



## SPIS TREŚCI

|   |         |
|---|---------|
| Cząstki czy fale<br><i>Prof. dr Grzegorz Białkowski</i>   | str. 1  |
| Podstawy teorii tęczy<br><i>Dr Zbigniew Płochocki</i>   | str. 3  |
| Poradnik cudotwórcy czyli o różniczkowaniu funkcji nieróżniczkowalnych<br><i>Doc. dr Piotr Mankiewicz</i> | str. 6  |
| Zadania   | str. 8  |
| Laboratorium w domu<br><i>Dr Jan A. Gaj</i>   | str. 9  |
| Na przełaj przez geometrię Bolyai-Łobaczewskiego<br><i>Dr Marek Kordos</i>                                | str. 10 |
| Metody Monte Carlo (II)<br><i>Dr Ryszard Zieliński</i>  | str. 12 |
| Mała «Delta»  | str. 13 |
| Fale uderzeniowe<br><i>Mgr Jerzy Dalek</i>  | str. 16 |
| Czy można zobaczyć wiatr?   | str. 17 |

„Delta”  
 matematyczno-fizyczny miesięcznik  
 popularny  
 Polskiego Towarzystwa  
 Matematycznego i Polskiego  
 Towarzystwa Fizycznego  
 wydawany przy poparciu  
 Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny  
 prof. dr G. Białkowski  
 doc. dr A. Blikle  
 prof. dr A. Hrynkiewicz  
 doc. dr B. Iwaszkiewicz  
 prof. dr J. Janik  
 doc. dr J. Jatzczak  
 prof. dr Leon Jeśmanowicz —  
 przewodniczący  
 prof. dr Z. Krygowska  
 prof. dr K. Leibler  
 mgr W. Łuczniak  
 mgr A. Mąkowski  
 prof. dr A. Pelczyński  
 prof. dr Arkadiusz Piekara —  
 wiceprzewodniczący  
 prof. dr J. Rayski  
 prof. dr A. Schinzel

prof. dr Z. Semadeni  
 prof. dr M. Subotowicz  
 dr A. Wakulicz  
 doc. dr W. Zawadowski

Redaguje Kolegium w składzie:  
 doc. dr T. Hofmokr — z-ca red. nac.  
 dr T. B. Iwiński  
 dr M. Kordos — red. nac.  
 mgr K. Prażmowski — red. techn. graf.  
 doc. dr M. Święcki  
 D. Tys — sekr. red.

Adres Redakcji  
 ul. Hoża 69 p. 151,  
 00-681 Warszawa,

Zakład Narodowy im.  
 Ossolińskich — Wydawnictwo.  
 Wrocław, Oddział w Warszawie  
 Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark.  
 wyd.; 2,50 ark. druk.;  
 papier drukowy III kl., 70 g rola 60 cm.  
 Wydrukowano w Drukarni im.  
 Rewolucji Październikowej,  
 Warszawa, ul. Mińska 65.  
 Nr zam. 888/75 B-58

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60,— cena prenumeraty półrocznej zł 30,—

Institucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły — mające siedzibę w miastach wojewódzkich i powiatowych, zamawiać mogą prenumeratę wyłącznie za pośrednictwem miejscowych oddziałów i delegatur RSW Prasa-Książka-Ruch w terminie do dnia 25 listopada na rok następny.

Institucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły — mające siedzibę na wsi lub miejscowościach w których nie ma oddziałów RSW Prasa-Książka-Ruch, winny opłacać prenumeratę w terenie właściwych urzędach pocztowych.

Prenumeratę krajową dla czytelników indywidualnych przyjmują urzędy pocztowe, listonosze i Centrala Kolportażu RSW Prasa-Książka-Ruch, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, konto PKO 1-6-100020 w terminie do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 40% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje Biuro Kolportażu Wydawnictw Zagranicznych RSW Prasa-Książka-Ruch, 00-840 Warszawa, ul. Wronia 23, konto PKO nr 1-6-100024.

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Institucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTA”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.  
 Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, pojedynczych numerów i w kontynuacji; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.  
 Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, konto PKO nr 1-6-100312

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Cena 1 egzemplarza zł 5,— nr indeksu 35723/35550

**W następnym numerze:**

**Maria Skłodowska-Curie**

**Twierdzenie o antypodach**

W numerze poprzednim na stronie 10,  
 22-gi u dołu wiersz powinien wyglądać nast:  
 sytuacji tego typu są:

GRY O SUMIE NIEZEROWEJ



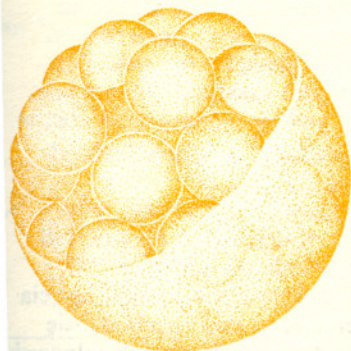
W XX wieku fizyka zdecydowanie wykroczyła poza zasięg zjawisk dostępnych bezpośrednio postrzeganiu zmysłowemu. Niemal automatycznie pociągnęło to za sobą utratę naoczności wielu koncepcji pojęciowych fizyki współczesnej. Popularyzatorzy fizyki starają się oczywiście zrobić na tym interes i przedstawiają niektóre trudniejsze zagadnienia w sposób paradoksalny. Czytelnik, któremu się mówi na przykład, że fizyka nie wie, czym jest elektron — cząstką czy falą — albo patrzy na tę naukę z pogodnym sceptycyzmem, albo oburza się i usiłuje sposobem chałupniczym wymyśleć jakąś nową teorię. W każdym razie jest on skutecznie zaszczepiony przeciwko próbom prawidłowego wyjaśnienia mu tego „paradoksu”. Tymczasem problem „cząstki czy fale?” narodził się bardzo dawno, jeszcze w końcu XVII wieku. W r. 1678 Christian Huyghens przedłożył Akademii Paryskiej swój *Traktat o świetle*, w którym wypowiedział pogląd, że światło ma naturę falową (uważał on, że są to fale podłużne, ale ten element został skorygowany po odkryciu zjawiska polaryzacji światła). Nieco wcześniej Newton wydał swoją *Optykę*, w której zajął stanowisko przeciwne. Według niego światło to strumień cząstek emitowanych przez widziane obiekty. Należy zresztą podkreślić, że sam Newton sformułował tę hipotezę w sposób bardzo ostrożny, ale jego autorytet był tak wielki, iż jego następcy trzymali się jej w sposób znacznie bardziej dogmatyczny niż jej twórca.

Obie hipotezy współlistniały w ciągu wieku XVIII, a w pierwszych jego dziesięcioleciach wykonano szereg doświadczeń (między innymi słynne eksperymenty Younga), które wykazały, że istotnie światło ma naturę falową. Po wynalezieniu siatki dyfrakcyjnej można już było mierzyć długość fal świetlnych z rosnącą dokładnością. W tej sytuacji nawet najbardziej zagorzali zwolennicy teorii Newtona musieli złożyć broń i wydawało się, że sprawa jest ostatecznie rozstrzygnięta. Tym bardziej, że udało się, dzięki Maxwellowi, włączyć zjawiska świetlne do obszernej i pięknej teorii elektromagnetyzmu.

Jednakże na przełomie XIX i XX stulecia, głównie dzięki pracom Lenarda, wykryto i wstępnie zbadano zjawisko fotoelektryczne. Polega ono, jak wszyscy wiemy, na tym, że światło padające na powierzchnię ciała wybija zeń elektrony, przy czym energia tych fotoelektronów nie zależy od natężenia światła, zależy natomiast od długości jego fali. Z punktu widzenia teorii falowej jest to wynik zupełnie niezrozumiały, energia w ruchu falowym jest bowiem proporcjonalna do kwadratu amplitudy drgań, natomiast nie ma żadnego związku z długością fali. W r. 1905 Einstein, wykorzystując wprowadzone kilka lat wcześniej przez Plancka pojęcie kwantu energii, wyjaśnił zjawisko fotoelektryczne zakładając, że światło jest strumieniem fotonów — a więc pewnych cząstek, których energia jest odwrotnie proporcjonalna do długości fali odpowiedniego światła, jest zatem wprost proporcjonalna do jego częstości. Tak więc okazało się, ku powszechnemu zaskoczeniu, że część zjawisk związanych ze światłem wyjaśnia teoria falowa, a część teoria korpuskularna. (Dotyczy to oczywiście nie tylko fal świetlnych, ale w ogóle wszystkich fal elektromagnetycznych). Można by skrótkowo, a więc niezbyt precyzyjnie, powiedzieć, że foton jest emitowany i absorbowany jak cząstka, a rozchodzi się jak fala.

Aby lepiej sobie uzmysłwić istotę problemu, przed którym stanęła fizyka, przypomnijmy sobie, że rozchodzenie się fal można wyjaśnić zasadą Huyghensa. Weźmy pod uwagę czoło fali. Zgodnie z zasadą Huyghensa każdy punkt jej powierzchni jest źródłem rozchodzącej się fali kulistej, a więc fali, której czołem jest powierzchnia kuli. Biorąc pod uwagę, że dotyczy to każdego punktu, widać, iż nowe czoło fali będzie obwiednią wszystkich czół fal cząstkowych.

Rozpatrzmy teraz pojedynczy atom emitujący foton, czyli falę świetlną. Zgodnie z zasadą Huyghensa fala ta będzie się rozchodzić jednakowo we wszystkich kierunkach, jeśli ośrodek otaczający rozważany atom jest izotropowy optycznie. Otoczmy emitujący atom urządzeniami rejestrującymi fotony. Przekonamy się, że w pewnej chwili wyemitowany foton zostanie pochłonięty przez jedno z tych urządzeń. Mimo więc tego, że odpowiednia fala rozchodziła się jednakowo we wszystkich kierunkach, jeden z nich został jednak wyróżniony przez fakt, iż znajduje się on na linii łączącej emitujący atom z urządzeniem, które zarejestrowało foton. Jeżeli jednak będziemy to doświadczenie powtarzać, przekonamy się, że w rzeczywistości żaden kierunek nie jest wyróżniony, gdyż po pewnym czasie w każdym kierunku liczba zarejestrowanych fotonów będzie taka sama. Nic dziwnego — odpowie mi na to Czytelnik — Po prostu indywidualny foton jest emitowany zawsze w określonym kierunku, ale każdy na ogół w innym, wobec tego dla dużej liczby fotonów zaobserwujemy rozkład izotropowy.







### Rozwiązanie zadania F 22

Warunek stabilności konstrukcji ceglanej jest oczywisty: położenie środka ciężkości żadnego zespołu cegieł nie może wystawać w poziomie poza podstawę cegły, na której ten zespół bezpośrednio się opiera.

Zadanie najłatwiej rozwiązać konstruując budowlę „od góry”. Wyobraźmy sobie  $N$  cegieł ustawionych pionowo, jedna na drugiej.

Kolejno, zaczynając od góry, każdą cegłę, wraz z cegłami ustawionymi na niej, przesuwamy w kierunku poziomym o pewien odcinek.

Długość tego odcinka wyznaczamy ze wspomnianego warunku na położenie środka ciężkości. Za jednostkę długości przyjmijmy połowę długości cegły  $L$ .

Pierwszą cegłę „od góry” możemy wysunąć o połowę jej długości. Drugą cegłę „od góry” możemy wysunąć na odcinek  $x_2$  licząc od krawędzi podstawy trzeciej cegły, gdzie  $x_2$  spełnia równanie:

$$\frac{m \cdot x_2 + m \cdot (x_2 - L)}{2m} = 0, \quad (m - \text{masa cegły})$$

Stąd,  $x_2 = L/2$ , tzn. drugą cegłę wysuwamy o  $1/4$  jej długości. Natomiast koniec pierwszej cegły wystaje poza podstawę o odcinek  $x_1 + x_2 = 3/2L$ .

Odpowiedni warunek dla trzeciej cegły wynosi:

$$\frac{2m \cdot x_3 + m(x_3 - L)}{2m + m} = 0 \rightarrow x_3 = \frac{1}{3} L$$

Ogólnie,  $i$ -tą cegłę możemy wysunąć o odcinek  $x_i$ , taki że

$$\frac{(i-1)m \cdot x_i + m(x_i - L)}{(i-1)m + m} = 0 \rightarrow x_i = \frac{1}{i} L.$$

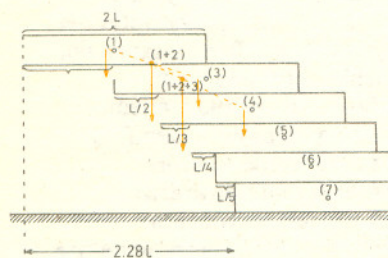
Ostatecznie, po odpowiednim przesunięciu  $N$  cegieł, koniec pierwszej cegły zostanie wysunięty na odległość:

$$x = \sum_{i=1}^{N-1} x_i = L \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{i}.$$

Uwaga: otrzymany szereg (tzw. szereg harmoniczny) jest rozbieżny:

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{i} \approx \ln N + 0.5772.$$

Teoretycznie, dysponując nieskończeniem wieloma cegłami moglibyśmy je tak ustawić, że koniec ostatniej cegły byłby nieskończenie odległy od podstawy cegły „na dole”, a cała konstrukcja nie runęłaby pod wpływem własnego ciężaru. Wartości  $x$  dla skończonej liczby cegieł wynoszą przykładowo: dla  $N = 6$   $x \approx 2.28 L$  (patrz rysunek), dla  $N = 100$   $x \approx 4 L$ . Natomiast, ustawienie takiego stosu cegieł, żeby ostatnia wystawała na co najmniej 3 długości cegły, wymagałoby już użycia wszystkich cegieł z wielopiętrowego budynku.



Rozumowanie takie nie jest jednak poprawne. Po pierwsze, z założenia rozważaliśmy zbiór jednakowych atomów, jednakowo usytuowanych przestrzennie, wydawałoby się zatem — zgodnie z zasadą przyczynowości — że wszystkie te atomy emitują światło jednakowo, a więc między innymi w tym samym kierunku. Chcąc utrzymać taką interpretację zjawiska, należałoby przyjąć, że istnieją jakieś dodatkowe, charakteryzujące przebieg tego zjawiska, ukryte zmienne, których na obecnym etapie rozwoju fizyki jeszcze nie znamy. Wówczas pozornie takie same atomy, różniące się wartością tego ukrytego parametru (czy parametrów), emitowałyby światło w różnych kierunkach.

