

SPIS TREŚCI

Nowa synteza w fizyce <i>Prof. dr Grzegorz Białkowski</i>	str. 1
Równania różniczkowe (II) <i>Dr Henryk Kolakowski</i>	str. 4
Nowa cząstka <i>Doc. dr Tomasz Hofmokr</i>	str. 6
Mała «Delta»	str. 9
Geometria, prawdopodobieństwo i udana randka <i>Dr Ryszard Zieliński</i>	str. 12
Zadania	str. 13
Laboratorium w domu <i>Dr Jan A. Gaj</i>	str. 14
Jak to zrobić lepiej <i>Mgr Andrzej Domański</i>	str. 16

„Delta”
 matematyczno-fizyczny miesięcznik
 popularny
 Polskiego Towarzystwa
 Matematycznego i Polskiego
 Towarzystwa Fizycznego
 wydawany przy poparciu
 Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny
 prof. dr G. Białkowski
 doc. dr A. Blikle
 prof. dr A. Hrynkiewicz
 doc. dr B. Iwaszkiewicz
 prof. dr J. Janik
 doc. dr J. Jatzczak
 prof. dr Leon Jeśmanowicz —
 przewodniczący
 prof. dr Z. Krygowska
 prof. dr K. Leibler
 mgr W. Łuczniak
 mgr A. Mąkowski
 prof. dr A. Pelczyński
 prof. dr Arkadiusz Piekara —
 wiceprzewodniczący
 prof. dr J. Rayski
 prof. dr A. Schinzel

prof. dr Z. Semadeni
 prof. dr M. Subotowicz
 dr A. Wakulicz
 doc. dr W. Zawadowski

Redaguje Kolegium w składzie:
 T. Deskur — red. techn. graf.
 doc. dr T. Hofmokr — z-ca red. nac.
 mgr T. B. Iwiński
 dr M. Kordos — red. nac.
 doc. dr M. Święcki
 D. Tys — sekr. red.

Adres Redakcji
 ul. Śniadeckich 8,
 00-656 Warszawa, PTM

Zakład Narodowy im.
 Ossolińskich — Wydawnictwo.
 Wrocław, Oddział w Warszawie
 Nakład 30000 egz. Objętość 2 ark.
 wyd.; 2,50 ark. druk.;
 papier offsetowy III kl., 80 g, 61 × 86
 Wydrukowano w Drukarni im.
 Rewolucji Październikowej,
 Warszawa, ul. Mińska 65.
 Nr zam. 336/75 B-58

Wydano z pomocą finansową Polskiej Akademii Nauk

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60,— cena prenumeraty półrocznej
 zł 30,—

Institucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły — mające siedzibę w miastach wojewódzkich
 i powiatowych, zamawiać mogą prenumeratę wyłącznie za pośrednictwem miejscowych oddziałów
 i delegatur RSW-Prasa-Książka-Ruch w terminie do dnia 25 listopada na rok następny.

Institucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły — mające siedzibę na wsi lub miejscowościach,
 w których nie ma oddziałów RSW-Prasa-Książka-Ruch, winny opłacać prenumeratę w terenowo
 właściwych urzędach pocztowych.

Prenumeratę krajową dla czytelników indywidualnych przyjmują urzędy pocztowe, listonosze i Centrala
 Kolportażu RSW-Prasa-Książka-Ruch, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, konto PKO 1-6-100020
 w terminie do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 40% droższa od prenumeraty krajowej,
 przyjmuje Biuro Kolportażu Wydawnictw Zagranicznych RSW-Prasa-Książka-Ruch, 00-840 Warszawa,
 ul. Wronia 23, konto PKO nr 1-6-100024.

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Institucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać
 „DELTE”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.
 Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, pojedynczych numerów i w kontynuacji; płatność gotówką, przelewem
 lub za zaliczeniem pocztowym.

Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, konto PKO nr 1-6-100312

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Cena 1 egzemplarza zł 5,—

nr indeksu 35723/35550

Nasza okładka: Drgania, fot.
 Michał Hanasz (patrz str. 14)
 Apollo (patrz str. 10)

W następnym numerze:

Automatyczny matematyk
 Stoliki wirujące

Prof. dr Grzegorz BIAŁKOWSKI

Bez przerwy, niemal codziennie, fizycy — jak zresztą także przedstawiciele innych nauk przyrodniczych — odkrywają nowe fakty, wykonują nowe doświadczenia, ustalają nowe zależności. Niektóre z tych odkryć stanowią „tylko” potwierdzenie pewnych ogólnych przewidywań teoretycznych, inne nie mają wprawdzie żadnej podbudowy teoretycznej, ale jakoś tam zgadzają się z naszą intuicją; są jednak także i takie, które spadają na nas zupełnie nieoczekiwanie, które do niczego nie pasują i w żadnym schemacie się nie mieszczą. W innym artykule zamieszczonym w tym numerze «Deltę» jest mowa o odkryciu nowej cząstki, a właściwie nowych cząstek elementarnych, oraz o sensacji, którą to odkrycie wzbudziło w świecie fizyków. Właściwie dlaczego? — mógłby ktoś zapytać. W końcu jest to tylko jedna czy dwie cząstki więcej. Ma ona co prawda pewne niezwykle właściwości, a mianowicie wyjątkowo długi czas życia (inne cząstki o tej samej masie żyją około 10 000 razy krócej), ale ostatecznie nie wiadomo, czy warto robić z tego powodu tyle szumu. Nikt wprawdzie dobrze nie wie, co za tym odkryciem się chowa, warto jednak zdać sobie sprawę, że być może jesteśmy świadkami pewnego radykalnego przełomu w fizyce, o rozmiarach, które obecnie trudno ocenić, ale zapewne takiego „raz na kilkadziesiąt lat”.

Mówiłem przed chwilą, że nowych faktów przybywa nam ciągle bardzo wiele. Gdybyśmy chcieli fakty te opanować pamięciowo w oderwaniu jeden od drugiego, to oczywiście w ciągu całego życia zdołalibyśmy zapoznać się tylko z bardzo drobną ich częścią. Celem i sensem istnienia nauki takiej jak fizyka jest uwolnienie nas od pojedynczych faktów przez zastąpienie ich pewną koncepcją porządkującą. Mówiąc krótko — przez ich zrozumienie w pewien jednolity sposób. Ucząc się dziś o prawie ciężenia powszechnego zapominamy o tym, że kiedyś wcale nie było oczywiste, iż ruch Ziemi wokół Słońca i spadanie jabłek z drzewa podporządkowane są tej samej regularności. Przeciwnie, przez setki lat sądzono, że prawa fizyki „ziemskiej” i „kosmicznej” są zupełnie inne. Dopiero w czasach odrodzenia, dzięki odkryciom Kopernika, Keplera, Newtona, połączono te dwa rodzaje zjawisk w ramach klasycznej teorii grawitacji. Dzięki temu zamiast pamiętać o każdym spadającym jabłku i o każdej komecie wystarczy z westchnieniem ulgi przypomnieć sobie prawo Newtona.

Weźmy inny przykład. Rozważmy szereg oderwanych (pozornie) faktów. Pocierany bursztyn przyciąga skrawki papieru. W pewnych warunkach na niebie pojawia się tęcza. Igła kompasu stale wskazuje kierunek ku północy. Przedmioty nieprzezroczyste rzucają cień. Udka żabie umieszczone tak, że pozostają w kontakcie z pewnymi metalami, zaczynają drgać. Od uderzenia pioruna można się zabezpieczyć budując odpowiedni piorunochron. I tak dalej, i tak dalej. Przedstawione tu w skrócie obserwacje były znane (czasem już od wielu wieków) na przełomie XVIII i XIX stulecia. Dziś dobrze wiemy, że stanowiły one punkt wyjścia rozwoju współczesnej teorii elektromagnetyzmu, streszczającej się obecnie w kilku równaniach Maxwella. Droga ku tym równaniom była jednak bardzo trudna.

Początkowo rozwijały się prawie niezależnie takie działy fizyki, jak elektrostatyka (oparta na prawie Coulomba), magnetostatyka, fizyka prądów stałych czy też optyka. Wkrótce stwierdzono, że prąd elektryczny polega na przepływie ładunku elektrycznego, tego samego, który pojawia się w prawie Coulomba, a także ustalono, że prąd ten działa pewną siłą na igłę magnetyczną. Następnie genialna obserwacja Faradaya wykazała, że w przyrodzie zachodzi też zjawisko poniekąd odwrotne, a mianowicie, że zmienne pole magnetyczne wywołuje przepływ prądu elektrycznego w przewodniku. Stwierdzono tym samym, że zmienne w czasie pole magnetyczne powoduje powstanie pewnego pola elektrycznego, które jest potrzebne do popchnięcia elektronów w przewodniku. Już wtedy musiało być jasne dla wielu fizyków, że jakaś synteza teorii elektryczności i magnetyzmu wisi w powietrzu. Trzeba się jednak było zdobyć na pewien decydujący krok. Otóż przed Maxwellem nie znano prawa, które by w analogiczny sposób wiązało

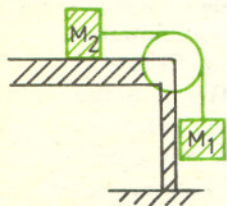




Rozwiązanie zadania F19.

Zadanie rozwiązujemy na 2 sposoby. Pierwsza metoda jest następująca:

A) Rozważany problem jest analogiczny do znanego większości z Was zadania z dwoma ciężarkami połączonymi nieważką i nierozciągliwą nicią, ślizgającą się po nieważkim bloczku (patrz rys. 2).



Rys. 2

Przyspieszenie układu pokazanego na rys. 2 nie zależy od długości nici ani od kształtu zwisającej części liny oznaczmy przez z i uwzględnimy, że masa liny jest wprost proporcjonalna do jej długości, przyspieszenie wynosi:

$$a = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2}$$

gdzie g jest przyspieszeniem ziemskim.

Podobnie, w zadaniu z liną, jeżeli długość zwisającej części liny oznaczmy przez z i uwzględnimy, że masa liny jest wprost proporcjonalna do jej długości, przyspieszenie wynosi

$$(1) \quad a = \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{gz}{l}$$

Powyższe równanie określa ruch zwisającego końca liny. Rozwiązanie tego równania, przy przyjętych przez nas warunkach początkowych, jest postaci:

$$(2) \quad z = \frac{l_0}{2} (e^{\sqrt{g/l} t} + e^{-\sqrt{g/l} t}) = l_0 \cosh(\sqrt{g/l} t),$$

gdzie e jest podstawą logarytmu naturalnego,

a funkcja $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ nazywa się kosinusem hiperbolicznym.

Powyższa metoda nie określa, w jakim przedziale wartości zmiennej z otrzymane rozwiązanie jest fizycznie słuszne. Dlatego przytoczymy inną metodę rozwiązania, która polega na badaniu ruchu środka naszej liny.

B) Wektor wyznaczający położenie środka masy \vec{r}_s spełnia równanie:

$$(3) \quad M \vec{r}_s = \sum \Delta m_i \vec{r}_i$$

gdzie Δm_i i \vec{r}_i oznaczają masy i wektory położenia poszczególnych części liny. Oczywiście $M = \sum_i \Delta m_i$. Niech w danej chwili czasu t , część liny o długości x znajduje się na poziomym stole, a pozostała część o długości z (jak poprzednio), zwisa pionowo ze stołu.

d.c. na str. 3

zmienne w czasie pole elektryczne z powstaniem jakiegoś indukowanego pola magnetycznego. Ten brak symetrii między polem elektrycznym i magnetycznym był nie tylko przeszkodą w unifikacji obu typów oddziaływań — elektrycznych i magnetycznych — ale też był niewątpliwie czymś brzydkim. Maxwell zażądał, aby równanie Faradaya uzupełnić innym równaniem, które w analogicznym sposób łączyłoby pole elektryczne z magnetycznym. Trudno wnikać w mechanizm psychologiczny tego odkrycia, ale można przypuszczać, iż jakąś rolę odegrało tu pragnienie, aby piękno przyrody odpowiadało także piękno opisujących je równań. Oczywiście, jak każda, nawet najpiękniejsza teoria, tak i teoria Maxwella musiała być poddana sprawdzeniu eksperymentalnemu. Na szczęście — chciałoby się powiedzieć — test ten wypadł dla niej pomyślnie. Jedną z konsekwencji teorii Maxwella było istnienie fal elektromagnetycznych wykrytych wkrótce przez Herta. Pozwoliło to na włączenie całej optyki do teorii Maxwella. Tęcza i żabie udk! Związek jedyny w swoim rodzaju (jeśli nie liczyć tego, że i żaby, i tęczę często spotyka się po deszczu).

Od żabich udek do nowej cząstki elementarnej droga jest jeszcze dłuższa. Znowu trzeba streścić w kilkunastu zdaniach kilkadziesiąt lat rozwoju fizyki. Zacznę od przypomnienia, że na przełomie XIX i XX wieku wykryto foton, jak wiemy — kwant oddziaływania elektromagnetycznego. Stwierdzono, że cząstka ta ma masę spoczynkową równą zero, nie ma ładunku elektrycznego, a spin jej wynosi jeden. Współczesny obraz oddziaływania elektromagnetycznego w wielkim uproszczeniu polega na tym, że wyobrażamy sobie to oddziaływanie jako nieustanną wymianę fotonów między cząstkami naładowanymi wchodzącymi w skład badanego układu fizycznego (np. atomu wodoru).

