodu.
Ostateczny rezultat opisanych powyżej procesów jest taki, że ta część wody, która nie zdąży wyparować, zestali się.
Można, zaniedbując wymianę ciepła z naczyniem, ocenić ilościowo jaka część wody ulegnie zamianie na lód.
Oznaczmy masę tej części wody przez m_1, natomiast masę wody w momencie rozpoczęcia pompowania przez m.
Wówczas bilans cieplny dany jest równaniem:

$$m_1 c_k = (m - m_1) c_p$$

gdzie c_k i c_p oznaczają odpowiednio ciepło krzepnięcia i parowania wody w temperaturze 0°C. Stąd:

$$\frac{m_1}{m} = \frac{c_p}{c_p + c_k}$$

Wartość liczbowa tego stosunku wynosi:

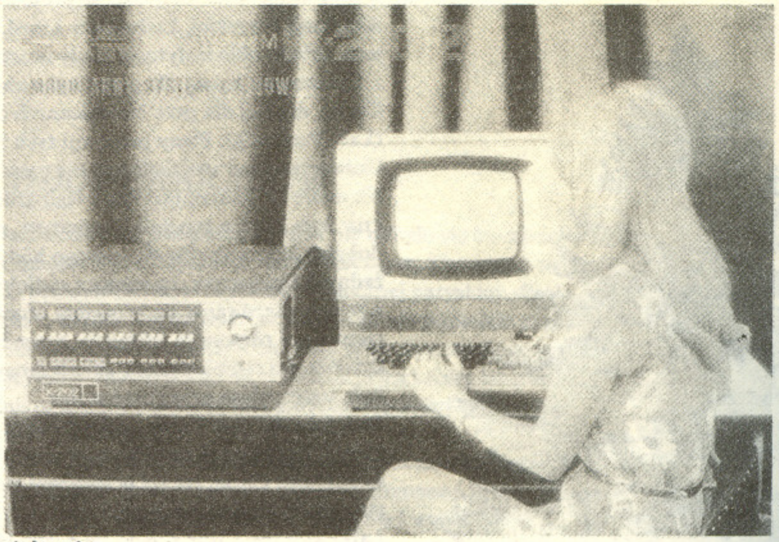
$$\frac{m_1}{m} = \frac{596}{675{,}8} \cong 0{,}882$$

Okazuje się, że tylko około 12% wody wyparuje, natomiast reszta zamieni się na lód.

* Warunkiem krzepnięcia ciała w określonej temperaturze jest obecność w cieczy krystalicznych zarodzi tego ciała.
Gdy brak jest takowych, proces krzepnięcia może ulec opóźnieniu, tzn. temperatura cieczy może spaść poniżej temperatury krzepnięcia, a mimo to ciecz nie zestali się. Taką ciecz nazywamy cieczą przechłodzoną. Okazuje się np. że w odpowiednich warunkach wodę można ochłodzić do temperatury niższej niż —20°C. Wystarczy jednak wrzucić do przechłodzonej wody kawałek lodu, aby szybko zestaliła się, a jej temperatura wzrasta do 0°C dzięki ciepłu otrzymanemu z procesu krzepnięcia. Prężność pary nasyconej nad przechłodzoną wodą jest wyższa w danej temperaturze niż nad lodem i w obu wypadkach maleje z obniżaniem się temperatury.

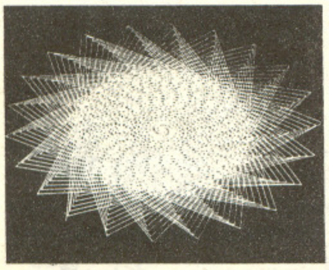
Rozmawiamy z komputerem

Dr Wacław PANKIEWICZ



Dobry Polak poci się przy drugiej cyfrze dziesiętnej, przy piątej dostaje gorączki, przy siódmej zabija go apopleksja.

Bolesław Prus „Lalka"



Dziś, przy końcu dwudziestego wieku, sytuacja nie jest aż tak tragiczna; mamy do dyspozycji komputery. Są to automatyczne urządzenia liczące, które „potrafią" wykonywać setki tysięcy działań w czasie jednej sekundy.

Nowy kłopot natomiast polega na tym, iż poleceń komputerowi nie wydajemy głosem, a w formie pisanej. Takie napisane polecenie to *program*. Oczywiście program musi być tak napisany, aby mógł być „zrozumiany" przez komputer. Czynność pisania programów nazywamy programowaniem. Napisany tekst (program) jest kodowany na taśmie perforowanej (dziurkowanej) lub kartach perforowanych i jest wprowadzany przez tzw. urządzenie wejściowe do pamięci komputera.

Popatrzmy jak przebiega proces rozwiązania prostego zadania z pomocą komputera.

Przypuśćmy, że chcemy dodać dwie macierze o n wierszach i m kolumnach. Co powinniśmy w tym celu zrobić?

Zastanówmy się, co mamy otrzymać w wyniku? Oczywiście macierz, o tej samej liczbie wierszy i kolumn co macierze dodawane. Każdy element macierzy — wyniku jest sumą odpowiednich macierzy — składników.

Możemy to zapisać w postaci tzw. sieci działań:

Dowolny prostokątny (kwadratowy) układ liczb nazywamy macierzą; np.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

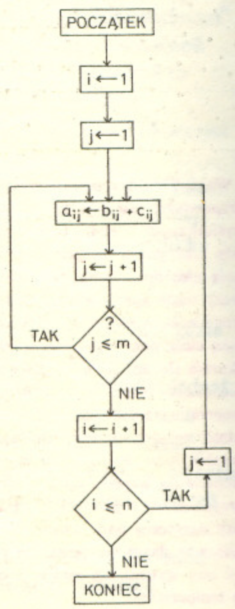
jest macierzą o dwóch wierszach i trzech kolumnach.
Jeżeli mamy dwie macierze o tej samej liczbie wierszy i kolumn, to możemy je dodać i w wyniku otrzymamy trzecią macierz, której każdy element jest sumą elementów danych macierzy, stojących na odpowiadających sobie miejscach.

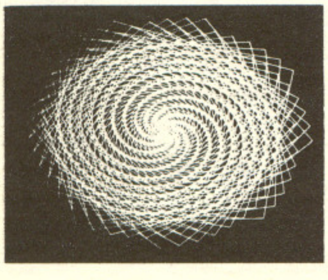
Liczby całkowite i oraz j będą nam służyły do liczenia odpowiednio wierszy oraz kolumn.

Dodajemy elementy macierzy zgodnie z określeniem sumy macierzy. Numer zwiększamy o jeden...

i pytamy: „Czy jest spełniony warunek j ⩽ m?" jeżeli tak, to dodajemy kolejne elementy, jeżeli nie, to zwiększamy numer wiersza o 1...

i pytamy: „Czy i ⩽ n?", jeżeli tak, to numer kolumny ustalamy na 1, jeżeli nie, to skończyliśmy pracę.





```
dodmac: macro
        jpt, 7.
        n: .
        m: .
        a: .
        b: .
        c: .
        i: .
        j: .
        r: .
        lot, 1,1.
        st, 1(i).
   pow: lot, 1,1.
        st, 1(j).
 pow 1: lo, 1(i).
        su, 1(1).
        ex (m) mplw. 1.
        od, 1(j).
        su, 1(1).
        ex (3) mplw. 1.
        st, 1(r).
        mod  (r).
        log, 1(b).
        mod  (r).
        addf (c).
        mod  (r).
        stg, 1(a).
        lo,  1(j).
        adt, 1,1.
        st,  1(j).
        co,  1(m).
        jptl  (pow 1) .
        jpte  (pow 1).
        lo,  1(1).
        adt, 1,1.
        st,  1(i).
        co,  1(n).
        jptl  (pow).
        jpte  (pow).
        jp (dodmac).
        fin macro   .
```

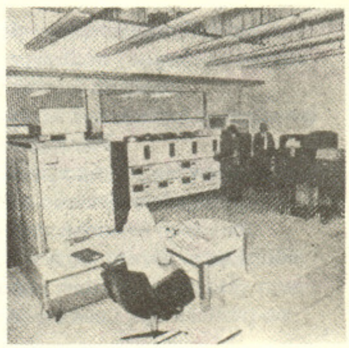
Taki rysunek stanowi udogodnienie dla programisty, niestety nie może być bezpośrednio wprowadzony do komputera. Patrząc na rysunek piszemy program w języku komputera, którego używamy do pracy. Popatrzmy (obok) jak wygląda program, realizujący powyższy schemat w języku ASSK-4.
Ten tekst jest dla nas niezrozumiały, ale zrozumiały dla polskiego minikomputera K-202 i tylko dla niego, jest to bowiem tzw. język wewnętrzny tego urządzenia. Gdybyśmy mieli do dyspozycji inną maszynę, musielibyśmy nauczyć się jej wewnętrznego języka. Języki wewnętrzne — to jakby języki narodowe komputerów.
Pisanie w ten sposób programów jest bardzo uciążliwe i nużące.
Aby ułatwić pracę programistów opracowano języki zewnętrzne albo autokody, tzw. języki wyższego rzędu. Języki te są niezależne od typu komputera, aby jednak efektywnie zrealizować program zapisany w języku wyższego rzędu, komputer musi najpierw przetłumaczyć ten program na swój język wewnętrzny, a następnie dopiero wykonać obliczenia.
Przykładem języka wyższego rzędu może być międzynarodowy, uniwersalny język algorytmiczny ALGOL 60 (zainteresowanych odsyłam do książki R. Zubera „*Metody numeryczne i programowanie*"). Przytoczony obok program przepiszemy w języku ALGOL 60.