I to jednak rozumowanie zawodzi. Powtórzmy klasyczne doświadczenie Younga. W doświadczeniu tym, jak wiadomo, źródło światła spójnego oświetla dwa otwory w nieprzezroczystej przysłonie, za którą w pewnej odległości znajduje się ekran. Na ekranie tym pojawia się wówczas, jak wiemy, pewien układ plam jasnych i ciemnych, których położenie i jasność możemy całkowicie opisać stosując zasady falowej teorii światła. Istotnymi cechami tego obrazu jest to, że oświetlone są także niektóre części ekranu, które pozostałyby w cieniu, gdyby światło rozchodziło się po liniach prostych, oraz to, że jeżeli zasłonimy jeden z otworów, cała struktura tego obrazu ulega radykalnej zmianie. W szczególności można się przekonać, że obraz obserwowany przy dwu otworach odsłoniętych nie jest sumą dwu obrazów uzyskanych przez kolejne przysłanianie jednego z otworów i odsłanianie drugiego.

Tak więc w zjawisku, jeśli się można tak wyrazić, biorą udział dwa podstawowe mechanizmy falowe: ugięcie na krawędziach otworów oraz interferencja dwu fal biegnących z dwu otworów. W rezultacie sumują się nie natężenia światła pochodzącego z każdego z dwu otworów, lecz same fale, które w pewnych miejscach wygaszają się, a w pewnych wzmacniają.

Gdybyśmy chcieli przebieg tego zjawiska opisać w ramach teorii korpuskularnej światła, musielibyśmy przyjąć, że foton w jakiś sposób biegnie ku obu otworom naraz, przechodzi przez oba otwory naraz, ugina się na ich krawędziach, po czym „materializuje się” na ekranie w jego określonym punkcie. Nie wiemy z góry, który to będzie punkt. Wiemy tylko, jakie jest prawdopodobieństwo, że właśnie ten punkt zostanie wybrany przez foton. Prawdopodobieństwo to jest tym większe, im większe natężenie światła obserwujemy w danym punkcie przeprowadzając doświadczenie Younga. Jeśli liczba fotonów jest bardzo duża, układają się one na ekranie wedle praw statystycznych: w miejscach jaśniejszych jest więcej fotonów niż w ciemniejszych. To, co z punktu widzenia pojedynczego fotonu jest określone tylko jako pewne prawdopodobieństwo, składa się na całkowicie zdeterminowany obraz interferencyjny. Można by więc powiedzieć, że „tor” pojedynczego fotonu jest wyznaczony w sposób statystyczny, ale prawdopodobieństwo wyboru takiego „toru” jest ściśle zdeterminowane przez warunki doświadczalne.

Opisane tu rozumowanie zawiera szereg milczących założeń, jak na przykład to, że możemy operować pojedynczymi fotonami, przedstawia więc daleko posuniętą ekstrapolację rzeczywistych warunków eksperymentalnych. Jednakże podstawowa idea na tym nie cierpi.

W latach dwudziestych naszego stulecia, dzięki pracy jednego właściwie pokolenia fizyków, wśród których należy wymienić przede wszystkim Bohra, de Broglie'a, Schrödingera, Heisenberga, Diraca, Pauliego i Borna, powstała mechanika kwantowa. Opiera się ona na idei, że fotony nie są wyróżnionymi obiektami fizykalnymi wykazującymi dwoistą naturę falowo-korpuskularną, lecz że jest to powszechna właściwość materii. Innymi słowy, każdy obiekt na przykład elektron, proton, jądro atomowe czy też atom, jest zarazem i cząstką, i falą. Albo też może należałoby powiedzieć: ani cząstką (klasyczną), ani też falą (klasyczną), lecz czymś nowym, co można by nazwać cząstką falową. Idea ta została wielokrotnie potwierdzona eksperymentalnie. Zaobserwowano zjawiska interferencyjne dla strumienia elektronów czy też neutronów. Dzięki tym zjawiskom możliwe było konstruowanie tak ważnych narzędzi, jak na przykład mikroskop elektronowy. Cząstka falowa, gdy badamy ją przy pomocy pewnego przyrządu, ujawnia nam jedną z dwu swoich „twarzy”: przedstawia się albo jako cząstka, albo też jako fala. Obie te „twarze” cząstki falowej są w niej jednak zawsze jednocześnie obecne. Łatwość dostrzeżenia w doświadczeniu jednej z tych „twarzy” zależy jednak od tego, jaka długość fali odpowiada danej cząstce falowej.

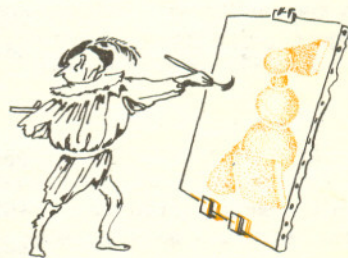
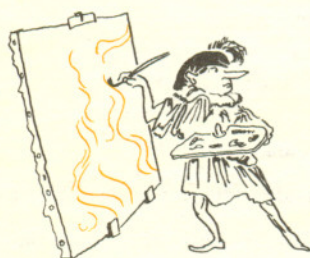
Weźmy na przykład zjawisko ugięcia. Wiemy, że rozmiary stożka ugięcia przy przechodzeniu światła przez otwór są tym mniejsze, im mniejsza jest długość fali świetlnej. W miarę więc jak zmniejsza się długość fali światła, maleje też prawdopodobieństwo zaobserwowania fotonu, który odchyła się w wyniku ugięcia od kierunku prostej łączącej źródło światła z otworem. Foton taki rozchodzi się więc „prawie” jak klasyczna cząstka. To samo dotyczy też innych cząstek falowych,



takich jak elektrony czy nukleony, jądra atomowe czy atomy, cząsteczki czy wreszcie makroskopowe bryłki materii.

Rzecz w tym, że w miarę jak przechodzimy tym szeregiem w tej kolejności, w której go tu przedstawiliśmy, przechodzimy — przy ustalonej prędkości obiektu — do coraz to mniejszych długości fal. Na przykład długość fali bryłki materii o masie jednego grama, poruszającej się z prędkością rzędu 1 cm/s, wynosi około  $10^{-16}$  cm! Tego więc rzędu są wielkości charakteryzujące na przykład rozmiary stożka ugięcia. W praktyce znaczy to, że obiekt taki porusza się po liniach prostych i jego własności falowe są dla nas zupełnie nieobserwowalne. Tym się tłumaczy fakt, że nie obserwujemy w skali makroskopowej zjawisk charakterystycznych dla cząstek falowych. Ponieważ zaś budowane przez nas modele, które mają mieć cechę naoczności, opierać się muszą z konieczności na naszym codziennym doświadczeniu zmysłowym, przeto ten zupełnie nowy rodzaj obiektu, którym są cząstki falowe, jest dla nas trudno, a może nawet zupełnie, niewyobrażalny.

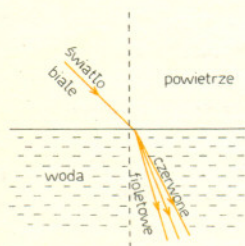
Niech Ci więc, Czytelniku, pozostanie ta pociecha, że gdybyś był elektronem, nie miałbyś żadnych trudności z wyobrażeniem sobie cząstki falowej. Ale ponieważ jesteś — w tym wypadku na nieszczęście — tworem makroskopowym o całkiem sporej masie, musisz się zadowolić świadomością, że istnieje spójna logicznie teoria, mechanika kwantowa, w której równaniach ukryte są zarówno fale, jak i cząstki a właściwie ani fale, ani cząstki, lecz właśnie cząstki falowe. Zachowanie się tych cząstek nie stanowi więc tajemnicy dla naszego rozumienia świata, choć istnieją przeszkody, aby sobie to zachowanie się wyobrazić.



## Podstawy teorii tęczy

Dr Zbigniew PŁOCHOCKI

Oprócz tęczy barwnych można czasem też zobaczyć tęczę białą. Powstaje ona w sprzyjających warunkach we mgle. Warunkujące ją mechanizmy są nieco odmienne od czynników powodujących powstawanie tęczy barwnych.

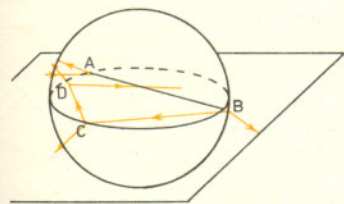


Rys. 1

Fizyczne mechanizmy warunkujące powstawanie tęczy są dość złożone. Nie na tyle jednak, by nawet laik nie mógł pokusić się o dokładniejszą analizę zjawiska.

Z faktu, że tęcza jest zjawiskiem barwnym, wynika, iż musi być ona konsekwencją rozszczepienia światła słonecznego (białego) na składowe barwne wsłutek bądź załamania tegoż światła w kroplach wody (rys. 1), bądź dyfrakcji fal świetlnych na kroplach wody i interferencji wiązek ugiętych. W dokładnej teorii tęczy trzeba uwzględnić obydwa czynniki. Dominujący jest jednak pierwszy. Krople deszczu są zwykle zbyt duże i zbyt od siebie odległe, by dyfrakcja światła na kroplach mogła odgrywać istotną rolę. Dyfrakcja i interferencja światła to mechanizmy niejako dodatkowe, zniekształcające obraz tęczy w widoczny sposób jedynie w dość szczególnych warunkach. Ograniczymy się tu zatem jedynie do omówienia załamania światła w kroplach wody. Tęczę widzimy stojąc tyłem do Słońca. Jej obraz tworzą więc promienie, które w wyniku odbić i załamania w kroplach wody zawracają w kierunku Słońca. Na każdą kroplę pada wiązka w przybliżeniu równoległych promieni świetlnych. Rozważmy jeden z nich. Założymy na początek, że odpowiada mu jedna określona długość fali (barwa widmowa). O kroplach deszczu zakładamy zaś, że mają kształt kuli (co dość dokładnie odpowiada prawdzie).

Niech nasz wybrany promień jednobarwny pada na kulistą kroplę wody w punkcie *A* (rys. 2). Ulega on częściowemu odbiciu, częściowemu zaś załamaniu. Promień załamany biegnąc dalej przez kroplę pada na jej powierzchnię w punkcie *B*, gdzie znów częściowo odbija się, a częściowo załamuje. Sytuacja powtarza się w punktach *C*, *D* itd. Z kropli wybiegają więc promienie załamane w punktach *B*, *C*, *D*, ... Promienie odbite interesować nas nie będą, gdyż niejako krążą one wewnątrz kropli, ulegając systematycznie osłabianiu wskutek kolejnych odbić i załamania. Najjaśniejszą tęczę, tzw. tęczę pierwszego rzędu, tworzą promienie, które uległy jednokrotnemu odbiciu wewnętrznemu, tzn. promienie załamane, wybiegające na przykład z punktu *C*. Znacznie słabszą, ale stosunkowo często dającą się zobaczyć tęczę drugiego rzędu, odwrotnym układzie barw niż tęcza pierwszego rzędu, tworzą promienie, które uległy w kropli dwukrotnemu odbiciu wewnętrznemu, np. promień wybiegający z punktu *D*. Bardzo rzadko udaje się zaobserwować jeszcze tęczę trzeciego rzędu, którą tworzą promienie wybiegające z kropli po trzykrotnym kolejnym odbiciu wewnętrznym. Tęczy czwartego rzędu nikt jeszcze nie widział. Naszą analizę ograniczymy do tęczy pierwszego rzędu. W podany poniżej sposób Czytelnik sam może pokusić



Rys. 2



się o teoretyczną analizę tęczy drugiego (a może i trzeciego) rzędu.

Na początek warto rozwiązać następujące pomocnicze

**Zadanie 1.** Udowodnić, że wszystkie promienie odbite i załamane w analizowanym zjawisku leżą wraz z promieniem padającym w jednej płaszczyźnie, która nadto jest płaszczyzną równikową kulistej kropli, czyli przechodzi przez środek kuli. Pozwoli nam to większość rozważań prowadzić na płaszczyźnie.

Kolejny problem to

**Zadanie 2.** Na kulistą kroplę o promieniu  $r$  pada w punkcie  $A$  promień świetlny pod danym kątem  $\alpha$  (rys. 2). Po odbiciu w punkcie  $B$  ulega on załamaniu w punkcie  $C$  i wybiega na zewnątrz. Obliczyć kąt  $\varepsilon$  między promieniem załamanym wybiegającym z punktu  $C$  i promieniem padającym (w punkcie  $A$ ). Współczynnik załamania światła dla wody względem powietrza jest dany i wynosi  $n \approx 4/3$ . Szkic rozwiązania przedstawia rys. 3. Wynik obliczeń jest następujący:

$$(1) \quad \varepsilon(\alpha) = 4\beta(\alpha) - 2\alpha,$$

gdzie, zgodnie z prawem załamania światła, kąt załamania  $\beta$  jest funkcją kąta padania  $\alpha$  określoną wzorem

$$(2) \quad \sin \beta = \frac{1}{n} \sin \alpha$$

(dopóki rozważamy promień jednobarwny dopóty współczynnik załamania możemy traktować jako parametr o ustalonej wartości). Wykres funkcji  $\varepsilon(\alpha)$  przedstawia rys. 4 (przyjęto tu  $n = 4/3$ ). Czytelnikowi radzimy, by sam sporządził wykres tej funkcji. Pomoże Mu w tym

**Zadanie 3.** Wyznaczyć maksymalną wartość funkcji  $\varepsilon(\alpha)$  danej równaniem (1) i wartość kąta  $\alpha$ , dla której funkcja ta osiąga maksimum.

Rozwiązanie jest następujące:

$$(3) \quad \varepsilon_{\max} = 4\beta_{\max} - 2\alpha_{\max},$$

gdzie

$$\sin \alpha_{\max} = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}, \quad \sin \beta_{\max} = \frac{1}{n} \sin \alpha_{\max} = \sqrt{\frac{4-n^2}{3n^2}}.$$

Podstawiając  $n = \frac{4}{3}$  otrzymujemy  $\varepsilon_{\max} = 42^\circ$  dla kąta padania  $\alpha_{\max} \approx 60^\circ$ .

Drobiazgowy samodzielny Czytelnik zapewne z satysfakcją udowodni jeszcze, że minimalna wartość  $\varepsilon_{\min}$  funkcji  $\varepsilon(\alpha)$  dla  $\alpha < \alpha_{\max}$  wynosi 0, a dla  $\alpha > \alpha_{\max}$  wynosi  $\varepsilon_{\min} = 4 \arcsin \frac{1}{n} - 180^\circ \approx 14^\circ$ .