Badania nad cząstkami elementarnymi i ich zespołami, np. jądrami atomowymi, doprowadziły do wniosku, że prócz oddziaływań elektromagnetycznych cząstki te biorą udział także w innych rodzajach oddziaływań, zwanych silnymi i słabymi (oddziaływania grawitacyjne odgrywają tu znacznie mniejszą rolę). Oddziaływania silne „odpowiedzialne” są przede wszystkim za wiązanie się neutronów i protonów w jądra atomowe, a więc — za istnienie tzw. sił jądrowych. Kierując się analogią z fotonem, Yukawa zażądał, aby także siły jądrowe miały swój kwant, swój „foton”. Kwant ten, zwany przez Yukawę mezonem, musiał jednak mieć takie własności, które by tłumaczyły krótki zasięg sił jądrowych (jest on, jak wiadomo, rzędu 10^{-15} m). Okazało się, że zasięg sił jest tym krótszy, im większa jest masa spoczynkowa kwantu tych sił. Podstawowy kwant oddziaływań silnych, mezon π , ma masę około 140 MeV, spin równy jeden i może występować w odmianach naładowanych (dodatniej i ujemnej) oraz nienaładowanej. Pod każdym niemal względem różni się on od fotonu, a jednak spełnia w przyrodzie analogiczną rolę. Doświadczenie potwierdziło genialne przypuszczenie Yukawy i między innymi pozwoliło wyznaczyć masy mezonu π (i innych mezonów). Yukawa na podstawie rozważań teoretycznych był w stanie podać tę masę jedynie w grubym przybliżeniu.

Co zaś dotyczy oddziaływań słabych, to nasza wiedza o nich opiera się do dziś prawie wyłącznie na badaniu powodowanych przez nie procesów rozpadu cząstek. Najdawniej i najlepiej znanym takim procesem jest bez wątpienia rozpad β neutronu, który stanowi podstawowy mechanizm promieniotwórczości β .

Oddziaływania słabe zawsze przysparzały teoretykom wielu zmartwień. Najpierw okazało się, że w rozpadzie β pozornie nie zachowują się ani energia, ani pęd, ani moment pędu. Na szczęście okazało się, że prawa te zachowują swoją wartość, pod warunkiem, że założy się istnienie co najmniej jednej cząstki o masie spoczynkowej równej zero, nienaładowanej i o spinie połówkowym. Cząstkę taką nazywa się neutrino. Istnienie takiej cząstki zostało potwierdzone doświadczalnie w r. 1953. Po kilku latach natrafiono jednak na dalsze trudności — okazało się mianowicie, że w czasie rozpadu β nie zachowuje się parzystość. Jest to fakt zdumiewający i jego odkrywcy otrzymali jedną z najbardziej zasłużonych w historii fizyki nagród Nobla. Fakt ten znaczy bowiem ni mniej ni więcej tylko tyle, że opis zjawisk fizycznych (związanych z oddziaływaniami słabymi) może zależeć od tego, czy dokonujemy go w lewo- czy też w prawoskrętnym układzie odniesienia. Przez jakiś czas sądzono, że symetria obu typów układów da się utrzymać, jeżeli jednocześnie zmieni się wszystkie cząstki na ich antycząstki. Ale i to okazało się nieprawdziwe; był to wynik zupełnie nieoczekiwany i nie przewidziany przez żadną wcześniejszą teorię.

Pomimo tych wszystkich komplikacji powstała pewna teoria oddziaływań słabych,

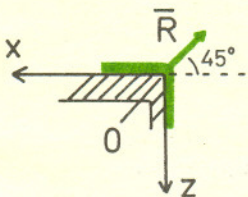
Zachodzi związek $x+z = l$. Wówczas współrzędne środka masy liny w układzie współrzędnych pokazanym na rys. 1 wynoszą odpowiednio:

$$(4) \quad x_s = \frac{1}{2l} x^2, \quad z_s = \frac{1}{2l} z^2$$

Silami zewnętrznymi działającymi na linę są:

— ciężar zwisającej części liny: $P = Mg \frac{z}{l}$

— siła \vec{R} reakcji stołu przyłożona w punkcie 0, skierowana pod kątem 45° (dlaczego?) do poziomu (patrz rys. 3).



Rys. 3

Ciężar części liny znajdującej się na stole jest równoważony przez reakcję stołu.

Równania ruchu środka masy w kierunku x i z są następujące:

$$(5) \quad M \frac{d^2 x_s}{dt^2} = -R \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$M \frac{d^2 z_s}{dt^2} = Mg \frac{z}{l} - R \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Odejmując powyższe równania stronami, oraz uwzględniając równania (4) i zależność $x = l - z$, łatwo otrzymamy ponownie równanie (1).

Równania (5) umożliwiają dyskusję stosowności otrzymanego rozwiązania. Mianowicie aby linia przylegała do stołu, siła reakcji stołu musi być skierowana tak jak pokazano na rys. 3, czyli wartość R występująca w równaniu (5) musi być dodatnia. Rozwiązując równanie (5) względem R otrzymamy:

$$(6) \quad R \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{Mg}{l^2} (l_0^2 + lz - 2z^2)$$

R równa się zero, gdy $z = z_1 = \frac{l + \sqrt{l^2 + 8l_0^2}}{4}$.

Dla $z < z_1$ wartość R jest dodatnia.

Rozwiązanie zadania, dane równaniem (2), jest słuszne jedynie dla $z \leq z_1 (z_1 \leq l)$. Następnie linia oddziela się od krawędzi stołu i przyjmuje inny kształt niż przedstawiono na rysunkach 1 i 3. Pierwsze z równan (5) dla $R = 0$, tj. dla $z = z_1$, wskazuje, że pęd liny w kierunku x ,

wynoszący $M \frac{dx_s}{dt}$, osiąga maksimum. Ponieważ

jednak stół nie jest w stanie dostarczyć ujemnej reakcji R , zatem od tej chwili składowa pozioma pędu nie ulega zmianie, a więc pozostała pozioma część liny a wraz z nią również dalsze jej części muszą wybiec poza krawędź stołu. Czytelnikom pozostawiamy sprawdzenie, czy otrzymane przez nas rozwiązanie (równ. (2)) spełnia zasadę zachowania energii.

Dla dociekliwych na str. 5 zamieszczamy jeszcze jedno rozwiązanie zadania. Tym razem do podanej metody rozwiązywania zakradł się błąd.

która dobrze zdawała sprawę z danych doświadczalnych. Miała ona jednak pewną niepokojącą cechę, a mianowicie tę, że oddziaływania słabe w ramach tej teorii nie były przenoszone przez żaden „foton” czy też „mezon”, tak jakby zachodziły one przy zetknięciu się dwu cząstek o spinie połówkowym (np. elektronu i neutrina), a więc tak, jakby zasięg „słabych sił” był nieskończenie mały. Pomijając już to, że fakt ten psuje nam zaobserwowaną w przyrodzie regularność (wszystkie inne oddziaływania przenoszone są przez pewne kwanty pola sił), powoduje on poważne trudności teoretyczne, których tu nie mogę bliżej przedstawić. Trudności te nie mają wprawdzie żadnych konsekwencji praktycznych dziś, przy badanych obecnie wartościach energii cząstek, ale w przyszłości musiałyby z konieczności doprowadzać do zawalenia się całego formalizmu.

Naturalną drogą wyjścia z tej sytuacji było założenie, iż także oddziaływania słabe mają swój kwant, tyle że bardzo ciężki (oszacowania jego masy wahają się od kilku do kilkudziesięciu GeV), a więc dający siły o bardzo małym zasięgu. Cząstka ta (oznaczana zwykle literą W) zwana bozonem pośrednim miałaby, podobnie jak foton, spin 1, ale występowałaby w stanach o ładunku $+e$ i $-e$. Niezależnie od tej hipotezy bozonu pośredniego ustalono w wyniku wcześniejszych badań, że oddziaływania słabe, podobnie jak oddziaływania elektromagnetyczne, mają charakter uniwersalny, to znaczy, że ich siła scharakteryzowana jest przez swojego rodzaju „słaby ładunek”, którego wartość jest taka sama dla wszystkich cząstek, podobnie jak wartość ładunku elektrycznego.

Zarysowały się więc pierwsze przesłanki nowej syntezy — oddziaływań elektromagnetycznych i słabych. Sprawa ta była przedmiotem niesłychanie intensywnego wysiłku teoretycznego w ciągu kilku ostatnich lat. Nawet krótki opis przebytej drogi nie jest możliwy w ramach tego artykułu. Podam tylko niektóre wyniki.

Okazało się przede wszystkim, że taka unifikacja jest rzeczywiście możliwa, ale wymaga wprowadzenia pewnych nowych cząstek (oprócz bozonu W^+ i W^-). W jednej wersji teorii taką nową cząstką miałyby być nowy, także bardzo ciężki bozon nie naładowany (oznaczany zwykle Z^0). W innych wersjach takimi nowymi cząstkami miałyby być bardzo ciężkie leptony (a więc cząstki własnościami swymi zbliżone do elektronów i mionów). Oczywiście można też podać mniej ekonomiczne, a więc i mniej ładne wersje, w których jest i bozon Z^0 , i ciężkie leptony, a może i inne jeszcze cząstki. Przeprowadzone w ciągu ostatnich dwu lat badania doświadczalne wykazały niezbicie, że jeżeli w ogóle hipoteza bozonu pośredniego jest poprawna, to musi obok bozonu W istnieć także bozon Z^0 . Jest to samo w sobie poważnym argumentem przemawiającym za ideą unifikacji obu rodzajów oddziaływań. Niestety, przy obecnych energiach możemy jeszcze nie być w stanie wykryć bezpośrednio bozonów W i Z^0 , jeśli rzeczywiście mają one masę kilkudziesięciu GeV.

Na tym jednak nie koniec. Okazało się, że budowa takiej jednolitej teorii jest możliwa wtedy, gdy założy się istnienie w przyrodzie zupełnie nowej liczby kwantowej, którą po angielsku nazywa się *charm*, a co można by spolszczyć jako „powab” (czar, wdzięk). W naturalny sposób taką liczbę kwantową można wprowadzić postulując istnienie czwartego kwarku. W dotychczasowych rozważaniach teoretycznych pojawiały się trzy kwarki — dwa z nich tworzyłyby taką samą parę, jak proton i neutron, a trzeci pozostawałby do nich w takim stosunku, jak hiperon Λ do p i n . Czwarty kwark w teorii (!), podczas gdy w doświadczeniu nie ma dotychczas ani jednego! Może to przesada? Gdy się jednak założy istnienie takiego nowego kwarku, wynikają z tego określone konsekwencje, a między innymi musimy dojść do wniosku, że istnieje w przyrodzie nowa rodzina hadronów (mezonów i barionów), które dotąd umykały naszej uwadze. Bardzo niepewne oszacowania mas najbliższych spośród tych cząstek dawały wynik około 3–4 GeV. Jednocześnie można było przypuszczać, że właśnie te najbliższe nowe mezony będą miały stosunkowo duże czasy życia. No i chyba są? Może to właśnie te nowo odkryte cząstki ψ czy też J ? Wszyscy wiedzieliśmy, że przyroda jest piękna, ale żeby była aż tak powabna?

Jeśli ta interpretacja nowo odkrytej cząstki potwierdzi się, to nie tylko zdobędziemy nowy (choć wciąż pośredni) argument na korzyść jednolitej teorii oddziaływań elektromagnetycznych i słabych, ale także otworzą się przed nami perspektywy włączenia we wspólny schemat także oddziaływań silnych. Wiadomo przecież, że wszystkie cząstki silnie oddziałujące zbudowane są z kwarków (taki pogląd dziś zdecydowanie przeważa wśród fizyków). Przypuśćmy, że mamy czwarty kwark jako podstawową cząstkę oddziaływań silnych. Ale przecież mamy też tylko cztery leptony (elektron, mion i dwa neutrina). Coś tu dzwoni, prawda?

Równania różniczkowe (II)

Dr Henryk KOŁAKOWSKI

Twierdzenie o jednoznaczności rozwiązania zagadnienia (1)–(2) orzeka, że jeśli w ogóle takie rozwiązanie istnieje, to tylko jedno.

Twierdzenie o istnieniu orzeka, że istnieje co najmniej jedno rozwiązanie — bez precyzowania, ile jest rozwiązań.

W poprzednim artykule («Delta», 1974, 10) poznaliśmy kilka faktów związanych z teorią równań różniczkowych zwyczajnych. Obecnie przyjrzymy się bliżej niektórym wymienionym tam problemom. Rozważania nasze będą dotyczyły twierdzeń o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania równania

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

spełniającego warunek początkowy

$$(2) \quad y(x_0) = y_0,$$

gdzie f jest funkcją określoną w prostokącie $\Omega = \{(x, y): |x - x_0| < a, |y - y_0| < b\}$.

Zanim przejdziemy do ogólnych sformułowań, omówimy kilka przykładów. **P r z y k ł a d 1.** Rozwiązać równanie

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = y^2$$

z warunkiem początkowym

$$(4) \quad y(0) = 1.$$

gdzie Ω jest zbiorem $\{(x, y): |x| < 5, |y - 1| < 4\}$.

Stosując metodę podaną w poprzednim artykule o równaniach różniczkowych dochodzimy do wniosku, że rozwiązaniem równania (3) jest każda funkcja postaci

$$y = -\frac{1}{x - c}, \quad c = \text{const},$$

oraz funkcja $y \equiv 0$.

Warunek (4) spełnia tylko funkcja

$$y = -\frac{1}{x - 1},$$

rozpatrywana dla $-5 < x < 1$.

Rys. 1. przedstawia szkic krzywych całkowych równania (3). Kolorem zaznaczono rozwiązanie zagadnienia (3)–(4). W przykładzie tym prawa strona równania (3) tzn. funkcja $f(x, y) = y^2$ określona jest na całej płaszczyźnie, a więc i w całym prostokącie Ω . Mimo to rozwiązanie zagadnienia (3)–(4) jest określone jedynie dla $-5 < x < 1$.

P r z y k ł a d 2. Rozwiązać równanie

$$(5) \quad \frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}$$

z warunkiem początkowym

$$(6) \quad y(0) = 0.$$

gdzie $\Omega = \{(x, y): x \text{ — dowolny, } y \geq 0\}$.