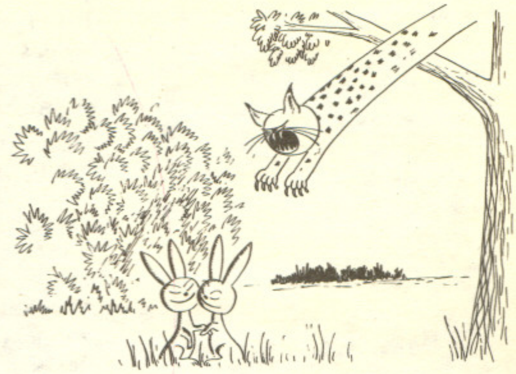
```
procedure dodmac  n,m,a,b,c ;
  value n,m;
  integer n,m;
  array a,b,;
begin integer i,j;
  for i:= 1 step 1 until n do
  for j:= 1 step 1 until m do
    a  [i,j]:=b[i,j]+c[i,j]
end
```

Napis to znacznie krótszy i przy znajomości kilkudziesięciu słów angielskich może być łatwo zrozumiały dla Czytelnika. I co bardzo ważne — ten tekst jest również zrozumiały dla większości komputerów zainstalowanych w Polsce.
Niektórzy uważają jeszcze i ten tekst (w ALGOLu) za zbyt skomplikowany. Tym możemy polecić „pakiet programów" MATLAN (od angielskich słów MATRIX LANGUAGE).
Omawiany przez nas przykład da się w nim zaprogramować w sposób następujący:

```
MAIN
READ    B,C        „czytaj macierze B, C"
ADD     B,C,A      „dodaj B i C, wynikiem będzie A"
WRITE   A          „pisz macierz A"
END
```

Opracowano oczywiście i inne pakiety (czasem mówimy: języki problemowo-zorientowane), np. do obliczeń statystycznych, optymalizacyjnych itd. To tylko drobna wzmianka o językach komputerowych, jeżeli przy okazji czytania tego tekstu pojawiły się u Was jakiekolwiek wątpliwości — prosimy PYTAJCIE.
Czy warto w ogóle było pisać programy dla tak nieskomplikowanego zadania? O ile chcielibyśmy dodać tylko dwie macierze, prawdopodobnie układanie programów nie miałoby sensu. Ale tutaj, zauważmy, napisany przez nas program może być używany wielokrotnie i do obliczeń znacznie bardziej skomplikowanych.




Rys. Z. Jujka

Rysie, króliki, wojownicze koty, czyli o modelowaniu matematycznym procesów niefizycznych

Dr hab. Ewa SKRZYPCZAK

Fizycy często posługują się równaniami matematycznymi, przy pomocy których zapisują treść praw fizycznych lub — skromniej — charakterystyki badanego procesu. Jeżeli interesuje nas dynamika, przebieg jakiegoś procesu, to zapis matematyczny ma zazwyczaj postać równania różniczkowego lub układu takich równań. Rozwiązaniem konkretnego zagadnienia jest wówczas wyznaczenie zależności czasowych dla zmiennych występujących w równaniach.

Rozwiązania układu równań może się podjąć oczywiście matematyk, ale **sformułowanie równań**, oparte o pewne znane lub założone związki charakteryzujące dane zjawisko, oraz **analiza fizycznego sensu rozwiązania** stanowią, z natury rzeczy, pole działania fizyka.

Przy opisie zachodzących w przyrodzie realnych procesów stosujemy z reguły pewne upraszczające założenia, idealizację, która stanowi warunek efektywnego sformułowania równań i ich rozwiązania. Ocena dopuszczalności stosowanych uproszczeń jest istotnym elementem pracy nad danym problemem. Ambitny program ,,maksymalistyczny", polegający na próbie uwzględnienia wszystkich możliwych efektów w badanych procesach, prowadzi nieuchronnie do układów równań trudnych lub zgoła niemożliwych do rozwiązania. Dlatego znajomość i ocena względnej roli (hierarchii) poszczególnych efektów jest podstawowym warunkiem skutecznej analizy problemu. Tę podstawową część zagadnienia bierze ,,na swoją odpowiedzialność" specjalista z danej dziedziny, w szczególności fizyk.

Fizycy przyzwyczaili się do takich zagadnień, z którymi przecież stykają się na codzień w swojej pracy. Prosty problem ruchu oscylatora harmonicznego, reprezentowanego np. przez ruch kulki zawieszonej na sprężynie, jest klasycznym przykładem takiego podejścia.

Prosty, przejrzysty zapis równania ruchu, oparty na prawie Hooke'a, jest wynikiem świadomego pomijania wielu efektów, np. tarcia, oporu ośrodka, zjawisk elektromagnetycznych (ruch przewodnika w polu magnetycznym Ziemi) itp.

Wobec takich nawyków i wprawy, jaką nabyli fizycy, nie powinien dziwić i naturalny wydaje się fakt, że np. w badaniu układów biologicznych czy socjologicznych z zawodowymi specjalistami w tych dziedzinach często współpracują fizycy. Dzieje się tak w szczególności w obszernej i intensywnie rozwijającej się dziedzinie matematycznego modelowania procesów.

Podamy poniżej dwa przykłady z dziedziny ekologii celem zilustrowania procedury konstruowania modelu i jego analizy.

I. Pierwszy przykład — to klasyczne zagadnienie ,,ofiary i drapieżnika", przy czym ,,ofiara" x (np. trawożerny królik albo żywiąca się planktonem ryba czy czerpiąca soki z ziemi roślina) ma pod dostatkiem pożywienia. Gdyby nie istniały ,,drapieżniki" y (np. mięsożerny ryś, żywiący się mniejszymi rybami szczupak czy niszczące rośliny owady), wówczas gatunek x rozwijałby się pomyślnie i nieograniczenie. Każde jednak spotkanie z przedstawicielem gatunku y prowadzi do zguby ,,ofiary" x. Gdyby nie istniały ,,ofiary" x, to gatunek y musiałby wymrzeć z braku pożywienia, i tylko spotkania z przedstawicielami gatunku x mogą stanowić podstawę rozwoju gatunku y, czerpiącego z tych spotkań pokarm.

Zadaniem naszym jest sformułowanie i analiza modelu matematycznego omawianych procesów. Jeżeli decydujemy się na pominięcie wpływów zewnętrznych (istnienie i rola innych gatunków, wpływ czynników atmosferycznych na ilość zapasów pożywienia gatunku x, migracje gatunków x i y (z — i na rozważany teren), to zmiany liczebności x i y w czasie przedstawiają równania:

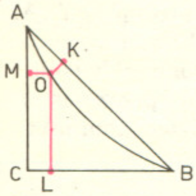
(1a) $$\frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy,$$

(1b) $$\frac{dy}{dt} = -by + \beta xy,$$

$$a, b, \alpha, \beta > 0.$$

Rozwiązanie zadania M69.

Należy zastosować twierdzenie: kąt między styczną a cięciwą jest równy kątowi wpisanemu opartemu na łuku zamkniętym tą cięciwą.