Z charakteru zależności kąta odchylenia  $\varepsilon$  od kąta padania  $\alpha$  wynikają w prosty sposób ciekawe wnioski. Wyobraźmy sobie mianowicie równoległą wiązkę promieni (wciąż jednobarwnych) padającą na kroplę (rys. 5). Po załamaniu, odbiciu wewnętrznym i powtórnym załamaniu wybiegną z kropli promienie załamane w różnych kierunkach. Promienie padające pod kątem  $\alpha \leq \alpha_{\max} \approx 60^\circ$  będą po wyjściu z kropli „rozsiane” wewnątrz stożka o kącie rozwarcia  $2\varepsilon_{\max}$ , natomiast promienie padające pod kątem  $\alpha \geq \alpha_{\max}$  opuszczają kroplę między powierzchniami stożków o kątach rozwarcia odpowiednio  $2\varepsilon_{\max} \approx 2 \times 42^\circ$  i  $2\varepsilon_{\min} \approx 2 \times 14^\circ$ . Jeśli więc światło jednobarwne pada na zbiór kropli deszczu (to, że krople spadają nie ma tu żadnego znaczenia — dlaczego?), to do oka obserwatora stojącego tyłem do Słońca dotrze promieniowanie (cały czas mowa o promieniach wychodzących z kropli po jednokrotnym odbiciu wewnętrznym, np. przez punkt  $C$ ) tworzące obraz jasnej smugi na tle ciemnych chmur deszczowych. Jaki będzie kształt tej smugi? Sądźmy, że Czytelnik sam to zdoła obliczyć, rozwiązując poniższe zadania.

**Zadanie 4.** Wykazać, że w analizowanym zagadnieniu do oka obserwatora dotrą tylko te promienie (po wyjściu z punktów typu punktu  $C$ ), które padają na powierzchnię kropli w płaszczyźnie zawierającej prostą przechodzącą przez Słońce i punkt obserwacji.

**Zadanie 5.** Obserwator widzi smugę (o której mowa wyżej) w terenie płaskim. Wykazać, że stanowi ona wycinek koła o środku leżącym na przedłużeniu odcinka Słońce–obserwator. W jakiej płaszczyźnie leży smuga widziana przez obserwatora?

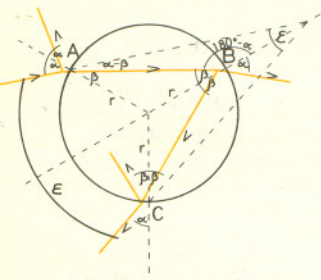
**Zadanie 6.** Znaleźć związek między kątową wysokością  $\chi_t$  najwyższego punktu smugi (o której mowa wyżej) nad horyzontem (w płaskim terenie) i kątową wysokością  $\chi_s$  Słońca (nad horyzontem).

Rozwiązanie jest następujące (rys. 6):

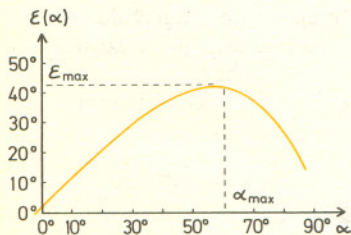
$$(4) \quad \chi_t + \chi_s = \varepsilon_{\max} \approx 42^\circ.$$

W płaskim terenie największą smugę widzimy więc wtedy, gdy Słońce właśnie zachodzi (lub wschodzi). Im bardziej wznosi się Słońce powyżej horyzontu, tym bardziej chowa się poniżej horyzontu nasza smuga. Gdy wreszcie wysokość kątowa Słońca powyżej horyzontu przekracza  $\varepsilon_{\max} \approx 42^\circ$ , smuga „chowa się” już poniżej linii horyzontu.

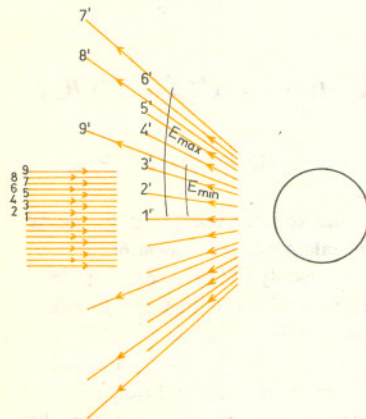
A jak będzie w terenie nierównym, kiedy obserwator może stanąć w dołku lub na górze? Czy istnieje taka góra, z której (przy spełnieniu innych warunków) można zobaczyć smugę przy



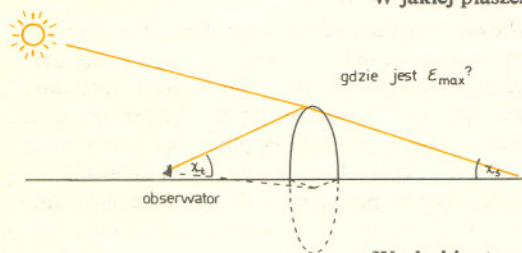
Rys. 3



Rys. 4

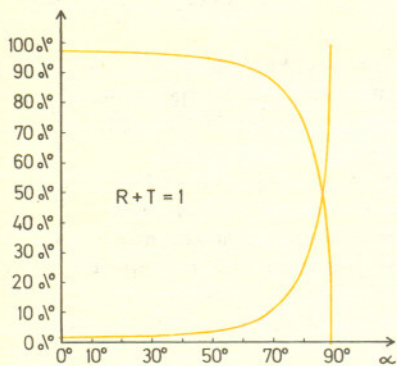


Rys. 5

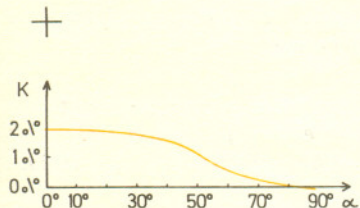


Rys. 6





Rys. 7



Rys. 8

Zależności  $R(\alpha)$  i  $T(\alpha)$  określają wzory Fresnela (dla światła niespolaryzowanego):

$$R = \frac{1}{2} \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)} + \frac{\text{tg}^2(\alpha - \beta)}{\text{tg}^2(\alpha + \beta)}$$

$$T = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \sin 2\beta \frac{1 + \cos^2(\alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta) \cos^2(\alpha - \beta)}$$

gdzie

$$\sin \beta = \frac{1}{n} \sin \alpha.$$

dowolnym położeniu Słońca? Czy istnieje taka góra, z której (w odpowiednich warunkach — jakich?) można zobaczyć naszą smugę w postaci pełnego koła? Te i inne problemy Czytelnik już sam zapewne zdoła rozstrzygnąć.

Wiadomo z obserwacji, że tęcza to wstęga o kształcie wycinka okręgu, a nie — koła. Gdyby światło słoneczne było jednobarwne, to tęcza byłaby jednobarwnym wycinkiem okręgu. To właśnie należy teraz dowiedzieć. W tym celu powróćmy jeszcze do rys. 5. Aby nie komplikować rozważań, potraktujmy każdy promień jako wiązkę nieskończenie cienką (pomijamy więc tym samym skupiające i rozpraszające działanie naszej kropli — czy duży przez to popełniamy błąd?). Zakładamy, że promienie są jednobarwne. Każdy promień załamany ma mniejsze natężenie niż promień padający. Podział energii między promienie odbity i załamany zależy od wartości kąta padania. Stosunki natężeń promienia odbitego ( $R$ ) i promienia załamane do natężenia promienia padającego dla różnych wartości kąta padania przedstawia rys. 7 (przyjęto tu  $n = 4/3$ ).

**Zadanie 7.** Wyznaczyć stosunek  $K$  natężenia promienia wychodzącego z punktu  $C$  kropli (rys. 3) do natężenia promienia padającego na kroplę w punkcie  $A$ , jeśli dane są współczynniki odbicia  $R$  i transmisji  $T$  (ich definicje — zob. wyżej). Wynik jest następujący:  $K = T^2 R \cos^2 \alpha$ . Wartości liczbowe (przy założeniu  $n = 4/3$ ) tego współczynnika przedstawia orientacyjnie wykres na rys. 8. Jak widać, natężenie promieni wychodzących z punktu  $C$  kropli (rys. 2) nie przekracza 2% natężenia promieni padających w punkcie  $A$  na kroplę (rys. 3).

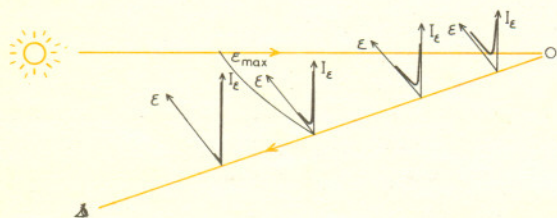
Możemy założyć, że natężenie światła słonecznego jest w każdym punkcie Ziemi jednakowe. Oznacza to, że promienie w wiązce światła słonecznego są równoległe, a więc że odległość kątowa między dwoma (dowolnymi) promieniami jest równa zero (rys. 5). Taka równoległa wiązka promieni po załamaniu na powierzchni kropli w punkcie  $A$  (rys. 3), odbiciu w punkcie  $B$  i załamaniu w punkcie  $C$  staje się wiązką rozbieżną (rys. 5). Oznacza to, że natężenie wybiegającego światła z punktów typu punktu  $C$  maleje tym silniej, im dalej od kropli znajduje się obserwator. Ponad 50-krotnie słabsze (od promieniowania słonecznego) promieniowanie wybiegające z punktu  $C$  ulega więc dalszemu osłabieniu w miarę, jak oddala się od kropli. Istnieje wszak jeden wyróżniony kierunek, w którym osłabienie to nie następuje. Znaleźć go łatwo, jeśli rozwiąże się następujące

**Zadanie 8.** Na powierzchni kropli padają w punkcie  $A$  (zob. rys. 3) dwa równoległe promienie (rys. 5): jeden pod kątem  $\alpha$ , drugi pod kątem  $\alpha + d\alpha$ . Każdy z nich załamuje się, odbija, a następnie powtórnie załamuje się na powierzchni kropli i wybiega na zewnątrz; pierwszy promień odchyła się o kąt  $\epsilon$ , drugi — o kąt  $\epsilon + d\epsilon$ . Obliczyć odległość kątową między tymi dwoma promieniami wybiegającymi z kropli. Przy jakim kącie padania  $\alpha$  odległość ta jest najmniejsza i ile ta najmniejsza odległość wynosi?

Rozwiązanie (zob. wzór (1)) jest następujące:

$$(5) \quad d\epsilon = \frac{d\epsilon}{d\alpha} d\alpha,$$

skąd wynika, że  $d\epsilon = 0$  w kierunku określonym przez  $\epsilon_{\max} \simeq 42^\circ$ , czyli dla kąta padania  $\alpha_{\max} \simeq 60^\circ$  (zob. wzór (3)). Zatem wiązka równoległa padająca pod kątem  $\alpha_{\max}$  na kroplę w punkcie  $A$  (rys. 3) po wyjściu z punktu  $C$  kropli pozostaje wiązką równoległą! Dla wszystkich innych kątów padania wiązka wychodząca jest rozbieżna!



Rys. 9  $I_{\epsilon}$  — natężenie światła w kierunku określonym przez kąt  $\epsilon$ .

Im więc dalej znajduje się obserwator od kropli, tym węższą widzi smugę (rys. 9). W rzeczywistych warunkach obserwator jest zawsze wystarczająco daleko, by widział smugę praktycznie tylko w kierunku określonym przez  $\epsilon_{\max}$ !

Pora wreszcie rozważyć wpływ rozszczepienia światła. Efekt ten występuje przy załamaniu światła (rys. 1) i jest konsekwencją zależności prędkości światła w ośrodku (w naszym przypadku — w wodzie), a więc i współczynnika załamania, od długości fali. Wskutek tego światło fioletowe załamuje się silniej niż czerwone. W przypadku światła jednobarwnego kolistą i wąską wstęgę obserwator widzi w kierunku określonym przez maksymalny kąt odchylenia  $\epsilon_{\max}$ . Ale kąt  $\epsilon_{\max}$  zależy od wartości współczynnika załamania światła w wodzie (zob. wzór (3)). Innymi słowy, obserwator widzi smugi różnej barwy pod różnymi kątami! Ponieważ w świetle słonecznym są fale o długości przyjmującej wartości w całym przedziale widzialnym (od ok. 400 nm do ok. 750 nm), więc też tęcza zawierać będzie wszystkie barwy — na niebie powstaje wielobarwna smuga o czystych barwach widmowych.

Problem „jaka jest kolejność barw w tęczy?” pozostawiamy do rozstrzygnięcia Czytelnikowi (ambitny Czytelnik może spróbować odpowiedzieć na to samo pytanie również w przypadku tęczy II rzędu). Na zakończenie jeszcze dwa pytania;

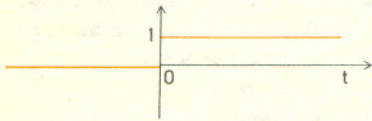
1. Czy w powstawaniu tęczy może odegrać jakąś rolę zjawisko całkowitego odbicia wewnętrznego światła w kroplach wody?
2. Czy tęcza obserwowana ze stosunkowo bliskiej odległości (np. w strugach kropli fontanny) będzie miała barwy równie nasycone (tzn. nie rozjaśnione bielą) jak tęcza „deszczowa”?



Jednym z istotnych braków klasy funkcji ciągłych jest to, że nie wszystkie takie funkcje można różniczkować, a w szczególności różniczkować wielokrotnie. Przykłady funkcji ciągłych nigdzie nieróżniczkowalnych można np. znaleźć w artykule R. Sikorskiego *Zjazd SCFRZR* («Delta», 1974, nr 4). Z sytuacją taką matematycy, a także ci wszyscy, którzy używają aparatu matematycznego w innych dziedzinach życia, godzili się dość długo. Matematycy, ilekroć tylko zachodziła taka potrzeba, po prostu zakładali, że występujące w rozważaniach funkcje są różniczkowalne dostatecznie wiele razy, a funkcje pojawiające się w zastosowaniach matematyki były wystarczająco wiele razy różniczkowalne. Tak więc brak społecznego zapotrzebowania (tzn. zapotrzebowania ze strony pozamatematycznych dziedzin życia) i — co tu ukrywać — lenistwo umysłowe matematyków spowodowało, że cała ta sprawa utknęła w martwym punkcie. I wszyscy byli zadowoleni, aż tu nagle na scenę wkracza

FIZYKA KWANTOWA.