Ponieważ prawa strona (5) jest nieujemna, więc rozwiązanie musi być funkcją niemalejącą, zatem rozwiązaniem zagadnienia (5)–(6) jest każda funkcja postaci

$$y = \begin{cases} (x - c)^2 & \text{dla } x > c, \quad 0 \leq c = \text{const}, \\ 0 & \text{dla } x \leq c, \quad c \geq 0 \end{cases}$$

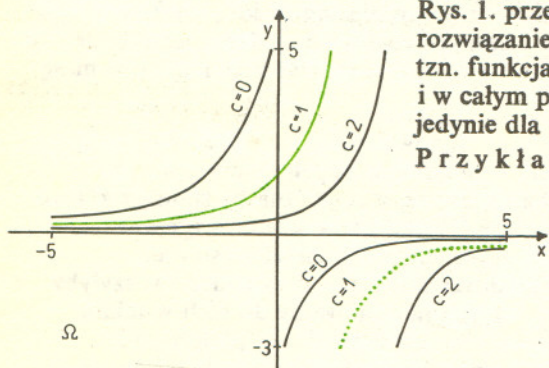
oraz funkcja $y \equiv 0$.

Każda z tych funkcji jest określona i różniczkowalna na całej prostej. Rys. 2 przedstawia szkic krzywych całkowych równania (5). Kolorem zaznaczono rozwiązanie zagadnienia (5)–(6). Zatem, jeśli prawa strona równania (1) jest nawet wielomianem, a więc funkcją określoną na całej płaszczyźnie (P r z y k ł a d 1), to rozwiązanie konkretnego zagadnienia nie musi być określone na całej prostej. Jeśli funkcja $f(x, y)$ zależy tylko od zmiennej y i jako funkcja jednej zmiennej jest funkcją ciągłą (P r z y k ł a d 2), to konkretne zagadnienie może mieć nieskończenie wiele rozwiązań.

Zanim sformułujemy podstawowe twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia (1)–(2), podamy kilka niezbędnych definicji pojęć związanych z funkcjami dwu zmiennych.

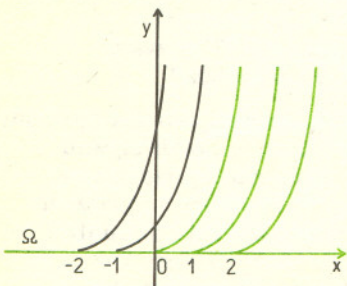
Z założenia (por. «Delta», 1974, 10) rozwiązaniem zagadnienia (1)–(2) ma być funkcja określona na pewnym przedziale. Z tego względu „dolna”

część wykresu funkcji $y = -\frac{1}{x-1}$ nie należy do rozwiązania.



Rys. 1

Warto sprawdzić, że funkcja ta rzeczywiście ma pochodną w punkcie „sklejania” $x = c$. Jak to zrobić?



Rys. 2

Rozważamy niezależnie ruch części liny leżącej na stole ora z zwisającej. Ale, uwaga, masa każdej z części zmienia się w czasie. Coraz więcej liny zwisa, a coraz mniej leży na stole. Napiszmy zasadę zachowania pędu dla danej części liny. Zmiana pędu Δp , w przedziale czasu $\langle t, t + \Delta t \rangle$ wynosi:

$$(7) \Delta p = F \Delta t + \Delta m \cdot v_m, \text{ gdzie}$$

F jest zewnętrzną siłą działającą, a $\Delta m \cdot v_m$ pędem przynoszonym (wynoszonym) przez przyrastającą (ubywającą) masę Δm .

W naszym zadaniu przybywające masy nie mają składowej prędkości w kierunku ruchu rozważanej części liny, (np. zwisająca część liny porusza się wzdłuż osi z , a przybywająca masa poruszała się wzdłuż osi x). Dlatego, drugi składnik w równaniu (7) możemy pominąć. Odpowiednie równania ruchu dla pionowej i poziomej części liny mają postać:

$$(8) \frac{d}{dt} \left(M \frac{x}{l} v_x \right) = -T$$

$$\frac{d}{dt} \left(M \frac{z}{l} v_z \right) = M \frac{z}{l} g - T$$

gdzie T jest naprężeniem liny, a v_x i v_z oznaczają prędkości środków masy odpowiednich części liny. Oczywiście:

$$v_x = \frac{1}{2} \frac{dx}{dt}, \quad v_z = \frac{1}{2} \frac{dz}{dt}.$$

Odejmując równania (8) stronami i wykorzystując zależność $x = l - z$ otrzymamy:

$$(9) \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{2g}{l} z$$

Równanie (9) różni się od równania (1), dającego poprawne rozwiązanie zadania o czynnik 2 po prawej stronie. Gdzie zakradł się błąd do przytoczonego rozumowania. Odpowiedź na str. 16.

Z twierdzenia Cauchy'ego–Picarda i z P r z y k ł a d u 2 wynika, że $f(x, y) = \sqrt{y}$ ($y \geq 0$) nie spełnia warunku Lipschitza!



Rozwiązanie zadania M 53.

Zauważmy, że zachodzi tożsamość

$$a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \dots + ab^{k-2} + b^{k-1}).$$

$$\begin{aligned} \text{Mamy } 27^{n+1} - 27 - 26n &= 27(27^n - 1) - 26n = \\ &= 27(27-1)(27^{n-1} + 27^{n-2} + \dots + 27 + 1) - 26n = \\ &= 26[27^n + 27^{n-1} + \dots + 27 - n] = 26[(27^n - 1) + \\ &+ (27^{n-1} - 1) + \dots + (27 - 1)]. \end{aligned}$$

Liczba w nawiasie prostokątnym jako suma liczb podzielnych przez 26 jest podzielna przez 26.

Wynika stąd, że liczba $27^{n+1} - 27 - 26n$ jest podzielna przez $26^2 = 2^2 \cdot 169$, a więc i przez 169.

Niech $f(x, y)$ będzie funkcją określoną w prostokącie Ω . Niech dalej $P_n = (x_n, y_n)$, $n = 1, 2, \dots$, oznacza dowolny ciąg punktów prostokąta Ω ; niech $P = (x, y) \in \Omega$. Zamiast $f(x, y)$ możemy więc pisać: $f(P)$. Przez $\rho(P_n, P)$ będziemy rozumieli odległość punktu P_n od punktu P .

DEFINICJA 1. Ciąg P_n jest zbieżny do punktu P , jeśli ciąg liczbowy $\rho(P_n, P)$ jest zbieżny do zera.

DEFINICJA 2. Funkcja $f(x, y)$ jest ciągła w danym punkcie P , jeśli dla każdego ciągu P_n zbieżnego do P ciąg liczbowy $f(P_n)$ jest zbieżny do $f(P)$.

DEFINICJA 3. Funkcja $f(x, y)$ jest ciągła w Ω , jeśli jest ciągła w każdym punkcie $P \in \Omega$.

Funkcjami ciągłymi w Ω są m.in. funkcje postaci

$$f_1(x)g_1(y) + f_2(x)g_2(y) + \dots + f_k(x)g_k(y),$$

gdzie f_i, g_i , $i = 1, 2, \dots, k$, są funkcjami ciągłymi jednej zmiennej.

DEFINICJA 4. Funkcja $f(x, y)$ spełnia w Ω warunek Lipschitza ze względu na zmienną y , jeśli istnieje stała L taka, że dla każdej pary punktów $(x, y_1), (x, y_2)$

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|.$$

Przykładem funkcji spełniającej ten warunek może być np.

$$f(x, y) = \sin(x + y)$$

dla Ω będącego całą płaszczyzną. Istotnie

$$\begin{aligned} |\sin(x + y_1) - \sin(x + y_2)| &= 2 \left| \sin \frac{y_1 - y_2}{2} \cos \frac{2x + y_1 + y_2}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{y_1 - y_2}{2} \right| \leq \\ &\leq 1 \cdot |y_1 - y_2|. \end{aligned}$$

Liczba L równa jest tutaj jedności.

W roku 1890 włoski matematyk Józef Peano udowodnił, że jeśli funkcja $f(x, y)$ jest ciągła w prostokącie Ω , to istnieje co najmniej jedno rozwiązanie $y = y(x)$ zagadnienia (1)–(2), określone w pewnym otoczeniu punktu x_0 .

Twierdzeniem, które gwarantuje istnienie i jednoznaczność rozwiązania zagadnienia (1)–(2), jest np. twierdzenie Cauchy'ego–Picarda. W założeniach tego twierdzenia oprócz warunku ciągłości funkcji $f(x, y)$ występuje warunek Lipschitza.

P r z y k ł a d 3. Rozwiążmy równanie

$$(7) \frac{di}{dt} + i = \sin t.$$

z warunkiem początkowym

$$(8) i(0) = 0.$$

(Zagadnienie tego typu wykorzystuje się do analizy obwodów elektrycznych).

Twierdzenie Cauchy'ego–Picarda gwarantuje nam istnienie i jednoznaczność rozwiązania zagadnienia (7)–(8), ponieważ prawa strona równania (7) spełnia założenia tego twierdzenia. Wynika stąd przede wszystkim, że warto w ogóle szukać rozwiązania naszego zagadnienia. Co więcej — wiemy już, że istnieje dokładnie jedno rozwiązanie. Gdyby więc udało nam się je w jakiś sposób odgadnąć, to będziemy mieli pewność, że zagadnienie zostało w pełni rozwiązane.

Przy pewnej wprawie i odrobinie szczęścia daje się odgadnąć, że rozwiązaniem zagadnienia (7)–(8) jest funkcja

$$i(t) = \frac{1}{2} (e^{-t} + \sin t - \cos t).$$

Jednym z pożytków płynących z twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności jest więc to, że dzięki niemu zgadywanie staje się całkiem porządną metodą rozwiązywania równań różniczkowych.

Doc. dr Tomasz HOFMOKL

To była prawdziwa sensacja. Pod koniec listopada nadeszła telefonicznie wiadomość o niezależnym odkryciu przez dwa zespoły fizyków amerykańskich nowej cząstki o masie 3105 MeV i o czasie życia o kilka rzędów dłuższym niż czas życia rezonansów o porównywalnej masie. Istnienia takiej cząstki nikt nie oczekiwał. Do dziś są kłopoty z wyjaśnieniem jej właściwości. O znaczeniu tego odkrycia dla fizyki pisze prof. Grzegorz Białkowski na stronie 1. Nasza opowieść dotyczy przebiegu doświadczenia i historii odkrycia.

Czasy życia cząstek są bardzo różne (patrz «Delta», 1974, 12); niektóre z nich, zwane rezonansami, żyją średnio 10^{-24} s. Cząstki te przy osiągalnych obecnie energiach rozpadają się w tak bliskiej odległości punktu produkcji, że nie można rejestrować ich śladu w żadnym znanym detektorze. O ich istnieniu wnioskujemy na podstawie dwóch typów eksperymentów.

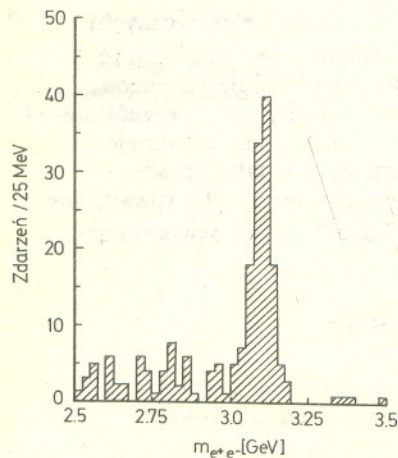
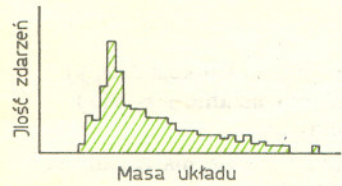
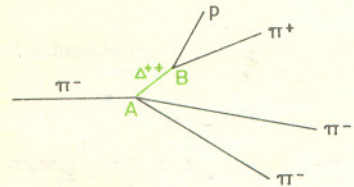
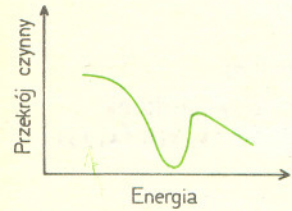
W „doświadczeniach formacji” badamy zależność częstości (przeliczonej zazwyczaj na tak zwany przekrój czynny) występowania określonej reakcji od energii zderzających się cząstek. Energia układu zderzających się cząstek obliczona w układzie środka masy jest równoważna masie układu, jaki te cząstki zderzając się mogą formować. Sporządzamy wykres zależności przekroju czynnego na dany proces od energii. Obserwowane przy określonej energii maksimum świadczy na ogół o tworzeniu się rezonansu w tym obszarze mas. Stąd właśnie pochodzi nazwa „eksperyment formacji” dla tego typu doświadczeń.

W „eksperymentach produkcji” rezonans jest wytworzony wśród innych produktów reakcji i praktycznie natychmiast się rozpada. Rysunek ilustruje w sposób ogromnie przesadzony sytuację dla reakcji $\pi^- p \rightarrow \Delta^{++} + \pi^- + \pi^+$, gdzie rezonans Δ^{++} rozpada się z kolei na p i π^+ . Odcinek drogi od punktu produkcji A do punktu rozpadu B jest zbyt krótki, aby można go było zmierzyć lub nawet zauważyć. O istnieniu rezonansu możemy przekonać się badając produkty rozpadu. Histogram mas, jakie tworzą cząstki, które podejrzewamy, że powstały w wyniku rozpadu rezonansu, powinien mieć maksimum w miejscu odpowiadającym masie tego rezonansu. Rezonans produkuje się, a następnie rozpada — stąd nazwa „eksperyment produkcji” dla tego typu doświadczeń. Naszą opowieść rozpoczynamy w Narodowym Laboratorium w Brookhaven, gdzie od wiosny 1974 r. prowadzono pod kierunkiem prof. Samuela Tinga badania reakcji, w której proton zderza się z jądrami berylu, a wśród produktów reakcji znajduje się elektron i pozyton: $p + Be \rightarrow e^+ + e^- + \text{cokolwiek}$.