Wowczas (patrz rysunek) $\sphericalangle OAK = \sphericalangle OBL$ i trójkąty prostokątne OAK i OBL są podobne. Stąd

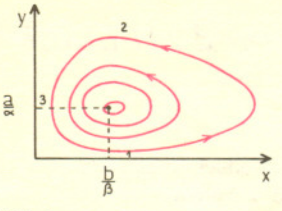
$$\frac{AO}{BO} = \frac{OK}{OL}.$$

Analogicznie (trójkąty OAM i OBK) otrzymujemy

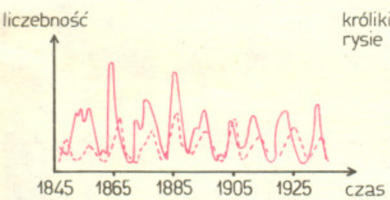
$$\frac{AO}{BO} = \frac{OM}{OK},$$

i łącznie

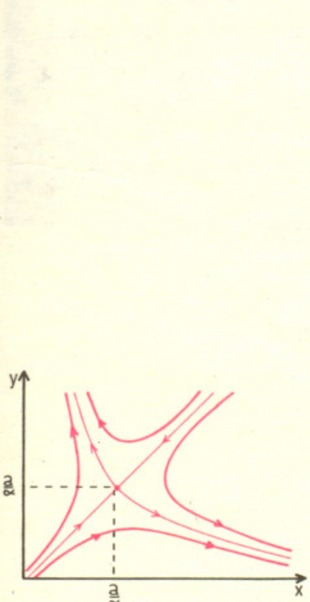
$$\frac{OK}{OL} = \frac{OM}{OK}.$$



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Pierwsze człony po prawej stronie reprezentują „przyrost naturalny" — dominację narodzin nad śmiertelnością; w przypadku „drapieżnika" gatunek ten, pozostawiony sam sobie, wyginie z braku pożywienia — stąd minus przy współczynniku b. Drugie człony odpowiadają skutkom spotkań „drapieżników" i „ofiar", zgubnych dla „ofiary" (minus przy α!) i korzystnych dla „drapieżników" (plus przy β!).

Jakościowa teoria równań różniczkowych pozwala na podanie opisu ogólnych charakterystyk dynamiki układu w oparciu o związki (1), bez konieczności analitycznego rozwiązywania układu (1). Nie wchodząc w szczegóły takiego rozumowania zauważmy tylko, że wygodnie jest rozważać nasz problem na tzw. płaszczyźnie fazowej (xy), gdzie każdemu punktowi o współrzędnych x i y odpowiada określony stan układu, stan, w którym liczebności „ofiar" i „drapieżników" wynoszą odpowiednio x i y. Na płaszczyźnie fazowej w rozważanym przez nas zagadnieniu istnieją dwa punkty osobliwe, w których $dx/dt = 0 = dy/dt$: (A) $x = 0$, $y = 0$ i (B) $x = b/\beta$, $y = a/\alpha$. Punkt (A) nie jest interesujący (obydwa przedmioty naszego zainteresowania znikają!), natomiast punkt (B) jest punktem stacjonarnym, zwanym środkiem. Widzimy ponadto, że proste: $x = b/\beta$ (y dowolne, ale różne od a/α) i $y = a/\alpha$ (x różne od b/β) są miejscem geometrycznym stanów, w których zmienia się tylko liczebność x i y — odpowiednio. Trajektoriami układu dynamicznego o takich właściwościach są krzywe zamknięte, otaczające punkt osobliwy, przypominające swym kształtem w pobliżu punktu osobliwego elipsy, a coraz to bardziej zdeformowane w miarę oddalania się od tego punktu. Takie zamknięte trajektorie, zwane cyklami, stanowią graficzny obraz zachowania się układu (w naszym przypadku — zmiennych x i y) w czasie. Łatwo zauważyć (rys. 1), że przy ustalonych współczynnikach a, b, α, β liczebności każdego z gatunków ulegają periodycznym zmianom, przy czym ekstrema dla x i y są względem siebie przesunięte w fazie.

Ciekawym potwierdzeniem tego wniosku są dane pochodzące od traperów kanadyjskich, dostarczających skórki królików i rysi do punktów skupu (rys. 2).
Analiza naszego układu, przedstawionego na płaszczyźnie fazowej, pozwala na otrzymanie innych, napozór paradoksalnych wniosków. Okazuje się, że w celu zwiększenia liczebności królików (przynajmniej w pewnych momentach czasu) można albo odstrzeliwać rysie, albo je... importować z innych terenów (!), przy czym działalność pierwszą należy przeprowadzać w fazie (1) — na „dole" trajektorii, zaś działalność drugą w fazie (2) — na „górze" trajektorii. Możemy też — co na pierwszy rzut oka jest zupełnie nieoczekiwane — odstrzelić pewną liczbę królików, ale wówczas musimy to przeprowadzić koniecznie w fazie (3) — w lewym krańcu trajektorii. Każda z wymienionych procedur prowadzi do przejścia układu na trajektorię dalszą od punktu środkowego, co z kolei daje większą amplitudę zmian liczebności królików.

II. Omówimy teraz krótko zagadnienie dwóch gatunków **wzajemnie antagonistycznych**, tj. takich, że spotkanie przedstawicieli tych gatunków prowadzi do ich obopólnej zguby. Wyobraźmy sobie np. dwa gatunki kotów o różnej barwie sierści, ale poza tym identycznych, przy czym tak wojowniczych, że gdy tylko przedstawiciele jednego i drugiego gatunku spotkają się, walczą ze sobą tak zajadle, iż obydwaj giną. Zakładamy ponadto, że obydwa gatunki mają pod dostatkiem pożywienia, o które nie muszą walczyć.
Model matematyczny dla naszego problemu ma postać:

$$\frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy, \tag{2a}$$

$$\frac{dy}{dt} = ay - \alpha xy. \tag{2b}$$

Proponujemy Czytelnikowi podjęcie próby samodzielnej analizy modelu i wykreślenie trajektorii dla rozważanego układu na płaszczyźnie fazowej xy oraz sprawdzenie, czy przebieg ich jest jakościowo zgodny z przedstawionym schematycznie na rys. 3. Zauważmy, że po dostatecznie długim czasie wszystkie trajektorie oddalają się od początku układu współrzędnych, przy czym opisywany układ dąży do jednego z dwóch stanów stacjonarnych trwałych: $x \to \infty$, $y \to 0$, lub $x \to 0$, $y \to \infty$, czyli z biegiem czasu jeden gatunek musi nieuchronnie wyginąć, a drugi rozwija swą liczebność nieograniczenie. Innymi słowami niemożliwe jest na dłuższą metę współistnienie takich antagonistycznych gatunków!

Zauważmy dalej, że symetryczny stan $x = a/\alpha = y$ jest nietrwały — najmniejsza fluktuacja, dająca przewagę jednemu z gatunków determinuje dalszy bieg wypadków i stopniowe dążenie do odpowiedniego stanu trwałego (zanik jednego z gatunków i rozrost drugiego).
Ciekawe i warte podkreślenia jest powiązanie między **przypadkowym** charakterem początkowej fluktuacji a **deterministycznym** charakterem dalszego przebiegu trajektorii.
Opisany tu model, poza żartobliwym i niezbyt realnym przykładem z sytymi, ale wojowniczymi kotami, pozwala na analizę i opis pewnych zjawisk, związanych z ewolucją biologiczną, a mianowicie uniwersalnością kodu genetycznego, czy z problemem asymetrii optycznej, obserwowanej w optycznie czynnych cząsteczkach wchodzących w skład żywych organizmów. We współczesnej biofizyce teoretycznej rozważane są liczne modele matematyczne, przy czym udział takiego „fizycznego sposobu myślenia" (w konstruowaniu modelu i jego analizie) ma zasadnicze znaczenie.