Świat kwantów jest, *ex definitione*, światem nieciągłym. Rozpatrzmy następujący przykład. Niech  $H(t)$  będzie ilością energii wypromieniowanej przez cząsteczkę  $A$  do chwili  $t$ . Załóżmy, że w chwili  $t_0 = 0$  cząsteczka  $A$  wypromieniowała 1 kwant energii. Oto wykres funkcji  $H(t)$  (przy dodatkowym założeniu, że ilość energii wypromieniowanej do chwili  $t_0 = 0$  wynosi 0).



Funkcja  $H(t)$  nazywa się funkcją Heaviside'a.

Nie byłoby nic w tym złego, gdyby nie pewne przyzwyczajenie fizyków. Mianowicie, w wypadku kiedy jest mowa o przesyłaniu energii, mają oni zwyczaj mówić o natężeniu przesyłania energii (np. natężeniu prądu elektrycznego). Wówczas, jeżeli  $E(t)$  jest ilością energii przesłanej do chwili  $t$ , a  $N(t)$  jest odpowiadającym  $E(t)$  natężeniem w chwili  $t$ , to

$$E(t_2) - E(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} N(t) dt.$$

Oznacza to, że ilość przesłanej energii od chwili  $t_1$  do chwili  $t_2$  jest całką z natężenia w okresie od  $t_1$  do  $t_2$ . Jeżeli funkcja  $E(t)$  jest różniczkowalna, to oczywiście  $E'(t) = N(t)$ .

Metodę na grunt teorii kwantów przeniósł P. Dirac. Nie troszcząc się o matematyczną poprawność, wprowadził do mechaniki kwantowej funkcję  $\delta(t)$  opisującą natężenie przepływu energii dla  $H(t)$ . O funkcji  $\delta(t)$  zakładał, że spełniona jest równość

$$H(t_2) - H(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \delta(t) dt$$

dla każdych  $t_1, t_2$ .

Posługując się „deltą Diraca” fizycy uzyskali wiele cennych wyników i stało się jasne, że funkcja ta jest bardzo wartościowym narzędziem w fizyce kwantowej. Wszystko byłoby bardzo proste, gdyby nie fakt, że bez specjalnego wysiłku można udowodnić, iż „delta Diraca” nie istnieje! Takiej funkcji po prostu nie ma. Fizycy konsekwentnie ignorowali ten fakt, nie interesuje ich bowiem matematyczna poprawność rozważań; najważniejsza jest dla nich „fizyczna” poprawność uzyskanych rezultatów. Z drugiej strony, matematycy nie mogli dopuścić by fizycy używali, z bardzo zresztą dobrym skutkiem, niedozwolonych matematycznych metod. Do nich zatem należało następne posunięcie.

CZEGO POTRZEBOWALI FIZYCY?

Już po pobieżnej analizie zagadnienia stawało się jasne, że tak naprawdę to w fizyce kwantowej potrzebna jest możliwość jakiegoś sensownego zróżniczkowania funkcji Heaviside'a. Od biedy można się zgodzić, że funkcja Heaviside'a jest pochodną funkcji ciągłej


$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \leq 0, \\ t & \text{dla } t > 0. \end{cases}$$

Tak więc cały problem sprowadza się do umożliwienia fizykom dwukrotnego zróżniczkowania tej funkcji (tzn.  $h(t)$ ). Z drugiej strony, wydaje się rozsądnym przypuszczeniem, że jeżeli będzie można spełnić to żądanie, tj. podać rozsądną interpretację drugiej pochodnej funkcji  $h(t)$ , to najprawdopodobniej posługując się tą samą techniką, będzie można podać analogiczną interpretację  $k$ -tej pochodnej dowolnej funkcji ciągłej.

Sytuacja dojrzała więc do tego, by dać ogłoszenie następującej treści:

**TEORIA MATEMATYCZNA** w ramach której każda funkcja jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna — **POTRZEBNA OD ZARAZ**

To się nazywa zapotrzebowanie społeczne! Na takie ogłoszenie matematycy mogli odpowiedzieć tylko w jeden sposób. Mianowicie wziąć się do opracowywania takiej teorii. Ponieważ jednak trudno od razu powiedzieć, jak miałyby ona (tzn. teoria różniczkowania funkcji nieróżniczkowalnych) wyglądać, a konstruowanie takiej teorii metodą prób i błędów, nawet jeżeli daje się ona skonstruować, byłoby bardzo nieefektywne, warto się zastanowić, czy z problemami podobnego typu zetknęliśmy się uprzednio; a jeżeli tak to jak zostały one rozwiązane. W najogólniejszym sformułowaniu problem nasz wygląda następująco:

  
Rozwiązanie zadania M 65. Obrazem punktu  $(a, b)$  w symetrii względem prostej  $x = m$  jest punkt  $(2m - a, b)$ . Jeżeli  $(a, b)$  należy do rozważanego wykresu funkcji, to 1°:  $a \in W$  i  $b = 1$  lub 2°:  $a \notin W$  i  $b = 0$ .  
Niech  $m \in W$ . W przypadku 1° będzie  $2m - a \in W$  i  $b = 1$ ; w przypadku 2°:  $2m - a \notin W$  i  $b = 0$ , a więc prosta  $x = m$  dla  $m \in W$  jest osią symetrii rozważanego wykresu.  
Niech teraz  $m \in W$ . Wówczas punkt  $(0, 1)$  należy do wykresu, zaś punkt  $(2m - 0, 1)$  nie należy do wykresu. Prosta  $x = m$  dla  $m \in W$  nie jest więc osią symetrii rozważanego wykresu.





Rozwiązanie zadania M 64. Rozpatrujemy logarytmy przy dowolnej podstawie  $> 1$ , np. równej 10.

Mamy:  $\log(x+y)^{x+y} = (x+y) \log(x+y) = x \log(x+y) + y \log(x+y) > x \log x + y \log y = \log x^x y^y$ , a więc  $(x+y)^{x+y} > x^x y^y$ .

Uwaga. Dla  $x, y$  dodatnich zachodzi nierówność

$$(x+y)^{x+y} < (2x)^x (2y)^y.$$

Dany jest pewien zbiór (tu: funkcji ciągłych) i pewna operacja (tu: różniczkowanie), która jest czasami, ale nie zawsze, wykonalna na elementach tego zbioru. Jak w sposób sensowny postąpić, by nasza operacja była wykonywalna zawsze?

Teraz już widać, że z problemami tego typu zetknęliśmy się niejednokrotnie i, co ważniejsze, zostały one pomyślnie rozwiązane. Przykład — dzielenie liczb całkowitych. Operacja dzielenia jest nie zawsze wykonywalna w obrębie liczb całkowitych, a jednak daliśmy sobie z tym radę.

### ZASADNICZA IDEA TEORII „NIEZAWODNEGO” DZIELENIA LICZB CAŁKOWITYCH

1. Skonstruowaliśmy pewien zbiór — zbiór liczb wymiernych. W zbiorze tym określiliśmy te same działania co na liczbach całkowitych, tak jednak, by dzielenie było zawsze wykonalne.

2. Następnie każdej liczbie całkowitej przyporządkowaliśmy odpowiednią liczbę wymierną (podaliśmy metodę interpretacji liczb całkowitych jako liczb wymiernych), tak aby wyprowadzić następujące

**TWIERDZENIE.** *Jeżeli jakieś działanie arytmetyczne jest wykonalne na pewnych liczbach całkowitych i jeżeli wynik tego działania zinterpretujemy jako liczbę wymierną, to otrzymamy dokładnie to samo, co w przypadku, gdy dane liczby całkowite najpierw zinterpretujemy jako liczby wymierne, a następnie wykonamy odpowiednie działania na tych liczbach wymiernych.*

3. Ostatecznie przyjęliśmy, że wynikiem dzielenia dwóch liczb całkowitych jest liczba wymierna będąca wynikiem dzielenia odpowiadających tym liczbom całkowitym liczb wymiernych.

Wszystko to wydaje się zbyt skomplikowane. W praktyce tak dalece oswoiliśmy się z takim właśnie podejściem, że nie rozróżniamy liczby całkowitej od odpowiadającej jej liczby wymiernej, i odwrotnie.

Oczywiście matematycy pracujący nad teorią różniczkowania dowolnej funkcji ciągłej zauważyli opisane wyżej analogie i po pewnym czasie przedstawili kilka wersji takiej teorii. Teorię tę nazwali „teorią dystrybucji”. Niżej opisana jest jedna z najbardziej elementarnych jej wersji pochodząca od J. Mikusińskiego i R. Sikorskiego. Należy podkreślić, że podstawowa idea teorii dystrybucji pokrywa się w zasadzie z przedstawioną wyżej podstawową ideą teorii liczb wymiernych.

### TEORIA DYSTRYBUCJI. INTUICJE.

Dla uproszczenia zakładamy, że wszystkie występujące w naszych rozważaniach funkcje są określone i ciągłe na całej prostej rzeczywistej.

Na początku musimy zdefiniować zbiór nazywany „zbiorem dystrybucji” oraz zawsze wykonalną w tym zbiorze operację różniczkowania (por. punkt 1 wyżej), z tym że to wszystko ma być w zgodzie ze zdrowym rozsądkiem „matematycznym”. Punktem wyjścia naszej konstrukcji będzie

**TWIERDZENIE.** *Dla każdej funkcji ciągłej  $f(t)$  istnieje ciąg  $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  funkcji nieskończenie wiele razy różniczkowalnych zbieżny do niej niemal jednostajnie.*

Ustalmy teraz funkcję  $f(t)$  i niech  $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  będzie ciągiem funkcji, o jakim mowa w twierdzeniu. Jeżeli przyjmiemy, że ciąg  $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  odpowiada w pewnym sensie funkcji  $f$ , to wypada też zgodzić się z tym, iż ciąg  $(f_n^{(k)}(t))_{n \in \mathbb{N}}$ , złożony z  $k$ -tych pochodnych wyjściowego ciągu, odpowiada  $k$ -tej pochodnej funkcji  $f(t)$ . Z drugiej strony daną funkcję  $f(t)$  można przedstawić jako niemal jednostajną granicę różnych ciągów funkcji nieskończenie wiele razy różniczkowalnych. Zauważmy, że z podobną sytuacją zetknęliśmy się w przypadku liczb wymiernych; liczbę całkowitą 1 można przedstawić za pomocą różnych ułamków np.  $1/1, 2/2, 3/3$ , itp. Trudność tę ominęliśmy definiując liczbę wymierną jako klasę wszystkich możliwych jej przedstawień za pomocą ułamków.

Wszystko to prowadzi do następujących ustaleń:

### TEORIA DYSTRYBUCJI. KONSTRUKCJA.

Przez  $\mathcal{A}$  oznaczymy zbiór złożony z wszystkich ciągów  $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  funkcji nieskończenie wiele razy różniczkowalnych, spełniających warunek: istnieje ciąg funkcji  $(F_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  zbieżny niemal jednostajnie do pewnej funkcji  $F(t)$  oraz istnieje liczba całkowita nieujemna  $k$  taka, że  $F_n^{(k)}(t) = f_n(t)$  dla  $n = 1, 2, \dots$

Dystrybucją wyznaczoną przez ciąg  $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}$  będziemy nazywali klasę tych wszystkich ciągów  $(g_n(t))_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ , które spełniają warunek: istnieją ciągi  $(F_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  i  $(G_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  funkcji nieskończenie wiele razy różniczkowalnych i nieujemna liczba całkowita  $k$  takie, że

(i) ciągi  $(F_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  i  $(G_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  zbiegają się niemal jednostajnie do tej samej funkcji ciągłej,

(ii)  $F_n^{(k)}(t) = f_n(t)$  i  $G_n^{(k)}(t) = g_n(t)$  dla  $n = 1, 2, \dots$

Dystrybucję wyznaczoną przez ciąg  $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  będziemy oznaczać przez  $\langle (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \rangle$ . Bez specjalnego trudu można udowodnić, że w ten sposób rozbiliśmy zbiór  $\mathcal{A}$  na rodzinę podzbiorów rozłącznych nazywanych dystrybucjami.

Należy jeszcze zdefiniować operację różniczkowania dystrybucji. Reguła różniczkowania dystrybucji jest prosta i naturalna. Mianowicie pochodną dystrybucji wyznaczonej przez ciąg  $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  jest dystrybucja wyznaczona przez ciąg  $(f_n'(t))_{n \in \mathbb{N}}$ . Operację różniczkowania dystrybucji będziemy oznaczać przez  $D$  (operację  $k$ -krotnego różniczkowania — przez  $D^k$ ). Łatwo można udowodnić, że jeżeli ta sama dystrybucja jest wyznaczona przez dwa różne ciągi, to wynik różniczkowania dystrybucji nie zależy od tego, który ciąg będziemy różniczkować. W ten sposób mamy już za sobą najtrudniejszą część teorii (odpowiadającą punktowi 1 dzielenia liczb całkowitych).

Następnie każdej funkcji ciągłej należy przyporządkować dystrybucję. Robimy to w taki sposób:

Mówimy, że ciąg  $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  jest zbieżny niemal jednostajnie do funkcji  $f(t)$ , jeśli dla każdego przedziału domkniętego  $\langle -M, M \rangle$  i każdej liczby dodatniej  $\varepsilon$  istnieje taka liczba  $N$ , że  $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$  dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$  i wszystkich  $t \in \langle -M, M \rangle$ .



Jeżeli  $f(t)$  jest funkcją ciągłą, to z zacytowanego wyżej twierdzenia wynika, że istnieje ciąg funkcji  $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  nieskończenie wiele razy różniczkowalnych zbieżny niemal jednostajnie do  $f(t)$ . Funkcji  $f(t)$  zatem przyporządkowujemy dystrybucję wyznaczoną przez ten ciąg, tzn.  $\langle (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \rangle$ . I znowu dowodzi się, że niezależnie od tego, jaki ciąg takich funkcji zbieżny niemal jednostajnie do  $f(t)$  weźmiemy, zawsze będzie on wyznaczał tę samą dystrybucję. Dystrybucję tę będziemy oznaczać przez  $\langle f \rangle$ . Jeżeli funkcja  $f(t)$  jest  $k$ -krotnie różniczkowalna, to możemy napisać wzór

$$\langle f^{(k)} \rangle = D^k \langle f \rangle.$$

Oznacza to, że jeżeli weźmiemy dystrybucję wyznaczoną przez  $k$ -tą pochodną funkcji  $f(t)$ , otrzymamy to samo, co różniczkując  $k$  razy (w sensie dystrybucji) dystrybucję wyznaczoną przez  $f(t)$ . W związku z tym możemy uznać, że dla każdej funkcji ciągłej  $k$ -ta pochodna (dystrybucyjna) dystrybucji wyznaczonej przez tę funkcję jest, w pewnym sensie, „namiastką” jej  $k$ -tej pochodnej. Ponieważ dystrybucje można różniczkować dowolnie wiele razy, nasza teoria jest gotowa.