Była to kontynuacja ośmioletnich badań nad produkcją par $e^+ e^-$, prowadzonych poprzednio również pod kierunkiem S. Tinga w laboratorium DESY koło Hamburga. Dla badań użyto dwóch układów liczników identyfikujących elektrony dodatnie i ujemne oraz określających ich energię i kąty emisji. Układ taki, pokazany na zdjęciu, nosi nazwę spektrometru dwuramiennego. Każde ramię o długości 20 m tworzy kąt 15° z kierunkiem wiązki pierwotnej. Na początku każdego ramienia są trzy elektromagnesy, za nimi liczniki Czerenkowa przypominające z wyglądu bębny betoniarek, a dalej układ wielodrutowych komór proporcjonalnych, które umożliwiają precyzyjne określenie położenia toru elektronu w przestrzeni. Jest to typowe doświadczenie produkcji. Bada się rozkład masy par $e^+ e^-$ poszukując ewentualnych maksimum, które można by interpretować jako skutek produkcji rezonansu.

W sierpniu 1974 r. zespół fizyków, wśród których znajduje się S. Ting, J. J. Aubert, U. J. Becker i P. J. Biggs, zauważył na rozkładzie badanej masy $e^+ e^-$ maksimum. Może to być nowy nieznan rezonans, może być błąd w działaniu urządzeń.

Zaczyna się przygoda, ale zaczyna się też okres niezwykle wyczerpującego sprawdzania działania całego układu eksperymentalnego. Trudno uwierzyć, że istnieje jeszcze jedna nowa cząstka, której istnienia nikt się nie spodziewał (aby być bliżej prawdy, należy powiedzieć: prawie nikt). W tym zakresie energii przeprowadzono już uprzednio badania — może tylko nie tak dokładne jak obecnie — poza tym niepokojąco wyglądał sam histogram mas. Był on niezwykle, jak na „obyczajne” rezonansy, wąski — widać to na rysunku zaczerpniętym z pierwszej rozesłanej pracy. Wąskość oznaczała długi czas życia, co z kolei nie znajdowało rozsądnego wytłumaczenia. Po bardzo dokładnym





Rozwiązanie zadania M 52.

Na płaszczyźnie proste rozłączne są równoległe. Suma prostych równoległych jest całą płaszczyzną lub płaszczyzną z usuniętą co najmniej jedną prostą, a więc nie jest płaszczyzną pozbawioną jednego tylko punktu. Łatwo zauważyć, że z tego krótkiego rozmowienia wynika, iż płaszczyzna pozbawiona dowolnej skończonej liczby punktów nie jest sumą prostych rozłącznych. Czytelnik znający fakty z teorii mnogości zauważy, że z tego dowodu wynika, iż płaszczyzna pozbawiona przeliczalnego zbioru punktów nie jest sumą prostych rozłącznych. Redakcji nie wiadomo, czy przestrzeń trójwymiarowa pozbawiona jednego punktu jest sumą prostych rozłącznych.

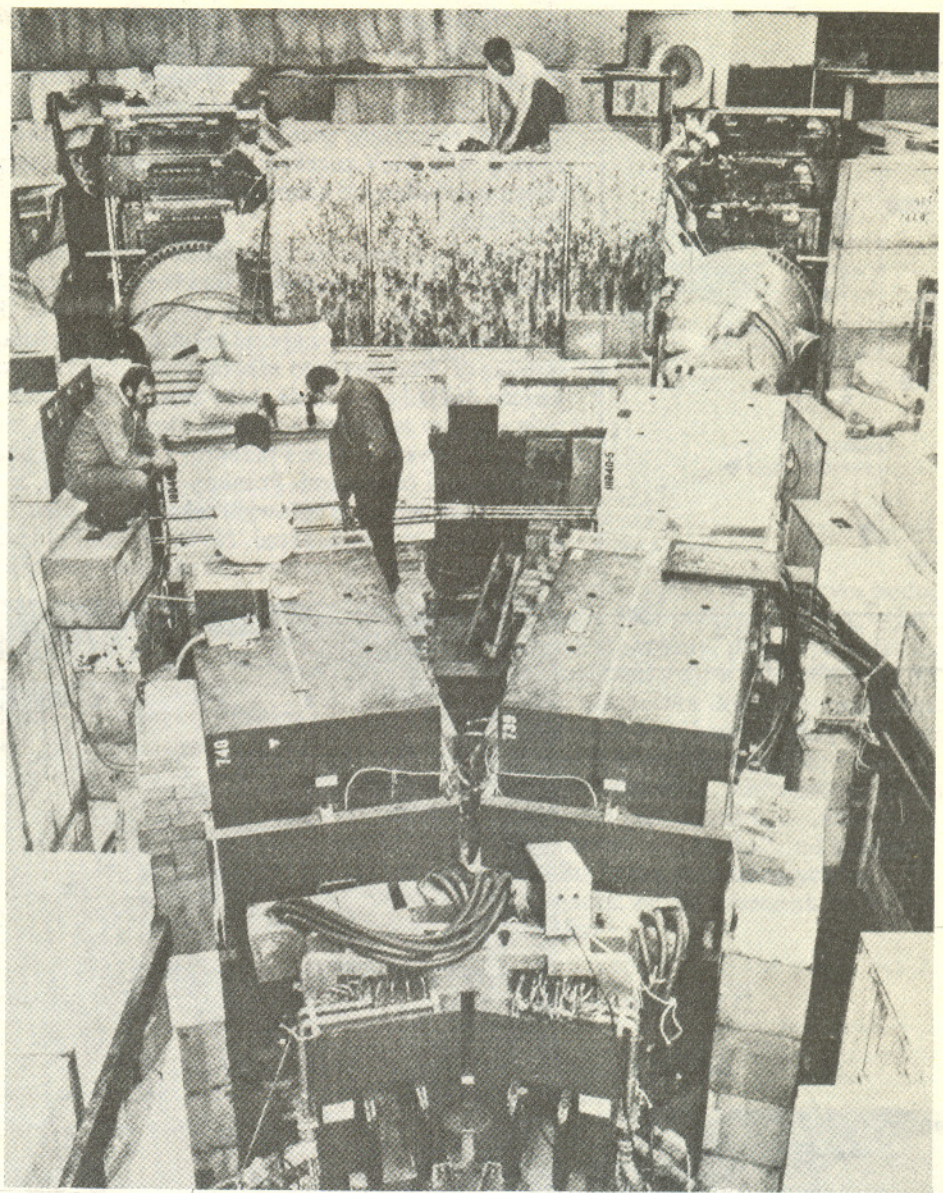


Foto Brookhaven

sprawdzeniu okazało się, że aparatura działa bez zarzutu, a zatem obserwowane maksimum świadczy o istnieniu nowego rezonansu.

W połowie października zespół posiadał już około 500 zarejestrowanych przypadków odpowiadających rozpadowi nowej cząstki. Planowano dalsze zwiększanie statystyki i dokładne przebadanie całego dostępnego obszaru energii. W połowie listopada wieści napływające ze Stanfordu zmuszają do przyśpieszenia publikacji wyników. Nową cząstkę oznaczono dużą literą J (litera J jest bardzo podobna do chińskiego ideogramu 丁 oznaczającego sylabę Ting — prof. Samuel Ting jest z pochodzenia Chińczykiem). Zdjęcie przedstawia pierwszą stronę publikacji rozesłanej na cały świat i reprodukowanej w niezliczonych kserokopiach.

Przenieśmy się obecnie do Stanford Linear Accelerator Center. W zespole prof. Burta Richtera pracują fizycy tej miary, co M. Perl, W. Chinowsky, G. Goldhaber i G. H. Trilling. Zespół bada reakcję $e^+ + e^- \rightarrow$ hadrony. Elektrony i pozytony krążące w przeciwnych kierunkach w pierścieniach akumulacyjnych SPEAR zderzają się. Aparatura detekcyjna rejestruje tylko te spośród produktów reakcji, które oddziałują silnie (np. mezony pi, nukleony itp.), czyli hadrony. Pokazany na zdjęciu układ detekcyjny umożliwia wyobrażenie sobie wielkości urządzenia. Wyniki uzyskiwane w czerwcu budziły pewien niepokój — były niepowtarzalne w okolicy masy pary pozyton–elektron równej 3100 MeV. Przyczyna była nieznaną, niekiedy układ detekcyjny liczył „w normie”, to znaczy tak jak przy nieco niższej i nieco wyższej energii, niekiedy zaś zaczynał liczyć

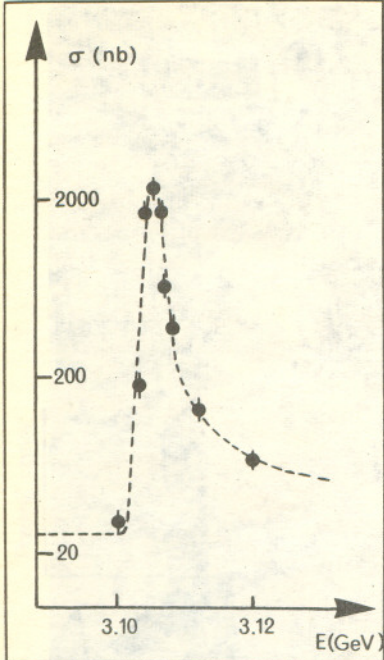
"EXPERIMENTAL OBSERVATION OF A HEAVY VECTOR PARTICLE J"

by

J.J. Aubert, U. Becker, J.P. Biggs, J. Burger, M. Chen, G. Everhart, F. Goldhaber, J. Leong, T. McCarriston, T.G. Rhoades, M. Rohde, Samuel C.C. Ting, and Sau Lan Wu, Laboratory for Nuclear Science and Department of Physics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., Y.Y. Lee

Brookhaven National Laboratory, Upton, New York

Abstract. We report the observation of a heavy vector particle J, with mass $m = 3.1$ GeV and width approximately zero. The observation was made from the reaction $p + \bar{p} \rightarrow e^+e^- + X$ by measuring the e^+e^- mass spectrum with a precise pair spectrometer at the 30 GeV Brookhaven National Laboratory Alternating Gradient Synchrotron.



pięciokrotnie szybciej. W lipcu SPEAR wyłączono planując jego przebudowę tak, aby można było magazynować cząstki o wyższej energii. Eksperyment rozpoczęto w sobotę 9 listopada 1974 r. od zbadania podejrzanej obszaru mas. Energii zderzających się wiązek, a więc i masę układu $e^+ e^-$, zmieniano bardzo małymi krokami rejestrując przekrój czynny na produkcję hadronów. W okolicy masy równej 3100 MeV przekrój czynny wyraźnie osiągał maksimum — prędkość rejestracji badanych zdarzeń była dziesięciokrotnie wyższą niż w obszarze sąsiednim.

W niedzielę o godzinie 11 istnienie nowej cząstki stało się pewne. Fizyków ogarnęła euforia, otworzono butelkę szampana i wszyscy świętowali swoje odkrycie. Tylko jeden członek zespołu, Gerson Goldhaber, zamknął się w odosobnieniu, aby napisać tekst pracy przeznaczony do natychmiastowej publikacji. Podczas jego nieobecności postanowiono powtórzyć pomiary badając jeszcze dokładniej obszar masy rezonansu. Okazało się, że przy bardzo precyzyjnym zmienianiu energii wiązek można znaleźć taką energię, przy której częstość zliczeń, a więc i przekrój czynny, wzrasta stokrotnie w porównaniu z sąsiednimi obszarami. Pomiary zakończono, zanim Goldhaber ukończył pisanie pracy. Gdy wrócił z gotowym tekstem, dowiedział się, że przygotowany materiał musi jeszcze raz przerabiać. Nowy wynik był jeszcze bardziej zaskakujący — rezonans okazał się węższy, niż sądzono początkowo.