Metody Monte Carlo (III)

Dr Ryszard ZIELIŃSKI

TROCHĘ TEORII [ciąg dalszy]

CENTRALNE TWIERDZENIE GRANICZNE, podobnie jak prawo wielkich liczb, podamy również bez dowodu. Dowód można znaleźć w licznych podręcznikach rachunku prawdopodobieństwa, ostrzegamy jednak, że nie są to dowody bardzo łatwe.
Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ będzie ciągiem zmiennych losowych niezależnych, mających jednakowy rozkład, skończoną wartość oczekiwaną $EX_n = \mu$ oraz różną od zera wariancję $D^2X_n = \sigma^2$. Wtedy

(1)
$$\lim_{n \to \infty} P\left\{\frac{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right|}{\sigma}\sqrt{n} \leqslant x\right\} = \Theta(x),$$

gdzie $\Theta(x)$ jest funkcją określoną wzorem

$$\Theta(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt.$$

Kilka wartości $\Theta(x)$ podajemy w tabelce obok.

x	$\Theta(x)$
0	0
0,5	0,3829
1,0	0,6827
1,5	0,8664
2,0	0,9545
2,5	0,9876
3,0	0,9973

$\Theta(x)$	x
0,9	1,6449
0,95	1,9600
0,99	2,5758
0,999	3,2905

Pokażemy, jak korzysta się z tych twierdzeń, na przykładzie rozważanego poprzednio zadania Buffona. Przypomnijmy, że w zadaniu Buffona szacowaliśmy liczbę π rzucając igłę na odpowiednio poliniowany stół. Jeżeli igła miała długość l, odległość między liniami była równa L i prawdopodobieństwo, że rzucona na stół igła przetnie którąś z linii, było p, to $\pi = 2l/pL$ i zadanie sprowadzało się do szacowania prawdopodobieństwa p za pomocą częstości odpowiedniego zdarzenia w ciągu rzutów. Rozważmy zmienne losowe X_n, $n = 1, 2, \ldots$, zdefiniowane w następujący sposób:

$$X_n = \begin{cases} 1, & \text{gdy w } n\text{-tym rzucie igła przetnie jedną z linii narysowanych na stole,} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Mamy oczywiście $EX_n = p$, $D^2X_n = p(1-p)$, gdzie $p = 2l/\pi L$, więc wszystkie założenia centralnego twierdzenia granicznego są spełnione. Oszacowaniem p jest liczba $p_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Zajmiemy się dokładnością tego oszacowania, czyli wielkością $|p_n - p|$. Zauważmy przede wszystkim, że ponieważ p_n jest zmienną losową, to również $|p_n - p|$ jest zmienną losową i wobec tego opinia na temat dokładności rozwiązania będzie miała postać:

„*z prawdopodobieństwem $1-\alpha$ różnica $|p_n - p|$ nie przekracza liczby ε*",

gdzie α i ε są odpowiednimi, zwykle małymi liczbami dodatnimi; małymi, gdyż chodzi o to, aby z dużym prawdopodobieństwem błąd rozwiązania był mały.
Przypuśćmy, że wykonaliśmy $n = 1000$ rzutów igłą Buffona o długości $l = 1$ na stół, na którym odległością między liniami jest $L = 2$. Przyjmijmy, że $1-\alpha = 0{,}99$ i obliczmy ε. Na mocy centralnego twierdzenia granicznego dla dużych n mamy w przybliżeniu

(2)
$$P\left\{\frac{|p_n - p|}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n} \leqslant x\right\} \approx \Theta(x).$$

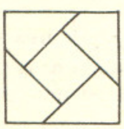
Dla $\Theta(x) = 1 - \alpha = 0{,}99$ odczytujemy w tabelce wartość $x = 2{,}5758$ i otrzymujemy

$$\varepsilon = x\sqrt{p(1-p)/n} = \frac{x}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2l}{\pi L}\left(1 - \frac{2l}{\pi L}\right)}.$$

Podstawiając podane wyżej wartości otrzymujemy

$$\varepsilon = 0{,}038.$$

Rozwiązanie zadania M68.
Można to zrobić jak na rysunku
Linie cięcia przechodzą przez środki boków danego kwadratu, zaś ich nachylenie jest dowolne — można otrzymać 2 kwadraty o dowolnie zadanym stosunku boków.



Możemy sformułować następujący wniosek: Jeżeli rzucimy 1000 razy igłą o długości $l = 1$ na stół Buffona z odległościami między liniami $L = 2$ i oszacujemy prawdopodobieństwo p zdarzenia polegającego na tym, że igła przetnie którąś z linii za pomocą wielkości $p_{1000} = \frac{k}{1000}$, gdzie k jest liczbą zaobserwowanych przecięć, to z prawdopodobieństwem 0,99 błąd $|p_{1000}-p|$ nie przekroczy liczby 0,038.

Formułując powyższe zdanie należy mieć na uwadze fakt, że jest ono tylko w przybliżeniu prawdziwe, gdyż zgodnie z centralnym twierdzeniem granicznym $\Theta(x)$ jest wartością granicy odpowiedniego prawdopodobieństwa we wzorze (1), a nie wartością tego prawdopodobieństwa dla skończonych wartości n, jak w przybliżonym wzorze (2). Okazuje się jednak, że już dla n rzędu kilkudziesięciu otrzymuje się przybliżenie praktycznie zadowalające. Czytelnik zechce sam przeliczyć, jaki w powyższym przykładzie otrzymuje się błąd maksymalny oszacowania liczby π.

Spójrzmy jeszcze raz na (1) i przepiszmy ten wzór w postaci:

(3) $$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i-\mu\right| \leqslant x\sqrt{\frac{D^2X_i}{n}}\right\} \approx \Theta(x).$$

Widać, że dokładność oszacowania zależy tylko od liczby n eksperymentów i od wariancji D^2X_i zmiennych losowych X_i. Żeby więc wyznaczyć tę dokładność musimy znać, a przynajmniej umieć oszacować, wariancję D^2X_i. Zwykle jest to wielkość nieznana i szacuje się ją za pomocą tego samego eksperymentu statystycznego, który służy do oszacowania μ. Oznaczymy to oszacowanie przez S_n^2; wyraża się ono wzorem

(4) $$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2.$$

W praktycznych zastosowaniach metod Monte Carlo postępuje się zwykle w następujący sposób. Przyjmuje się, że $1-\alpha = 0{,}9545$, uważając taki poziom prawdopodobieństwa za wystarczająco duży. Dla $\Theta(x) = 0{,}9545$ otrzymuje się $x = 2$ (właśnie ta „okrągła" liczba 2 jest powodem zgody na takie nieco dziwne $1-\alpha$). Ze wzoru (3) odczytujemy wtedy, że

(5) „*z prawdopodobieństwem* 0,9545 *błąd oszacowania* μ *za pomocą* $\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ *nie przekroczy* $2\sqrt{D^2X_i/n}$".

Zastępując zwykle nieznaną wielkość D^2X_i jej oszacowaniem za pomocą S_n^2 otrzymujemy ostatecznie sformułowanie:

(6) „*z dużym prawdopodobieństwem (mniej więcej* 0,95) *błąd oszacowania* μ *za pomocą* μ_n *nie przekracza* $2S_n/\sqrt{n}$".

Zatem wielkość $2S_n/\sqrt{n}$ charakteryzuje błąd oszacowania metodą Monte Carlo. Podkreślamy, że tak określony błąd oszacowania jest wielkością losową i że należy pamiętać zawsze o wszystkich konsekwencjach tego faktu.

Rozpatrzmy na zakończenie jeszcze jeden przykład. W telewizyjnej pogadance o metodach Monte Carlo prof. Kazimierz Urbanik opowiadał o chłopcu, który mierzy pole powierzchni klombu w ogródku rzucając na chybił-trafił piłkę do tego ogródka. Klomb ma nieregularne kształty, a pole powierzchni ogródka jest znane i wynosi, powiedzmy, 500 m². Chłopiec rzucił piłką 100 razy, a 20 spośród tych rzutów zakończyło się upadkiem piłki na klomb. Jakie jest pole klombu? Z jaką dokładnością zostało ono oszacowane?

Niech $X_i = 1$, gdy w i-tym rzucie piłka upadnie na klomb, i $X_i = 0$ w przeciwnym przypadku. Mamy więc

$$p_{100} = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i = 0{,}2,$$

gdzie p_{100} jest oszacowaniem prawdopodobieństwa zdarzenia, że piłka upadnie na klomb (ponownie odsyłamy Czytelnika do artykułu o prawdopodobieństwie geometrycznym).

