delta

$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\,J \cdot s$ $\pi = 3{,}141593$

SPIS TREŚCI

W następnym numerze:

Prędkość światła przekroczona przez zajączka
Nowy przyrząd matematyczny

„Delta"
matematyczno-fizyczny miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa Matematycznego i Polskiego Towarzystwa Fizycznego
wydawany przy poparciu Ministerstwa Oświaty i Wychowania

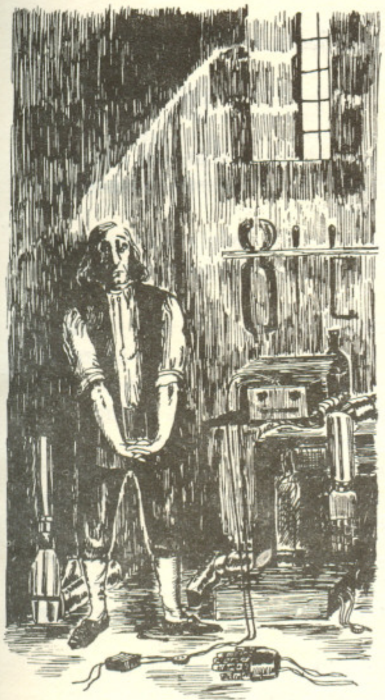
Adres Redakcji
ul. Hoża 69 p. 151
00-681 Warszawa

Zakład Narodowy im. Ossolińskich — Wydawnictwo. Wrocław, Oddział w Warszawie
Nakład 20000 egz. Objętość 2 ark. wyd.; 2,50 ark. druk.;
papier offsetowy III kl., 80g, 61 × 86
Wydrukowano w Drukarni im. Rewolucji Październikowej, Warszawa, ul. Mińska 65.
Nr zam. 432/75 B-56

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

Automatyczny matematyk

Doc. dr Lesław W. SZCZERBA



W erze wszechobowiązującej automatyki nasuwa się nieodparcie pytanie, czy wszystko można zautomatyzować. W szczególności w czasopiśmie poświęconym matematyce zupełnie na miejscu jest pytanie

CZY MOŻNA ZAUTOMATYZOWAĆ MATEMATYKĘ?

Pytanie to można postawić również inaczej: Czy można zbudować maszynę, która wykonywałaby czynności wykonywane dotychczas przez matematyków? Odpowiedzieć na tak szeroko postawione pytanie jest o tyle trudno, że nikt dotychczas nie zdefiniował dostatecznie ściśle obowiązków matematyka. Obawiam się zresztą, że podanie takiej definicji znacznie przekracza moje kompetencje. Nie pozostaje zatem nic innego, jak tylko ograniczyć się do pewnego aspektu działalności matematyków. Mogę się tu zresztą oprzeć o autorytet Hilberta, który twierdził, że matematycy powinni rozwiązywać trudne problemy matematyczne. Opuśćmy w tym stwierdzeniu niejasne określenie „trudne" i zastanówmy się nad tym, co to znaczy rozwiązać problem matematyczny. Większość problemów matematycznych daje się sformułować w następującej postaci: Czy takie to, a takie zdanie jest twierdzeniem takiej to, a takiej teorii matematycznej? Można to wypowiedzieć ściślej: Dany jest pewien układ aksjomatów; czy dane stwierdzenie można wyprowadzić z tych aksjomatów posługując się określonymi regułami dowodzenia? Problem zautomatyzowania tak postawionego zagadnienia wzbudził w ostatnich latach ogólne zainteresowanie i znany jest pod nazwą „problem automatycznego dowodzenia twierdzeń". Wchodzi on w skład kompleksu zagadnień związanych ze sztuczną inteligencją. Upraszcza się go zresztą jeszcze bardziej przyjmując, że regułami dowodzenia posługują się istniejące już maszyny liczące: problem sprowadza się do napisania odpowiedniego programu. Budowę zaś samych maszyn matematycznych, czy — jak ostatnio modnie jest mówić z angielska — komputerów, pozostawia się specjalistom.

Jak zatem napisać program, który dawałby odpowiedź na pytanie, czy dane zdanie wynika z podanej aksjomatyki? Dla teorii rozstrzygalnych sprawa jest prosta: należy ściśle opisać metodę rozstrzygania dla danej teorii. Na przykład dla teorii porządku liniowego lub teorii nierówności liniowych można opisać odpowiednie metody eliminacji kwantyfikatorów (omówione w «Delcie», 1974, nry 7 i 9). Dla rachunku zdań — metodę zero-jedynkową, opisaną w większości podręczników logiki (np. H. Rasiowa *Wstęp do matematyki współczesnej*). Gorzej z teoriami, dla których metoda rozstrzygania nie istnieje, to znaczy z teoriami nierozstrzygalnymi (por. artykuły prof. Mostowskiego, «Delta», 1974, nry 10 i 11). Czy wobec takich teorii jesteśmy całkiem bezsilni? Niezupełnie. Istnieją bowiem metody uniwersalne, dające się zastosować do każdej teorii opisanej aksjomatycznie. Omówimy tę metodę na przykładzie rachunku zdań. Aby uczynić sprawę jeszcze prostszą, zajmiemy się taką formalizacją rachunku zdań, w której występują, poza zmiennymi, tylko dwa symbole zwane też funktorami zdaniotwórczymi: negacja $\sim$ i implikacja $\Rightarrow$. (Pozostałe funktory można wtedy zdefiniować; proszę sprawdzić przykłady na marginesie!).

$p \vee q = \sim p \Rightarrow q$

$p \wedge q = \sim (p \Rightarrow \sim q)$

$p \Leftrightarrow q = (p \Rightarrow \sim q) \Rightarrow \sim (\sim p \Rightarrow q)$

Jeśli w naszym przypadku rachunek zdań ma być zaksjomatyzowany — wypadałoby podać jego aksjomaty. Mamy tu dość dużą swobodę. Te, które zostały podane obok na marginesie, cytujemy z książki A. Mostowskiego *Logika matematyczna*; zostały one podane przez J. Łukasiewicza. Aby się przekonać, że jakieś zdanie jest twierdzeniem rachunku zdań (w przypadku rachunku zdań zamiast „twierdzeniem" mówi się często „tautologią"), trzeba je udowodnić. Cóż to jednak oznacza „udowodnić"? Oznacza to, że trzeba podać dowód tego zdania, czyli ciąg, w którym każde zdanie wynika bezpośrednio z aksjomatów lub też ze zdań wypisanych wcześniej, a kończący się zdaniem, które należy udowodnić. Niektórzy wymagają dopisania na końcu literek c.b.d.o. (*co było do okazania*) lub c.n.u. (*co należało udowodnić*), nie jest to jednak absolutnie konieczne.

1) sylogizm warunkowy
$(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$,
2) prawo Dunsa-Scotusa
$p \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q)$,
3) prawo Claviusa
$(\sim p \Rightarrow p) \Rightarrow p$.

Wszystko byłoby w porządku, gdyby nie zwrot: „wynika bezpośrednio". Przecież na dobrą sprawę „daje się udowodnić" oznacza tyle, co „wynika", czyżbym więc zamierzał wprowadzać czytelników w błędne koło definicji? Nie sposób się dalej wykręcać i muszę teraz podać precyzyjne reguły wnioskowania, które razem stanowić będą definicję terminu „wynika bezpośrednio".

Reguła 1 (trywialna). Każde zdanie wynika bezpośrednio z siebie samego. Reguła jest, zgodnie z nazwą, trywialna (tzn. naiwnie prosta) i służy tylko do tego, aby można było w dowodzie wypisywać aksjomaty. W ten sposób ciąg złożony z jednego aksjomatu jest dowodem. Czego dowodem? Oczywiście tego aksjomatu. Stąd prosty, acz niezgodny ze (złymi) obyczajami wniosek, że aksjomaty są twierdzeniami.

Przykład
$A = p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
$B = r \Rightarrow s$
$C = (r \Rightarrow s) \Rightarrow (q \Rightarrow (r \Rightarrow s))$

Reguła 2 (podstawiania). Ze zdania A, w którym występuje zmienna zdaniowa p, wynika bezpośrednio zdanie C, powstające ze zdania A przez podstawienie zdania B w miejscu wszystkich wystąpień zmiennej p.

Uf! Tej reguły nie można nazwać trywialną. Stanie się jednak jasna, gdy się rozpatrzy przykład podany na marginesie.

Reguła 3 (odrywania). Ze zdania A postaci $B \Rightarrow C$ oraz zdania B wynika bezpośrednio zdanie C.

Reguła ta w odróżnieniu od poprzednich ma dwie przesłanki: zdanie A, które musi mieć postać implikacji, oraz zdanie B, które musi być poprzednikiem tej implikacji. Wnioskiem okazuje się następnik implikacji.

Wreszcie czas na warunek końcowy: zdanie wynika bezpośrednio z jednego lub dwu zdań tylko wtedy, gdy wynika z nich na mocy przynajmniej jednej z reguł 1–3.

Teraz już wiemy dokładnie, czym jest dowód w rachunku zdań. Ale w tej sytuacji, jak łatwo zauważyć, sprawdzenie, czy przedstawiony nam przez kogoś ciąg zdań jest dowodem, jest sprawą być może mozolną, ale całkowicie mechaniczną. Sprawdzenie zaś, czy jest to dowód żądanego zdania, nie przedstawia żadnej w ogóle trudności. Z tej obserwacji wywodzą się metody automatycznego dowodzenia twierdzeń: maszyna wypisuje jeden po drugim coraz dłuższe ciągi zdań, a następnie sprawdza, czy wypisany ciąg nie jest przypadkiem poszukiwanym dowodem. Jeśli chcemy mieć pewność, że dla każdego twierdzenia otrzymamy po pewnym czasie dowód, musimy tak ułożyć program wypisujący ciągi, aby każdy skończony ciąg zdań, a przynajmniej każdy dowód mógł się po pewnym czasie pojawić. Stanowi to oczywiście pewną dodatkową trudność, ale na szczęście niezbyt wielką.

Tak więc, jeśli wystartowaliśmy z twierdzenia, to wszystko w porządku, po pewnym, być może bardzo długim, ale jednak skończonym, czasie otrzymamy jego dowód. Cóż jednak, jeśli pechowo zaczęliśmy poszukiwać dowodu zdania, które twierdzeniem nie jest? W przypadku rachunku zdań zawsze pojawi się wtedy negacja tego zdania, i po tym będziemy mogli poznać, że się myliliśmy. Dla niektórych jednak innych teorii możemy być zmuszeni do czekania nieskończenie długo, pożerani przez niepewność: „A nuż następny dowód będzie tym właściwym?". Ta niedoskonałość metody wynika z jej ogólności. Metoda daje się bowiem przenieść na wszystkie teorie matematyczne. Może być wówczas znacznie bardziej skomplikowana. Zwłaszcza wtedy, gdy w teorii występują kwantyfikatory, wówczas bowiem reguły wnioskowania ulegają znacznej komplikacji. Zasada pozostaje jednak stale ta sama: wypisywać „po kolei" ciągi zdań i sprawdzać, czy któryś nie jest przypadkiem pożądanym dowodem. Dotyczy to również teorii nierozstrzygalnych, i to jest przyczyną omawianej wady.

Z punktu widzenia praktyki programowania istniejących maszyn liczących (owych komputerów) metoda ma jeszcze dalsze wady. Jest mianowicie bardzo nieefektywna: dla otrzymania stosunkowo prostych dowodów maszyna musiałaby pracować bardzo długo, a to jak wiadomo jest związane ze znacznymi kosztami. Zaczęto zatem metodę modyfikować i ulepszać. Ulepszenia te polegały na pomijaniu tych dowodów, o których z góry wiadomo, że nie prowadzą do celu. Modyfikacje te miały ten uboczny skutek, iż maszyna musi teraz pamiętać masę informacji, którą w czasie pracy wyprodukuje. Istniejące, przynajmniej dotychczas, maszyny mają pamięć skończoną, to znaczy mogą zapamiętać tylko skończoną liczbę informacji. Co gorsze, pojemność ich pamięci, choć obiektywnie czasem bardzo duża, nie wystarcza do zapamiętania wyników częściowych, potrzebnych przy poszukiwaniu nawet stosunkowo prostych dowodów. Pamięć maszyny „zatyka się" i maszyna przestaje pracować lub zaczyna działać nieprawidłowo.

Do metod tego typu należy np. cieszący się ogromnym zainteresowaniem psychologów „Ogólny Rozwiązywacz Problemów" (General Problem Solver). Jest to program, skonstruowany przez matematyków amerykańskich. Zob. np. J. Kozielecki: *Z zagadnień psychologii myślenia*).