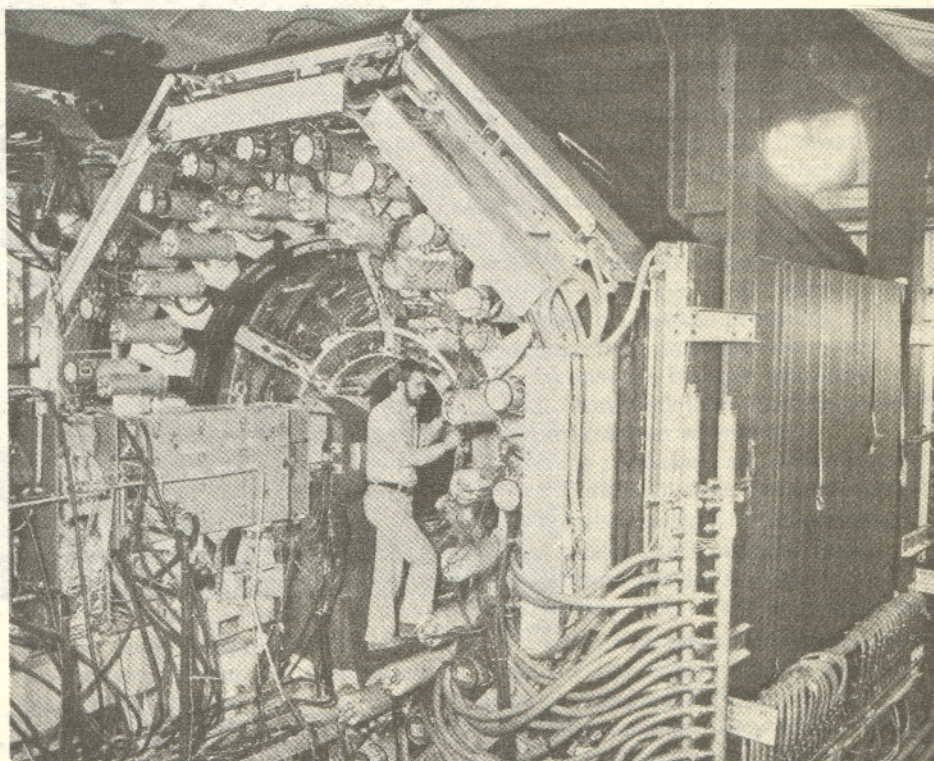


Foto SLAC

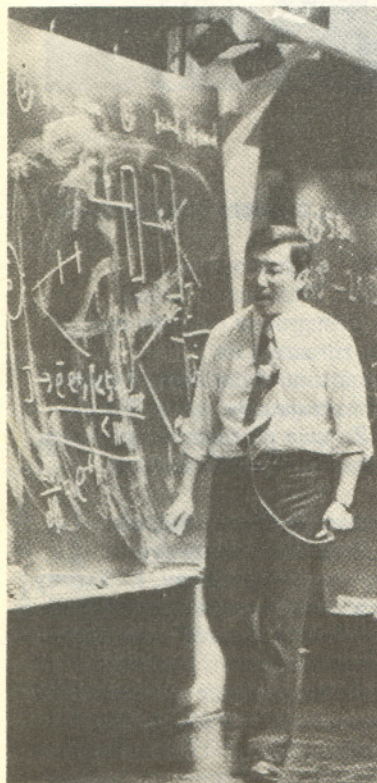


Foto CERN

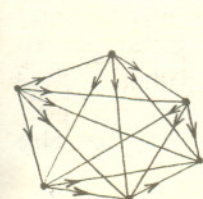
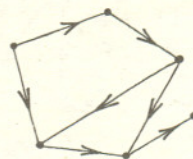
Oba zespoły publikują swoje wyniki jednocześnie. W kilka godzin po odkryciu wieść dociera telefonicznie do większych laboratoriów europejskich, a wkrótce potem S. Ting przyjeżdża do CERN-u z referatem. Wieść jest prawdziwą sensacją. Tam gdzie istniały możliwości techniczne, przystąpiono natychmiast do powtarzania eksperymentu stanfordzkiego. 13 listopada układ pierścieni kumulacyjnych ADONE we Frascati (Włochy) zostaje wykorzystany do eksperymentu. Niestety górna granica masy $e^+ e^-$, jaką można osiągnąć w tym urządzeniu, wynosi tylko 3000 MeV. Operatorzy podejmują ryzyko. Przeciążają elektromagnesy pierścieni kumulujących i 15 listopada potwierdzają wyniki amerykańskie. Urządzenie wytrzymuje. Podobne wyniki otrzymują Niemcy w Hamburgu za pomocą pierścieni kumulacyjny DORIS. Wyniki ogłaszają 24 listopada. W Stanford praca trwa nadal. Do początku stycznia 1975 r. uczeni znajdują dodatkowo dwa nowe rezonanse o masie 3695 MeV i około 4000 MeV. Czas życia cząstki o masie 3,7 GeV jest również niezwykle długi: rzędu 10^{-20} s. Odkrycie nowych cząstek to dopiero początek wielkiej przygody. Jak w każdej przygodzie nie wiemy, co jutro przyniesie. Wiemy jednak, że zrobiono nowy krok naprzód w poznaniu otaczającego nas świata.

mała delta



Zrób porządek

Na rysunku przedstawiono wysokość nad poziomem morza sześciu schronisk górskich, a obok zamieszczono szkic ich rozmieszczenia ze wskazaniem, które niżej położone schronisko widać z każdego z nich. Czy umiałbyś wpisać w ten szkic nazwy schronisk?



Tym, którzy tego nie potrafią, jak i tym, którym podobają się metody rozwiązywania „bez myślenia”, czyli — jak je nazywają matematycy — algorytmy, podaję przepis: Każde schronisko łączymy strzałkami z tymi schroniskami, do których można od tego schroniska dojść idąc wzdłuż już narysowanych strzałek, czyli ze schroniskami położonymi niżej. Liczymy, ile strzałek prowadzi z każdego ze schronisk, a następnie przydzielamy schroniskom nazwy: temu, od którego prowadzi pięć strzałek — „Orle Gniazdo”; od którego cztery — „Halka”; od którego trzy — „Jontek”; itd. Bo liczba prowadzących od schroniska strzałek oznacza, od ilu schronisk wyżej jest położone dane schronisko.

A brakujące strzałki dorysowaliśmy korzystając ze spostrzeżenia, że:

jeśli A jest położone wyżej od B , a B wyżej od C , to A jest położone wyżej od C .

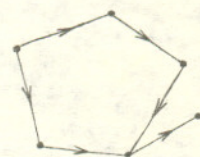
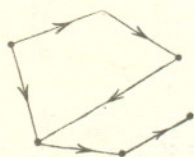
Nazywa się to mądrze: relacja „wyżej” jest *przechodnia*.

Tak więc przechodniość pozwala nam wskazać „automatyczny” sposób rozwiązania naszego zadania.

Dla tych z kolei, którzy rozwiązyli zadanie i są zdania, że było zbyt łatwe, mam pytania:

— Czy, gdyby na szkicu były tylko te strzałki, to zadanie byłoby rozwiązywalne?

— A gdyby tylko te?



— Jak poznać, czy narysowane strzałki pozwalają rozwiązać zadanie?

— Jaka najmniejsza liczba strzałek pozwala rozwiązać zadanie? Narysuj takie strzałki.

Chciałbym tu zwrócić uwagę na pozornie mało ważny fakt, że zamiast kresek łączących schroniska na szkicu były narysowane strzałki. Istotnie, musieliśmy jakoś wskazać, które ze schronisk jest wyżej, a które niżej, ponieważ

jeśli A jest położone wyżej od B , to B nie znajduje się wyżej od A ,

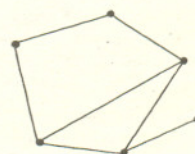
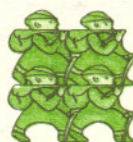
co nazywa się mądrze *antysymetrią* relacji „wyżej”.

W związku z tym pytania:

— Na szkicu strzałki zastąpiliśmy kreskami. Czy można przerobić je z powrotem na strzałki tak, żeby zadanie stało się sprzeczne, żeby informacje zawarte w szkicu wykluczały się nawzajem?

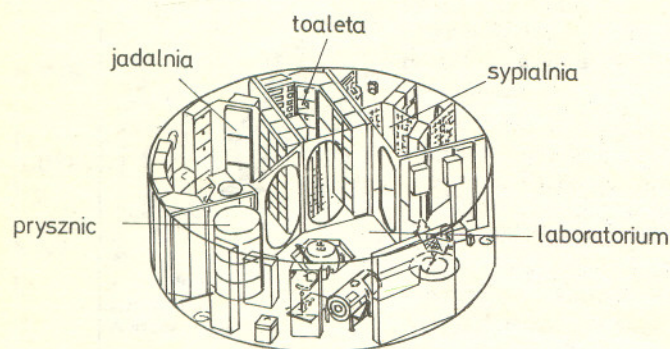
— Jaki warunek muszą spełniać narysowane strzałki, aby zadanie dawało się rozwiązać?

— Czy kreski na strzałki można zmienić tylko przez przywrócenie ich zgodnie z pierwszym rysunkiem?



To, co robiliśmy razem w trakcie tego artykułu, nazywa się badaniem *relacji porządkującej* za pomocą *grafów*. Bo matematycy porządkiem nazywają każdą relację *antysymetryczną* i *przechodnią*, a takie rysunki, jak nasz szkic, nazywają *grafami*.

Życie i praca w laboratorium kosmicznym



Tych z Was, którzy wykonali doświadczenie z nieważką oliwą i przekonali się, jak trudne może być życie w warunkach nieważkości, zapraszamy w nagrodę na pokład stacji kosmicznej. Dowiedziecie się, jak wyglądały zajęcia, posiłki, zabiegi higieniczne i wypoczynek astronautów w laboratorium kosmicznym.

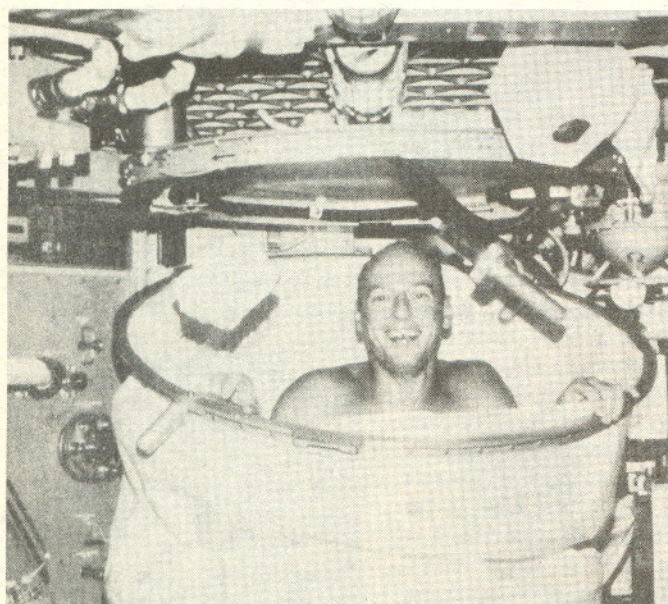
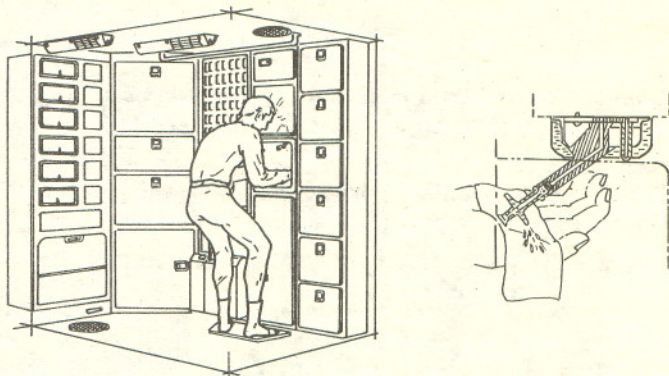
W roku 1973 wystąpiły Stany Zjednoczone na orbitę okołozemską stację kosmiczną, nazwaną „Skylab”. Na pokładzie tej stacji zmieniające się trójosobowe załogi astronautów wykonały wiele badań naukowych z dziedziny fizyki, biomedycyny i z innych gałęzi wiedzy. Przyjrzyjcie się rysunkowi przedstawiającemu kwatery załogi. Jest tam jadalnia, toaleta, sypialnia oraz pomieszczenie, gdzie wykonuje się doświadczenia i ćwiczenia gimnastyczne. Zwiedzimy je kolejno.

Śniadanie w nieważkiej kuchni (cz. II)

Prawdziwi astronauta nie powtórzyli błędów Ardana, przewidzieli wszystkie przeciwności losu związane ze stanem nieważkości. Na zdjęciu na IV stronie okładki widzicie ich stojących przy swoich tacach przymocowanych do stołu. Nogi ich zaczepione są o paski przymocowane do podłogi. Dzięki temu nie grozi im, że „polecą” pod sufit natychmiast po naciśnięciu guzika na pokrywie tacy. Na tacy umieszczone są magnesy przyciągające sztucce. Zrobiono w niej specjalne zagłębienia na puszki z pożywieniem. Płynny pije się bezpośrednio z gietkich, składanych manierek.

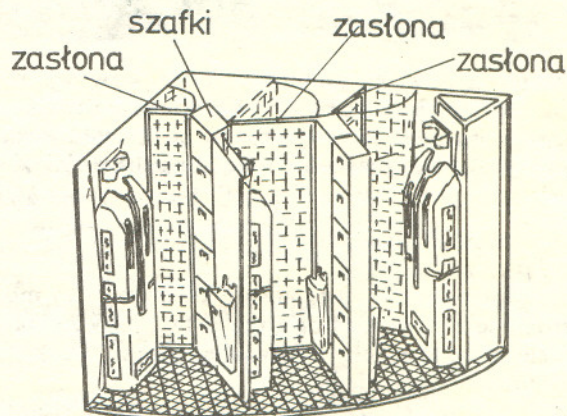
Mycie nieważką wodą

Wody do mycia dostarcza urządzenie podobne do strzykawki. Zwykły kurek nie byłby przydatny, ponieważ woda wypełniająca rurę nie wypłynęłaby po jego odkręceniu. Zamiast kurka jest przycisk, który wypycha wodę na zewnątrz.



Kąpiel w Kosmosie. Dowódca „Skylaba”, Pete Conrad, czuje się doskonale w wannie, umieszczonej w orbitującej stacji doświadczalnej.

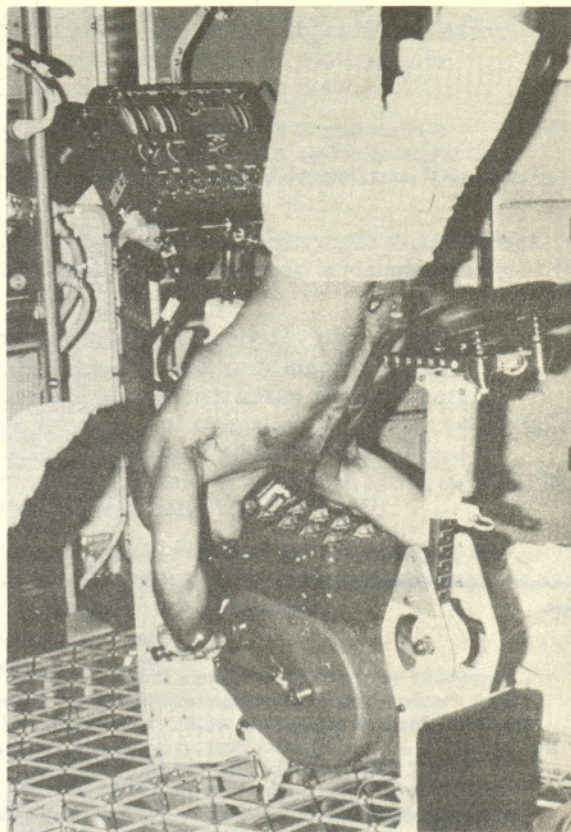
Lekki sen



Każdy z członków załogi ma kącik do spania. Łóżka są umieszczone pionowo w stosunku do podłogi, ale to nikomu nie przeszkadza. Właściwie nie są to prawdziwe łóżka, lecz śpiwory, przymocowane do ściany. Ważne jest, żeby śpiący astronauta nie obijał się o ściany pomieszczenia.