#### CZYM JEST NAPRAWDĘ DELTA DIRACA?

Jak już powiedzieliśmy, delta Diraca miała być namiastką drugiej pochodnej funkcji

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \leq 0, \\ t & \text{dla } t > 0. \end{cases}$$

Jak zatem wygląda druga pochodna (w sensie dystrybucji) tej funkcji? Zgodnie z naszą teorią należy najpierw znaleźć ciąg  $(h_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  funkcji nieskończenie wiele razy różniczkowalnych zbieżny niemal jednostajnie do  $h(t)$ . Takim ciągiem jest np.

$$h_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \leq 0, \\ -\frac{1}{n!} & \text{dla } t > 0, \end{cases}$$

$n = 1, 2, \dots$ . Wtedy na mocy przyjętych definicji drugą pochodną (dystrybucyjną)  $h(t)$  jest dystrybucja  $D^2 \langle (h_n)_{n \in \mathbb{N}} \rangle = \langle (h_n'')_{n \in \mathbb{N}} \rangle$ . Zgodnie z intencjami twórców teorii, dystrybucja ta miałaby odpowiadać „mitycznej” delcie Diraca.

**PODSUMOWANIE, czyli WSZYSTKO DOBRE CO SIĘ DOBRZE KOŃCZY.** Tak więc matematycy wywiązali się z postawionego przed nimi zadania i stworzyli teorię umożliwiającą różniczkowanie każdej funkcji ciągłej, w szczególności zaś nadanie delcie Diraca matematycznie poprawnego znaczenia. Po prostu nie jest ona funkcją (funkcja o takich własnościach nie istnieje), lecz jest dystrybucją.

Została jeszcze jedna rzecz do zrobienia. Należało zapytać najbardziej zainteresowanych, tzn. fizyków, czy teoria dystrybucji pasuje do ich rozważań. Okazało się, że tak, i to nawet bardzo dobrze. W ten sposób „honor” matematyki został ocalony, a fizycy mogli zrezygnować z rozważań o nie istniejących funkcjach i zastąpić je po prostu rozważaniami w ramach matematycznie poprawnej teorii.



## Zadania

Redaguje mgr Andrzej Mąkowski

M 64. Udowodnić, że dla liczb dodatnich  $x, y$  zachodzi nierówność

$$(x+y)^{x+y} > x^x \cdot y^y.$$

Rozwiązanie na str. 7

W. Mnich

M 65. Funkcją charakterystyczną zbioru  $A$  nazywamy taką funkcję  $f$ , że  $f(x) = 1$  dla  $x \in A$  i  $f(x) = 0$  dla  $x \notin A$ . Dla jakich  $m$  prosta  $x = m$  jest osią symetrii wykresu funkcji charakterystycznej zbioru liczb wymiernych  $W$ ?

Rozwiązanie na str. 6

W. Mnich

M 66. Udowodnić, że liczba przedstawień liczby naturalnej  $n$  w postaci sumy  $k$  składników naturalnych ( $k$  — ustalona liczba naturalna) jest równa liczbie przedstawień liczby  $n$  w postaci sumy dowolnej liczby składników naturalnych, z których największy jest równy  $k$  (dwa przedstawień różniących się tylko porządkiem składników nie uważamy za różne).

Rozwiązanie na str. 12

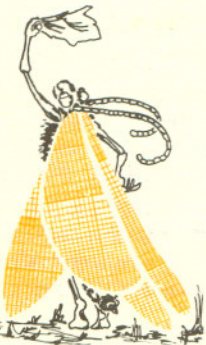
W. Mnich

Redaguje dr Andrzej Ziemiński

F 22 Mamy do dyspozycji  $N$  jednakowych cegieł. Jak należy ułożyć cegły, jedna na drugiej, aby koniec ostatniej z nich wystawał jak najdalej w poziomie poza podstawę cegły znajdującej się na spodzie. Jednocześnie cała konstrukcja nie powinna runąć pod wpływem własnego ciężaru. Jaka będzie odległość w poziomie pomiędzy skrajnymi cegłami?

(Zadanie wydrukowane w Scientific American, listopad 1964, str. 128)

Rozwiązanie na str. 2





## CO MA WSPÓLNEGO STYGNĘCIE NACZYNNIA Z WODĄ Z ROZPADEM PROMIENIOTWÓRCZYM?

Mogę podpowiedzieć: ... to samo, co z rozładowaniem kondensatora przez opornik, poruszającą się „siłą rozpędu” łódką oraz zanikiem prądu elektrycznego w zwojnicy, której końce zwarto opornikiem.

Już wiecie? Oczywiście: ... wykładniczą zależność od czasu.

Szersze omówienie ciekawych zagadnień wiążących się z zastosowaniem funkcji wykładniczej w fizyce znajdziecie w jednym z najbliższych numerów «Delta».

Domyślcie się, że ze zrozumiałych względów będziemy się w naszych doświadczeniach zajmować pierwszym z wymienionych w tytule zjawisk.

Wykładnicza zależność od czasu wyrazi się wzorem:

$$T - T_1 = (T_0 - T_1) \cdot 10^{-t/\vartheta}$$

gdzie  $T$  jest temperaturą stygnącego ciała w chwili  $t$ ,  $T_0$  — jego temperaturą początkową,  $T_1$  — temperaturą otoczenia, a  $\vartheta$  — czasem, po którym różnica temperatur zmaleje 10-krotnie. Każdy sceptyk (a tylko z nich, mam nadzieję, składa się zbiór fizyków-amatorów) powie natychmiast:

### BARDZO PIĘKNIE, LECZ ILE W TYM PRAWDY?

Odpowiedzieć na to pytanie można teoretycznie lub doświadczalnie.

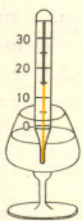
#### Odpowiedź zupełnie teoretyczna:

Wykładnicza zależność pochodzi z założenia, że przepływ ciepła na jednostkę czasu jest proporcjonalny do różnicy temperatur. Jest to prawdą w warunkach stacjonarnych, a więc przy stałym rozkładzie temperatur — wtedy ciepło nigdzie po drodze nam się nie „gubi”. Otrzymany wniosek — że temperatura zmienia się wykładniczo — nie zapewnia spełnienia założenia, przy jakim został wyprowadzony. Wobec tego nie należy się spodziewać, że jest on prawdziwy.

#### Odpowiedź teoretyka z poczuciem rzeczywistości:

Założenie o stanie stacjonarnym nie jest spełnione, ale może stan stacjonarny jest dobrym przybliżeniem rzeczywistości. Byłoby tak, jeśliby czas ustalania się rozkładu temperatur w przegrodzie dzielącej ciało stygnące od otoczenia, a także wyrównywania się temperatury w samym cieple oraz w otoczeniu był krótki w porównaniu z charakteryzującym proces stygnięcia czasem  $\vartheta$ . Należałoby więc znać wiele parametrów dotyczących układu fizycznego (przewodnictwo cieplne, ciepło właściwe, wymiary itd.), aby odpowiednie obliczenia pozwoliły znaleźć odpowiedź na postawione pytanie.

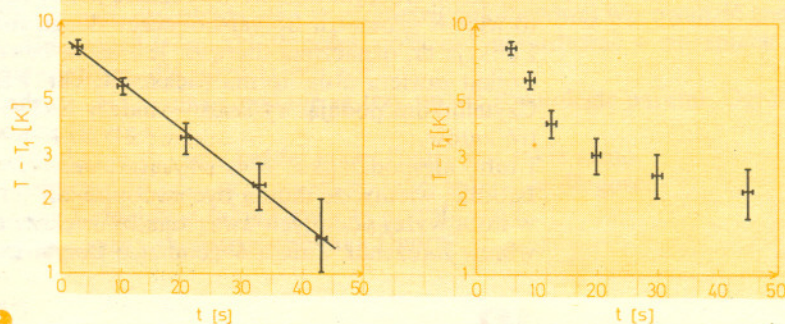
#### Odpowiedź doświadczalnika:



### ZMIERZMY I ZOBACZMY

Układ doświadczalny jest prosty: małe naczynie z ciepłą lub zimną wodą i termometr. Ustawiamy całość w spokojnym miejscu (termometr oczywiście zanurzony w wodzie) i mierzymy temperaturę co parę minut. Radziłbym także wykonać drugi wariant doświadczenia: ogrzać lub oziębic sam termometr i notować jego wskazania w zależności od czasu. Wyniki przedstawiamy na wykresie. Posługujemy się w tym celu papierem półlogarytmicznym, na którym wykres funkcji wykładniczej ma kształt linii prostej (patrz «Delta», 1974, 10). Przy nanoszeniu wyników na wykres zaznaczamy błąd pomiaru. Jako błąd pomiaru temperatury  $\Delta T$  przyjmujemy najmniejszą podziałkę termometru. Błąd pomiaru czasu będzie prawdopodobnie zaniedbywalny (1 s). Sprawdzamy następnie, czy przez naniesione punkty da się przeprowadzić prostą (w granicach dokładności pomiaru).

W wyniku przeprowadzonego doświadczenia otrzymujemy ostatecznie na postawione pytanie odpowiedź doświadczalną, którą musimy uzupełnić: „przy takich, a takich wartościach błędów pomiaru czasu i temperatury”. Bez takiego uzupełnienia odpowiedź doświadczalna nic nie znaczy. Rysunki poniższe przedstawiają przykłady odpowiedzi pozytywnej i negatywnej.





Redakcja nie twierdzi, że artykuł ten wystarczy raz przeczytać, aby wszystko zrozumieć; twierdzi jednak, że zrozumieć go można.

W 1829 r. Nikołaj Łobaczewski i (niezależnie) w 1832 r. Janos Bolyai ogłosili, że skonstruowali system geometryczny różny od zwykłego, zwanego od tej pory euklidesowym. W 1903 r. Dawid Hilbert udowodnił, że mieli rację: wykazał, że przyjęte przez nich założenia nie prowadzą do sprzeczności. Cała sztuka, że się tak wyrażę, polegała na chęci przyświecającej obu autorom, aby „ich” geometria różniła się od geometrii euklidesowej nieznacznie: chodziło tylko o zamianę jednego z aksjomatów — tzw. piątego postulat Euklidesa — na jego zaprzeczenie; reszta aksjomatów pozostać miała nie zmieniona. Zostawiając do następnej okazji sprawę „dlaczego akurat tak” i ciekawą historię tego problemu, w tym artykule przedstawię pewne twierdzenia geometrii Bolyai-Łobaczewskiego, czy inaczej — geometrii hiperbolicznej (patrz «Delta» 1975, 7), aby dać wyobrażenie o jej zgodności, bądź niezgodności, z wykształconą w nas wszystkich geometryczną intuicją euklidesową.

### Geometria absolutna.

Piąty postulat Euklidesa orzeka, że do danej prostej przez dany nie leżący na niej punkt można poprowadzić co najwyżej jedną prostą rozłączną (tj. nie przecinającą jej).

Zauważmy, że nie musimy korzystać z tego postulat, aby dowieść, że taka rozłączna rzeczywiście istnieje. Niech  $A$  będzie punktem nie leżącym na prostej  $l$ . Konstruujemy kolejno:

prostą  $k$  przechodzącą przez  $A$  i prostopadłą do  $l$ ,

prostą  $l'$  przechodzącą przez  $A$  i prostopadłą do  $k$ .

Należy wykazać, że  $l$  i  $l'$  nie przecinają się. Gdyby się jednak przecinały w punkcie  $P$ , to stosując symetrię względem prostej  $k$  mielibyśmy

$$P \neq S_k(P) \in S_k(l) \cap S_k(l') = l \cap l'$$

Proste  $l$  i  $l'$  miałyby dwa różne punkty wspólne, a więc byłyby  $l = l'$ , co jest sprzeczne z  $A \notin l$  i  $A \in l'$ .

Twierdzenie o istnieniu prostej rozłącznej udowodnione przed chwilą jest zatem twierdzeniem geometrii absolutnej, tak bowiem nazywamy tę część geometrii, którą można zbudować bez posługiwania się piątym postulat Euklidesa. Ma ona dwa rozszerzenia — geometrię Euklidesa, gdzie zakładamy, że skonstruowana wyżej prosta jest jedyną rozłączną i geometrię Bolyai-Łobaczewskiego, gdzie zakładamy, że nie jest jedyną. Do geometrii absolutnej należy również np. następujące twierdzenie Saccheri-Legendre'a: suma kątów w trójkącie jest nie większa od dwóch kątów prostych. Bezpośrednim wnioskiem tego twierdzenia jest spostrzeżenie, że jeśli suma kątów w trójkącie jest mniejsza od dwóch kątów prostych, to przez wierzchołek tego trójkąta przechodzą co najmniej dwie proste rozłączne z prostą zawierającą podstawę. Przeprowadzenie dowodu (zob. rysunek) pozostawiam Czytelnikom, gdyż jest on podobny do wyżej podanego. Zauważmy jeszcze, że wówczas prostych rozłącznych z  $k$  przechodzących przez  $C$  jest nieskończenie wiele — są to wszystkie proste przechodzące przez  $C$  i zawarte w kącie wierzchołkowym o ramionach  $l$  i  $m$  nie zawierającym  $A$ . Oba te spostrzeżenia można zaliczyć do geometrii Bolyai-Łobaczewskiego, gdyż, jak wiemy ze szkoły, wyróżnione wyżej „jeśli” nie ma miejsca w geometrii Euklidesa. Geometria absolutna ma więc dwa różne rozszerzenia:

geometrię Euklidesa, gdzie przez dany punkt przechodzi, tylko jedna rozłączna z daną prostą i gdzie suma kątów trójkąta jest równa dwu kątów prostych;

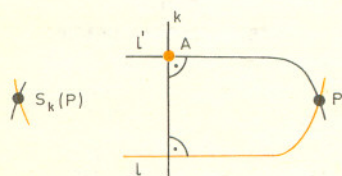
geometrię Bolyai-Łobaczewskiego, gdzie owych rozłącznych jest nieskończenie wiele i gdzie suma kątów w trójkącie jest od dwóch kątów prostych mniejsza.