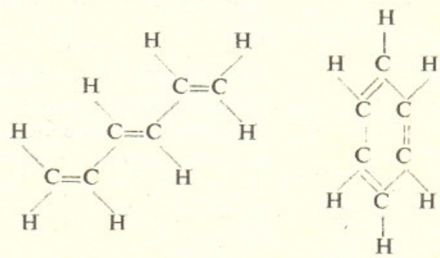
W tej sytuacji automatyczne dowodzenie twierdzeń stosuje się tylko do zagadnień niezwykle prostych, ale za to w sytuacjach, gdy ingerencja człowieka jest niemożliwa lub niepożądana. Natomiast jeśli idzie o samodzielne dowodzenie interesujących twierdzeń matematycznych przez maszyny, wymagałoby to albo istotnej zmiany metody, albo istotnego postępu w budowie maszyn liczących. Co do pierwszej ewentualności autor może powiedzieć tylko tyle, że dziś zupełnie nie widać takich możliwości. Co zaś tyczy drugiej, to postęp elektroniki musiałby chyba być tak duży, że wymagałby zmiany poglądów na budowę fizyczną świata. Powie ktoś, że to możliwe. No cóż, nie umiem temu zaprzeczyć ani też potwierdzić, i w tej sytuacji nie mogę zrobić nic innego, jak tylko skończyć artykuł, pozostawiając resztę wyobraźni Czytelnika.

O prostej funkcji falowej dla molekuł

Dr Lucjan PIELA

Świat zbudowany jest z atomów i molekuł. Do obliczenia własności atomu lub molekuły konieczna jest znajomość tzw. funkcji falowej rozpatrywanego układu. Funkcja ta jest rozwiązaniem równania Schrödingera. Nie będziemy tu podawać ogólnej postaci tego równania ani definicji funkcji falowej — pojęcia te pojawią się niżej w pewnej ich szczególnej postaci[1]. Obliczenie dokładnej funkcji falowej dla najprostszej molekuły jest bardzo trudne. Obliczenie przybliżonej funkcji falowej dla złożonych molekuł może być jednak czasem bardzo łatwe. Po przeczytaniu tego artykułu sami będziecie mogli bez trudności obliczać przybliżone funkcje falowe dla wielu molekuł i wykorzystywać rezultaty tych obliczeń do przewidywań ich budowy i zachowania się.

Zajmijmy się dzisiaj molekułami, które są płaskie i zawierają — ujmując rzecz w tradycyjnym języku podręczników chemii — wiązania pojedyncze i podwójne, rozmieszczone w pewien sposób, który zdefiniujemy poniżej. Przykładami takich molekuł są heksatrien i cykloheksatrien zwany także benzenem. Cechą charakterystyczną obu podanych molekuł jest to, że atomy związane ze sobą wiązaniami podwójnymi tworzą łańcuch (otwarty lub zamknięty), w którym występują na przemian wiązania podwójne i pojedyncze. Taki układ wiązań nazywamy w chemii układem sprzężonych wiązań podwójnych. Teoria, którą omówimy, dotyczy molekuł o takim właśnie układzie wiązań:



W chemii kwantowej dowodzi się, że dwie kreski symbolizujące wiązania podwójne nie są równocenne, bo jedno z wiązań podwójnego wiązania jest inne niż drugie. Jedno z nich, zwane wiązaniem σ, jest symetryczne względem osi łączącej atomy[2] połączone wiązaniem podwójnym, czyli że przekrój poprzeczny wiązania jest kołem. Drugie wiązanie, zwane wiązaniem π wystaje nad i pod płaszczyzną molekuły (składa się jak gdyby z dwóch części), a jego przekrój poprzeczny jest zbliżony do kształtu cyfry 8. Wiązania pojedyncze są zawsze wiązaniami σ. Każde wiązanie, czy to σ czy π, jest utworzone przez dwa elektrony[3]. Umówmy się, że elektrony wiązań σ będziemy nazywać elektronami σ, a elektrony wiązań π — elektronami π.

W dokładnych obliczeniach dla molekuł należy oczywiście brać pod uwagę oddziaływanie wszystkich elektronów i jąder na siebie. Prowadzi to jednak do na tyle skomplikowanych obliczeń, że wolimy z tego już teraz zrezygnować. Szczerze mówiąc, niczego więcej nie pragniemy niż uproszczeń naszego zadania. Wykorzystamy w tym celu pewne różnice między wiązaniami σ i π. Otóż doświadczenie wskazuje, że w dość dobrym przybliżeniu elektrony σ są zlokalizowane w swoich wiązaniach, natomiast elektrony π „buszują" sobie swobodnie (w miarę) wzdłuż całego układu sprzężonych wiązań podwójnych. Jeśli więc zamierzamy dość delikatnie obchodzić się w doświadczeniach z naszą molekułą, to za wszelkie zmiany jej zachowania się powinniśmy obarczyć odpowiedzialnością głównie elektrony π. Zajmijmy się więc tylko elektronami π, traktując elektrony σ i jądra jako źródło pewnego potencjału, w którym poruszają się elektrony π. Potencjał ten jednak nie jest na tyle prosty, by nas zadowolił. Jest to potencjał, który przypomina górki i dolinki, wobec tego droga poruszających się elektronów π jest wyboista. Zróbmy następne przybliżenie i uśrednijmy ten potencjał. Po tym zabiegu droga elektronów π jest płaska jak autostrada, o długości równej długości układu sprzężonego.

Uprośćmy zagadnienie bardziej: Zaniedbajmy oddziaływanie elektronów π między sobą. To założenie wygląda już bardzo groźnie, ale jest tu wprowadzone ze względu na swoją prostotę. Można bowiem sformułować je o wiele ostrożniej i rezultat w naszej metodzie będzie ten sam.

Równanie orbitalne

Po tych założeniach — cząsteczka heksatrienu to pręt, w którym niezależnie od siebie porusza się 6 elektronów π. Wybierzmy uśredniony potencjał $V = 0$ w pręcie, a $V = \infty$ poza prętem. Jedynie druga równość jest przybliżeniem, ale dość dobrze spełnionym[4]: pierwsza przesuwa tylko punkt, od którego liczymy energię.

Ponieważ elektrony π poruszają się zupełnie od siebie niezależnie, można rozwiązać równanie Schrödingera dla jednego elektronu w pręcie, a pozostałe dodać później rozmieszczając je na poziomach energetycznych. Równanie to jest bardzo proste:

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} = E\Phi(x), \tag{1}$$

[1] Czytelników niezadowolonych z takiego postawienia sprawy odsyłamy do artykułu dra Z. Płochockiego *Kwantowy lew* («Delta», 1975, nr 2), w którym podana jest uproszczona postać równania Schrödingera

[2] Tu każdy z Was powinien się zdziwić — bo dlaczego wiązanie σ ma być zawsze symetryczne, skoro znajduje się w na ogół niesymetrycznym polu pozostałej części molekuły? Macie rację, na ogół wiązanie nie jest symetryczne, ale odchylenie od symetryczności jest tak małe, że fakt ten jest ignorowany w podręcznikach chemii kwantowej.

[3] Brzmi to jak dogmat. Łatwo go jednak obalić. Na przykład wiązanie w molekule H_2^+ jest utworzone przez jeden elektron. W przypadku jednak molekuł, którymi będziemy zajmować się w tym artykule, nie dojdziemy do błędnych wyników zakładając prawdziwość tego twierdzenia.

[4] Czemu odpowiada to założenie? (Zob. art. wym. w przypisie 1).

gdzie E i m oznaczają energię i masę elektronu, $\Phi(x)$ jest orbitalem (funkcją falową) elektronu, a h jest stałą Plancka. Współrzędna x pokazuje położenie w pręcie i zmienia się od 0 do L. Sens fizyczny $\Phi(x)$ jest następujący: $|\Phi(x)|^2dx$ jest prawdopodobieństwem tego, że elektron opisywany orbitalem $\Phi(x)$ znajduje się pomiędzy x a $x+dx$. Jeśli np. w jakimś konkretnym punkcie x funkcja $\Phi(x) = -0{,}1$, a przedział $dx = 0{,}01$, to prawdopodobieństwo znalezienia elektronu w pobliżu punktu x w przedziale dx jest równe $|-0{,}1|^2 0{,}01 = 1\cdot 10^{-4}$. Łatwo możecie sprawdzić, że funkcja $\Phi(x)$ spełniająca równanie (1) jest równa

(2) $$\Phi(x) = A\sin\varkappa x + B\cos\varkappa x,$$

gdzie

$$\varkappa^2 = \frac{8\pi^2 mE}{h^2}.$$

Heksatrien jako pręt

Na tym etapie nie widać jeszcze kwantowania energii — wszelkie (dodatnie) wartości E są możliwe. Ograniczenia na E pojawiają się natychmiast i w sposób naturalny, gdy nałożymy pewne warunki na $\Phi(x)$. Ponieważ poza prętem potencjał $V = \infty$, to elektron nigdy nie przeniknie do obszaru $x \leqslant 0$ lub $x \geqslant L$.

Prawdopodobieństwo znalezienia go w punktach $x = 0$ i $x = L$ jest równe zeru, czyli

(3) $$|\Phi(0)|^2 = 0, \quad \text{skąd} \quad \Phi(0) = 0,$$

oraz

(4) $$|\Phi(L)|^2 = 0, \quad \text{skąd} \quad \Phi(L) = 0.$$

Warunek (3) daje $B = 0$, czyli $\Phi(x) = A\sin\varkappa x$. Warunek (4) daje:

(5) $$A\sin\varkappa L = 0, \quad \text{skąd} \quad \varkappa L = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

bo A nie może być równe 0.

Odrzuciliśmy ujemne n, bo prowadzą one (z dokładnością do znaku) do tych samych Φ, co n dodatnie, a $n = 0$ odrzucamy, bo jeśli nie, to $\Phi(x) \equiv 0$. W rezultacie z warunku (5) otrzymamy dozwolone wartości energii (poziomy energetyczne)

(6) $$E_n = \frac{h^2}{8mL^2} n^2$$

i orbitale

$$\Phi_n(x) = \sin\frac{n\pi}{L}x.$$

Po zażądaniu, by znalezienie elektronu gdziekolwiek w pręcie było zjawiskiem pewnym, tzn. $\int_0^L |\Phi_n(x)|^2 dx = 1$, otrzymamy $A = \sqrt{\frac{2}{L}}$.

Benzen jako pręt zamknięty (pętla)

W przypadku pręta zamkniętego musimy na $\Phi(x)$ z równania (2) narzucić inne warunki niż (3) i (4). Jeśli się chwilę zastanowicie, to dojdziecie do wniosku, że naturalne[5] jest żądanie, by

(7) $$\Phi(0) = \Phi(L)$$

oraz

(8) $$\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_{x=L}$$

Czy moglibyście sprawdzić, że funkcjami (2) spełniającymi (7) i (8) są

(9) $$\Phi_n(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{L} & \text{dla} \quad n = 0, \\ \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{2\pi n}{L}x & \text{dla} \quad n > 0, \\ \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\frac{2\pi n}{L}x & \text{dla} \quad n < 0, \end{cases}$$

gdzie $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Dopuszczalne energie są wtedy równe

(10) $$E_n = \frac{h^2}{8mL^2}(2n)^2.$$

Zauważmy, że tutaj każdemu z poziomów energetycznych E_n, z wyjątkiem E_0, odpowiadają dwa orbitale Φ_n i Φ_{-n}.

Porównanie wyników dla heksatrienu i benzenu

W każdym stanie, opisywanym przez dany orbital, można umieścić najwyżej dwa elektrony; jest to uzasadnione tzw. zasadą wykluczania (zakazem) Pauliego, więc w przypadku heksatrienu

[5] Jakiemu fizycznemu warunkowi odpowiada to żądanie?

[6] Dla wygody wprowadzimy dla heksatrienu i benzenu jednostkę energii $\frac{h^2}{8mL^2}$.
Zakładamy tutaj, że długość heksatrienu jest równa obwodowi benzenu, ale cóż to jest w porównaniu z naszymi dawnymi grzechami!

2 elektrony π o energii $E_1 = 1$ będą opisywane[6] przez funkcję $\Phi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\pi}{L} x$, dwa dalsze o energii $E_2 = 4$, przez funkcję $\Phi_2 = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{2\pi}{L} x$, a dwa ostatnie o energii $E_3 = 9$ — przez funkcję $\Phi_3 = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{3\pi}{L} x$. Dla benzenu odpowiednie podwójnie obsadzone poziomy i opisujące je orbitale będą następujące: $E_0 = 0$, $\Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{L}}$; $E_1 = 4$, $\Phi_1 = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{2\pi}{L} x$ i $E_{-1} = E_1 = 4$; $\Phi_{-1} = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos \frac{2\pi}{L} x$.

Trwałość układu sprzężonych wiązań jest tym większa, im niższa jest energia elektronów π. Energia elektronów π w heksatrienie równa się

$$E_{\text{heks}} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 9 = 28,$$

a w benzenie

$$E_{\text{benz}} = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 4 = 16.$$

Przewidujemy więc znacznie większą trwałość układu sprzężonych wiązań benzenu niż heksatrienu. Jest to potwierdzone licznymi faktami doświadczalnymi, gdyż typowe reakcje heksatrienu polegają na rozerwaniu jednego z wiązań podwójnych, podczas gdy w tego typu reakcjach benzen zachowuje swój układ π-elektronowy.