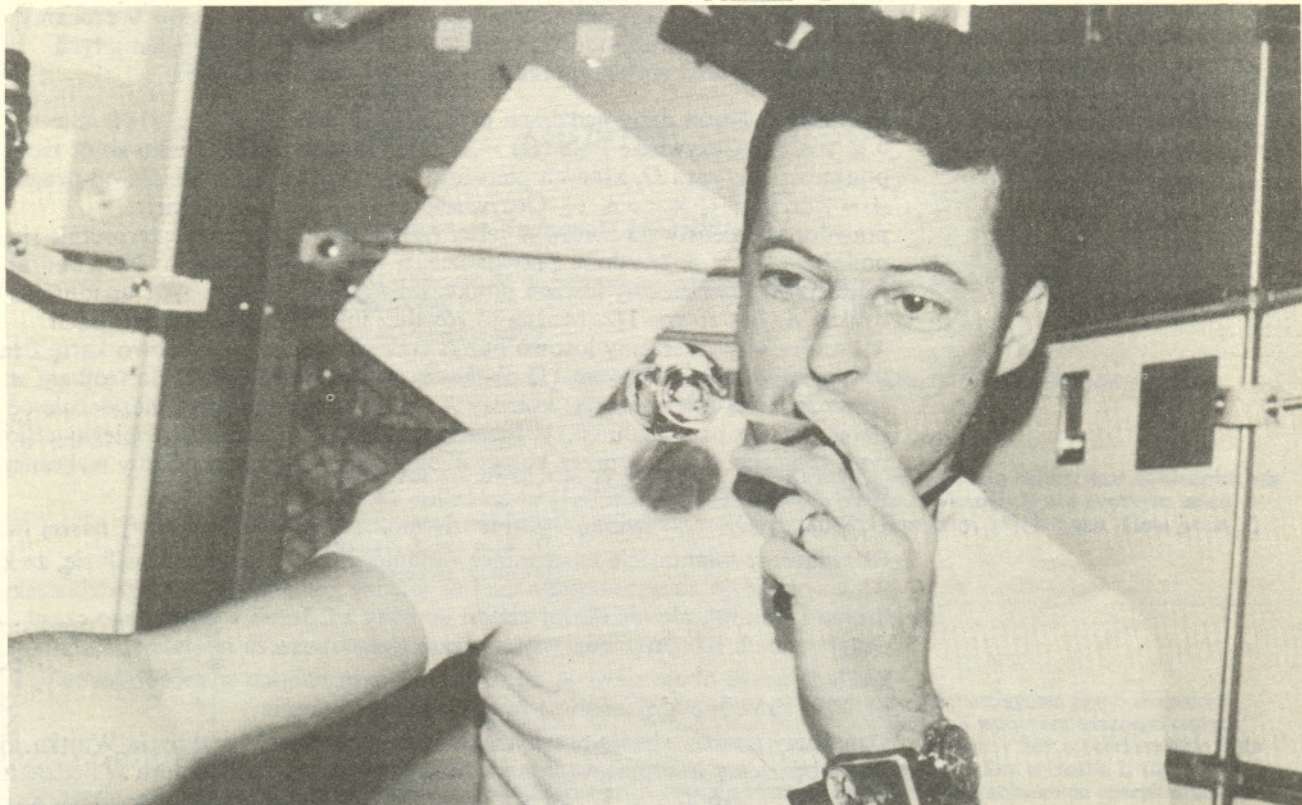
Gimnastyka

Ponieważ w warunkach nieważkości krew astronauty nie ciąży ku dołowi, jego serce ma lżejsze zadanie. Żeby ukrwić mózg, nie musi pokonywać siły ciężkości, przez co rozleniwia się. Podobnie dzieje się na Ziemi, kiedy człowiek zmuszony jest do długotrwałego leżenia w łóżku. Wiemy, jak trudno wówczas wstać za pierwszym razem — można dostać zawrotów głowy, a nawet zemdleć. Tymczasem serca astronautów po długotrwałym lenistwie w stanie nieważkości czeka wielki wysiłek w czasie lądowania, kiedy trzeba działać wbrew silnym przeciążeniom. Również mięśnie człowieka przebywającego w stanie nieważkości wykonują mniejszą pracę przy normalnych czynnościach. Mogłoby to spowodować częściowy ich zanik. Są tacy, którzy dobrze wiedzą, jaką ma się nogę po zdjęciu z niej gipsu — jak z waty. Czasem, po poważnej operacji, od nowa trzeba uczyć się chodzić. Dlatego konieczne dla zdrowia astronautów są intensywne ćwiczenia gimnastyczne. Służą im do tego ciężary, sprężyny, a także specjalne urządzenie przypominające rower bez kół, zwane ergometrem. Urządzenie to jest wyposażone w przyrząd mierzący energię, jaką zużywa człowiek podczas treningu. Pierwsza załoga „Skylaba”, która spędziła na orbicie okołoziemskiej 28 dni, stwierdziła, że zaplanowana liczba ćwiczeń była za mała. Następnym dwóm załogom, które zgodnie z planem spędziły na pokładzie „Skylaba” po 56 dni, zalecono częstsze i dłuższe okresy ćwiczeń.



Bańki w kosmosie

Jaki kształt przyjmują bańki mydlane w Kosmosie? Nie było to zaplanowane jako jedno z badań naukowych, jakie miała wykonać pierwsza załoga „Skylaba”. Jednakże ciekawość kazała dr Josephowi Kerwinowi zabrać ze sobą słomkę i zbadać sprawę na własną rękę. Wynik? „Niespodzianka” — powiedział po powrocie na Ziemię. — „Są idealnie okrągłe”.



Małą «Deltę» opracowali: P. Nowicki i D. Ziemińska

Dr Ryszard ZIELIŃSKI

Masz prawo, drogi Czytelniku, być zaskoczony tym zestawieniem różnych pojęć i zdziwić się, co mogą mieć ze sobą wspólnego geometria, prawdopodobieństwo i udana randka. Dla uniknięcia nieporozumień powiem od razu, że udana randka to taka, która się w ogóle odbyła, bez względu na to, czy w czasie tej randki udało się coś komuś czy nie. Ale pogawędkę rozpocznę od geometrii i prawdopodobieństwa.

Niech dana będzie na płaszczyźnie figura geometryczna Ω taka, która ma skończone pole. Niech \mathcal{A} będzie rodziną tych wszystkich podzbiorów tej figury, które również mają pole. Zdefiniujemy funkcję P określoną dla $A \in \mathcal{A}$ za pomocą wzoru

$$P(A) = \frac{\text{Pole}(A)}{\text{Pole}(\Omega)}.$$

Umawiamy się, że polem zbioru pustego jest zero.

Bez trudu zauważamy, że funkcja P przyjmuje wartości z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$, że $P(\Omega) = 1$ oraz że dla zbioru pustego \emptyset jest: $P(\emptyset) = 0$. Również natychmiast widoczne jest, że jeżeli A i B są dwoma zbiorami rozłącznymi ($A, B \in \mathcal{A}$), to $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Nawet więcej: jeżeli A_1, A_2, \dots jest ciągiem zbiorów parami rozłącznych, to $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$. Funkcja P o takich własnościach nazywa się prawdopodobieństwem, a dla podkreślenia faktu, że zdefiniowana jest za pomocą pól odpowiednich figur geometrycznych, nazywa się ją prawdopodobieństwem geometrycznym.

Oto dwa proste przykłady:

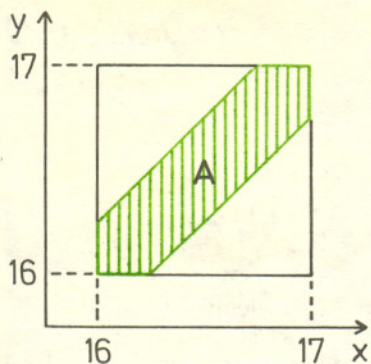
Przykład 1. Niech zbiorem Ω będzie figura składająca się z 52 kwadracików o jednakowym polu. Każdemu kwadracikowi przyporządkujemy wzajemnie jednoznacznie jedną z 52 kart do gry. Prawdopodobieństwo figury składającej się z tych kwadracików, którym przyporządkowano asy, jest równe $4/52$. Jest to dokładnie to samo, co prawdopodobieństwo, że wyciągnięta losowo z talii karta okaże się asem! Mówiąc o prawdopodobieństwach geometrycznych mamy w tym przypadku zwykle na myśli następującą interpretację: Na figurę Ω rzucamy losowo punkt; prawdopodobieństwo tego, że upadnie on na jeden z tych kwadracików, którym przyporządkowano asy, jest równe $4/52$.

Przykład 2. Niech dany będzie na płaszczyźnie zbiór $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Oczywiście $\text{Pole}(\Omega) = 1$. Zdefiniujemy zbiór A jako zbiór tych punktów kwadratu Ω , których pierwsza współrzędna jest mniejsza od drugiej: $A = \{(x, y) : 0 \leq x < y \leq 1\}$. Oczywiście $\text{Pole}(A) = 1/2$. A więc prawdopodobieństwem zbioru A jest $P(A) = 1/2$. Ten wynik interpretuje się, podobnie jak w poprzednim przykładzie, w następujący sposób: Na kwadrat jednostkowy Ω rzucamy losowo punkt; prawdopodobieństwo, że upadnie on na trójkąt A , jest równe $1/2$. Można to również interpretować inaczej: jeżeli w kwadracie wybierzemy losowo punkt (tak jak wybieramy losowo kartę z talii), to z prawdopodobieństwem $1/2$ okaże się, że punkt ten należy do trójkąta A . I jeszcze jedna interpretacja: koledzy X i Y wybierają losowo i niezależnie od siebie liczbę z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że liczba wybrana przez kolegę X okaże się mniejsza od liczby wybranej przez kolegę Y , jest równa $1/2$.

Uzbrojeni w przedstawioną wyżej teorię możemy wrócić do sprawy naszej randki. Rozwiążemy mianowicie następujące zadanie. Jola i Wojtek umówili się, że każde z nich przyjdzie na wyznaczone miejsce między godziną 16 i 17 i będzie czekało na drugie 15 minut, ale nie dłużej niż do godziny 17. Jeżeli w ciągu tego czasu drugie z nich nie przybędzie, osoba czekająca opuszcza miejsce spotkania.

Zakładając, że oboje zjawiają się w umówionym miejscu w sposób losowy, obliczyć prawdopodobieństwo, że dojdzie do spotkania.

Oznaczmy przez x chwilę przybycia Joli i przez y chwilę przybycia Wojtka. Parę (x, y) będziemy interpretowali jako punkt na płaszczyźnie. Figurą Ω będzie teraz zbiór $\{(x, y) : 16 \leq x \leq 17, 16 \leq y \leq 17\}$. Zbiór A ma postać $\{(x, y) : 16 \leq x \leq 17, 16 \leq x \leq 17, |x - y| \leq 1/4\}$. $\text{Pole}(\Omega) = 1$, $\text{Pole}(A) = 7/16$. Prawdopodobieństwo,



że randka uda się, jest więc równe $7/16$. Zauważmy, że chociaż każda z umawiających się osób czeka najwyżej $1/4$ okresu czasu wyznaczonego na spotkanie, to prawdopodobieństwo, że dojdzie do spotkania, równe jest prawie $1/2$.

Zadanie dla Czytelnika: Przypuśćmy, że w powyższym przykładzie J i W umawiają się w następujący sposób: każde z nich będzie czekało na drugie t minut, ale nie dłużej niż do godz. 17. Jakie powinno być t , aby prawdopodobieństwo, że dojdzie do spotkania, było duże, powiedzmy większe od $1-\varepsilon$?

Aby pokazać Czytelnikowi, że prawdopodobieństwa geometryczne służą również mniej błahym sprawom, zacytuję dwa zadania, poprzedzając je jednak dwiema uwagami.

Uwaga 1. Mówiąc o losowym rzucaniu punktu na figurę Ω (lub o losowym wyborze punktu z Ω) mamy na myśli takie rzucanie, przy którym punkt z jednakowym prawdopodobieństwem może upaść na każde miejsce figury. Mówiąc dokładniej: prawdopodobieństwo, że punkt upadnie na pewien podzbiór danej figury, zależy tylko od pola tego podzbioru, a nie zależy ani od jego kształtu, ani od jego położenia wewnątrz Ω . W takich sytuacjach mówi się również, że punkt ma rozkład jednostajny (lub: równomierny) na figurze Ω .

Uwaga 2. Zupełnie analogicznie można mówić o figurach geometrycznych na prostej lub o figurach w przestrzeni trójwymiarowej (lub więcejwymiarowej). Wtedy „pole” należy zastąpić przez „długość” lub „objętość”.

A teraz dwa zapowiedziane zadania.

Zadanie 1 (A. Plucińska, E. Pluciński: Zadania z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej dla studentów politechnik). Przez jednorowy odcinek drogi o końcach A, B przejechać mają dwa tramwaje jadące z przeciwnych kierunków niezależnie od siebie. Pierwszy tramwaj przybywa do A w chwili t_1 , drugi do B w chwili t_2 , przy czym $T' \leq t_1 \leq T''$, $T' \leq t_2 \leq T''$. Wszystkie punkty odcinka $\langle T', T'' \rangle$ są jednakowo prawdopodobne. Niech $T'' - T' = 15$ minut. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że jeden z tramwajów będzie musiał czekać, aż drugi przejedzie, jeśli a) czas przejazdu przez odcinek AB wynosi 3 min., b) czas przejazdu od A do B wynosi 3 min., a od B do A — 2 min.