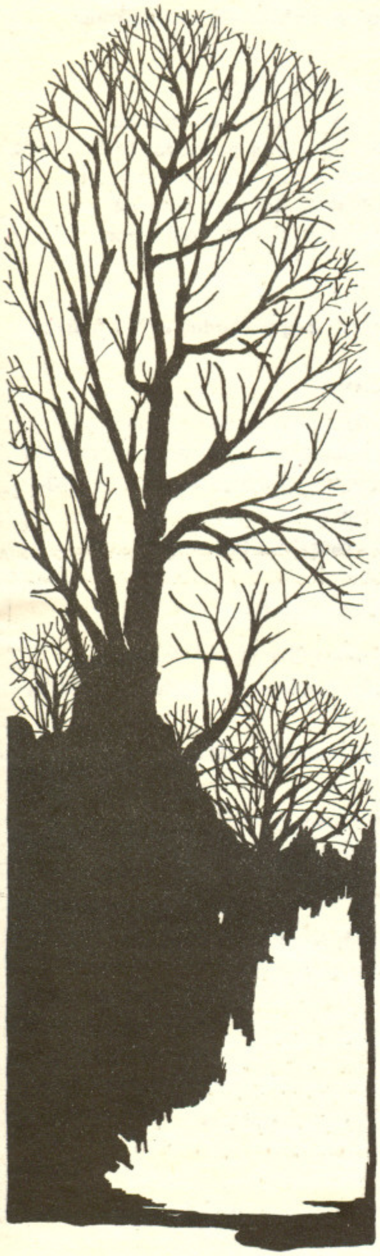
Odpowiedź na pierwsze pytanie jest więc gotowa: Pole klombu wynosi $0{,}2 \cdot 500\ \mathrm{m}^2 = 100\ \mathrm{m}^2$.

Żeby odpowiedzieć na drugie pytanie, wykonamy rachunki według wzoru (4). Otrzymamy $S_{100}^2 = 0{,}16$ i w konsekwencji, $2S_{100}/\sqrt{100} = 0{,}08$. Mnożąc ten wynik przez pole ogródka otrzymujemy $0{,}08 \cdot 500\ \mathrm{m}^2 = 40\ \mathrm{m}^2$.

Odpowiedź: Pole klombu wynosi $100 \pm 40\ \mathrm{m}^2$.

Czytelnik zechce odpowiedzieć na pytanie, ile razy chłopiec powinien rzucać piłkę, aby błąd oszacowania nie przekraczał 1 m².

W następnych odcinkach naszego artykułu o metodach Monte Carlo zajmiemy się poważniejszymi zastosowaniami tych metod.



O metodzie Heaviside'a rozwiązywania liniowych równań różniczkowych zwyczajnych ze stałymi współczynnikami

Dr Tadeusz IWANIEC

Z pojęciem równania różniczkowego mieli Czytelnicy okazję zetknąć się w artykule H. Kołakowskiego («Delta», 1974, 10; 1975, 6). Zajmiemy się pewną specjalną klasą równań i podamy ciekawą metodę ich rozwiązywania, pochodzącą od Heaviside'a.

Liniowym równaniem różniczkowym zwyczajnym n-tego rzędu ze stałymi współczynnikami nazywamy zależność postaci

$$u^{(n)}(t)+a_{n-1}u^{(n-1)}(t)+\ \ldots\ +a_1u^{(1)}(t)+a_0u(t)=f(t), \tag{1}$$

w której $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ są danymi liczbami, $f(t)$ jest znaną funkcją, a $u(t)$ jest funkcją poszukiwaną. (Symbolem $u^{(k)}(t)$ $(k=1,2\ldots n)$ oznaczyliśmy tutaj k-tą pochodną funkcji $u(t)$). W praktyce okazuje się, że wygodniej jest rozpatrywać równania, w których współczynniki $a_0, a_1 \ldots a_{n-1}$ są liczbami zespolonymi. W tej sytuacji znana funkcja $f(t)$ może również przyjmować wartości zespolone, a funkcję $u(t)$ znajdować będziemy w postaci zespolonej, to znaczy w postaci

$$u(t)=u_1(t)+iu_2(t),$$

gdzie $u_1(t)$ oraz $u_2(t)$ są niewiadomymi funkcjami rzeczywistymi; k-tą pochodną $u^{(k)}(t)$ funkcji zespolonej $u(t)$ rozumiemy jako funkcję daną wzorem

$$u^{(k)}(t)=u_1{}^{(k)}(t)+iu_2{}^{(k)}(t).$$

Takie ogólniejsze postawienie problemu jest konieczne, umożliwia ono bowiem stosowanie tej metody rozwiązywania, którą mam zamiar przedstawić. Z drugiej strony, jeśli dane równanie jest rzeczywiste i jeśli potrafimy znaleźć jego zespolone rozwiązanie $u(t)=u_1(t)+iu_2(t)$, to funkcja $u_1(t)$ jest jego rozwiązaniem rzeczywistym. Istotnie, jeśli bowiem

$$u^{(n)}(t)+a_{n-1}u^{(n-1)}(t)+\ \ldots\ +a_1u^{(1)}(t)+a_0u(t)=f(t),$$

to

$$u_1{}^{(n)}(t)+a_{n-1}u_1{}^{(n-1)}(t)+\ \ldots\ +a_1u_1{}^{(1)}(t)+a_0u_1(t)+$$
$$i[u_2{}^{(n)}(t)+a_{n-1}u_2{}^{(n-1)}(t)+\ \ldots\ +a_1u_2{}^{(1)}(t)+a_0u_2(t)]=f(t)+i\cdot 0.$$

Na mocy definicji równości liczb zespolonych (równe muszą być zarówno ich części rzeczywiste, jak i urojone):

$$u_1{}^{(n)}(t)+a_{n-1}u_1{}^{(n-1)}(t)+\ \ldots\ +a_1u_1{}^{(1)}(t)+a_0u_1(t)=f(t)$$

i dodatkowo otrzymujemy

$$u_2{}^{(n)}(t)+a_{n-1}u_2{}^{(n-1)}(t)+\ \ldots\ +a_1u_2{}^{(1)}(t)+a_0u_2(t)=0.$$

Oznaczmy symbolem $C^\infty(R)$ zbiór funkcji zespolonych określonych na prostej R i posiadających pochodne wszystkich rzędów. Na $C^\infty(R)$ określamy operator (przyporządkowanie)

$D\colon C^\infty(R)\to C^\infty(R)$, który każdej funkcji $u\in C^\infty(R)$ przypisuje jej pierwszą pochodną u'. To znaczy: $Du=u'$ dla każdej funkcji z tego zbioru. Używając tych oznaczeń najprostsze równanie różniczkowe

$$u'(t)=f(t)$$

zapisujemy w postaci operatorowej

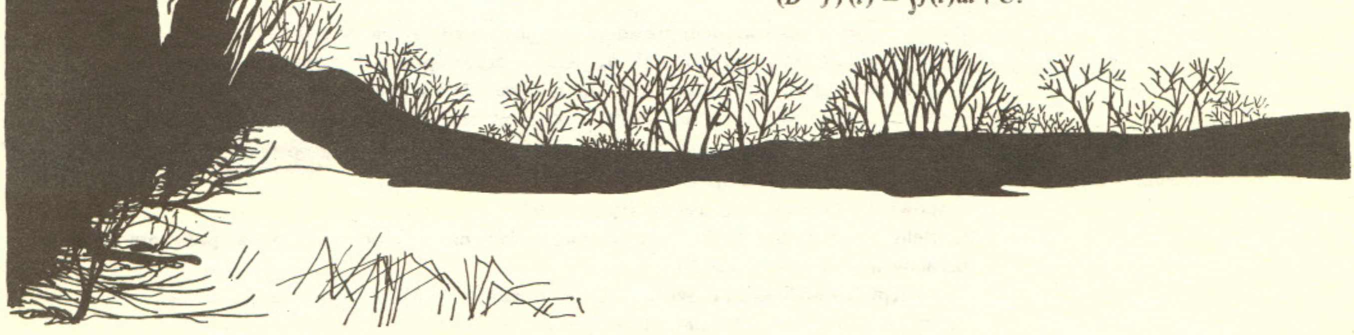
$$Du=f. \tag{2}$$

Równanie to zawsze posiada rozwiązanie, które zwykle oznacza się symbolem

$$u(t)=\int f(t)\,dt+C,$$

gdzie C jest funkcją stałą (parametrem). W pewnym sensie operator $\int f(t)\,dt$ jest odwróceniem operatora D. Dlatego wygodniej jest wprowadzić inne oznaczenie:

$$(D^{-1}f)(t)=\int f(t)\,dt+C.$$



W artykule „O przestrzeniach metrycznych (III)", wiersze 22-23 od góry, należy skreślić „(albo różnowartościową)" Jest to błąd nie pochodzący od Autorki, którą przepraszamy.