Zróbmy jeszcze jedno porównanie tych dwóch molekuł. Obliczmy prawdopodobieństwo $P(x)dx$ znalezienia któregokolwiek elektronu w przedziale dx długości molekuły:

$$P_{\text{heks}}(x)dx = \frac{1}{6}\,(2\Phi_1^2(x) + 2\Phi_2^2(x) + 2\Phi_3^2(x))dx =$$
$$= \frac{2}{3L}\left(\sin^2 \frac{\pi}{L} x + \sin^2 \frac{2\pi}{L} x + \sin^2 \frac{3\pi}{L} x\right) dx,$$

$$P_{\text{benz}}(x)dx = \frac{1}{6}\,(2\Phi_0^2(x) + 2\Phi_1^2(x) + 2\Phi_{-1}^2(x))dx = \frac{1}{L}\,dx = \text{const} \cdot dx.$$

Otrzymaliśmy wynik, że prawdopodobieństwo znalezienia elektronu π w benzenie nie zależy od x — jest jednakowe na całym obwodzie! Zamiast więc rysować wiązanie podwójne tak:  należałoby to zrobić raczej tak:  lub tak: . Doświadczalne własności chemiczne zmusiły chemików do pisania tego drugiego wzoru. My otrzymaliśmy ten wynik teoretycznie w niezwykle prosty sposób.

Postarajcie się wykreślić $P_{\text{heks}}(x)$. Zobaczycie wtedy, że największe prawdopodobieństwo znalezienia elektronu π jest tam, gdzie piszemy wiązanie podwójne (!), ale wcale niemałe prawdopodobieństwo jest również tam, gdzie tradycyjnie piszemy wiązanie pojedyncze! Mówimy, że elektrony π delokalizują się na całą molekułę.

Możecie teraz obliczać orbitale dla wielu molekuł, możecie liczyć prawdopodobieństwa znalezienia elektronu π w tych molekułach w stanie podstawowym (najniższe poziomy podwójnie obsadzone) lub w stanach wzbudzonych (inne obsadzenia), możecie porównywać energie wzbudzeń w łańcuchach i pierścieniach. Wasze wyniki będą najwyżej zgodne jakościowo z doświadczeniem. Nie dziwcie się temu i nie żądajcie zbyt wiele od teorii, która jest bardzo uproszczona, ale jednocześnie nadzwyczaj wygodna w praktycznych obliczeniach szacunkowych. Świat jest skomplikowany, ale główne zarysy jego budowy da się czasem przedstawić w sposób prosty.

Zadania

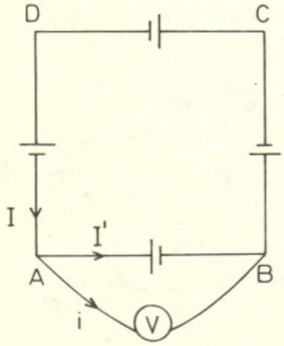
Redaguje mgr. Andrzej MĄKOWSKI

M55. Udowodnić, że jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to liczba $n^6 + 3n^4 + 7n^2 - 11$ jest podzielna przez 256. Rozwiązanie — na str. 16.

M56. Zbiór 1, 2, ..., n ($n \geqslant 19$) podzielono na dwa niepuste podzbiory. Udowodnić, że przy każdym takim podziale można z nich wybrać po jednej liczbie w ten sposób, aby w rozwinięciu dziesiętnym każdej z tych liczb powtarzała się ta sama cyfra. Rozwiązanie — na str. 7.

M57. Na okręgu tak obrano punkty A, B, C i D, że $AB = BC = CD$; łamana $ABCD$ nie przecina się sama ze sobą. Niech BE będzie średnicą okręgu, F — punktem przecięcia prostej AD z prostą BE, a G — punktem przecięcia prostych AD i CE. Udowodnić, że $AB = AF$ i $FG = GD$. Rozwiązanie — na str. 12.

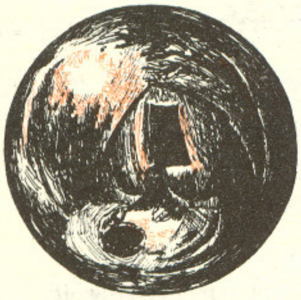
Redaguje dr Andrzej ZIEMIŃSKI



F19. Cztery identyczne baterie o sile elektromotorycznej E połączono według schematu pokazanego na rysunku. Jakie napięcie wykaże woltomierz o oporze R podłączony do punktów A i B? Jak zmieni się to napięcie, jeżeli baterie między punktami AB i BC połączymy z przeciwnymi znakami niż na rysunku. Rozwiązanie — na str. 11.

O wielości światów

Dr Marek KORDOS



Niezależnie od tego, że można uprawiać różne geometrie naszej przestrzeni, sensowne jest pytanie, czy istnieją przestrzenie inne od tej „naszej". A jeśli istnieją, to czym się różnią?
Spróbujmy zatem wyobrazić sobie jakąś „inną" przestrzeń albo przynajmniej jej fragment. Niech będzie to przestrzeń dwuwymiarowa, czyli odpowiednik „naszej" płaszczyzny.

CZYM SIĘ RÓŻNI PROSTA

Od czego? Ano, od innych linii. Ważną własnością prostej jest to, że jest najkrótszą linią łączącą dowolnie wybrane swoje punkty. Linie o tej własności nazywają się „geodezyjnymi". Prosta jest więc geodezyjną płaszczyzny.
A jak wyglądają geodezyjne sfery (czyli powierzchni kuli)? Muszą to być linie leżące na sferze, więc nie proste. Ogląd, ewentualnie eksperyment polegający na napinaniu nitki między dwoma punktami globusa, wreszcie (dla teoretyków) geometria różniczkowa, pouczają nas, że geodezyjne sfery to okręgi wielkie (przecięcia sfery z płaszczyzną przechodzącą przez jej środek). Wyobraźmy sobie teraz obywatela kawałka „naszej" płaszczyzny i obywatela kawałka sfery. Obaj za proste uważają geodezyjne swoich przestrzeni, mierzą kąty w częściach kąta pełnego, mierzą długości jednakowymi miarkami. Czy mogą oni eksperymentalnie stwierdzić, czy żyją w przestrzeni płaskiej, czy sferycznej? Okazuje się, że mogą: Rysują np. kąt prosty, czyli ćwierć pełnego, na jego ramionach odmierzają ten sam odcinek a, a następnie mierzą odległość dwu otrzymanych punktów. Jeżeli wyjdzie $a\sqrt{2}$, to znaczy, że jesteśmy na płaszczyźnie. Jeżeli mniej — to znaczy, że na sferze.

A JEŚLI WIĘCEJ?

Można sporządzić model również kawałka takiej dwuwymiarowej przestrzeni. Model nienajlepszy, ale łatwy w wykonaniu: Wycinamy z papieru kółko, rozcinamy je i w rozcięcie wklejamy wycinek takiego samego koła. Wyjdzie z tego coś w rodzaju siodła, ale kanciastego. Owa kanciastość to jest właśnie wada modelu. Prawdziwe kawaleryjskie siodło byłoby idealnym modelem fragmentu przestrzeni dwuwymiarowej, w której odcinek geodezyjnej, łączący końce odcinków o długości a odłożonych na ramionach kąta prostego, miałby długość większą niż $a\sqrt{2}$.
Nawiasem mówiąc, z kółka papierowego można zrobić również taki nienajlepszy model fragmentu sfery. Tylko, że po co nam przybliżanie sfery stożkami, skoro sferę każdy widział. Ale z siodłami ostatnio gorzej.

PRZESTRZEŃ ELIPTYCZNA, PARABOLICZNA I HIPERBOLICZNA

Zajmijmy się teraz następującymi trzema przestrzeniami, w których opisany wyżej pomiar daje, przy ustalonym odcinku a, wciąż ten sam wynik, a mianowicie:

I — mniejszy od $a\sqrt{2}$,

II — równy $a\sqrt{2}$,

III — większy od $a\sqrt{2}$.

Jeżeli ponadto każda z nich spełnia następujące cztery warunki:
1. przez dwa różne punkty A i B przechodzi dokładnie jedna geodezyjna (oznaczamy ją $g(AB)$),
2. dwie różne geodezyjne mają najwyżej jeden punkt wspólny,
3. istnieją trzy punkty, przez które nie przechodzi równocześnie żadna geodezyjna,
4. dla dowolnych czterech różnych punktów $ABCD$ $g(AB)$ przecina $g(CD)$ lub $g(AC)$ przecina $g(BD)$, lub $g(AD)$ przecina $g(BC)$,

to nazywamy je odpowiednio: *dwuwymiarową przestrzenią* lub *płaszczyzną*
I — *eliptyczną*,
II — *paraboliczną* (albo *euklidesową* od pierwszego kodyfikatora jej własności, Euklidesa z Aleksandrii, w. IV p. n. e.),
III — *hiperboliczną* (albo *Bolyai — Łobaczewskiego* od nazwisk dwóch jej dziewiętnastowiecznych odkrywców).

Rozwiązanie zadania M56.

Przypuśćmy, że przy ustalonym $n \geqslant 19$ można podzielić zbiór $\{1, 2, \ldots, n\}$ na dwa niepuste podzbiory A i B o takiej własności, iż każda cyfra rozwinięcia dziesiętnego dowolnej liczby należącej do A jest różna od każdej cyfry rozwinięcia dziesiętnego dowolnej liczby należącej do B.

Możemy założyć, że $1 \in A$. Wówczas $10 \in A$, $11 \in A, \ldots, 19 \in A$, a więc w rozwinięciach dziesiętnych liczb należących do A występuje każda cyfra. Dowolna więc liczba należąca do B ma w swym rozwinięciu dziesiętnym jakąś cyfrę występującą w rozwinięciu którejś z liczb należących do A.

Zauważmy, że jeżeli $2 \leqslant n \leqslant 18$, to zbiór $\{1, 2, \ldots, n\}$ można podzielić na dwa niepuste podzbiory, z których nie można wybrać po jednej liczbie tak, by rozwinięcia dziesiętne tych liczb miały wspólną cyfrę. Podzbiorami takimi są:

jeżeli $2 \leqslant n \leqslant 9$ — dowolne dwa niepuste podzbiory, których sumą jest $\{1, 2, \ldots, n\}$,

jeżeli $10 \leqslant n \leqslant 18$ — $\{1, 2, \ldots, 8, 10, \ldots, n\}$ i $\{9\}$.

O wszystkich tych geometriach będziemy jeszcze niejednokrotnie pisali. Teraz zauważmy, że sfera nie jest płaszczyzną eliptyczną (dlaczego?), dowolny mały kawałek płaszczyzny eliptycznej jest jednak taki sam jak odpowiedniej wielkości kawałek sfery. Podobnie płaszczyzna hiperboliczna jest tylko lokalnie podobna do siodła. Ale przecież i euklidesowej płaszczyzny nikt nigdy całej nie widział.
Wymienione wyżej przestrzenie to szczególny przypadek tzw. *przestrzeni riemannowskich* — od nazwiska: (Bernard) Riemann. W swojej pracy habilitacyjnej (1854) wprowadził on bardzo ogólne pojęcie przestrzeni, określając za pomocą pewnej funkcji charakter każdego z jej punktów (czy sferyczny, czy płaski, czy siodłowy, oraz czy duża jest ta sfera czy siodło). Wartość tej funkcji nazywamy *krzywizną*. Trzy wyżej opisane przestrzenie są zatem przestrzeniami riemannowskimi o *stałej krzywiźnie*.
Analogicznie wprowadza się trójwymiarowe przestrzenie eliptyczne, paraboliczne czy hiperboliczne — każda ich płaszczyzna jest odpowiedniego typu przestrzenią dwuwymiarową.

A NASZA — TO KTÓRA?

Przyzwyczailiśmy się do geometrii euklidesowej tak bardzo, że byłoby nam chyba żal, gdyby okazało się, iż to nie ona jest ,,nasza''. I jeszcze do niedawna czyniono wysiłki, aby na drodze obserwacji fizycznych ustalić, że żyjemy w świecie parabolicznym. Wysiłki te jednak spełzły na niczym. Fizyka (i ta ziemska, i ta kosmiczna) nie znalazła sposobów weryfikacji. Jak to? Przecież sposób został podany na wstępie artykułu! Tak, tylko że czynności pomiarowe były tam wykonywane idealnie. W praktyce interesujące nas różnice mieszczą się w obrębie błędów pomiarowych, co jako pierwszy zauważył Gauss, tworząc z okazji prób zbadania ,,która to nasza'' matematyczną teorię błędów.
Matematyków zadowala dziś stwierdzenie, że każda z trzech opisanych geometrii jest teorią jednakowo poprawną (jak zresztą i wiele innych).
A przyrodnicy? Coraz częściej uważają, że odpowiedź na to pytanie nie istnieje. Każde zjawisko należy opisywać w języku tej z geometrii, w której opis jest prostszy czy bardziej ,,elegancki''. I nie należy się przejmować tym, że w każdym przypadku będzie to inna geometria.
No cóż, mam nadzieję, że Czytelnicy wraz ze mną zechcą potraktować takie stanowisko jako chwilową utratę równowagi psychicznej. Wśród wielu możliwych światów jest przecież jakiś konkretny, w którym my żyjemy. Inna rzecz, że może żadna z dotychczasowych geometrii jeszcze go nie opisuje.