Dalej zajmiemy się tylko tą drugą.

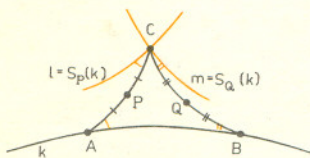
### Defekt figury.

Defektem trójkąta nazywamy różnicę liczby  $\pi$  i sumy rozwartości jego kątów. Jest to więc w geometrii Bolyai-Łobaczewskiego funkcja o wartościach dodatnich. Funkcja ta, oznaczana literą  $\Delta$ , jest też w pewnym sensie rosnąca: jeżeli jeden trójkąt zawiera drugi to ma większy defekt. I znowu dowód zostawiam Czytelnikom podając rysunek — należy zliczyć defekty wszystkich narysowanych trójkątów.

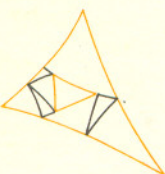
I tutaj niespodzianka: Dwa trójkąty o odpowiednio równych kątach są przystające. Istotnie, wiemy, że muszą być podobne, ale gdyby jeden z nich był większy, to w myśl wyżej podanych uwag miałby większy defekt, a więc mniejszą sumę kątów, wbrew założeniu. Zatem w geometrii Bolyai-Łobaczewskiego każde podobieństwo



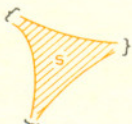
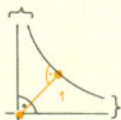
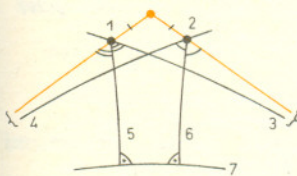
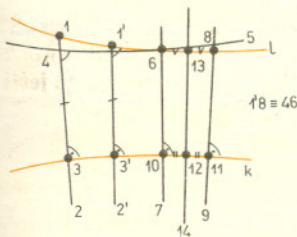
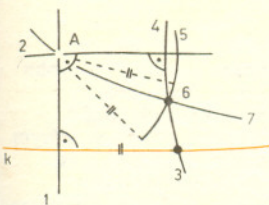
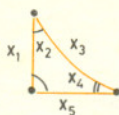
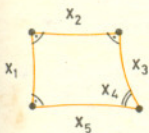
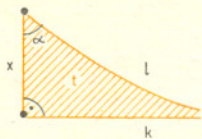
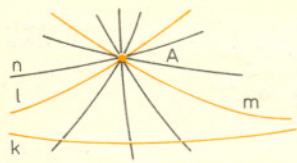
Widać stąd, że geometria eliptyczna (patrz Delta 1975, 7) nie jest rozszerzeniem geometrii absolutnej. Nie ma w niej przecież prostych rozłącznych.



Proste na rysunku są „krzywe”. Tak tradycyjnie wykonuje się rysunki geometrii hiperbolicznej. Zwyczaj ten ma pewne uzasadnienie graficzne, które być może stanie się widoczne przy następnych rysunkach. Nie może on jednak mieć żadnego znaczenia dającego się wyrazić w języku matematyki.







jest izometrią. Pojęcie defektu rozszerzamy na dowolne figury przez umowę: jest to kres górny sumy defektów zawartych w tej figurze rozłącznych trójkątów.

### Funkcja Łobaczewskiego.

Zajmiemy się teraz prostymi równoległymi. Jak łatwo zauważyć musimy je najpierw zdefiniować, gdyż znana definicja euklidesowa nie da się tu zastosować. Proste  $l$  i  $m$  przechodzące przez punkt  $A$  nazwiemy *równoległymi* do prostej  $k$  wtedy i tylko wtedy, gdy one nie przecinają  $k$  i w jednym z utworzonych przez nie kątów wierzchołkowych każda prosta przechodząca przez  $A$  przecina  $k$ , a w drugim żadna. Proste rozłączne, a nie równoległe, nazywamy *nadrównoległymi* (na rysunku  $k$  i  $n$ ).

Niech proste  $k$  i  $l$  będą równoległe. Można wykazać, że przedstawiony obok

trójkąt prostokątny nieskończony  $t$  ma defekt równy  $\frac{\pi}{2} - \alpha$ . Zauważmy też, że

wobec faktu, iż defekt jest funkcją rosnącą,  $\alpha$  jest malejącą funkcją długości odcinka  $x$ . Nazywamy ją funkcją Łobaczewskiego i oznaczamy literą  $\Pi$ , a jej wartość dla danego odcinka — kątem równoległości. Wprowadza się jeszcze pojęcie uzupełnienia liczby dodatniej  $x$ : jest to taka liczba  $x^*$ , że

$$\Pi(x) + \Pi(x^*) = \frac{\pi}{2}$$

### Twierdzenie Liebmanna.

Jak łatwo spostrzec w geometrii Bolyai-Łobaczewskiego nie ma prostokątów. Ich rolę przejmują *czworokąty Lamberta* o trzech kątach prostych. Postawmy pytanie: jakie warunki muszą spełniać liczby  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ , aby istniał wyznaczony przez nie jak na rysunku czworokąt Lamberta (oznaczymy go dalej przez  $cL(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ ).

Nie mamy również znanego twierdzenia Pitagorasa. Zapytajmy: jakie warunki muszą spełniać liczby  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ , aby istniał opisany przez nie jak na rysunku trójkąt prostokątny (oznaczymy go dalej przez  $tp(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ ).

Bardzo ciekawym twierdzeniem geometrii Bolyai-Łobaczewskiego jest wiążące ze sobą te dwa pytania twierdzenie Liebmanna. Mówi ono, że istnieje  $tp(x_1, \Pi(x_2), x_3, \Pi(x_4), x_5)$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje  $cL(x_1, x_2, x_3, \Pi(x_5), x_4)$ . Gdyby komuś to twierdzenie wydawało się dziwne lub nieprzydatne — polecam sprawdzenie podanej obok konstrukcji (cyrklem i linijką!) prostej równoległej w geometrii Bolyai-Łobaczewskiego; konstruowane obiekty są ponumerowane wg kolejności w jakiej należy je kreślić (nawiasem mówiąc konstrukcja ta daje równoległą i w geometrii euklidesowej). Twierdzenie Liebmanna orzeka, że prosta  $l$  jest równoległa do  $k$ .

### Zagradzająca.

Dla dowolnego kąta istnieje prosta równoległa do obu jego ramion. Nazywa się ją *zagradzającą*. Aby podać jej konstrukcję musimy najpierw nauczyć się konstruować wspólną prostopadłą dla prostych nadrównoległych (równoległe nie mogą mieć wspólnej prostopadłej — prawda?). Robi się to tak jak na rysunku podanym obok. Wyjaśnić należy chyba tylko początek: punkty 1 i 1' obieramy dowolnie, z nich konstruujemy 2 i 2', oraz 3 i 3'. Jeżeli  $13 \equiv 1'3'$  to szukaną prostą jest prosta łącząca środki 11' i 33', jeżeli zaś tak nie jest, to postępujemy jak na rysunku. Bardzo polecam dowiedzenie, że prosta 14 jest istotnie prostopadłą zarówno do  $k$  jak i do  $l$ . Obiecaną konstrukcję zagradzającej przedstawia kolejny rysunek. Klamerki na nim symbolizować mają równoległość. Zagradzającą 7 uzyskaliśmy jako wspólną prostopadłą nadrównoległych 5 i 6 (?). Znow okazja do wykazania poprawności konstrukcji.

Ogromnie ważną własnością geometrii Bolyai-Łobaczewskiego jest to, że wyróżnia ona niektóre odcinki (tak jak w geometrii euklidesowej wyróżniony jest np. kąt prosty spośród innych kątów). Pozwala to na określenie w tej geometrii długości bez odwoływania się do jakichkolwiek umownych jednostek (jak nasz metr). Jeżeli przyjmiemy np. że odległość wierzchołka kąta prostego od jego rzutu na zagradzającą tego kąta jest równa 1, to pole dowolnego trójkąta będzie równe jego defektowi.

Wątpiącym, czy nie da się i w geometrii euklidesowej wprowadzić geometrycznie zdefiniowanej jednostki długości, polecamy nie ustawać w staraniach nad jej znalezieniem, dla pozostałych zaś

**Zadanie.** Na rysunku podane są trzy proste równoległe parami. Ograniczają one pewną figurę  $s$ .

- Wykazać, że pole każdej takiej figury jest takie samo,
- obliczyć to pole przy wyżej podanej jednostce długości,
- czy każde dwie takie figury są przystające?
- jak można skonstruować taką figurę?



## TROCHĘ TEORII

U podstaw metod Monte Carlo leżą dwa następujące twierdzenia: *prawo wielkich liczb* i *centralne twierdzenie graniczne*. Pewne elementy tych twierdzeń podane są w podręczniku rachunku prawdopodobieństwa dla szkół średnich (W. Szenia) oraz w artykułach W. Szenia w «Delcie» (1974, nr 11 i 1975, nr. 2).

Mówiąc o metodach Monte Carlo musimy zatrzymać się chwilę przy tych twierdzeniach. Pierwsze z nich rozstrzyga o tym, że uzyskany przez nas ciąg kolejnych przybliżeń szacowanej wielkości (np. liczby  $\pi$  w zadaniu Buffona z poprzedniego odcinka naszego serialu) jest zbieżny do poszukiwanego przez nas rozwiązania. Drugie twierdzenie umożliwia udzielenie odpowiedzi na pytanie, jak daleko jesteśmy od rozwiązania, gdy wykonaliśmy już określoną, dostatecznie dużą liczbę eksperymentów.

Oba twierdzenia są bardzo ważnymi twierdzeniami w rachunku prawdopodobieństwa i statystyce matematycznej, tak że bez przesady można powiedzieć, iż większość rezultatów tych teorii jest konsekwencją właśnie tych dwóch podstawowych twierdzeń. Prawo wielkich liczb i centralne twierdzenie graniczne to w istocie rzeczy cały zbiór różnych twierdzeń; ograniczymy się tu do podania tylko najprostszych wersji, przy czym — ze względu na interesujące nas zastosowania w metodach Monte Carlo — większy nacisk położymy na ich interpretację niż na ich formalizm matematyczny.

**PRAWO WIELKICH LICZB** sformułujemy najpierw w jego najprostszej postaci jako tzw. prawo wielkich liczb Bernoulliego, ale podamy je w tzw. mocnej wersji. Rozpoczniemy od kilku uwag na temat pewnych prawdopodobieństw geometrycznych. Przypominamy (por. «Delta» 1975, nr 6), że jeżeli  $\Omega$  jest kwadratem jednostkowym i  $\mathfrak{A}$  rodziną takich podzbiorów zbioru  $\Omega$ , które mają pole, to prawdopodobieństwo  $P(A)$  zbioru  $A \in \mathfrak{A}$  jest równe polu tego zbioru. Usuńmy teraz pewien punkt  $x$  z rozważanego kwadratu. Oczywiście pole zbioru  $\Omega - \{x\}$  jest nadal równe jedności, a więc również  $P(\Omega - \{x\}) = 1$ . Więcej nawet: okazuje się, że jeżeli z  $\Omega$  usuniemy przeliczalną liczbę punktów  $x_1, x_2, \dots$ , to prawdopodobieństwo pozostałego zbioru jest równe 1:

$$P(\Omega - \{x_1, x_2, \dots\}) = 1.$$

Czytelnik, który dobrze rozumie mierzenie pól (długości, objętości itp.), nie widzi w tym nic zaskakującego. Nieco natomiast zaskakująca może być interpretacja z punktu widzenia rachunku prawdopodobieństwa. Usuńmy mianowicie z kwadratu  $\Omega$  wszystkie punkty, których obie współrzędne są liczbami wymiernymi (a więc przeliczalną liczbę punktów), i oznaczmy przez  $\Omega_{\text{niewym}}$  pozostałą część zbioru  $\Omega$ . Zbiór  $\Omega$  staje się w ten sposób kwadratem — „sitem”, w którym jest nieskończenie wiele „dziur”. Rzucmy losowo punkt na zbiór  $\Omega$ . Prawdopodobieństwo, że wpadnie on do zbioru  $\Omega_{\text{niewym}}$  (a więc, że nie przeleci on przez to sito) jest równe jedności, chociaż zdarzenie polegające na zatrzymaniu się punktu na sicie nie jest wcale zdarzeniem pewnym. Skonstruowaliśmy w ten sposób zdarzenie, które nie jest identyczne ze zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych, ale którego prawdopodobieństwo jest równe jedności.

Po tych uwagach możemy przystąpić do sformułowania zapowiedzianego mocnego prawa wielkich liczb Bernoulliego:

*Niech  $s_n$  będzie liczbą sukcesów w  $n$  pierwszych próbach nieskończonego ciągu prób Bernoulliego, z których każda z prawdopodobieństwem  $p$  kończy się sukcesem. Prawdopodobieństwo zdarzenia losowego*

$$\frac{s_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} p$$

*jest równe jedności.*

Czytelnik, który dobrze przemyślał uwagi o prawdopodobieństwie geometrycznym, poprzedzające sformułowanie tego twierdzenia, z łatwością zrozumie następującą interpretację tego wyniku: jeżeli będziemy realizowali nieskończony ciąg prób Bernoulliego, to być może obserwowana przez nas częstość  $s_n/n$  sukcesów nie będzie zbieżna do prawdopodobieństwa  $p$  sukcesu, ale liczba takich zdarzeń jest tak znikoma w porównaniu z liczbą wszystkich możliwych zdarzeń, że taka sytuacja może zaistnieć tylko z prawdopodobieństwem równym zeru.