Zwróćmy uwagę, że operator D^{-1} odwzorowuje element $f \in C^\infty(R)$ w całą klasę funkcji $D^{-1}f \subset C^\infty(R)$, w której każde dwie różnią się o funkcję stałą. Tak więc rozwiązanie równania (2) sprowadza się do obliczenia całki. Z tego względu zazwyczaj zamiast mówić „rozwiązać równanie różniczkowe" mówimy (i to w przypadku każdego równania) „scałkować równanie różniczkowe". Czynność całkowania funkcji (czyli obliczanie $D^{-1}f$) nazywamy kwadraturą. Rozwiązać lub scałkować równanie różniczkowe oznacza wyrazić funkcję $u(t)$ przy pomocy skończonej liczby kwadratur znanej funkcji $f(t)$. W celu podania ogólnej metody całkowania równania (1) spróbujmy rozwiązać równanie postaci

$$u'(t) - \lambda u(t) = f(t),$$

gdzie λ jest daną liczbą zespoloną.
Zapisujemy je także w postaci operatorowej

$$(D-\lambda)u = f, \tag{3}$$

gdzie $D-\lambda$ jest operatorem działającym następująco:

$$(D-\lambda)u = Du - \lambda \cdot u.$$

Czytelnik może łatwo sprawdzić, że powstaje tu wzór

$$((D-\lambda)u)(t) = e^{\lambda t}D(e^{-\lambda t}u(t)),$$

więc równanie (3) zapisuje się w postaci

$$e^{\lambda t}De^{-\lambda t}u(t) = f(t).$$

Stąd otrzymujemy postać rozwiązania:

$$u(t) \overset{\text{def}}{=} (D-\lambda)^{-1}f(t) = e^{\lambda t}D^{-1}e^{-\lambda t}f(t). \tag{4}$$

Podobnie, jak w przypadku równania (2), operator $(D-\lambda)^{-1}$ odwzorowuje każdy element $f \in C^\infty(R)$ w klasę funkcji $(D-\lambda)^{-1}f \subset C^\infty(R)$ i wyraża się za pomocą jednej kwadratury.
Przejdźmy teraz do możliwie najbardziej ogólnej sytuacji. Dowolnemu wielomianowi (λ — zmienna zespolona)

$$P_n(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

przyporządkowujemy w sposób wzajemnie jednoznaczny operator różniczkowy

$$P_n(D) = a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1D^1 + a_0D^0,$$

którego działanie na funkcjach $u \in C^\infty(R)$ określa formuła

$$(P_n(D)u)(t) = a_nu^{(n)}(t) + a_{n-1}u^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1u'(t) + a_0u(t).$$

Wielomian $P_n(\lambda)$, odpowiadający operatorowi $P_n(D)$, nazywamy symbolem operatora $P_n(D)$.
Sumę i iloczyn operatorów różniczkowych określamy następującymi wzorami:

$$\sum_{i=0}^{n} a_iD^i + \sum_{i=0}^{n} b_iD^i = \sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)D^i,$$

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_iD^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} b_jD^j\right) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_ib_jD^{i+j}.$$

Widzimy, że symbole sumy i iloczynu są równe odpowiednio sumie i iloczynowi symboli. Mówiąc mniej ściśle, skonstruowaliśmy działania na operatorach różniczkowych podobne do klasycznych działań na wielomianach. Umożliwia to przeniesienie wielu czynności wykonywanych na wielomianach do operatorów różniczkowych. Łatwo jest również sprawdzić, że iloczyn dwóch operatorów różniczkowych jest po prostu ich złożeniem.
W przyjętych oznaczeniach równanie (1) zapisujemy w postaci operatorowej

$$P_n(D)u = f. \tag{5}$$

Teraz przez analogię do równania (2) i (3) skonstruujemy wyrażający się przez skończoną liczbę kwadratur operator $P_n^{-1}(D)$, który przypisuje funkcjom $f \in C^\infty(R)$ klasę funkcji $P_n^{-1}(D)f \subset C^\infty(R)$ będących rozwiązaniem równania (5). W tym celu skorzystamy z podstawowego twierdzenia algebry, które mówi, że dowolny wielomian $P_n(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ może być zapisany w postaci $P_n(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{\alpha_1}\cdot(\lambda-\lambda_2)^{\alpha_2}\dots(\lambda-\lambda_m)^{\alpha_m}$ $(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_m = n)$, w której $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_m$ są zespolonymi pierwiastkami wielomianu $P_n(\lambda)$, a $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ są ich krotnościami. W tym właśnie momencie widzimy, że dziedzina rzeczywista jest nienaturalna dla naszych badań. Nawet gdy równanie (1) byłoby rzeczywiste, to i tak mogłoby się zdarzyć, że liczby $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m$ byłyby zespolone i zmuszeni byli byśmy rozważać operatory zespolone. Równanie (5) jest teraz równoważne następującemu:

$$(D-\lambda_1)^{\alpha_1}(D-\lambda_2)^{\alpha_2}\dots(D-\lambda_m)^{\alpha_m}u = f.$$

Korzystając ze wzoru (4) uzyskujemy wzór wyrażający rozwiązanie równania (5) przez całki funkcji f:

$$(6)\qquad \begin{aligned} u(t) &= (D-\lambda_m)^{-\alpha_m}\dots(D-\lambda_2)^{-\alpha_2}(D-\lambda_1)^{-\alpha_1}f(t) = \\ &= e^{\lambda_m t}D^{-\alpha_m}e^{-\lambda_m t}\dots e^{\lambda_1 t}D^{-\alpha_1}e^{-\lambda_1 t}f(t) \stackrel{\text{def}}{=} P_n^{-1}(D)f(t). \end{aligned}$$

W ten sposób udowodniliśmy istnienie rozwiązania równania (1). Nietrudno zauważyć, że ogólne rozwiązanie, które jest określone wzorem (6), zależy od n parametrów. Każdy z nich pojawia się na skutek niejednoznaczności operatora D^{-1}, tj. jednej z kwadratur, których w iloczynie po prawej stronie wzoru (6) mamy dokładnie $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_m = n$.
Przytoczone powyżej rozumowanie najlepiej zilustrować na przykładzie.
Zadanie. Podać wszystkie rozwiązania równania:

$$(*)\qquad u'''(t) - 4u''(t) + 5u'(t) - 2u(t) \equiv 1.$$

Rozwiązanie
Wielomian $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2$ rozkładamy na czynniki

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = (\lambda-2)(\lambda-1)^2.$$

Następnie równanie zapisujemy w równoważnej formie operatorowej

$$(D-2)(D-1)^2 u \equiv 1.$$

Rozwiązanie otrzymujemy z formuły (6):

$$\begin{aligned} u(t) &= e^tD^{-2}e^{-t}e^{2t}D^{-1}e^{-2t} = e^tD^{-2}e^t\left(-\frac{1}{2}e^{-2t}+C\right) = e^tD^{-1}D^{-1}\left(-\frac{1}{2}e^{-t}+Ce^t\right) = \\ &= e^tD^{-1}\left(\frac{1}{2}e^{-t}+Ce^t+B\right) = e^t\left(-\frac{1}{2}e^{-t}+Ce^t+Bt+D\right) = -\frac{1}{2}+Ce^{2t}+(Bt+D)e^t. \end{aligned}$$

Oczywiście, jeżeli dane jest jedno rozwiązanie równania (1), powiedzmy $u_0 \in P_n^{-1}(D)f$, to każde inne rozwiązanie różni się od u_0 o rozwiązanie równania jednorodnego (z prawą stroną równą zero), to znaczy o pewien element z klasy $P_n^{-1}(D)(0)$.
Klasę funkcji $P_n^{-1}(D)(0)$ można łatwo opisać. Czytelnicy znający elementy rachunku całkowego mogą udowodnić — używając kilkakrotnie wzoru na całkowanie przez części — że elementy klasy $P_n^{-1}(D)(0)$ są po prostu funkcjami postaci

$$w_{\alpha_1}(t)e^{\alpha_1 t} + w_{\alpha_2}(t)e^{\alpha_2 t} + \dots + w_{\alpha_m}(t)e^{\alpha_m t},$$

gdzie $w_{\alpha_1}, \dots, w_{\alpha_m}$ są dowolnymi wielomianami stopni mniejszych odpowiednio od $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$.
Na przykładzie zadania 1 widzimy, że funkcja $u_0(t) \equiv -\frac{1}{2}$ jest szczególnym rozwiązaniem równania (*). Natomiast pozostała część rozwiązania, to znaczy funkcja

$$Ce^{2t} + (Bt+D)e^t,$$

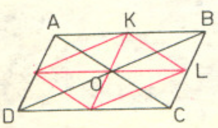
jest rozwiązaniem równania jednorodnego. Wynik ten zgadza się z wypowiedzianym powyżej twierdzeniem.
Dla zapewnienia jednoznaczności rozwiązania należy podać oprócz równania (1) dodatkowe warunki na $u(t)$. Przykładem warunków, które zapewniają jednoznaczność, a jednocześnie istnienie rozwiązania, są tzw. warunki początkowe Cauchyego.
Problem Cauchyego. Znaleźć funkcję $u(t)$ spełniającą równanie (1) oraz następujące warunki początkowe:

$$u(0) = p_0,\ u'(0) = p_1,\ \dots,\ u^{(n-1)}(0) = p_{n-1}.$$

Przez odpowiedni dobór parametrów występujących w ogólnym rozwiązaniu równania (1) możemy zawsze takie warunki spełnić, rozwiązując n-równań z n-niewiadomymi.
Dla przykładu: Rozwiązaniem równania (*) spełniającym warunki $u(0) = 1$, $u'(0) = 3$, $u''(0) = 5$ jest funkcja