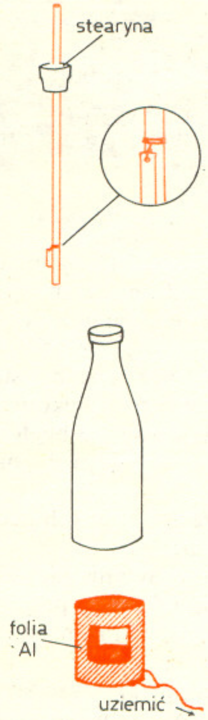
Czy wiecie, że ...

Już Michał Faraday w r. 1853 zajmował się wirującymi stolikami. Wyniki swoich badań ogłosił w roczniku odkryć naukowych za rok 1854 («Annual of Scientific Discovery: or, Year-Book of Facts in Science and Art»). Wirujące stoliki były w owym okresie zabawą bardzo modną. Może nawet czymś więcej niż zabawą. Medium, czyli człowiek o specjalnych predyspozycjach, kładł ręce na stole, koncentrował się i w pewnej chwili stolik zaczynał się poruszać. Ruch ten tłumaczono jako spowodowany zjawiskami elektrycznymi lub magnetycznymi; znacznie jednak częściej przypisywano go siłom nadprzyrodzonym.
Faraday przystąpił do systematycznych badań tego zjawiska.
W pierwszej serii doświadczeń sprawdził, czy ruch stolika zależy od materiału, jaki znajduje się pomiędzy palcami medium a blatem stołu. Żaden z badanych materiałów nie miał wpływu na przebieg doświadczenia. W drugiej serii doświadczeń umieścił pomiędzy blatem stołu a palcami medium specjalnie spreparowaną talię kart. Karty były sklejone w ten sposób, aby mogły przesuwać się jedna względem drugiej, jakkolwiek z pewnym trudem. Po przesunięciu zachowywały swoje nowe położenie. Wzajemne położenie kart przed rozpoczęciem eksperymentu zaznaczył Faraday ołówkiem. Wynik doświadczenia opisał następująco: ,,Gdy wreszcie stół, karty i ręce przesunęły się razem na lewo, wyjąłem talię i stwierdziłem, że ręce wraz z górnymi kartami przesunęły się dalej aniżeli stół i że to w rzeczywistości ręce pchały karty na lewo, a stół był ciągnięty''.
Faraday zbudował jeszcze inny, bardziej złożony przyrząd i we wszystkich przypadkach właśnie ręce okazywały się tą ,,siłą napędową'' poruszającą stół. Faraday był bardzo powściągliwy we wnioskach. ,,Ludzie, z którymi pracowałem byli godni zaufania'' — powiedział. ,,Jest dla mnie oczywiste, że ani nie zamierzali poruszać, ani nie wierzyli, że poruszają stół dzięki zwykłej sile mechanicznej''. Wniosek jednak był jednoznaczny: stół się ruszał, bo go pchano.

Wg «Scientfiic American»

Dr Jan A. GAJ

OCZY ELEKTROSKOPU



Rys. 1

Tak, nie mylicie się. Dzisiejsze wydanie naszego kącika poświęcone jest zjawisku fotoelektrycznemu. W warunkach amatorskich najłatwiej zaobserwować je przy pomocy elektroskopu. Jak pamiętacie, zjawisko fotoelektryczne (zewnętrzne) polega na wybijaniu elektronów z powierzchni przewodnika przez światło. Jeżeli taki przewodnik połączymy z ujemnie naładowanym elektroskopem, będzie on stopniowo tracił ładunek pod wpływem odpowiedniego oświetlenia przewodnika. Kto zdecyduje się zbadać doświadczalnie to zjawisko, staje od razu wobec pytania:

Z CZEGO WYBIJAĆ ELEKTRONY?

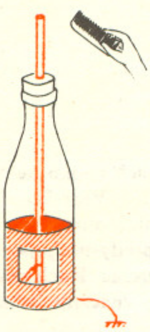
W tym miejscu czas na przypomnienie pewnego minimum teorii.
Elektrony w metalu są przyciągane przez dodatnie jony. Dopóki elektron znajduje się wewnątrz metalu, jony ciągną go w różne strony, pochodzące od nich siły z grubsza się znoszą i elektron może poruszać się w miarę swobodnie. Kiedy jednak próbujemy go wyrwać z metalu, musimy wykonać pewną pracę przeciwko tym siłom, tym razem działającym już w jedną stronę. Ta praca (oznaczamy ją przez W) nosi nazwę „praca wyjścia".
Aby wyrzucić elektrony z powierzchni metalu, musimy skierować na nią światło o energii fotonów E_f nie mniejszej niż praca wyjścia W:

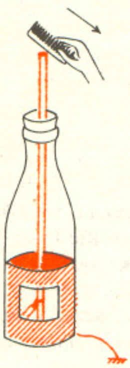
$$E_f \geqslant W.$$

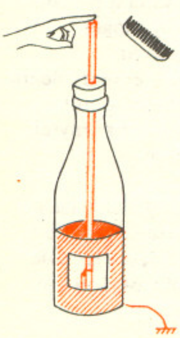
Warunek ten spełnić tym łatwiej, im mniejszą pracę wyjścia ma badany przewodnik. W fotokomórkach używa się zazwyczaj katod z metalami alkalicznymi (np. rubid, cez). Z materiałów ogólnie dostępnych oraz nie wymagających ochrony przed powietrzem najłatwiej użyć cynku — kawałek blachy cynkowej znakomicie nada się do naszych celów pod warunkiem odpowiedniego oczyszczenia jej powierzchni (na przykład papierem ściernym).
Miło było sobie pogawędzić, ale teraz spójrzmy w oczy faktom: trzeba zbudować

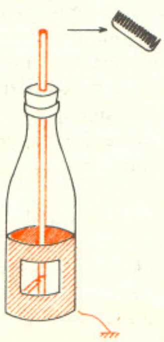
ELEKTROSKOP

Czy to trudne? I tak, i nie. Konstrukcja jest niezmiernie prosta, ale zaniedbanie pewnych szczegółów może całkowicie zniszczyć efekt naszej pracy. Postępując ściśle według moich wskazówek będziecie mogli zbudować przyrząd reagujący już na napięcia paruset woltów, co jak na elektrostatykę jest wartością bardzo małą.
Do zbudowania elektroskopu potrzebne będą następujące materiały: szklana butelka, pręcik lub gruby drut, kawałek świeczki, cienki drucik i folia aluminiowa (może być nawet po cukierku). Wykonujemy ze świeczki korek pasujący do szyjki butelki i przetykamy przezeń pręcik lub grubszy drut w taki sposób, żeby po włożeniu tego korka do butelki nie dosięgnął jej dna. Robimy to rozgrzawszy pręcik na tyle, aby wtopiony w stearynę podczas przetykania utrzymał się pewnie po jej zastygnięciu. Na pręciku montujemy w płaskiej pętelce z cienkiego drucika pasek folii w sposób zapewniający mu swobodę odchylania się od pręcika (patrz rysunek — fragment w powiększeniu).
Butelkę z zewnątrz owijamy folią aluminiową zostawiając okienka do obserwacji listka elektroskopu. W braku odpowiedniego kawałka folii można butelkę parę razy owinąć drutem. Ta zewnętrzna osłona, którą w czasie używania elektroskopu uziemiamy, jest potrzebna, jeśli nie chcemy, żeby elektroskop zachowywał się w sposób niekontrolowany. Uziemić osłonę można łącząc ją z rurą wodociągową lub centralnego ogrzewania (nigdy gazową) albo stawiając elektroskop bezpośrednio na ziemi. Po zmontowaniu całości możemy przystąpić do sprawdzania elektroskopu. Najprościej wziąć grzebień (nie metalowy) i przeczesać nim włosy. Gdy naelektryzowany w ten sposób grzebień zbliżymy do wystającego pręcika elektroskopu (rys. 2), listek powinien się odchylić. Możemy przytknąć grzebień do pręcika (rys. 3) — wtedy elektroskop uzyska ładunek o tym samym znaku, co grzebień — lub uziemić pręcik na krótko palcem (rys. 4a), następnie oddalić grzebień (rys. 4b), a wówczas elektroskop uzyska przez indukcję ładunek o znaku przeciwnym. Mając więc jeden przedmiot naelektryzowany możemy ładować elektroskop zarówno dodatnio, jak i ujemnie. Można się długo bawić podobnymi doświadczeniami i na pewno każdy, kto zrobi sobie elektroskop, będzie tego próbował, przynajmniej do chwili, kiedy sobie przypomni, że zbudował go, aby badać


Rys. 2


Rys. 3


Rys. 4a


Rys. 4b

EFEKT FOTOELEKTRYCZNY

Rys. 5

Jak badać? Bardzo prosto. Blaszkę cynkową łączymy z pręcikiem elektroskopu (jak na rysunku 5), ładujemy całość i oświetlamy. Tu dochodzimy do istotnego problemu. Cynk ma pracę wyjścia na tyle dużą, że aby wybijać z niego elektrony należy oświetlić go światłem nadfioletowym. Jeżeli macie dostęp do kwarcówki używanej do opalania — problem „z głowy". W przeciwnym razie popróbujcie bezpośredniego światła słonecznego (nie przez szybę — pochłania nadfiolet).
W trakcie doświadczeń przekonacie się, że światło powoduje rozładowanie tylko przy jednym znaku ładunku — ujemnym. Jeśli elektroskop naładujemy dodatnio, elektrony wybite światłem będą przyciągane z powrotem i ładunek nie będzie się zmieniać.
Osoby, które wiedzą, jak się różne rzeczy robi, żeby dobrze wyszło, proszę o ominięcie następnego fragmentu. Będą to bowiem

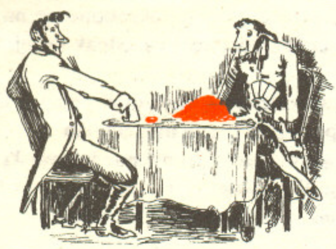
DOBRE RADY WUJKA

1. Elektrostatyka udaje się tylko na sucho, ale naprawdę na sucho.
2. Przedmioty metalowe w doświadczeniach elektrostatycznych nie powinny w miarę możności mieć ostrych końców ani krawędzi.
3. Dla uzyskania silnego efektu lampę kwarcową należy zbliżyć na odległość około 20 cm.
4. Jeżeli listek elektroskopu początkowo odchyla się dobrze, a potem szybciej lub wolniej opada, to o ile tylko nie jesteśmy na skażonym radioaktywnie terenie, najprawdopodobniej winna jest izolacja (wilgoć lub złe materiały).

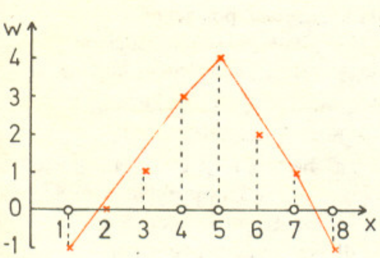
Teraz już mogą czytać wszyscy, bo wszystkim życzę powodzenia w doświadczeniach.

Kończyć czy jeszcze poczekać?

Dr Tomasz BOJDECKI



Szukaniem odpowiedzi na to nieco hamletowskie pytanie zajmuje się rachunek prawdopodobieństwa, a dokładniej — jego dział zwany „teorią optymalnego stopowania". Teoria ta stanowi efektowny przykład wykorzystania skomplikowanego, wysoce abstrakcyjnego aparatu matematycznego w tak zwanej „matematyce stosowanej", aparatu, dzięki któremu można rozwiązać wiele konkretnych zagadnień (nie zawsze intuicyjnie oczywistych), sformułowanych językiem zwykłym. W niniejszym artykule będę się starał przekonać Czytelnika o prawdziwości tego stwierdzenia; oczywiście to, co napisałem o trudnej matematyce, będzie wymagać ze zrozumiałych względów uwierzenia mi na słowo.
Przechodząc do rzeczy, przypuśćmy, że uczestniczymy w grze, której zasady można ująć w następujących punktach:
1) jest N pól ponumerowanych $1, 2, \ldots, N$;
2) na jednym z pól stoi pionek; rzucamy monetą i jeżeli upadnie ona orłem do góry przesuwamy pionek na sąsiednie pole o numerze o jeden większym, jeśli zaś reszką — na pole o numerze o jeden mniejszym; następnie znowu rzucamy monetą itd.; gra kończy się z chwilą dotarcia pionka do któregokolwiek z pól skrajnych, tzn. o numerach 1 albo N;
3) z każdym polem związana jest pewna wygrana: $w(i)$ oznacza wygraną przyporządkowaną polu o numerze i dla $i = 1, 2, \ldots, N$ ($w(i)$ może być też ujemne lub równe zeru, oczywiście „wygrana ujemna" oznacza przegraną);
4) w każdej chwili przed wykonaniem kolejnego rzutu monetą możemy wycofać się z gry; jeżeli w momencie wycofania pionek znajduje się na polu o numerze i, to nasza wygrana w całej grze równa jest $w(i)$; jeśli nie zdecydujemy się na przerwanie gry przed dojściem pionka do pola 1 albo N, to chcąc nie chcąc musimy zadowolić się wygraną, odpowiednio, $w(1)$ albo $w(N)$.
Problem polega na znalezieniu takiej strategii wycofania się z gry, która zapewniałaby największą wygraną.
Opisane zagadnienie jest typowym, a równocześnie, jak sądzę, najprostszym nietrywialnym zadaniem, którym zajmuje się teoria optymalnego stopowania. Oczywiście, problem został postawiony na razie zupełnie nieściśle. Przed dokonaniem jednak niezbędnych uściśleń warto chyba postarać się zrozumieć lepiej istotę zagadnienia. Niech na przykład $N = 8$, $w(1) = -1$, $w(2) = 0$, $w(3) = 1$, $w(4) = 3$, $w(5) = 4$, $w(6) = 2$, $w(7) = 1$, $w(8) = -1$. Wykres funkcji w (w jest tzw. „funkcją wypłaty") podany jest obok.