Matematycy używają w tym wypadku następującej terminologii: „w prawie każdym ciągu prób Bernoulliego częstość  $s_n/n$  dąży do  $p$ ” albo „ciąg  $s_n/n$  prawie na pewno dąży do  $p$ ”, przy czym w obu ostatnich zdaniach mowa jest o tak zwanej zwykłej zbieżności, dobrze znanej w elementarnej matematyce (dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje takie  $N$ , że dla każdego  $n > N$  mamy  $|s_n/n - p| < \varepsilon$ ). W metodach Monte Carlo (i w innych zastosowaniach teorii prawdopodobieństwa) korzysta się najczęściej z trochę ogólniejszej postaci tego prawa. Zauważmy mianowicie, że w wielu sytuacjach wynik eksperymentu to nie tylko jedno z dwóch możliwych zdarzeń, jak w rzucie monetą lub rzucie igłą Buffona. Już przy rzucie kostką możemy otrzymać jedną z sześciu kolejnych liczb naturalnych, a ogólnie wygodnie jest opisywać wynik eksperymentu za pomocą odpowiedniej zmiennej losowej. Wtedy ciąg eksperymentów prowadzi do ciągu  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  zmiennych losowych. Mocne prawo wielkich liczb w tym przypadku brzmi: *jeżeli wszystkie zmienne losowe  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  są niezależne, mają taki sam rozkład i wartość oczekiwaną równą  $\mu$ , to z prawdopodobieństwem równym jedności*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \mu.$$

Nasze nadzieje na to, że szacując interesujące nas wielkości za pomocą serii eksperymentów statystycznych otrzymujemy to, o co nam chodzi, uzasadnione są właśnie tym twierdzeniem.



Rozwiązanie zadania M 66. Każdemu przedstawieniu liczby naturalnej w postaci  $x_1 + x_2 + \dots + x_s$  przyporządkujemy pewien układ punktów, np. przedstawieniu  $12 = 5 + 3 + 2 + 2$  przyporządkujemy układ



(Układ ma tyle wierszy, ile jest składników, w każdym wierszu liczba punktów równa jest kolejnemu składnikowi; możemy oczywiście przyjąć, że składniki są ustawione w porządku nierosnącym).

Zastosowanie takich układów punktów daje natychmiastowy dowód tezy zadania, mianowicie „odczytujemy” taki układ kolumnami. Z rysunku otrzymujemy więc rozkład

$$12 = 4 + 4 + 2 + 1 + 1,$$

w którym największy składnik równy jest 4. Każdemu rozkładowi na  $k$  składników jest więc w sposób wzajemnie jednoznaczny przyporządkowany rozkład na składniki, z których największy jest równy  $k$ .



# mała delta



## Czy wierzyć intuicji?

Intuicja, czyli wycucie, jest nieocenionym sprzymierzeńcem matematyka. Dobra intuicja pozwala szybko przewidzieć wynik i uniknąć długich rozważań. Na przykład gdy wiemy, że dwa boki trójkąta są równe, to intuicja podpowiada nam, iż kąty leżące naprzeciwko tych boków też są równe. Ścisłe rozumowanie potwierdza, że w tym przypadku intuicja nas nie zawiodła. A jednak nie zawsze intuicji można wierzyć. Niekiedy może nas ona zawieść, i to jak bardzo! Przykładem i przestrożą niech będą następujące dwa zadania.

Bibułkę o grubości  $\frac{1}{16}$  mm, np. papierową serwetkę, składamy tak, jakbyśmy ją chcieli schować do małej kieszonki: na pół, znów na pół, jeszcze raz na pół i tak dalej.

Przypuśćmy, że bibułkę tę złożyliśmy „w myśli” (bo praktycznie się nie da — spróbujcie) 50 razy. Jaka będzie grubość złożonej tak 50 razy bibułki?

Rozwiązanie

Ci, którzy nie znają tego zadania, uważają na ogół, że bibułka będzie miała grubość najwyżej kilku metrów. Tymczasem grubość złożonej 50 razy bibułki będzie zaskakująco duża, przekroczy bowiem 64 000 000 km (64 miliony kilometrów!).

Rachunek jest prosty. Skorzystajmy tylko z pewnych przybliżeń. Zauważmy, że gdy bibułkę złożymy raz, to jej grubość się podwoi i będzie równa

$$\frac{1}{16} \text{ mm} \cdot 2.$$

Gdy złożymy drugi raz, podwoi się grubość uzyskana za pierwszym złożeniem. Grubość bibułki złożonej dwa razy będzie równa

$$\frac{1}{16} \text{ mm} \cdot 2 \cdot 2.$$

Gdy złożymy po raz trzeci, podwoimy poprzednią grubość. Bibułka złożona trzykrotnie będzie miała grubość równą

$$\frac{1}{16} \text{ mm} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2.$$

Stąd wniosek: gdy bibułkę złożymy 50 razy, jej grubość będzie równa

$$\frac{1}{16} \text{ mm} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \dots \cdot 2}_{(50 \text{ dwójek})}.$$

Czy to dużo?

Dlaczego?

$$\frac{1}{16} \text{ mm} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \dots \cdot 2}_{(50 \text{ dwójek})} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} \text{ mm} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \dots \cdot 2}_{(50 \text{ dwójek})} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \dots \cdot 2}_{(46 \text{ dwójek})} \text{ mm}.$$

Zadajmy sobie trud i policzmy dalej:

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{(10 \text{ dwójek})} = 1024.$$

Sprawdźcie!

A więc

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{(46 \text{ dwójek})} \text{ mm} =$$

$$= \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2)}_{(10 \text{ dwójek})} \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2)}_{(10 \text{ dwójek})} \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2)}_{(10 \text{ dwójek})} \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2)}_{(10 \text{ dwójek})} \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2)}_{(6 \text{ dwójek})} \text{ mm} = 1024 \cdot 1024 \cdot 1024 \cdot 1024 \cdot 64 \text{ mm}.$$

$$\text{Jest to więcej niż } 1000 \cdot 1000 \cdot 1000 \cdot 1000 \cdot 64 \text{ mm} = 64 \cdot 1000 \cdot 1000 \cdot 1000 \text{ m} = 64 \cdot 1000 \cdot 1000 \text{ km} = 64\,000\,000 \text{ km}.$$

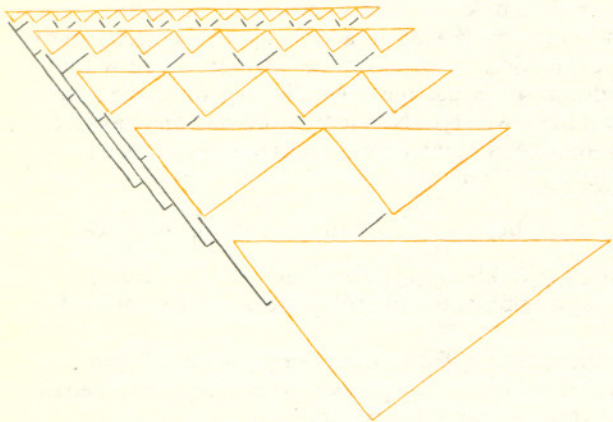




Niebywale!

Tym, którzy lubią liczyć, proponujemy następujące obliczenia:

Przyjmując, że odległość Ziemi od Księżyca jest równa 400 000 km (w rzeczywistości jest ona mniejsza) obliczcie, ile razy większa od tej odległości jest grubość naszej 50-krotnie złożonej bibułki.



Niech te dwa zadania będą przestrogą dla tych, którzy chcieliby ufać intuicji bez zastrzeżeń.

A na zakończenie rozwiążcie takie zadanie:

Bolek i Lolek ścigają się na rowerach po ulicach miasta (plan ulic pokazujemy obok). Start wyścigu znajduje się w miejscu oznaczonym na planie literą A, meta w miejscu oznaczonym literą B. Bolek wybrał trasę oznaczoną na planie linią ciągłą, natomiast Lolek trasę oznaczoną linią przerywaną. Który z nich wybrał lepszą drogę?

## Atomy trzęsą się z... ciepła

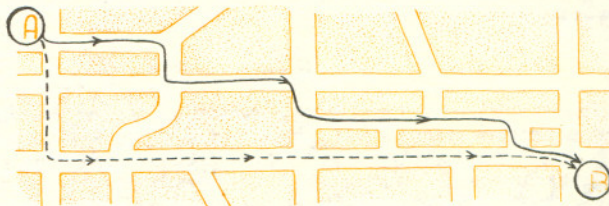


Mamy trójkąt o bokach 3, 4, 5. Przy najdłuższym boku tego trójkąta prowadzimy ząbkowaną łamaną o liniach równoległych do pozostałych boków trójkąta (rysunki pokazują, jak może wyglądać taka łamana).

Jaka będzie długość linii ząbkowanej, której ząbki są bardzo małe, np. odległe wierzchołkami od podstawy trójkąta o  $1/1000$ ? Taka linia ząbkowana będzie się, praktycznie biorąc, prawie pokrywała z podstawą trójkąta, a więc wydaje się, że jej długość nie powinna być wiele większa niż 5.

Tymczasem okazuje się, że długość każdej takiej linii ząbkowanej nie zależy od wielkości i liczby ząbków i jest zawsze równa 7. Aby się o tym przekonać, zrzutujemy lewe krawędzie ząbków prostopadłe na bok długości 3 i zauważymy, że ich łączna długość jest równa długości tego boku.

Podobnie, łączna długość prawych krawędzi ząbków jest równa 4. Razem 7.



— Przypomnij sobie doświadczenie z kroplą atramentu w wodzie. Doświadczenie to wykazało, że ruchliwość atomów i cząsteczek zależy od temperatury. Im wyższa temperatura ciała, tym szybciej poruszają się cząsteczki. W ciele stałym cząsteczki rozmieszczone są blisko jedna obok drugiej. Nie mogą poruszać się swobodnie, jak w gazie, lecz „trzęsą się” w miejscu. Przy podgrzewaniu ciała cząsteczki trzęsą się coraz bardziej, przez co ta sama liczba cząsteczek zajmuje wtedy więcej miejsca. Przy dalszym ogrzewaniu cząsteczki opuszczają swoje miejsca i zaczynają pływać po całej objętości ciała. Ciało przechodzi w stan ciekły.

— Teraz wiem, co jest przyczyną rozszerzalności cieplnej ciała. Latem atomy żelaza drgają silniej niż zimą i dlatego szyny kolejowe są dłuższe. Dobrze, że atomy w szynach nie poruszają się zbyt silnie, bo co stałoby się, gdyby szyny się stopiły?

## Towarzystwie cząsteczki

— Temperatura topnienia żelaza wynosi  $+1538^{\circ}\text{C}$ , nie ma więc obawy, że żelazo stopi się przy największym nawet upale. Czy zastanawiałeś się natomiast nad przyczynami powstawania ciał stałych i ciekłych? Jak wyglądałby świat, gdyby materia istniała tylko w postaci gazu lub proszku!

— Nigdy przedtem o tym nie myślałem, ale teraz wydaje mi się to oczywiste. Cząsteczki ciał muszą się przyciągać. Im silniej się przyciągają, tym łatwiej jest im utworzyć ciało w stanie stałym.

— Rzeczywiście, cząsteczki różnych substancji nie są jednakowo towarzyskie. Dlatego spotykamy substancje o tak różnych właściwościach. Jedne, jak na przykład tlen,





są normalnie gazami i, żeby je skroplić, trzeba je bardzo silnie oziębic. Inne występują w postaci ciał stałych i topią się w bardzo wysokiej temperaturze. Ciekawe jest, że nawet te bardzo towarzyskie cząsteczki, które lubią trzymać się razem tworząc ciecz lub ciało stałe, nie lubią zbyt dużego tłoku. Zbyttno ściśnięte silnie się odpychają. To jest też bardzo ważne. Pomyśl tylko, co byłoby, gdyby wzajemne odpychanie cząsteczek podłogi i nóg krzesła, na którym siedzisz, nie równoważyło siły ciężkości, która działa na ciebie i na krzesło.

## Mierzmy cząsteczki

— Jesteś na pewno ciekaw, na czym polega pomiar czegoś tak małego, jak cząsteczka, ale ... cierpliwości! Najpierw chcę zadać ci parę pytań. Zastanów się i powiedz, co jest najcieńsze?

— Chyba włos, bo mówi się „cienki jak włos”.

— Rzeczywiście, tak się mówi, chociaż można wskazać rzeczy o wiele cieńsze. Już lepiej byłoby mówić „cienki jak nić pajęczna”, ale i ta, jak się okazuje, jest bardzo gruba w porównaniu z najcieńszymi warstwami cieczy, jakie łatwo można uzyskać. Czy wiesz, na przykład, jak cienka jest powłoka bańki mydlanej? Jej grubość trzeba by powiększyć 100 000 razy, żeby wyniosła tyle, co grubość włosa ludzkiego. Włos w takim powiększeniu miałby grubość około 5 metrów! Jeszcze cieńsze bywają warstewki oliwy rozlanej na wodzie. Mam dla ciebie następne pytanie. Jak ci się zdaje, czy kropla oliwy może pokryć dowolnie dużą powierzchnię, na przykład powierzchnię oceanu?

— Chyba nie. Na pokrycie zbyt dużej powierzchni po prostu nie starczyłoby cząsteczek oliwy, nawet gdyby ułożyły się „parterowo”, jedna obok drugiej.

— O to właśnie chodzi. Na tym fakcie oprzemy nasz pomiar średnicy cząsteczki oliwy. Do dokładnie wymytej wanny nalej wody. Następnie spuść na jej powierzchnię małą kropelkę oliwy. Oliwa powoli rozplynie się po powierzchni wody, ale po pewnym czasie proces ten ustanie i powierzchnia oliwy ustali się. Domyślamy się, że cząsteczki oliwy ułożyły się w warstwę pojedynczą. Grubość tej warstwy równa się po prostu średnicy jednej cząsteczki. Znając objętość kropli i pole powierzchni warstwy możemy obliczyć grubość tej warstwy. Na przykład z kropli o objętości  $0,0009 \text{ cm}^3$  uzyskano warstwę o powierzchni około  $5000 \text{ cm}^2$ . Stąd grubość warstwy:

$$x = \frac{V}{S} = \frac{0,0009}{5000} \text{ cm} \approx 0,00000018 \text{ cm}.$$

Jeśli nie masz dość cierpliwości, by doczekać się takiej jednocząsteczkowej warstwy oliwy, nie martw się. Możesz zmierzyć promień plamki oliwy, jaką udało ci się uzyskać, i obliczyć, ile cząsteczek składa się na jej grubość. Wpuściłeś na przykład kroplę o promieniu  $r$  około  $0,1 \text{ cm}$ . Jeśli uzyskałeś warstwę o promieniu  $R$  około  $10 \text{ cm}$ , to jej grubość wynosi:

$$x = \frac{\frac{4}{3} \pi r^3}{\pi R^2} \approx 0,000013 \text{ cm}.$$

Możesz wtedy powiedzieć, że na grubość tej warstewki składa się tylko około kilkunastu cząsteczek.