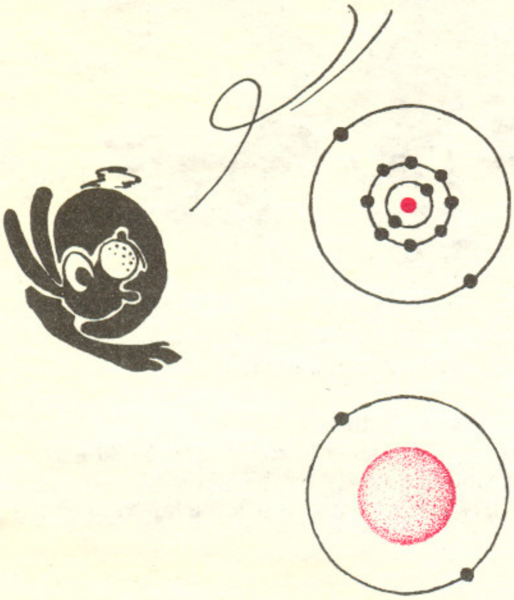
$$u(t) = -\frac{1}{2} + (t+1)e^t + \frac{1}{2}e^{2t}.$$

Rozwiązanie zadania M67.
Na mocy tw. Talesa boki „nowego" czworokąta są równoległe do przekątnych wyjściowego i, odpowiednio, o połowę krótsze od nich. „Nowy" czworokąt, jak i wyjściowy, są więc równoległobokami o kątach równych kątom między przekątnymi. Równoległoboki te mają wspólny środek. Można je więc przez obrót względem niego (lub być może przez symetrię względem prostej przez ten środek przechodzącej) ustawić tak, by miały boki i przekątne równoległe odpowiednio. Mamy zatem (patrz rysunek)
$\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOK + \sphericalangle KOB = \sphericalangle BOL + \sphericalangle OBL = \sphericalangle ABC = \sphericalangle BOC$,
czyli $\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC = 90°$.



Równoległoboki okazały się prostokątami o prostopadłych przekątnych, a więc kwadratami.

mała delta



Schematycznie przedstawiona budowa atomu metalu. Atom składa się z jądra i przebywających w jego otoczeniu elektronów. Bliższe elektrony związane są silnie, nie warto więc się nimi zajmować, dlatego niżej jądro razem z tymi elektronami narysowaliśmy w postaci jednej kulki (jonu). Najdalsze elektrony związane są słabo, to one odrywają się i w stałym metalu biegają po całej objętości.

Schematycznie przedstawiony stały metal. Jony ustawione są w regularną strukturę przestrzenną, pomiędzy nimi biegają szybko oderwane elektrony. Im temperatura jest wyższa, tym ruch elektronów szybszy.

Opowiadanie kubka-parzygęby

Pamiętasz, skąd się u was wziąłem? Kupiliście mnie w GSie, w czasie wakacji. Przyjechaliście na nowe miejsce, musieliście się urządzić. W sklepie były kosy, gwoździe, mydło i nawet pralki. Ale kubki — tylko aluminiowe.
Nikt mnie nie lubił, bo przy piciu herbaty zawsze sobie usta parzyliście. Nazwaliście mnie parzygębą i tak już zostało. Bo ja się rzeczywiście do picia gorących rzeczy nie nadaję.
A wszystko przez elektrony. Nie wiesz? I czajnik i butelka już ci tłumaczyli, że każdy przedmiot na świecie składa się z atomów. Ale atomy też składają się z jeszcze mniejszych kawałków. Każdy ma w środku ciężkie jądro. Ono jest okropnie małe, średnicę ma 100 000 razy mniejszą od średnicy atomu! Wokół tego jądra znajdują się elektrony. Tak samo małe, ale znacznie lżejsze. W atomie metalu większość elektronów bardzo mocno trzyma się swojego jądra i trudno je oderwać. Ale kilka, zwykle jeden lub dwa, trzymają się słabo. W normalnym metalu, a więc i w aluminiowym kubku, są one zupełnie oderwane i biegają jak głupie po całej objętości. Kiedy jest zimno, biegają trochę wolniej. A kiedy jedną stronę podgrzać, w tym miejscu bardziej się rozpędzają. Te szybkie uciekają w stronę zimniejszą, ale inne ich tam nie chcą wpuścić. Więc zaczynają się stukać i przepychać, aż w końcu wszystkie już biegają szybciej, chociaż grzeje się tylko jedno miejsce. To się nazywa przewodnictwo cieplne.
Metale, które mają dużo swobodnych elektronów, mają duże przewodnictwo cieplne. I ja też mam, więc kiedy nalać do mnie herbaty, cały strasznie się nagrzewam i parzę każdego, kto mnie dotknie. Szklanka czy kubek porcelanowy nie mają takich elektronów swobodnych, więc przewodzą ciepło znacznie słabiej.
Z tych elektronów swobodnych jest jeszcze inny pożytek. Atomy z oderwanymi elektronami — fizycy mówią na nie „jony" — pływają sobie jak w morzu pomiędzy szybko biegającymi elektronami. A jeżeli metal ścisnąć, albo mocno uderzyć, wtedy przesuwają się w wygodniejsze miejsce i układają w inny sposób. Elektrony i tak do nich przybiegną. Mówią o nas, metalach, że jesteśmy kowalne. Ani szkło, ani sól nie są kowalne, bo nie mają swobodnych elektronów. Kiedy je mocniej stuknąć, rozpadają się na kawałki. Dlatego z metali można robić części maszyn, bo nie ma obawy, że się pokruszą.
Stoję tu u was w kredensie i nie narzekam. Dobre mam życie, spokojne. Czasem ktoś we mnie jajko ugotuje. Jak dużo gości przyjdzie, to nawet używacie mnie do picia. Ale czasem żal — może lepiej byłoby być gdzieś w skrzydle samolotu. To by się dopiero świata zobaczyło!

Jakim dniem tygodnia będzie 1 stycznia 2000 roku?

Rok 2000, od którego dzieli nas już niecałe 25 lat, ciekawi i pobudza wyobraźnię tak dalece, że chcielibyśmy wiedzieć o nim jak najwięcej. Na przykład, jakim dniem tygodnia rozpocznie się rok dwutysięczny?
Proponuję na dzisiaj rozwiązanie tej kalendarzowej zagadki. Niech się jednak Czytelnicy nie obawiają — nie będziemy przeliczać pracowicie dzień po dniu blisko 9 tysięcy dni, jakie nas jeszcze dzielą od daty 1 stycznia 2000 roku. Skorzystamy natomiast z pomocy matematyki, żeby rozwiązanie naszej zagadki jak najbardziej uprościć.
Na początek sięgnijmy do zadań łatwiejszych. Po ich rozwiązaniu będziemy wiedzieli, jak uporać się z naszym obliczeniem.
Dzisiaj jest piątek. Jaki dzień tygodnia wypadnie za 1000 dni?
Kolejne piątki wypadać będą za 7, 14, 21, 28, 35 itd. dni. Poszukajmy takiej liczby możliwie bliskiej 1000, która jest całkowitą wielokrotnością siedmiu. Najłatwiej odszukać ją wykonując dzielenie z resztą:

```
 142r6
 1000:7
 7
=30
 28
 =20
  14
  =6
```