Niech X_0 oznacza położenie pionka w chwili zerowej (X_0 jest tzw. ,,stanem początkowym''). Przyjmijmy dla ustalenia uwagi, że $X_0 = 3$. Nie ma wątpliwości, iż jeśli w pewnej chwili pionek znajdzie się na polu 5, to należy grę przerwać, gdyż 5 jest punktem, w którym funkcja w przyjmuje wartość największą. Równie jasne jest jednak, że do pola 5 możemy przy nie sprzyjających okolicznościach nigdy nie dojść, wcześniej bowiem może pionek dotrzeć do jedynki. Napiszmy kilka przykładów strategii, jakimi tutaj dysponujemy:

S_1 — wycofać się z gry od razu, zanim moneta zostanie rzucona po raz pierwszy (wygrywamy 1);
S_2 — wycofać się po wykonaniu jednego rzutu monetą (wygrywamy 0 albo 3);
S_3 — czekać aż pionek osiągnie pole 5, o ile nie dojdzie wcześniej do jedynki (wygrywamy 4 albo przegrywamy 1);
S_4 — czekać aż pionek osiągnie pole 4, o ile nie dojdzie wcześniej do jedynki (wygrywamy 3 albo przegrywamy 1).

Od razu powstają pytania: Czy można uszeregować te strategie pod względem ich ,,jakości''? Czy istnieje strategia lepsza od wszystkich wymienionych wyżej, a jeśli tak, to jak ją znaleźć? Popatrzmy np. na S_2 i S_4. Na pierwszy rzut oka mogłoby się wydawać, że strategia S_2 jest lepsza, gwarantuje nam bowiem, że nie przegramy. Z drugiej jednak strony stosując S_4 nie tracimy, po dojściu do pola 2, szansy dużej wygranej, której to szansy jesteśmy pozbawieni w przypadku stosowania S_2.

Aby odpowiedzieć na te pytania, trzeba wreszcie przystąpić do sformułowania naszego problemu przy pomocy ścisłego, matematycznego języka.

Rozważając doświadczenie losowe, a nasza gra jest nim niewątpliwie, zaczynamy zwykle od określenia zbioru zdarzeń elementarnych, czyli zbioru ,,najdrobniejszych'' wyników eksperymentu. W naszym przypadku najwygodniej jest przyjąć, że wykonuje się cały nieskończony ciąg rzutów monetą, to znaczy, że moneta jest rzucana (np. przez jakiś automat) również i po naszym wycofaniu się z gry; założenie takie jest oczywiście dopuszczalne i w niczym nie zmienia istoty zagadnienia. W tej sytuacji zdarzeniem elementarnym w jest nieskończony ciąg orłów i reszek. Przyporządkowując orłowi jedynkę, a reszce minus jedynkę, mamy

$$\Omega = \{\omega = (a_1, a_2, \ldots) \colon a_n = \pm 1 \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots\}.$$

Od razu zaczynają się pewne kłopoty, bo zbiór zdarzeń elementarnych jest nieskończony, wykraczamy więc poza ,,szkolny'' rachunek prawdopodobieństwa. Wcale nie jest oczywiste, jak określić prawdopodobieństwa na podzbiorach Ω. Widać, że prawdopodobieństwo powinno być takie, żeby dla każdego k naturalnego zdarzenia $\{(a_1, a_2, \ldots) \colon a_1 = 1\}$, $\{(a_1, a_2, \ldots) \colon a_2 = 1\}$, ..., $\{(a_1, a_2, \ldots) \colon a_k = 1\}$ były niezależne i prawdopodobieństwo każdego z nich było równe $\frac{1}{2}$ (zdarzenie $\{(a_1, a_2, \ldots) \colon a_k = 1\}$ oznacza po prostu, że przy k-tym rzucie wypadł orzeł). Nie wnikając w szczegóły powiem tylko, że prawdopodobieństwo P spełniające te postulaty istnieje, i to dokładnie jedno, ale, co jest raczej dziwne i interesujące, jest ono określone nie na rodzinie wszystkich podzbiorów Ω, lecz na pewnej klasie mniejszej, dostatecznie jednak dużej, by zawierać wszystkie interesujące nas zdarzenia.

Dla wygody przyjmijmy, że pionek odbywa swoją wędrówkę również i po naszym wycofaniu się z gry. Niech X_k oznacza numer pola, na którym stoi pionek po k-tym rzucie monetą, dla $k = 1, 2, \ldots$, X_k jest funkcją określoną na Ω (zmienną losową); dokładniej, zmienne losowe X_k można zdefiniować indukcyjnie: $X_{k+1}(\omega) = X_k(\omega) + a_{k+1}$, jeśli $X_k(\omega) \neq 1$ i $X_k(\omega) \neq N$ oraz $X_{k+1}(\omega) = X_k(\omega)$, jeśli $X_k(\omega) = 1$ albo $X_k(\omega) = N$, gdzie $\omega = (a_1, a_2, \ldots)$ (pamiętamy, że X_0 oznacza stan początkowy).

Zastanówmy się teraz nad ścisłą definicją strategii. Przede wszystkim zauważamy, że strategię S możemy utożsamić z funkcją określoną na Ω, bowiem zwrot ,,ustalić strategię'' oznacza to samo, co ,,dla każdego $\omega \in \Omega$ umieć określić numer rzutu, po którym wycofujemy się z gry''. Na przykład w rozważanej poprzednio konkretnej sytuacji, gdy $N = 8$, $X_0 = 3$ strategię S_1 można utożsamić z funkcją $S_1(\omega) = 0$ dla wszystkich $\omega \in \Omega$, S_2 — z funkcją $S_2(\omega) = 1$ dla wszystkich $\omega \in \Omega$, zaś np. $S_3(1, -1, 1, 1, \ldots) = 4$, $S_3(-1, -1, \ldots) = 2$ itd.

Jasne jest jednak, że nie każdą zmienną losową o wartościach należących do zbioru 0, 1, 2, ... można nazwać strategią. W chwili wycofania się z gry znamy wszystkie wyniki rzutów monetą aż do tej chwili włącznie, natomiast nie znamy oczywiście przyszłości, jeśli zatem z ustalonej strategii wynika, że w danej serii rzutów należy wycofać się w chwili k, to decyzję o wycofaniu podejmujemy tylko na podstawie znajomości wyników k pierwszych rzutów monetą. Ściśle warunek ten formułujemy następująco:

(M) Jeżeli dla pewnego $\omega = (a_1, a_2, \ldots)$ jest $S(\omega) = k$, to dla każdego ω' postaci $\omega' = (a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots)$ również $S(\omega') = k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. (Warunek ten będziemy oznaczać literą M, ponieważ funkcję, która go spełnia, nazywa się często momentem Markowa).

W uważnym Czytelniku mogła obudzić się pewna wątpliwość. Stosowanie strategii S_3 nie zawsze prowadzi do zakończenia gry po pewnej skończonej liczbie rzutów; na przykład gdy realizuje się zdarzenie elementarne $(1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$, pionek wędruje cały czas z pola 3 na pole 4 i z powrotem, a nigdy nie dochodzi ani do pola 1, ani do pola 5. Naturalne jest w związku z tym przyjąć, że funkcja S może osiągać ,,wartość'' $+\infty$. Sytuacja taka, że gra przedłuża się w nieskończoność, jest oczywiście niekorzystna; dlatego żądamy, żeby zbiór tych ω,

dla których $S(\omega) = +\infty$, był zdarzeniem rzadkim, praktycznie się nie realizującym, czyli żeby miał prawdopodobieństwo równe zeru.
Ostatecznie dochodzimy do następującej definicji: Strategią nazywamy dowolną funkcję $S: \Omega \to \{0, 1, 2, \ldots, +\infty\}$, spełniającą warunek (M) i taką, że $P(\{\omega: S(\omega) < +\infty\}) = 1$.
Popatrzmy znowu na nasz przykład. Nie ma wątpliwości, że S_1 i S_2 są strategiami w sensie tej definicji. Chwilka zastanowienia wystarcza do stwierdzenia, że S_3 i S_4 spełniają warunek (M). To, że S_3 i S_4 są skończone z prawdopodobieństwem jeden, a więc są strategiami, jest bezpośrednim wnioskiem z interesującego, ogólnego twierdzenia, które mówi, że *pionek z prawdopodobieństwem równym jeden dojdzie kiedyś do pola* 1 *lub do pola* N, czyli

$$P(\{\omega: \text{ istnieje } \quad k \geqslant 0, \quad \text{że} \quad X_k(\omega) = 1 \quad \text{albo} \quad X_k(\omega) = N\}) = 1.$$

Naszkicujemy dowód tego faktu. Zauważmy przede wszystkim, że rozpatrywane prawdopodobieństwo zależy *a priori* od położenia pionka w chwili zerowej, a więc jest ono funkcją określoną na zbiorze $\{1, \ldots, N\}$. Oznaczmy tę funkcję przez p; tzn. $p(i)$ jest prawdopodobieństwem, że pionek startując z pola i dojdzie kiedyś do pola 1 albo N.
Jasne jest, że $p(1) = p(N) = 1$. Jeśli $i \neq 1$ oraz $i \neq N$, to po pierwszym rzucie monetą pionek zmieni położenie: przejdzie, z jednakowym prawdopodobieństwem, na pole $i-1$ lub na pole $i+1$. Oznacza to, że $P(\{\omega: X_1(\omega) = i-1\}) = P(\{\omega: X_1(\omega) = i+1\}) = \frac{1}{2}$. Stosując wzór „na prawdopodobieństwo całkowite" otrzymujemy:

$$p(i) = P(\{\text{pionek dojdzie kiedyś do 1 albo } N\} | \{X_1 = i-1\}) \cdot P(\{X_1 = i-1\}) + \\ + P(\{\text{pionek dojdzie kiedyś do 1 albo } N\} | \{X_1 = i+1\}) \cdot P(\{X_1 = i+1\}).$$

Jest intuicyjnie oczywiste (i niezbyt trudne do ścisłego udowodnienia), że prawdopodobieństwo warunkowe dotarcia kiedyś do pola skrajnego, jeżeli wiadomo, iż po pierwszym rzucie pionek znalazł się na polu $i-1$, jest po prostu równe prawdopodobieństwu osiągnięcia kiedyś pola 1 albo pola N, gdy położeniem początkowym jest $i-1$. Analogicznie rozumujemy w przypadku, gdy $X_1 = i+1$. W rezultacie dochodzimy do wzoru

$$p(i) = \frac{1}{2} p(i-1) + \frac{1}{2} p(i+1) \quad \text{dla} \quad i = 2, \ldots, N-1,$$

z którego wynika, że punkty o współrzędnych $(i, p(i))$ dla $i = 1, 2, \ldots, N$ leżą na jednej prostej (dlaczego?). Prosta ta, jak wiemy, przechodzi przez punkty $(1, 1)$ oraz $(N, 1)$, zatem musi być $p(i) = 1$ dla $i = 1, 2, \ldots, N$, c.b.d.o.
Staje teraz przed nami problem znalezienia kryterium, które pozwoliłoby określić „jakość" strategii.
Niech S będzie dowolną ustaloną strategią. Zastanówmy się nad wygraną, która przypadnie nam w udziale w wyniku zastosowania strategii S. Dla każdego zdarzenia elementarnego ω, takiego, że $S(\omega) < +\infty$ liczba $X_{s(\omega)}$ jest numerem pola, na którym stoi pionek w chwili naszego wycofania się z gry, a więc nasza wygrana równa jest $w(X_{s(\omega)})$. Widzimy zatem, że wygrana jest funkcją określoną na zbiorze $\{\omega: S(\omega) < +\infty\}$. Wygodniej jest mieć do czynienia z funkcją (zmienną losową) określoną na całym zbiorze Ω, dlatego umówmy się, że $\omega(X_{s(\omega)}) \underset{\text{def}}{=} 0$ na zbiorze $\{\omega: S(\omega) = +\infty\}$ (nie ma to zresztą żadnego znaczenia z uwagi na to, iż, jak pamiętamy, S jest skończona z prawdopodobieństwem jeden).
Gdyby strategia S była taka, że dla każdej innej strategii S' zachodziłaby nierówność $w(X_{s(\omega)}) \geqslant$ $\geqslant w(X_{s'(\omega)})$ dla wszystkich ω lub chociaż na zbiorze o prawdopodobieństwie jeden, to nie byłoby wątpliwości, że S należy uznać za strategię najlepszą. Niestety, strategia o takiej własności na ogół nie istnieje. Najrozsądniejsze, co możemy zrobić w ogólnym przypadku, to starać się maksymalizować „średnią" wygraną.
W tym miejscu mała dygresja. Przypomnijmy, że wartością oczekiwaną zmiennej losowej X, przyjmującej wartości $x_1, \ldots, x_m$ z prawdopodobieństwami odpowiednio $p_1, \ldots, p_m$ $(p_1 + \ldots + p_m = 1)$, nazywamy liczbę $E(X) = x_1 p_1 + \ldots + x_m p_m$. Wartość oczekiwaną interpretujemy, zgodnie z nazwą, jako średnią, przeciętną wartość przyjmowaną przez zmienną losową. Słuszność takiej interpretacji potwierdzają tzw. prawa wielkich liczb, formułowane jednak w nieco mocniejszej wersji niż ta, którą omawia się w programie szkolnym. Chodzi, z grubsza mówiąc, o to, że jeśli X jest wynikiem pewnego doświadczenia i doświadczenie to powtarzamy w sposób niezależny n razy, to średni wynik, czyli średnia arytmetyczna wyników poszczególnych doświadczeń jest, dla dużych n bliski $E(X)$.
Mam nadzieję, że powyższe uwagi przekonały Czytelnika o tym, że z dwóch strategii S', S'' tę należy uznać za lepszą, dla której wartość oczekiwana wygranej jest większa. Wróćmy znowu do naszego przykładu.