Małą «Deltę» opracowali: Robert Hajlasz, Przemysław Nowicki, Daria Ziemińska.

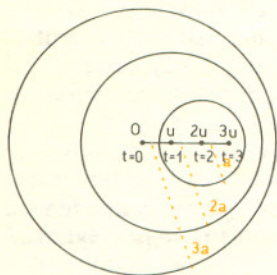
Odpowiedź: Lolek. Drogi są równej długości, za to droga Lolka ma mniej zakrętów.



Czy strzelaliście kiedyś z papierowej torby napełnionej powietrzem? Huk wywołany takim strzałem nie daje się porównać z wystrzałem armatnim, potrafi jednak przestraszyć osoby zaskoczone. Dużo większy huk wywołują naddźwiękowe odrzutowce lecące z bardzo dużą prędkością. Takim hukiem daje o sobie znać w obu przypadkach fala uderzeniowa. Zanim przejdziemy do dokładniejszego omówienia zjawiska fali uderzeniowej, musimy powiedzieć kilka słów o ruchu ciał w powietrzu. Interesować nas będą ruchy szybkie, takie, przy których analizie należy brać pod uwagę ściśliwość powietrza. Niektórych Czytelników może to zdziwić. Przecież — powiecie — powietrze jest gazem, a więc jest ściśliwe! Tak, to prawda, ale przy rozważaniu ruchu ciał z małymi prędkościami nie popełnimy dużych błędów, jeśli zaniedbamy ściśliwość powietrza. Zyskujemy przez to znaczne uproszczenia matematycznego opisu zjawiska. Oczywiście, pojęcia „mała” i „duża” prędkość są względne, można jednak przyjąć, że w normalnych warunkach prędkości rzędu 400 km/godz. są jeszcze „małe”, zaś rzędu 600 km/godz. są już „duże”.

Ważną rolę w badaniu przepływów ściśliwych odgrywa wielkość zwana prędkością dźwięku. Jest to prędkość, z jaką rozchodzą się małe zaburzenia ciśnienia w ośrodku ściśliwym. Dla danego gazu prędkość dźwięku zależy jedynie od temperatury bezwzględnej. Na przykład dla powietrza prędkość ta wynosi w normalnych warunkach 334 m/sek.

Rozważmy teraz ciało poruszające się w powietrzu ze stałą prędkością  $u$ , mniejszą od prędkości dźwięku  $a$ . Ciało to wywołuje w każdej chwili zaburzenia ciśnienia, które rozchodzą się w postaci fal sferycznych w powietrzu (czoło fali rozprzestrzenia się podobnie jak nadmuchiwana bańka mydlana). Na rys. 1 zaznaczone są położenia ciała w momentach  $t = 0$  (punkt 0),  $t = 1$  (ciało przebyło odległość równą  $u$ ),  $t = 2$  (ciało przebyło odległość  $2u$ ) oraz  $t = 3$  (ciało przebyło odległość  $3u$ ). W chwili  $t = 3$  zaburzenia wywołane przez ciało dotarły odpowiednio: na odległość  $3a$  od punktu 0 — zaburzenie wywołane w chwili  $t = 0$ , na odległość  $2a$  od punktu  $u$  — zaburzenie wywołane w chwili  $t = 1$  oraz na odległość  $a$  od punktu  $2u$  — zaburzenie wywołane w chwili  $t = 2$ . Czoła tych fal są zaznaczone na rysunku w postaci kół o odpowiednich średnicach (w rzeczywistości czoła fal są sferami).



Rys. 1

Podobny rysunek (rys. 2) można wykonać dla ciała poruszającego się z prędkością  $u$  większą od prędkości dźwięku  $a$ . W tym wypadku ciało wyprzedza czoło fali. Wszystkie fale znajdują się wewnątrz stożka (na rysunku wewnątrz kąta) o powierzchni stanowiącej granicę, do której mogą dotrzeć zaburzenia. Na zewnątrz stożka powietrze jest nie zaburzone przez poruszające się ciało.

Łatwo obliczyć kąt rozwarcia tego stożka. Z  $\triangle OAB$  mamy  $\sin \alpha = \frac{OA}{OB} = \frac{3a}{3u} = \frac{a}{u} = \frac{1}{M}$ , gdzie

przez  $\alpha$  oznaczyliśmy  $\angle OAB$ , zaś  $M = \frac{u}{a}$  jest charakterystyczną wielkością bezwymiarową zwaną

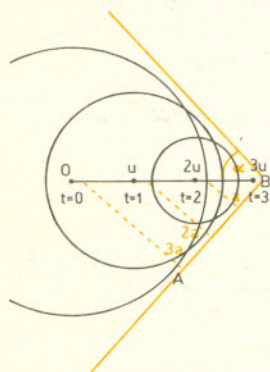
liczbą Macha. Zauważmy, że dla przepływów poddźwiękowych  $M < 1$  ( $u < a$ ), dla przepływów z prędkością dźwięku  $M = 1$  ( $u = a$ ) i dla naddźwiękowych  $M > 1$  ( $u > a$ ). Stożek styczny do czoła poszczególnych fal nazywa się stożkiem Macha, jego tworzące liniami Macha, zaś kąt  $\alpha$  kątem Macha.

Łatwo wykonać odpowiedni rysunek dla przypadku ciała poruszającego się z prędkością dźwięku — czoła fal są teraz sferami stycznymi w jednym punkcie.

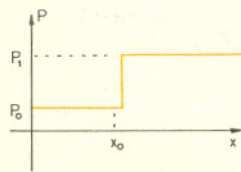
Dotychczas mówiliśmy o rozchodzeniu się małych zaburzeń w gazie. Przejdźmy teraz do dużych zaburzeń. Ciało poruszające się w powietrzu z dużą prędkością (np. pocisk czy samolot naddźwiękowy) wywołuje w powietrzu fale ciśnieniowe o dużej intensywności. Podobnie, gwałtowny wybuch wywołuje duże zgęszczenie powietrza (strzał z torby papierowej możemy uważać już za duże zaburzenie) — przynajmniej w pobliżu miejsca strzału. Tego typu zaburzenia rozchodzą się z prędkością większą od prędkości dźwięku. Zwróćmy uwagę, że nazwa „prędkość dźwięku” została zastrzeżona dla prędkości rozchodzenia się małych zaburzeń. Duże zaburzenia, charakteryzujące się też swojego rodzaju dźwiękiem — hukiem — rozchodzą się już z inną prędkością. Duże zaburzenia, w których skok ciśnienia jest duży, nazywają się falami uderzeniowymi.

Zmiany ciśnienia w fali uderzeniowej są rzędu atmosfer i zachodzą na drodze bardzo małej, rzędu kilku dróg swobodnych cząsteczek gazu, w odróżnieniu od zmian ciśnienia w falach dźwiękowych, towarzyszących mowie, które są rzędu jednej milionowej ciśnienia atmosferycznego. Na czole fali uderzeniowej rośnie skokowo nie tylko ciśnienie, ale rosną także inne wielkości określające stan gazu, a więc jego gęstość i temperatura, natomiast prędkość gazu maleje praktycznie skokowo. Typowy przebieg ciśnienia w przepływie z falą uderzeniową przedstawiony jest na rys. 3. Wykres dotyczy tej chwili, w której czoło fali uderzeniowej znajduje się w punkcie  $x_0$ . Ciśnienie rośnie od wartości  $p_0$  do  $p_1$  skokowo.

Wzrost gęstości na czole fali uderzeniowej umożliwia uzyskiwanie jej obrazu na fotografii. Najczęściej wykorzystuje się tu metodę „Schlieren”, która z grubsza da się opisać następująco. Równoległa wiązka promieni świetlnych, przechodząca przez ośrodek o jednorodnej gęstości, pozostaje równoległa i oświetla ekran jednostajnie. Niejednorodność gęstości ośrodka powoduje odchylenie równoległej wiązki. Jeśli odciąć teraz wiązkę promieni padających na ekran ostrą krawędzią, to na ekranie ukaże się ciemniejszy lub jaśniejszy obraz niejednorodności, zależnie od tego, czy odchylny promień zostanie zatrzymany przez ostrze, czy przejdzie ponad nim. Oczywiście urządzenia służące do fotografowania takich obrazów niejednorodności są



Rys. 2



Rys. 3



odpowiednio złożone, szczególnie w przypadku fotografii kolorowej. Zdjęcia fal uderzeniowych, wywołanych przez lecący pocisk, reprodukowane na okładce były szczególnie trudne do uzyskania, gdyż czas eksplozji był tu bardzo krótki (0,3 mikrosekundy). Lampa błyskowa musiała mieć odpowiednio wysoką moc, aby prawidłowo naświetlić kolorową błonę (moc lampy 20 000 kW). Na zdjęciach fale uderzeniowe są widoczne jako ciemne smugi odchodzące skośnie od pocisku. Posłużymy się modelem ilustrującym mechanizm powstawania fali uderzeniowej. W modelu tym rozpatrzmy ruch samochodów na autostradzie. Wyobraźmy sobie sznur samochodów jadących z dużą prędkością. Pierwszy samochód zaczyna nagle ostro hamować przed przeszkodą na autostradzie. Jeśli samochody jadą tak szybko, że prędkość reakcji kierowców nie pozwoli im w porę włączyć hamulców, to wytworzy się nagle zgęszczenie samochodów — gigantyczna kraksa. Przetłumaczymy teraz tę katastrofę na język fal uderzeniowych. Samochody to cząsteczki powietrza. Przeszkoda na szosie to ciało opływane przez powietrze. Prędkość reakcji kierowców to prędkość dźwięku. Nagle zgęszczenie samochodów to fala uderzeniowa. Oczywiście prędkość samochodów jest większa od „prędkości dźwięku”.

Bardzo ciekawie przedstawiają się fale uderzeniowe w matematycznym opisie przepływu gazu. Jeśli nie uwzględniamy lepkości gazu, to wśród rozwiązań opisujących ruch tego gazu pojawiają się rozwiązania nieciągłe odpowiadające falom uderzeniowym. Jeśli uwzględnimy lepkość gazu, to falom uderzeniowym odpowiadają już rozwiązania ciągłe, dające jednak bardzo szybkie zmiany wielkości opisujących stan gazu.

Wydaje się, że strzelając z torby wypełnionej powietrzem nie myśleliście o tym, ile rozmaitych problemów, z których jedynie drobną część tu omówiliśmy, kryje się w tym zjawisku.

Czy można zobaczyć strumień powietrza opływający przeszkodę, bez korzystania z dymu, pyłu lub innych widzialnych zawiesin unoszących się z wiatrem? Powietrze nieruchome jest praktycznie przezroczyste. Powietrze unoszące się nad ogniskiem jest również przezroczyste, ale można je zobaczyć — dostrzec jego drganie i falowanie.

Warstwy cieplejsze są rzadsze, mają inne właściwości optyczne, inaczej załamują światło aniżeli cięższe, gęstsze warstwy chłodniejsze. Powietrze opływające przeszkodę ulega w jednych miejscach zagęszczeniu, a w innych rozrzedzeniu, a więc przestaje być ośrodkiem jednorodnym optycznie. Zmiany współczynnika załamania mogą być bardzo niewielkie, ale te właśnie różnice pozwalają dostrzec lub raczej zarejestrować na kliszy fotograficznej ruch różnych warstw powietrza. W badaniach tego typu, szczególnie ważnych w tunelach aerodynamicznych, stosuje się między innymi metodę smug (z niemiecka metoda Schlieren) — przy pomocy interferometru smugowego. Rysunek ilustruje zasadę działania przyrządu. Światło ze szczeliny 1, umieszczonej w ognisku soczewki 2, przechodzi przez obszar badany i jest ogniskowane przez soczewkę 3 w jej płaszczyźnie ogniskowej. Obraz szczeliny przesłania częściowo ostrze 4. Na kliszy fotograficznej 5 otrzymujemy jednorodne oświetlenie.

Jeżeli w obszarze badanym znajduje się niejednorodność optyczna, na przykład zagęszczenie powietrza, to promień (narysowany kolorem) ulegnie odchyleniu. Zależnie od kierunku odchylenia obraz na kliszy ulegnie w określonym obszarze zaciemnieniu lub rozjaśnieniu. Klisza fotograficzna zarejestruje obraz złożony z obszarów jasnych i ciemnych, odpowiadających rozkładowi niejednorodności w obszarze badanym. Analiza obrazu nie pozwala stwierdzić, czy niejednorodność odpowiada zagęszczeniu powietrza, czy też jego rozrzedzeniu.

Niejednoznaczność tę usunięto wprowadzając cztery szczeliny ułożone na brzegach kwadratu i emitujące światło w czterech barwach. Cztery odpowiednio ustawione ostrza odcinają połowę światła z każdej szczeliny. Wprowadzenie do badanego obszaru niejednorodności odchyła promienie czterech barw, a z rozkładu kolorów na obrazie można wnioskować o rozkładzie zagęszczeń i rozrzedzeń. Fotografia barwna wymaga stosunkowo długich ekspozycji i dlatego opisaną technikę stosowano przede wszystkim do procesów stacjonarnych. Wprowadzenie do badań powietrznej lampy błyskowej, w której moc 20 megawatów wyzwala jest w okresie 0,3 mikrosekundy, umożliwiło rejestrowanie procesów bardzo krótkotrwałych.

Na pierwszej i ostatniej stronie okładki zamieszczamy cztery zdjęcia krótkotrwałych zjawisk. Na stronie IV z lewej zdjęcie pocisku przebijającego bańkę mydlaną, a na stronie I, pocisk przechodzący przez płomień świecy. W obu przypadkach widoczna jest fala uderzeniowa (patrz poprzedni artykuł). Zdjęcie na stronie IV okładki z prawej pokazuje falę uderzeniową rozchodzącą się w wodzie w wyniku wyładowania elektrycznego. Prędkość fali wynosi 1800 m/s. Ostatnie zdjęcie pokazuje wiry wokół skrzydła wiatraczka kręcącego się z prędkością 1200 obrotów na minutę.

T. H.

(Zdjęcia na podstawie «Scientific American», tom 231 (1974), nr 2)



## Czy można zobaczyć wiatr?