Zadanie 2 (L. D. Mieszalkin: Zadania z rachunku prawdopodobieństwa). Dla złożenia łożyska kulkowego konieczne jest, aby związek między promieniem R zewnętrznej obryczy, promieniem r wewnętrznej obryczy i średnicą d kulek (rozrzut promieni kulek pochodzących z jednej partii produkcji jest na tyle mały, że można go zaniedbać) wyrażał się wzorem

$$0 \leq R - r - d \leq \delta.$$

Załóżmy, że R , r i d są niezależne i mają rozkład jednostajny na odcinkach $\langle 50, 0, 51, 0 \rangle$, $\langle 40, 0, 41, 0 \rangle$, $\langle 9, 5, 10, 0 \rangle$. Obliczyć prawdopodobieństwo złożenia łożyska dla $\delta = 0,5$ mm.



Zadania

Redaguje mgr Andrzej MAKOWSKI

M 52. Udowodnić, że płaszczyzna pozbawiona jednego punktu nie jest sumą prostych rozłącznych.

Rozwiązanie na str. 7.

M 53. Udowodnić, że jeżeli n jest liczbą naturalną, to liczba $27^{n+1} - 27 - 26n$ jest podzielna przez 169.

Rozwiązanie na str. 5.

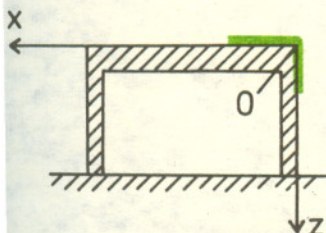
M 54. Na wieczorku było 28 pań i 28 panów. Każdy z obecnych tam panów znał dokładnie dwie obecne panie i każda z pań знаła dokładnie dwóch panów. Wykazać, że w pierwszym tańcu każda para mogła składać się z osób znających się. (Przyjmujemy, że jeżeli pan A zna panią X, to pani X zna pana A).

Rozwiązanie na str. 15.

Redaguje dr Andrzej ZIEMIŃSKI

F 19. Na poziomym gładkim stole położono wyprostowaną, nierozciągliwą linę o długości l i masie M , w ten sposób, że część liny zwisa pionowo w dół. Pod wpływem własnego ciężaru lina zaczęła zsuwać się ze stołu. Opiszcie ruch końca liny, jeżeli tarcie liny o powierzchnię stołu można pominąć, a w chwili początkowej długość zwisającej części liny wynosiła l_0 ($l_0 < l$). Sprawdźcie, czy otrzymane przez Was rozwiązanie spełnia zasadę zachowania energii oraz czy opisuje ruch liny aż do ostatecznego zsunęcia się jej ze stołu.

Rozwiązanie na str. 2.



Rys. 1

WYNIKI KONKURSU „DRGANIA SĄ WSZĘDZIE”

Na konkurs nadesłano 94 zdjęcia wykonane przez 24 autorów. Widać, eliminacje wstępne zostały przeprowadzone przez samych Czytelników. Odpadły w nich dwie kategorie: osoby leniwe oraz nie wierzące we własne siły. Czy kryteria wstępnej eliminacji były słuszne? Nie wiem, podejrzewam jednak, że niejeden z tych, którzy sami odrzucili swoje kandydatury, mógłby wpisać się na listę nagrodzonych.

Nadesłane prace były oceniane przez jury w składzie:

1. doc. dr Piotr Decowski, sekretarz generalny Polskiego Towarzystwa Fizycznego,
 2. doc. dr Tomasz Hofmokr, zca redaktora naczelnego «Delty»,
 3. dr Jan Gaj z Instytutu Fizyki Doświadczalnej Uniwersytetu Warszawskiego.
- Jury miało co oceniać, bo prace były ciekawe i dobre. Zapytacie z pewnością, co fotografowali uczestnicy konkursu. Tematem najbardziej eksploatowanym były

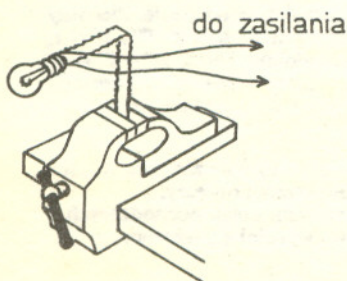
FIGURY LISSAJOUX

Jak je fotografowano? Różnie. Kolega Henryk Szczepański przymocował żaróweczkę do zgiętego brzeszczota od piły do metalu. Drugi koniec brzeszczota zamocował w imadle. Tak zamocowana żaróweczka (rys. 1) mogła drgać zarówno w pionie, jak i w poziomie; złożenie tych drgań ilustruje fot. 1. Fotografując żaróweczkę w ściśle odmierzonej czasie, autor mógł wyznaczyć okresy składowych drgań poziomych i pionowych. Innym interesującym przykładem jest praca kolegi Józefa Oleszkiewicza. Zawiesił on latarkę na sznurku w sposób przedstawiony na rys. 2. W ten sposób przy ruchu w płaszczyźnie rysunku układ zachowuje się jak wahadło matematyczne o długości l_1 , a przy ruchu w płaszczyźnie prostopadłej — jak wahadło o długości l_2 . Wprawiając wahadło w ruch złożony otrzymujemy figury Lissajoux, które można fotografować po prostu aparatem leżącym na podłodze. Najpiękniejszą figurę Lissajoux otrzymał kolega Michał Hanasz w sposób jeszcze prostszy — zawieszając latarkę na jednym sznurku i wprawiając ją w drgania złożone. Wynik (woryginale czarno-biały) możecie podziwiać na okładce.

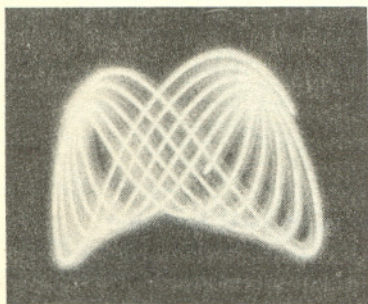
Inni uczestnicy konkursu postawili sobie za zadanie otrzymać

WYKRES POŁOŻENIA W ZALEŻNOŚCI OD CZASU

dla drgającego przedmiotu. Przykładami mogą być zdjęcia kolegów Piotra Woźnicy i Jacka Olendera, (fot. 2 i fot. 3), którzy przymocowali żaróweczkę do elastycznego pręta i po wprawieniu w drgania fotografowali ją aparatem umieszczonym na obracającej się szpuli magnetofonu. Ciekawe jest zdjęcie 3, wykonane podczas paru obrotów szpuli; widać na nim wyraźnie, że podczas zmniejszania się amplitudy drgań ich okres pozostaje stały. Kolega Jerzy Terlecki zarejestrował wykres zależności położenia kulki stalowej od czasu (fot. 4). Kulka odbijała się od poziomej stalowej powierzchni.

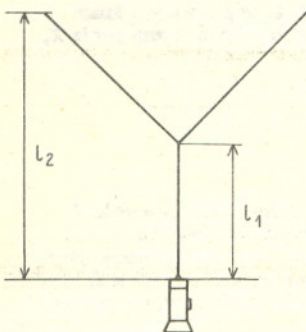


Rys. 1

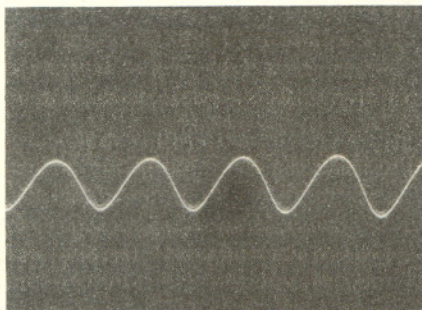


Fot. 1

Fot. Henryk Szczepański

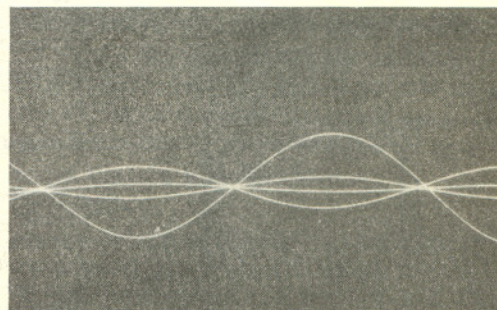


Rys. 2



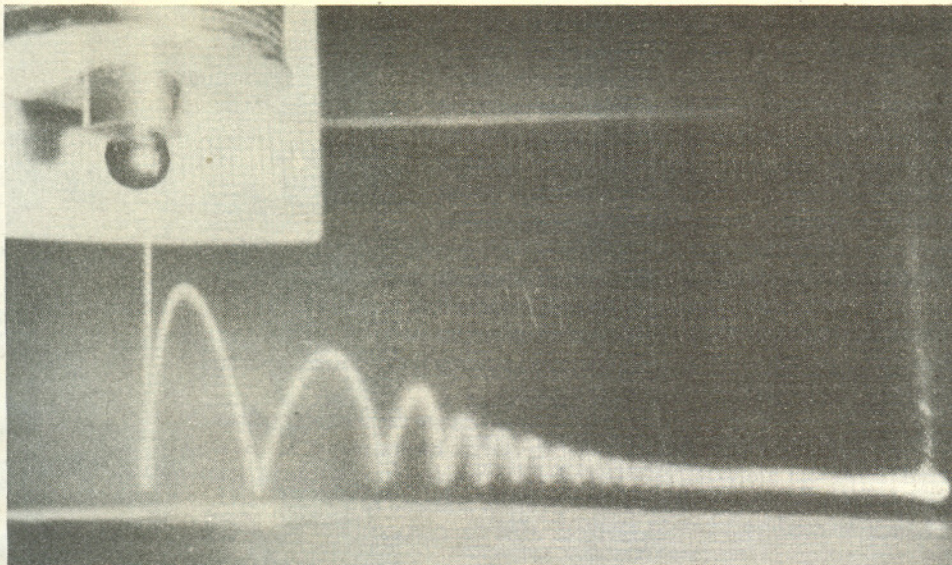
Fot. 2

Fot. Piotr Woźnica i Jacek Olender



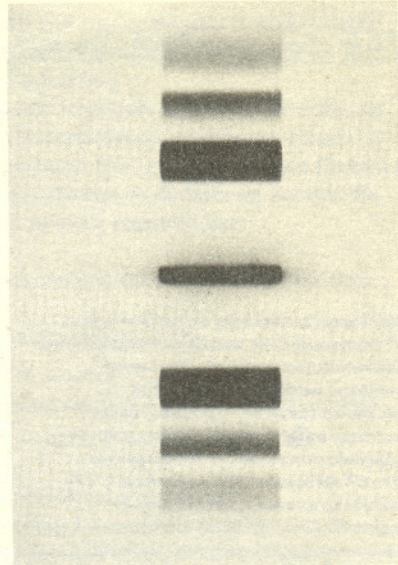
Fot. 3

Fot. Piotr Woźnica i Jacek Olender



Fot. 4

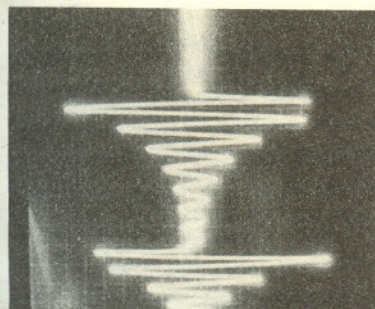
Fot. Jerzy Terlecki



Fot. 5

Fot. Marek Kubista

JAKIE JESZCZE DRGANIA REJESTROWANO?



Fot. 6

Fot. Piotr Pankiewicz i Jerzy Gwoździński

Na przykład pola elektrycznego w fali świetlnej. Kolega Marek Kubista wykonał szereg zdjęć widma światła białego uzyskanego przy pomocy siatki dyfrakcyjnej. Jedno z nich przedstawia fot. 5. Koledzy Piotr Pankiewicz i Jerzy Gwoździński wykonali efektowne zdjęcia ekranu oscyloskopu rejestrującego przebiegi gasnących drgań elektrycznych. Jedno z nich reprodukowujemy (fot. 6). Z innych ciekawych eksperymentów należy wymienić rejestrację błysków neonówki (np. kolega Jan Miszczak) oraz otrzymanie na fotografiach cykloid, tj. krzywych będących złożeniem ruchu po okręgu i ruchu postępowego (zwykła cykloida) lub drugiego ruchu po okręgu (epicykloida lub hipocykloida).

Ocena nadesłanych prac zgodnie z regulaminem konkursu, ogłoszonym w grudniowym numerze «Delt» została przeprowadzona w oparciu o trzy kryteria: wartości dydaktycznej, informacyjnej oraz estetycznej. Jego wynikiem jest poniższa

Lista nagrodzonych

I nagroda (miernik uniwersalny UM 3) — Michał Hanasz, Toruń, ul. Krasieńskiego 57 m. 10,

II i III nagroda (mikroskopy) — Henryk Szczepański, Włoszczowa, ul. Partyzantów 74, oraz Piotr Woźnica i Jacek Olender, Tychy, ul. Estetyczna 1 m. 83.

IV i V nagroda (zestawy radiotechniczne) — Józef Oleszkiewicz, Złotoryja, ul. Słoneczna 7 m. 2 oraz Marek Kubista, Tychy ul. B. Bieruta 22 m. 13.

Nagrody VI–X (zestawy optyczne) — Marek Pfuertner i Tadeusz Krysiak, Sochaczew, ul. Żwirki i Wigury 13 m. 6; Jan Miszczak, Warszawa, ul. Londyńska 14 m. 9; Andrzej Leśniara, Nowy Sącz, ul. Parkowa 3a; Henryk Hajduk, Mariusz Hajduk i Szczepan Walkiewicz, Pobodziska, ul. Kostrzyńska 2; Jerzy Terlecki, Zamość, Al. LWP, bl. 7d m. 24.