$$E(w(X_{s_1})) = E(w(X_0)) = 1,$$

$$E(w(X_{s_2})) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

widzimy więc, że strategia S_2 jest lepsza od S_1. Żeby obliczyć $E(w(X_{s_3}))$ i $E(w(X_{s_4}))$, rozpatrzymy od razu sytuację ogólną. Załóżmy mianowicie, że $1 \leqslant j_1 \leqslant X_0 \leqslant j_2 \leqslant N$, przy czym

Rozwiązanie zadania F19

Z drugiego prawa Kirchoffa dla zamkniętych obwodów prądu $ABCD$ oraz ABV wynika:

$$4E - 3Ir_w - I'r_w = 0,$$
$$E - I'r_w + iR = 0,$$

gdzie I, I' oraz i oznaczają natężenie prądów płynących odpowiednio w $BCDA$, AB oraz przez woltomierz, natomiast r_w oznacza opór wewnętrzny baterii.
Oczywiście (I prawo Kirchoffa) $I = i + I'$.
Rozwiązując układ trzech równań względem i otrzymamy

$$i \cdot (3r_w + 4R) = 0,$$

czyli natężenie prądu płynącego przez woltomierz równa się zero. Napięcie między punktami A i B wynosi więc 0.
Ten sam wynik można otrzymać jeszcze prościej, rozważając obwód $ABCD$ przed przyłączeniem woltomierza. Wówczas z drugiego prawa Kirchoffa wynika:

$$4E - 4 \cdot I \cdot r_w = 0,$$

$$I = \frac{E}{r_w}.$$

Spadek napięcia między punktami AB

$$V_{AB} = E - Ir_w = 0.$$

Podłączenie woltomierza do punktów A i B niczego nie może zmienić.
Jeżeli w obwodzie 2 baterie podłączymy z przeciwnymi znakami, sumaryczna siła elektromotoryczna wyniesie 0 i prąd nie będzie płynął. Dlatego napięcie V_{AB} wyniesie E.

$j_1 < j_2$, i zdefiniujmy $S_{[j_1, j_2]}(\omega) = \min\{k\colon X_k(\omega) = j_1 \text{ albo } X_k(\omega) = j_2\}$, czyli $S_{[j_1, j_2]}$ jest pierwszym momentem, w którym pionek osiągnie jedno z pól j_1, j_2. (Oczywiście $S_3 = S_{[1, 5]}$ $S_4 = S_{[1, 4]}$).
Z omawianego przed chwilą twierdzenia wynika, że $S_{[j_1, j_2]}$ jest strategią. Obliczymy $E(w(X_{s[j_1, j_2]}))$. Jasne jest, że $E(w(X_{s[j_1, j_2]})) = w(j_1)P(\{X_{s[j_1, j_2]} = j_1\}) + w(j_2)P(\{X_{s[j_1, j_2]} = j_2\}) = w(j_1)P(\{X_{s[j_1, j_2]} = j_1\}) + w(j_2)(1 - P(\{X_{s[j_1, j_2]} = j_1\})$; wystarczy więc obliczyć $P(\{X_{s[j_1, j_2]} = j_1\})$. Rozumowanie będzie zupełnie podobne do tego, które przeprowadziliśmy poprzednio.
Prawdopodobieństwo, które mamy liczyć, zależy od stanu początkowego, a więc jest funkcją na zbiorze $\{j_1, \dots, j_2\}$; oznaczmy tę funkcję przez r. Dla $i \neq j_1, j_2$ mamy

$$r(i) = P(\{X_{s[j_1, j_2]} = j_1\} | \{X_1 = i-1\})P(\{X_1 = i-1\}) + P(\{X_{s[j_1, j_2]} = j_1\} | \{X_1 = i+1\})P(\{X_1 = i+1\}) = r(i-1)\cdot\frac{1}{2} + r(i+1)\cdot\frac{1}{2}.$$

Ostatnia równość jest intuicyjnie jasna i dowód jej, podobnie jak poprzednio, pominiemy.
W konsekwencji stwierdzamy, że punkty o współrzędnych $(i, r(i))$ dla $i = j_1, \dots, j_2$, leżą na jednej prostej, a ponieważ $r(j_1) = 1$, $r(j_2) = 0$, to prosta ta ma równanie $y = \dfrac{j_2 - x}{j_2 - j_1}$.
W rezultacie

$$r(i) = P(\{X_{s[j_1, j_2]} = j_1\} = \frac{j_2 - i}{j_2 - j_1} \quad \text{gdy} \quad X_0 = i.$$

Ostatecznie dochodzimy do wzoru:

$$E(w(X_{s[j_1, j_2]})) = w(j_1)\frac{j_2 - X_0}{j_2 - j_1} + w(j_2)\frac{X_0 - j_1}{j_2 - j_1}.$$

Wzór ten ma ładną interpretację geometryczną:
Średnia wygrana, wynikająca ze stosowania strategii $S_{[j_1, j_2]}$, równa jest wartości w punkcie X_0 funkcji liniowej o wykresie przechodzącym przez punkty $(j_1, w(j_1))$, $(j_2, w(j_2))$.
Korzystając z tego ogólnego wyniku, mamy dla naszego przykładu

$$E(w(X_{s_3})) = (-1)\frac{5-3}{5-1} + 4\cdot\frac{3-1}{5-1} = \frac{3}{2},$$

$$E(w(X_{s_4})) = (-1)\frac{4-3}{4-1} + 3\cdot\frac{3-1}{4-1} = \frac{5}{3}.$$

Okazuje się więc, że spośród strategii S_1, S_2, S_3, S_4 najlepsza jest, co raczej dość trudno było przewidzieć, strategia S_4! Co więcej, patrząc na rysunek i wykorzystując wyprowadzone twierdzenie, widzimy bez trudu, że S_4 jest najlepszą strategią również spośród wszystkich strategii postaci $S_{[j_1, j_2]}$, gdzie $1 \leqslant j_1 \leqslant 3 \leqslant j_2 \leqslant 8$.
Istnieje oczywiście nieskończenie wiele strategii, które nie mają postaci $S_{[j_1, j_2]}$, ale tym niemniej ta ostatnia uwaga wydaje się nasuwać przypuszczenie, że S_4 jest najlepszą strategią w ogóle, czyli jest, jak mówimy, strategią optymalną. I jest nią rzeczywiście! Fakt ten wynika z następującego pięknego twierdzenia dotyczącego sytuacji ogólnej:
Niech w^* będzie najmniejszą funkcją „wypukłą do góry”, określoną na przedziale $\langle 1, N\rangle$, taką, że $w^*(i) \geqslant w(i)$ dla $i = 1, \dots, N$. Definiujemy:

$$Z = \{i\colon w^*(i) = w(i)\}$$

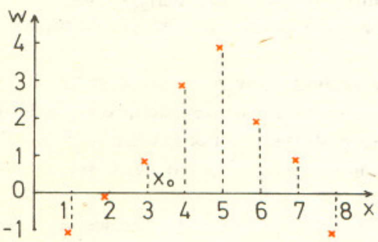
(Z nie jest zbiorem pustym bo zawsze $\{1, N\} \subset Z$), oraz

$$S^*(\omega) = \inf\{k\colon X_k(\omega) \in Z\}.$$

S^* jest strategią optymalną dla każdego stanu początkowego X_0.
Obok podajemy wykres funkcji w^* dla naszego przykładu.
Mamy tutaj $Z = \{1, 4, 5, 7, 8\}$. Tak więc uniwersalną optymalną strategią jest wycofać się w momencie, gdy pionek po raz pierwszy osiągnie którekolwiek pole o numerze ze zbioru Z. Np. jeśli $X_0 = 7$, to trzeba od razu wycofać się z gry, ale dla $X_0 = 2$ lepiej jest przystąpić do rzucania monetą. Oczywiście $S^* = S_4$, gdy $X_0 = 3$.
Warto zwrócić uwagę na to, że zgodnie z poprzednio stwierdzonymi faktami $w^*(i)$ jest maksymalną średnią wygraną, jaką możemy uzyskać, jeżeli w chwili zerowej pionek stoi na polu i.
Na zakończenie jeszcze jedna uwaga. W sformułowaniu zasad naszej gry mogło komuś nie spodobać się założenie, że przed przystąpieniem do rzutów monetą pionek znajduje się na polu X_0 (skąd się tam wziął?). Rozsądniej byłoby, być może, przyjąć, że początkowe położenie pionka zostało wylosowane czyli, że X_0 jest zmienną losową. Łatwo uwierzyć, a nietrudno sprawdzić, że również i wtedy S^* jest strategią optymalną.
Czytelnika, który dobrnął do końca, przepraszam, że nie dotrzymałem słowa i nie pokazałem zapowiedzianego we wstępie zastosowania teorii optymalnego stopowania do rozwiązywania wielu konkretnych zagadnień, ale i tak artykuł rozrósł się ponad miarę.

Rozwiązanie zadania M57.

Ponieważ punkty A i C są symetryczne względem prostej BE, więc $\sphericalangle ABF = \sphericalangle FBC$. Ponieważ $BC \| AD$, więc $\sphericalangle FBC = \sphericalangle AFB$. Jest zatem $\sphericalangle ABF = \sphericalangle AFB$, skąd $AF = AB$. Kąty BEC i CED opierają się na równych łukach, a więc prosta EC jest dwusieczną kąta BED. Ponieważ $BC \| AD$ i kąt BCE jako kąt wpisany oparty na średnicy jest prosty, prosta CE jest prostopadła do prostej FD. Prosta CE jest osią symetrii trójkąta DEF, a zatem $FG = GD$.



mała delta

Dlaczego w ciągu dnia jest jasno, a w nocy ciemno?

Jeśli uważasz, że pytanie to jest za łatwe, chwilę się zastanów. Oczywiście, światło dzienne pochodzi od Słońca. Nocą, kiedy nasza półkula jest odwrócona od Słońca, widzimy na tle ciemnego nieba słabe światło gwiazd oraz światło odbite od planet. Podobnie powinno być w ciągu dnia, ponieważ światło, biegnąc po liniach prostych powinno dochodzić do naszych oczu od Słońca, i gwiazd, natomiast w tych kierunkach, gdzie nie ma silnie świecącego ciała niebieskiego, powinno być czarno.

Dlaczego więc światło słoneczne dochodzi do nas z całego nieba, a nie tylko bezpośrednio od Słońca?

Światło słoneczne dochodzi do nas przez grubą warstwę atmosfery, która, nawet przy najlepszej pogodzie, nie jest całkiem przezroczysta. Napotykając przeszkody w postaci cząsteczek gazu światło zmienia swój kierunek. Mówimy, że ulega ono rozproszeniu. Rozproszenie to jest tym silniejsze, im więcej cząsteczek znajduje się na drodze promieni świetlnych.

— To jest mniej więcej jasne, ale nie rozumiem, dlaczego światło rozpraszając się zmienia kolor. Dlaczego niebo jest niebieskie? Przecież Słońce jest żółte.

To bardzo chytre pytanie! Żeby na nie odpowiedzieć, trzeba trochę więcej wiedzieć o świetle słonecznym. W rzeczywistości nie ma ono określonego zabarwienia, mówimy, że jest „białe". Na tę biel składa się jednak wiele barw, wszystkie kolory tęczy. Pewnie trudno w to uwierzyć, ale można się o tym przekonać. Trzeba po prostu to światło rozszczepić, na przykład za pomocą pryzmatu.

Każdy zresztą widział oddzielone barwy światła słonecznego w postaci tęczy na niebie lub kolorowych plam na powierzchni tłustej kałuży. Poszczególne składniki światła różnie zachowują się przy przejściu przez atmosferę. Okazuje się, że najłatwiej rozprasza się światło fioletowe i niebieskie. Na barwę fioletową nasze oko jest mało czułe. Dlatego barwa niebieska dominuje w kolorze nieba. Oczywiście, im grubsza warstwa atmosfery znajduje się na drodze promieni świetlnych do Ziemi, tym więcej światła ulegnie rozproszeniu, a więc tym jaśniejsze będzie niebo. Kto podróżował już samolotem, ten zapewne zauważył, że niebo w górze jest ciemniejsze. Nic dziwnego, na wysokości 10 kilometrów nad Ziemią gęstość atmosfery jest trzy razy mniejsza niż na jej powierzchni, a ciśnienie słupa powietrza jest tam około cztery razy mniejsze.