Od kolejnego piątku do dnia tysięcznego upłynie 6 dni, a więc dzień tysięczny będzie czwartkiem.
Dzisiaj jest piątek. Jaki dzień tygodnia wypadnie za 15 miesięcy?
(9 spośród tych miesięcy będzie liczyło 31 dni, 5 miesięcy 30 dni i jeden miesiąc 29 dni).
Nasze 15 miesięcy będzie liczyło $9 \cdot 31+5 \cdot 30+29$ dni. Trzeba znaleźć resztę z dzielenia liczby $9 \cdot 31+5 \cdot 30+29$ przez 7. Znajdziemy ją nie wykonując wcale długich obliczeń. Wystarczy obliczyć reszty z dzielenia przez 7 liczb: 9, 31, 30 i 29. Reszty te są równe odpowiednio: 2, 3, 2 i 1. (Sprawdźcie). A teraz bardzo proste rachunki (zamiast liczb podstawiamy reszty z dzielenia tych liczb przez 7):

$$2 \cdot 3+5 \cdot 2+1.$$

Wykonujemy działania:

$$6+10+1 = 17.$$

Reszta z dzielenia 17 przez 7 równa jest 3.
Trzecim dniem po piątku jest poniedziałek, to znaczy, że za 15 miesięcy od dzisiaj wypadnie poniedziałek.
Zapytacie z pewnością, jak uzasadnić tę metodę.
Popatrzcie na następujące obliczenia:

$$9 \cdot 31 = (7+2) \cdot 31 = 7 \cdot 31+2 \cdot 31.$$

Pierwszy składnik otrzymanej sumy dzieli się przez 7. Wobec tego interesuje nas tylko drugi składnik: $2 \cdot 31$.

$$2 \cdot 31 = 2 \cdot (28+3) = 2 \cdot 28+2 \cdot 3.$$

I znów pierwszy składnik otrzymanej sumy dzieli się przez 7 (bo 28 to $4 \cdot 7$). A więc ważny jest tylko drugi składnik: $2 \cdot 3$, czyli 6.
Jest to właśnie resztą z dzielenia $9 \cdot 31$ przez 7. Otrzymaliśmy ją wydzielając i odrzucając z naszego iloczynu wielokrotność liczby 7: $7 \cdot 31$ oraz $2 \cdot 28$.
Zapamiętajmy, że obliczenie reszty z dzielenia iloczynu $9 \cdot 31$ przez 7 (a także innych iloczynów) można sobie uprościć zastępując iloczyn „dużych" liczb 9 i 31 przez iloczyn odpowiednich reszt. Tak więc zamiast $9 \cdot 31$ bierzemy do obliczeń $2 \cdot 3$.
A jak obliczyć resztę z dzielenia liczby $9 \cdot 31+5 \cdot 30+29$ przez 7?
Resztę dla liczby $9 \cdot 31$ już znamy: jest nią 6.
Resztą dla liczby $5 \cdot 30$ jest 3. (Sprawdźcie!).
Resztą dla liczby 29 jest 1.
Możemy to zapisać tak:

$$9 \cdot 31 = 7 \cdot A+6,$$
$$5 \cdot 30 = 7 \cdot B+3,$$
$$29 = 7 \cdot C+1.$$

(A, B, C są pewnymi liczbami całkowitymi, nieważne jakimi).

Wobec tego: $9 \cdot 31+5 \cdot 30+29 = 7 \cdot A+6+7 \cdot B+3+7 \cdot C+1$.
Pierwszy, trzeci i piąty składnik tej sumy dzielą się przez 7. Wobec tego interesują nas tylko składniki: drugi, czwarty i szósty:

$$6+3+1 = 10.$$

Resztą z dzielenia 10 przez 7 jest 3. I to jest właśnie szukana reszta z dzielenia przez 7 liczby $9 \cdot 31+5 \cdot 30+29$. Teraz możemy się już zabrać za naszą kalendarzową zagadkę. Zacząć trzeba od sporządzenia bilansu dni, jakie nas dzielą od daty 1 I 2000.
Liczyć możemy od dowolnej, znanej daty, na przykład od soboty 1 listopada 1975 roku.

A oto nasz bilans

Okres	Jednostki kalendarzowe	Dni
Od 1 listopada 1975 do 1 stycznia 1976	30 dni listopada oraz 31 dni grudnia	$30+31$
Od 1 stycznia 1976 do 1 stycznia 2000	pełne 24 lata, w tym 6 lat przestępnych (będą to lata: 1976, 1980, 1984, 1988, 1992, 1996	$24 \cdot 365+6$

Od soboty 1 listopada 1975 roku do 1 stycznia 2000 roku upłynie łącznie dni:

$$30+31+24 \cdot 365+6.$$

Zastępujemy „duże" liczby odpowiednimi resztami.
(Zauważmy, że liczby 350, 357, 364 dzielą się przez 7.
Wobec tego reszta z dzielenia 365 przez 7 jest równa 1.
Reszty z dzielenia przez 7 liczb 30, 31 i 24 są odpowiednio równe: 2, 3 i 3):

$$2+3+3 \cdot 1+6.$$

Obliczamy:

$$2+3+3+6 = 14.$$

14 dzieli się przez 7 bez reszty. A więc 1 stycznia 2000 roku będzie tym samym dniem tygodnia, co dzień 1 listopada 1975 roku. Rok 2000 rozpocznie się zatem w sobotę.
Na zakończenie proponuję Czytelnikom samodzielne rozwiązanie takiego zadania:
Wyprawa arktyczna przenosi się z jednej bazy do drugiej. Połączenie zapewnia samolot. Rejs samolotu z przelotem w obie strony, przerwą na załadunek i rozładunek, tankowanie paliwa i zmianę załogi trwa 27 godzin. Cała przeprowadzka wymaga 7 takich rejsów. Akcja rozpoczęła się o godzinie 13 załadunkiem samolotu. O której godzinie zakończy się ona powrotem samolotu do macierzystej bazy po ostatnim rejsie?

(Zob. również art. M. Bryńskiego *Sześć zadań — jedno rozwiązanie*, «Delta», 1974, 1).

MIKROKONKURS

Czy cień może być ciekawy?

Czy przyglądasz się swemu cieniowi? Sądzę, że raczej rzadko. Wtedy, gdy naprawdę nie ma nic do roboty i nudząc się usiłujesz czymś zabić czas. Spróbuj jednak spojrzeć na cień czy to swój, czy to przedmiotów jeszcze raz, może dojrzysz coś ciekawego. Pomińmy nawet sprawę kształtu. Cienie przedmiotów odpowiednio oświetlonych przybierają niekiedy tak niezwykłe formy, że można się dopatrzeć w nich podobieństwa do dowolnych nawet bajkowych postaci. Popatrzmy jednak na cień okiem fizyka. Oto dwa z wielu możliwych pytań, na które możecie spróbować znaleźć odpowiedź.
Czy do obszaru cienia docierają promienie świetlne i jeżeli tak to skąd? Innymi słowy czy w obszarze cienia jest całkiem ciemno i od czego to zależy?
Jeżeli nie wiesz jak na to pytanie odpowiedzieć spojrzyj na ostatnią stronę okładki. Na górnym zdjęciu widać cienie rzucane przez pojazd kosmiczny Apollo 11 i kosmonautę Armstronga podczas pierwszego kroku na Księżycu. Przypominamy, że Księżyc pozbawiony jest atmosfery. Zdjęcie poniżej pokazuje cienie rzucane przez drzewa w lesie w zwykły słoneczny zimowy dzień. Obejrzyj uważnie oba zdjęcia i przeczytaj Małą Deltę z numeru lipcowego — zrozumiesz wtedy dlaczego na Ziemi w cieniu jest względnie jasno a na Księżycu w cieniu panuje całkowity mrok.
Drugie pytanie jest trudniejsze. Wymaga zbadania doświadczalnie cienia w zależności od odległości przedmiotu od ekranu. Proponujemy wykonanie badań w świetle słonecznym (wiązka promieni jest równoległa) cienia jaki rzucają różne przedmioty (ołówek, igła itp.) na ekran, którego odległość od przedmiotu będziecie zmieniać. Zanotujcie swoje spostrzeżenia, ułóżcie pytania co jest w tych zjawiskach dla was niezrozumiałego i przyślijcie wraz z odpowiedzią na pierwsze pytanie na adres Redakcji do dnia 31 grudnia 1975. Wśród autorów najciekawszych wypowiedzi rozlosujemy nagrody książkowe.

Małą Deltę opracowali: Jerzy Ginter, Tomasz Hofmokl, Przemysław Nowicki i Daria Ziemińska.