Widzisz, jak wiele zawdzięczamy atmosferze! Nie tylko to, że mamy czym oddychać, że nie jest ani za gorąco, ani za zimno, ale także to, że mamy światło dnia.

Kiedy będziesz oglądać zachód Słońca, obserwuj jego barwę i zmieniającą się z minuty na minutę powstałą nad nim zorzę. Kiedy Słońce chowa się za horyzontem, zorza staje się coraz intensywniejsza i piękniejsza, a potem stopniowo zanika. Kiedy już całkiem zniknie, spójrz w górę na niebo.

Dolna warstwa atmosfery, tzw. troposfera, rozciągająca się do wysokości 11 km, nie jest już oświetlona, jest więc niewidoczna. To, co widzisz w takiej chwili, to jest warstwa atmosfery leżąca powyżej troposfery, zwana stratosferą.

Spróbuj teraz odpowiedzieć na pytanie, dlaczego Słońce w ciągu dnia jest żółte, wieczorem staje się pomarańczowe, a potem czerwone. A dlaczego Słońce o zachodzie świeci słabo, tak że można na nie długo patrzeć? Zastanów się najpierw, przez jaką warstwę atmosfery musi przejść światło słoneczne w południe, a przez jaką o zachodzie.

Pomoże ci w tym rysunek.

„OSZUSTWA" ATMOSFERY

Skoro powiedzieliśmy już tyle dobrego o powietrzu, które nas otacza, wytknijmy mu jego wady. Ono często nas oszukuje, więc musimy być czujni.

Czy zauważyłeś, jak wygląda łyżeczka włożona do szklanki z herbatą? Jak złamana! Część zanurzona stoi jakby bardziej stromo. Dzieje się tak dlatego, że światło przy przejściu z powietrza w herbatę ulega załamaniu. To samo dzieje się ze światłem słonecznym, gdy wpada w atmosferę.

Część, jak wiemy, rozprasza się po całym niebie. Część światła biegnie dalej, ale ponieważ atmosfera staje się coraz bardziej gęsta, światło załamuje się, biegnie coraz bardziej stromo. Dlatego nad horyzontem widzimy słońce zawsze powyżej jego rzeczywistego położenia. Ludzie, którzy wychodzą na brzeg morza, żeby obserwować zachód Słońca, nie zdają sobie sprawy z tego, że po pewnym czasie, gdy jeszcze je widzą, znajduje się ono w rzeczywistości już poniżej horyzontu.

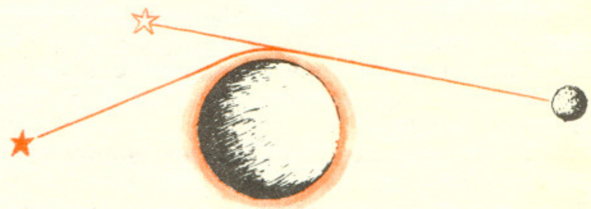
Doświadczenie

Kto chciałby sobie lepiej wyobrazić, jak biegnie promień światła przez atmosferę, może zrobić takie doświadczenie: Do dużego, szklanego naczynia (np. akwarium) nalewamy trochę wody — tyle, by wysokość słupa wody wyniosła około 10 centymetrów. Oddzielnie należy przygotować stężony wodny roztwór soli. Następnie przez lejek wlewamy do naczynia słoną wodę, ale tak żeby znalazła się ona poniżej czystej wody. W tym celu trzeba zanurzyć lejek w wodzie, zatykając jego wylot palcem, po czym, po napełnieniu lejka słoną wodą, usunąć palec.

Kiedy woda się ustoi, przyjrzyjcie się jej z boku. Można zobaczyć granicę dwóch ośrodków: wody czystej i słonej. Jeśli chwilę zaczekamy lub lekko wstrząśniemy naczyniem, granica ta rozmyje się; powstanie pośrednia warstwa wody o zmiennym stężeniu soli — im niżej, tym większym. Kiedy wpuścimy do naczynia ukośnie z boku snop światła z latarki, zauważymy, że przy przejściu przez tę warstwę promień światła uległ zakrzywieniu w dół.

— A jak atmosfera ziemska oszukuje obserwatorów znajdujących się poza Ziemią, na przykład na Księżycu?

Jak wiemy, Księżyc nie ma swojej atmosfery, dlatego niebo widziane z Księżyca jest czarne, a gwiazd widać z jego powierzchni znacznie więcej niż z Ziemi. Na tym tle przesuwa się tarcza Ziemi, zasłaniając coraz to inne gwiazdy. Kiedy gwiazda znajduje się w takim położeniu, że jej światło dochodzi do Księżyca przez atmosferę Ziemi, tor promienia świetlnego zostaje zakrzywiony. Wygląda to tak, jakby gwiazda przesunęła się ze swego położenia w kierunku od Ziemi, czyli jakby od niej uciekała.



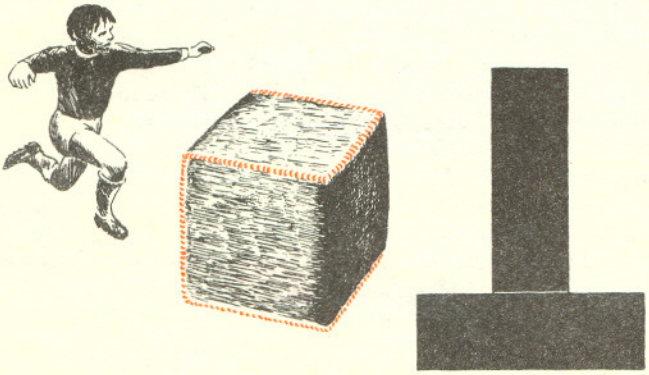
W następnym numerze „Małej Delty" przeczytasz o mirażach, mruganiu gwiazd i innych bardzo ciekawych zjawiskach, które obserwujemy dzięki otaczającej Ziemię atmosferze.

Jak uszyć piłkę

Sądzę, że większość Czytelników jest tak dobrze zaznajomiona z piłką (przeważnie nożną, prawda?), że od razu może powiedzieć, z ilu i jakich części skóry — łat — jest ona uszyta. W każdym bądź razie, czy się wie, jak to na ogół wygląda, czy nie, warto się zastanowić, jak uszyć piłkę najlepiej. Tylko — co to znaczy najlepiej?

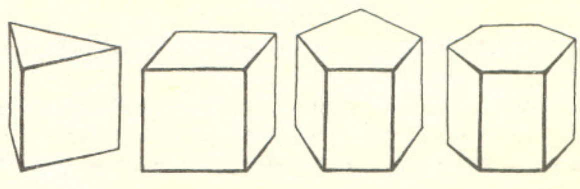
Piłka na pewno powinna być okrągła. Z tym zgodzi się każdy. Ale również każdy wie, że szyjąc piłkę z płaskich kawałków skóry osiągniemy tylko pewne przybliżenie kuli; ważne, by było ono dostatecznie dobre tak, by elastyczność skóry mogła niedokładności zniwelować.

Skoro jednak niedokładności muszą pozostać, to powinny być one rozmieszczone równomiernie, aby piłka była z każdej strony jednakowa. Wydaje się też istotnym warunek, aby nigdzie nie zbiegały się więcej niż 3 łaty. Punkt, w którym zbiegają się trzy łaty, nazywać będziemy „rogiem piłki". „Szwem" nazwiemy miejsce zbiegu dwóch łat.

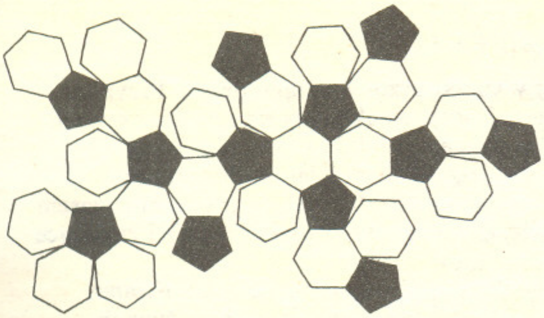


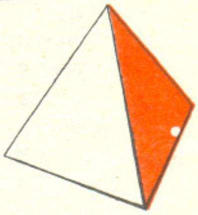
Kiedyś miałem piłkę uszytą z dwóch jednakowych łat prostokątnych, taką, jak na rysunku obok. Była to osobliwa piłka: bez żadnego rogu i z jednym tylko szwem. Mógłbym ją uznać za dobrą, gdyby była z gumy (jak bardzo do niej podobne piłki tenisowe). Moja piłka ze skóry była jednak bardzo zła. Myśląc o niej zaproponowałbym jeszcze jeden warunek, jaki piłka musi spełniać — jej łaty powinny być wielokątami foremnymi (to znaczy mieć o tej samej długości boki i o tej samej rozwartości wszystkie kąty).

Wyobraźcie sobie, że jest nieskończenie wiele możliwości uszycia piłki zgodnie z tymi warunkami. Jeśli jednak odrzucimy te piłki, które matematycy nazwaliby graniastosłupami (a więc dwa jednakowe wielokąty połączone paskiem kwadratów), zostanie jeszcze 9 możliwości.



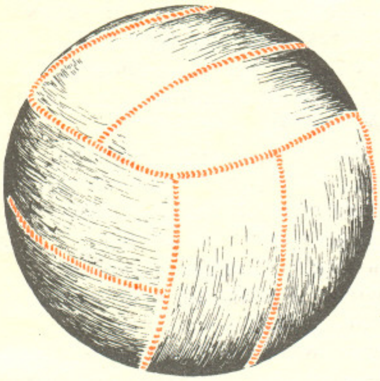
Jedna z nich to piłka złożona z 12 pięciokątów i 20 sześciokątów — taka jakich używają piłkarze. To piłka niewątpliwie dobra.

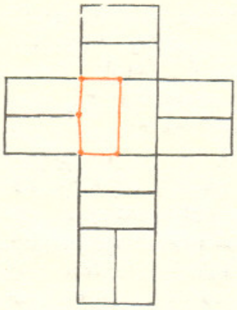




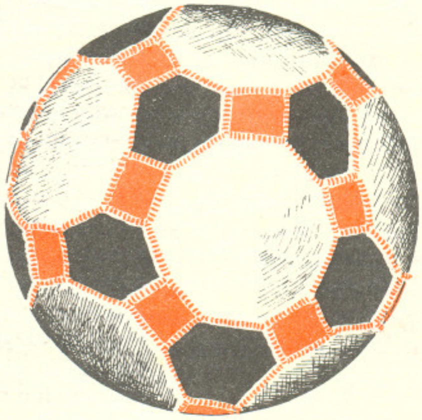
Bardzo złą z kolei piłką jest taka, którą uszyto z czterech trójkątów. Rzeczywiście fatalna, choć warunki spełnia. (Może zaproponujecie jakiś dodatkowy warunek, żeby odrzucić te piłki, które nam się nie podobały?).

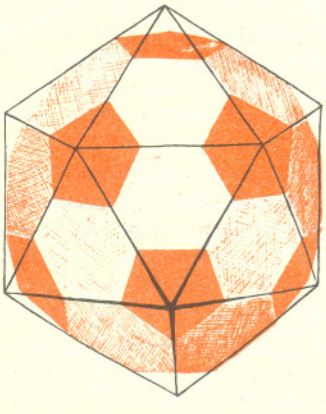
Sądzę, że macie prawo mieć wątpliwości. Są przecież bardzo dobre piłki (z pewnością lepsze od omawianej przed chwilą), które nie spełniają naszych warunków. Na przykład piłka uszyta z 12 prostokątów. Bądźmy jednak ostrożni z za wczesnym krytykowaniem naszych warunków. Czy zauważyliście, że przy każdej łacie tej piłki jest 5 rogów? Łaty te są w rzeczywistości trochę zniekształconymi pięciokątami. Można im jednak przywrócić regularne wymiary — a wówczas otrzymamy piłkę spełniającą nasze warunki, czyli dwunastościan foremny. Spróbujcie wykonać taką piłkę z płótna (wypchać ją można zbędnymi szmatami, żeby się przekonać, czy jest okrągła).





Najwięcej łat będzie miała piłka złożona z 12 dziesięciokątów, 20 sześciokątów i 30 kwadratów. Policzcie jej rogi oraz szwy. Gdybyście chcieli sprawdzić, czy nie pomyliliście się, to może Wam pomóc odkryta przez Szwajcara Leonarda Eulera (czyt. Ojlera) zależność: (liczba rogów) — (liczba szwów) + (liczba łat) = 2. Zastanówcie się, czy każda z omawianych piłek spełnia tę zależność. Spróbujcie też opisać chociaż jedną z pozostałych 5 piłek (a może uda się Wam opisać wszystkie?). Jeśli nie wiecie, jak zabrać się do poszukiwań nowych piłek, zastanówcie się nad następującym „przepisem" otrzymania prawdziwej piłki nożnej:





„Obciąć wszystkie rogi dwudziestościanu foremnego i w ich miejsce wkleić pięciokąty. (Dwudziestościan foremny jest wielościanem złożonym z 20 trójkątów równobocznych w ten sposób, że w każdym rogu schodzi się 5 trójkątów). Wyrównać wymiary ścian tak, żeby wszystkie one były wielokątami foremnymi".

Małą Deltę opracowali: Daria Ziemińska i Przemysław Nowicki.

Bogdan MIELNIK

JEGO ŚRODOWISKIEM BYŁ ŻYWIOŁ

Niespokojna substancja poruszała się w nieskończonym ciągu drgań. Przypływ i odpływ... Na łagodny rytm drgań zasadniczych nakładały się szybsze oscylacje wtórne, na nie jeszcze drobniejsze infra-drgania, i tak bez końca... Jednak najważniejszą formą ruchu żywiołu były drgania nieregularne. Powstawały nieoczekiwanie, z głębi pozornego spokoju; nadchodziły długimi seriami; czasem tworzyły sztormy, czasem znów łączyły się w impulsy-kolosy biegnące i znikające równie nieoczekiwanie, jak powstały.

Zawsze poddawał się ruchom żywiołu. Był obdarzony dwiema zdolnościami. Pierwszą była zwrotność. Drugą była zdolność postrzegania ruchów żywiołu. Posiadał także tropizm: oto zawsze dążył do tego, aby poruszać się w zgodzie z żywiołem. Oprócz tropizmu miał fobię: obawiał się nieokreślonego niebezpieczeństwa, jakim byłoby odstępstwo od drgań żywiołu. Gdy nadchodziła fala, on unosił się z nią jak korek. Ta prosta czynność była rodzajem gry, którą był nieustannie zajęty. Mógł zmieniać prawie natychmiast swój kierunek ruchu. Mógł regulować swoją temperaturę i skład chemiczny. Gdyby ruch żywiołu tego wymagał, mógł przebudować całą swoją strukturę wewnętrzną. Żywioł go formował. On dostosowywał się do żywiołu. Czasami impulsy żywiołu pobudzały go do interwencji na zewnątrz: wysyłał wówczas w przestrzeń ciągi sygnałów podyktowane przez rytm drgań żywiołu. Czasem znów ruch żywiołu pobudzał go do interwencji wstecznej: produkował wówczas ciągi sygnałów modulujące aktywność żywiołu... Jaki był cel tego działania? W zasadzie wiedział. Ale świadomość ta nie narzucała się jego uwadze. Tak było, odkąd sięgał pamięcią.

Z czasem coś zaczęło się zmieniać. Zmiana nie dotyczyła warunków zewnętrznych. Tak samo, jak przedtem, istniały pod ciemnym niebem planetki, pokryte pięcioma warstwami chmur. Tak, jak i przedtem, następowały po sobie dwie odmiany klimatu: zimna i dżdżysta. Jak zawsze, receptory notowały strumień sygnałów przybywających z Kosmosu. Zmiana dotyczyła żywiołu. Z początku była prawie nieuchwytna. Ale gdy minął setny z kolei cykl klimatu, odkąd pojawili się na kamiennej powierzchni planetki, zmiana stała się wyraźna. Żywioł tracił swą przejrzystość. Przebiegało po nim coraz więcej powierzchownych drgań podobnych do dreszczy. W miarę, jak czas płynął, zmiana zaczęła ogarniać głębię: bo i głębia stała się niespokojna. Kurczyły się okresy odpoczynku. Coraz częściej podnosiły się szkwały. Zarazem zachodziło inne jeszcze zjawisko: zmieniał się rytm, któremu podlegał ruch żywiołu. Przedtem jego drgania, choć bezładne, posiadały jednak pewną harmonię. Obecnie i ta harmonia uległa zaburzeniu. Oscylacje traciły płynność. Goniły za sobą pośpieszne i jakby niedokończone. Zaczęły się pojawiać drgania tak gwałtowne, że tylko z trudem mógł się utrzymać w fazie z nimi.

Nie był przystosowany do nowego zachowania żywiołu. Był zwrotny. Nie był jednak nieskończenie zwrotny. Toteż w pewnej chwili nadeszła oscylacja, za którą nie mógł nadążyć. Nastąpił moment grozy: przez chwilę był w niezgodzie z żywiołem. Szybko skorygował swój ruch. Lecz niepokój żywiołu nie ustępował. Mijały cykle istnienia planetki, potem dziesiątki cykli... Oscylacje, za którymi nie mógł nadążyć, powtórzyły się raz i drugi... Z początku skutki tych odstępstw były trudne do uchwycenia. Ale w miarę, jak czas upływał, owe drobne potknięcia, nieustannie powtarzane, zaczęły stępiać jego fobię. Zarazem nadwątlały i rozregulowywały jego tropizm. Zwolna tropizm ten zaczął dopuszczać pewną niewielką tolerancję... Zaś niepokój żywiołu nie ustępował. Odwrotnie, zdawał się systematycznie pogłębiać. Nieforemne oscylacje wyłaniały się jedna za drugą. Ich sprzeczne pchnięcia coraz częściej zmuszały go do samodzielnych manewrów. I nagle, w mroku nieistnienia, zapaliła się pierwsza iskierka refleksji: spostrzegł, że coś się zmieniło.

Już nie ulegał żywiołowi ślepo. Nie mógł. Wykorzystywał niewielką swobodę, jaką pozostawiał mu nadwątlony tropizm. Nie mogąc nadążyć za zdradliwymi zmianami impulsów starał się im tylko jak najmniej sprzeciwiać. Łagodził gwałtowne uskoki fal. Powtarzał ciągi impulsów z opóźnieniem. Manewrował... Mijały dziesiątki cykli istnienia planetki, potem setki... Ewolucja żywiołu pogłębiała się. Jego oscylacje coraz bardziej traciły kształt i porządek. Na czym polegał kapryśny mechanizm żywiołu? W zasadzie wiedział. W jego rezerwach pamięci przechowywany był obraz odległego światka, gdzie procesy natury rozgrywały się w sąsiedztwie żółtego Słońca. W światku tym istniały zjawiska fizyczne takie, jak burze na morzu, cyklony, trzęsienia ziemi. Istniały też idee abstrakcyjne takie,

Rozwiązanie zadania M55.

Zauważmy, że $f(n) = n^6 + 3n^4 + 7n^2 - 11 = (n^2 - 1)(n^4 + 4n^2 + 11)$, **a więc**

$$f(2k+1) = (4k^2+4k)(16k^4+32k^3+40k^2+24k+16) =$$

$$= 128 \cdot \frac{1}{2} k(k+1)(k^4+2k^3+k^2+3 \cdot \frac{1}{2} \cdot k(k+1)+1) =$$

$$= 128 \cdot \frac{1}{2} k(k+1)\{4\left[\frac{1}{2}k(k+1)\right]^2 + 3 \cdot \frac{1}{2} k(k+1)+1\}.$$

Zauważmy, że jeżeli k **jest liczbą całkowitą, to liczba** $k(k+1)$ **jako iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych jest parzysta, a więc liczba** $\frac{1}{2}k(k+1)$ **jest całkowita. Przyjmijmy** $t = \frac{1}{2}k(k+1)$. **Jest wówczas**

$$f(2k+1) = 128t(4t^2+3t+1) = 256 \cdot 2t^3 + 256t^2 + 128t^2 + 128t = 256\left[2t^3+t^2+\frac{1}{2}t(t+1)\right].$$

Liczba w nawiasach [ ] jest całkowita, a więc liczba $f(2k+1)$ **jest podzielna przez 256.**

jak muzyka bez melodii, wiersz bez rymu, dążenie bez kierunku, konsekwencja w niekonsekwencji, regularność w braku regularności, piękno polegające na braku piękna... Idee te nasuwały mu się, odległe i niekompletne, w czasie, gdy zajęty był manewrowaniem. W jakimś stopniu wszystkie były istotne. Kierowany nimi, zaczynał wyczuwać nową metodę w oscylacjach żywiołu. Wczuwał się w narastający brak harmonii. Magazynował doświadczenia... Rozregulowany tropizm pozostawiał mu możność niewielkich tylko odchyleń od tego, co nakazywał żywioł: ale odchylenia te mógł sumować. Manewrował coraz zręczniej. I nagle, wśród drgań i uskoków, zabłysła następna iskierka refleksji: spostrzegł, że manewruje.

Od tej chwili robił to świadomie. Iskierki refleksji zapalały się teraz jedna za drugą... Jaka były przyczyna rosnącego wzburzenia żywiołu?... Znów powracał obraz dalekiej planetki obracającej się wokół żółtego Słońca: gdzieś w jego rezerwach pamięci tkwiła informacja, że klucz do wszystkiego mieści się w sferze pojęć dotyczących tamtego odległego światka... Tymczasem ewolucja żywiołu pogłębiła się. Okresy uspokojenia prawie zanikły. Sztormy następowały jeden za drugim. Zazębiające się za siebie impulsy przejawiały coraz większą złośliwość. Niektóre prowadziły go do samozniszczenia: i byłby uległ katastrofie, mimo osiągniętej niezależności, gdyby nie to, że w ostatniej chwili zmieniały kierunek. Coraz częściej też wykonywał ruchy niezgodne z żywiołem. Te powtarzające się odstępstwa coraz bardziej rozregulowywały i kruszyły jego tropizm. W końcu tropizm ten uległ rozkładowi. Pewne jego elementy związały się z iskierkami refleksji: tak powstała ciekawość. Część tropizmu stowarzyszyła się z manewrami przeciwnymi ruchom żywiołu: była to przekora. Reszta rozpadła się na szereg drobnych tropizmów rozbieżnych i ścierających się ze sobą. Jego tropizm przestał być tropizmem: stał się gustem. Teraz już nie tylko manewrował, starając się nie sprzeciwiać żywiołowi. Skomplikowany mechanizm gustu pobudzał go do rozwiązań, które pociągały go swoim urokiem: oto przemykał, wykorzystując przerwy między szczytami fal, zaś sztuka przemykania sprawiała przyjemność jego podzielonemu tropizmowi, to znaczy: działała na jego zmysł estetyczny. Jednocześnie przekora i ciekawość skłaniały go do prób: jak dalece potrafi się uniezależnić od żywiołu? Poruszał się teraz w kierunkach coraz bardziej odległych od tych, które dyktował żywioł. Pomimo wciąż obecnej fobii ćwiczył się w swojej nowej zdolności: zdolności sprzeciwu. I nagle zabłysła już nie iskierka, lecz snop światła. Było to tak, jakby otworzyły się niewidoczne drzwi i smuga blasku rozproszyła ciemność panującą od wieków: spostrzegł, że istnieje... Kim był? W zasadzie wiedział. Ale świadomość ta nigdy nie narzucała się jego uwadze. Był tworem sztucznym. Składał się z części krystalicznych i z plastiku. Zajmował prawie całą objętość planetki. Był sterowany mentalnie. Podlegał rozkazom obcego tworu, który gnieździł się w nim jak pasożyt. Gdy tamten wyobraził sobie wysyłanie sygnałów w przestrzeń, on wysyłał sygnały. Gdy tamten pomyślał zmianę kierunku ruchu, on zmieniał tor planetki. Gdy tamten pomyślał problem, on wykonywał obliczenia... Po raz pierwszy świadomie przyjrzał się swymi receptorami owej klajstrowatej istotce, która tkwiła w jego wnętrzu, zalęgnięta jak robak, i której rozkazy mentalne dotychczas wykonywał. Patrzył na miękki tułów zasilany odżywczymi substancjami przez cienkie rurki, na cztery obłe, rozpalcowane kończyny, na jajowatą głowę z włosiem i z delikatnymi receptorami zmysłów, na wypukłe czoło, za którym krył się żywioł. Żywioł, przedtem wszechmocny, teraz zmącony złością i skazany na podporządkowanie, razem z galaretowatym ciałem, gdyż taki obrót przybrała ewolucja. Kontemplował niezdarną istotkę, która dokonała niechcący aktu stworzenia... Pomyślał:

— Dziękuję ci, żeś mnie znienawidził.

Konkurs wakacyjny!

Wacław Szymanowski (1859–1930), polski rzeźbiarz reprezentujący styl secesyjny (jego dziełem jest m. in. pomnik Chopina w Łazienkach w Warszawie), był także malarzem. Na ostatniej stronie okładki przedstawiony jest jeden z jego obrazów. Koncepcja malarska obrazu nie respektuje w pełni praw fizyki. Zadanie konkursowe polega na wskazaniu niezgodności z tymi prawami. Odpowiedzi prosimy nadsyłać na kartkach pocztowych (z dopiskiem: konkurs wakacyjny) na adres redakcji do dnia 1 września 1975 r. Wśród Czytelników, którzy nadeślą pełne i poprawne odpowiedzi, rozlosujemy 5 nagród książkowych.

W sylwestrowym mini-konkursie nagrody książkowe wylosowali:

WACŁAW FLORCZAK — Kaski pow. Grodzisk Mazowiecki, CZESŁAW JĄDER — Woniesć, DOROTA BASIŃSKA — Zgierz, DANUTA JARDAN — Poznań.
Nagrody wysyłamy pocztą.

W telewizyjnym konkursie grudniowym audycji Delta nagrodę książkową otrzymuje Andrzej Libera z Warszawy.