Ponadto przyznano wyróżnienia książkowe Piotrowi Pankiewiczowi i Jerzemu Gwoździńskiemu, Jasło, ul. Kościuszki 20 m. 28; Maciejowi Gocowi, Poznań ul. Dąbrowskiego 130 B/8; Marcinowi Gromiszowi, Puławy ul. XX-lecia PRL 15 m. 8.

Wszystkim nagrodzonym serdecznie gratulujemy.

Rozwiązanie zadania M 54.

Przyjmijmy, że wierzchołki 28-kąta foremnego oznaczają obecnych na wieczorku panów. Dwa wierzchołki połączymy odcinkiem, jeżeli odpowiadający im panowie mają wspólną znajomą; odcinek ten oznacza właśnie tę znajomą. Każdy wierzchołek jest więc końcem dwóch odcinków. Wybierzmy dowolny wierzchołek, np. A . Pan odpowiadający wierzchołkowi A zatańczy z panią odpowiadającą odcinkowi AB , pan odpowiadający wierzchołkowi B — z panią odpowiadającą odcinkowi BC ($C \neq A$) itd. Któryś z panów zatańczy z panią odpowiadającą odcinkowi (różnemu od AB) o końcu A . Jeżeli w ten sposób nie przydzieliliśmy partnerki któremuś z panów, np. panu K , to kontynuujemy to postępowanie wychodząc z punktu K . Ze względu na skończoną liczbę osób postępowania takiego nie można ciągnąć w nieskończoność. Każdemu panu zostanie więc przydzielona partnerka, którą już znał.



Mgr Andrzej DOMAŃSKI

Wiele problemów technicznych polega na zaprojektowaniu takiego urządzenia, które spełniając założone warunki charakteryzowałoby się np. możliwie najmniejszym kosztem, ciężarem itp. Osiągnięcie takiego efektu polega na ogół na przeprowadzeniu obliczeń dla tak wielu możliwych przypadków, że jest w praktyce trudne do zrealizowania. Zastosowanie elektronicznej techniki obliczeniowej nierzadko umożliwia uzyskanie rozwiązania.

Zajmuje się tym dziedzina zwana optymalizacją.

Podstawowym problemem stojącym przed rozwiązującym zadanie optymalizacyjne jest zbudowanie odpowiedniego modelu matematycznego. Innymi słowy, chodzi o takie sformułowanie tego problemu, żeby poszukiwane rozwiązanie polegało na znalezieniu ekstremum pewnej funkcji n zmiennych, określonej w pewnym obszarze D .

Dokładniej: w przestrzeni kartezjańskiej C^n dana jest funkcja:

$$f(X) \quad \text{gdzie} \quad X = (x_1, \dots, x_n).$$

Dany jest ponadto obszar D opisany nierównościami

$$g_i(X) \geq 0, \quad i = 1, \dots, K,$$

gdzie g_i — funkcje rzeczywiste.

Funkcja $f(X)$ określona jest w obszarze D . Należy znaleźć maksymalną wartość $f(X)$ w tym obszarze oraz współrzędne punktu, w którym funkcja tę wartość przyjmuje. Funkcję $f(X)$ nazywa się funkcją celu.

Rozwiązanie tego zagadnienia bywa bardzo trudne. Trudność zależy tu od postaci funkcji f i g_i . Jeżeli wszystkie te funkcje są liniowe — mamy do czynienia z problemem tzw. programowania liniowego. W takim przypadku znane są metody dokładnego rozwiązania problemu za pomocą maszyny matematycznej. Często jednak zdarza się w praktyce, że funkcje f i g_i są nieliniowe i skomplikowane tak dalece, że trudno powiedzieć coś o własnościach funkcji f oraz o cechach obszaru D opisanego przez funkcje g_i . W takich przypadkach (tzn. wtedy, kiedy nic nie można z góry założyć o f i g_i) nie istnieją ogólne metody rozwiązania zadania optymalizacyjnego, tzn. nie znamy sposobu gwarantującego znalezienie ekstremum. Stosuje się wówczas metody, które, chociaż matematycznie niedoskonałe, są atrakcyjne z punktu widzenia pracy inżyniera. Punktem wyjścia są tu tzw. metody losowe (zwane też metodami Monte Carlo). Wykorzystują one zdolność maszyny matematycznej do szybkiego sprawdzenia, czy dany punkt \bar{X} należy do D , oraz równie szybkiego obliczenia wartości $f(\bar{X})$. Metoda poszukiwania największej wartości funkcji f polega wówczas na realizacji następującego ciągu czynności:

1. Losuje się punkt \bar{X} (maszyna i to potrafi).
2. Sprawdza się, czy punkt ten należy do D , jeżeli należy — przechodzi się do punktu 3, w przeciwnym przypadku — wraca się do punktu 1.
3. Oblicza się wartość $f(\bar{X})$.
4. Jeżeli $f(\bar{X})$ jest pierwszą uzyskaną wartością — zapamiętuje się ją jako f_{\max} . W przeciwnym przypadku — porównuje się $f(\bar{X})$ z f_{\max} i o ile $f(\bar{X}) > f_{\max}$, podstawia się $f_{\max} = f(\bar{X})$.
5. Wraca się do punktu 1 powtarzając wielokrotnie procedurę 1–5.

Opisana metoda nie gwarantuje, oczywiście, znalezienia globalnego ekstremum funkcji f , jest czasochłonna i mało efektywna. Dokładność wyniku zależy od liczby badanych punktów, a więc od czasu pracy maszyny. Metodę tę stosuje się rzadko, natomiast istnieją jej modyfikacje pozwalające dochodzić do lepszych wyników — aleko szybciej.

Warto tu wspomnieć o tzw. metodzie błędzenia. Polega ona na realizacji ciągu następujących czynności:

1. Losuje się punkt $X^0 \in D$.
2. Otacza się ten punkt n -wymiarowym „prostopadłościanem” o środku X^0 i danych z góry długościach krawędzi (na ogół niewielkich). „Prostopadłościan” ten nazywać będziemy komórką K^0 o środku X^0 .
3. Losuje się punkt X^1 należący do K^0 i bada się, czy należy on do obszaru D . Jeżeli należy — oblicza się $f(X^1)$, otacza X^1 komórką i powtarza proces od punktu 2 dla X^1 (zamiast X^0). W przeciwnym przypadku — losuje się w komórce K^0 inny punkt i bada się go tak jak punkt X^1 .
4. Jeżeli przy tym p_0 kolejnych losowań w komórce K^0 nie daje efektu w postaci wylosowania punktu należącego do D — zmniejsza się komórkę dzieląc jej wymiary np. przez 2 i ponawia się próby. Jeżeli natomiast s_0 kolejnych losowań prowadzi do uzyskania punktów należących do D — zwiększa się wymiary komórki mnożąc je np. przez 2 i ponawia się próby.
5. Zapamiętuje się najlepsze wyniki (tzn. wartość funkcji celu i odpowiadający jej punkt).
6. Działania wg punktów 1–5 stanowią I etap metody. W II etapie realizuje się procedurę 1–5,

Przestrzeń kartezjańską n -wymiarową (ozn. C^n) nazywa się zbiór wszystkich n -elementowych ciągów liczb rzeczywistych. Płaszczyzna z układem współrzędnych może być interpretowana jako C^2 (bo każdy punkt możemy uważać za parę liczb), a przestrzeń trójwymiarowa z układem współrzędnych — jako C^3 . Oś liczbową jest przestrzenią C^1 . Ze względu na geometryczne interpretacje przestrzeni C^1 , C^2 i C^3 przy mówieniu o przestrzeniach C^n stosuje się terminologię geometryczną. W szczególności — elementy C^n nazywa się punktami.

Funkcja rzeczywista — funkcja, której wartości są liczbami rzeczywistymi.

Ekstremum globalne — punkt, w którym funkcja przyjmuje wartość największą lub najmniejszą w całym obszarze.

D. c. zad. F19

Przy ruchu ze zmienną masą całkowity pęd danej części liny nie równa się pędowi środka masy, (tutaj jest dwukrotnie większy). W równaniach (8) powinien występować całkowity pęd danej części liny, czyli lv_x i v_x powinny określać prędkość poszczególnych elementów liny, a nie ich środka masy. Ze względu na przybývającą (ubywającą) masę prędkość środka masy jest dwukrotnie mniejsza niż elementów liny,

$$T = R \frac{V\sqrt{2}}{2} \quad (\text{patrz równanie (6)}).$$



z tym że środek komórki przenosi się do nowego punktu tylko wówczas, gdy wartość funkcji f jest w tym punkcie lepsza niż w środku komórki. W II etapie punktami startowymi są najlepsze z punktów uzyskanych w I etapie (np. 10 tych punktów).

Naszukowana metoda jest efektywniejsza od zwykłych metod losowych. Odpowiednie dobranie wartości p_0 i s_0 pozwala na takie sterowanie procesem, że przeszukiwane jest wewnątrz obszaru D bądź jego brzeg. Ponieważ w zadaniach technicznych rozwiązanie (tzn. punkt, w którym funkcja f osiąga ekstremum globalne) leży na ogół na brzegu obszaru, stwarza to dodatkową korzyść dla rozwiązującego. Z drugiej strony stosowanie tej metody za pomocą maszyny jest czasochłonne i w gruncie rzeczy efekty nie są najlepsze.

Krokiem naprzód w stosunku do opisanych metod jest tzw. metoda osiowa (Gaussa-Zeidel). Realizacja jej przebiega następująco:

1. Losuje się punkt startowy $X^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ należący do D i oblicza $f(X^0)$.
2. Dla arbitralnie przyjętej liczby $h > 0$ oblicza się $f(x_1^0 + h, \dots, x_n^0)$.
3. Bada się czy $f(x_1^0 + h, \dots, x_n^0) > f(X^0)$. Jeżeli tak — oblicza się $f(x_2^0 + 2h, \dots, x_n^0)$ itd. dopóty, dopóki uzyskuje się wartości lepsze od $f(X^0)$. Jeżeli nie — oblicza się $f(x_1^0 - h, \dots, x_n^0)$ i postępuje analogicznie.
4. „Uzmiennia się” w powyższy sposób kolejno wszystkie współrzędne uzyskując „ścieżki” punktów równoległe odpowiednio do poszczególnych osi układu współrzędnych. Końcowy punkt ostatniej ścieżki zapamiętuje się jako najlepszy i wraca się do punktu 1_0 startując z nowo wylosowanego punktu.

Metoda ta daje niezłe wyniki dla funkcji o niewielkiej liczbie zmiennych. Dla funkcji o dużej liczbie zmiennych jest ona czasochłonna. Nie gwarantuje (podobnie, jak poprzednie metody) znalezienia ekstremum globalnego, a jej efektywność zależy od liczby ścieżek, a więc od czasu pracy maszyny. Na marginesie warto wspomnieć, że istnieje metoda wywodząca się z wyżej opisanej i wzbogacająca ją o obrót układu współrzędnych po określonych cyklach poszukiwań „wzdłuż osi”. W wielu przypadkach jest ona bardzo szybka i efektywna.

Odrębną klasę metod optymalizacyjnych stanowią tzw. metody gradientowe. Przykład takiej metody realizuje ciąg następujących czynności:

1. Losuje się punkt startowy $X^0 \in D$.
2. W punkcie X^0 oblicza się grad $f(X^0)$.
3. Określa się punkt $X^1 = X^0 + \text{grad } f(X^0)$.
4. Bada się czy $X^1 \in D$. Jeżeli należy — powtarza się proces od p. 2 dla $X^0 = X^1$ i dalej dla $X^{k-1} = X^k$. Jeżeli nie należy — świadczy to, że wektor gradientu „przeciął” brzeg obszaru. Sprawdza się wówczas,

czy punkt $X^k = X^{k-1} + \frac{1}{s} \text{grad } f(X^{k-1})$ należy do D (s jest daną z góry liczbą większą od 1).

Założona liczba takich badań z ϵ skutkiem negatywnym kończy „ścieżkę” gradientową. Zapamiętuje się wówczas ostatni punkt tej ścieżki należący do D oraz odpowiadającą mu wartość funkcji celu.

5. Powtarza się cały proces dla nowego punktu startowego itd.
6. Jeżeli ekstremum nie znajduje się na brzegu obszaru, proces kończony jest za pomocą osobnego kryterium (np. porównywanie dwóch sąsiednich wartości funkcji celu).

Metody gradientowe bywają szybkie i skuteczne dla wielu funkcji i obszarów. Również i one nie dają gwarancji uzyskania ekstremum globalnego.

Wadą wszystkich naszukowanych tu (a także innych) znanych metod jest ich niezbieżność. Dlatego ich wartość matematyczna jest zapewne niewielka lub żadna. Są one jednak z powodzeniem stosowane w rozwiązywaniu konkretnych zagadnień technicznych, które nie pozwalają opisać się za pomocą funkcji posiadających określone własności oraz określonych w obszarze spełniającym warunki regularności (np. wypukłym). Jeżeli nawet znaleziona za pomocą którejś z tych metod wartość f_{\max} nie jest ekstremum globalnym, to w każdym razie na ogół jest „lepsza” od np. wylosowanej czy odgadniętej. Dlatego są one pożytecznym instrumentem współpracy inżyniera z maszyną matematyczną.

Gradient — wektor, którego współrzędnymi są pochodne cząstkowe funkcji. Dla funkcji dwu zmiennych, na przykład, $\text{grad } f(x, y) =$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right). \text{ (Proszę sprawdzić, że}$$

$\text{grad } (x \cdot y) = (y, x)$). Kierunek tego wektora interpretuje się jako kierunek najszybszego wzrostu (spadku) wartości funkcji, a jego długość — jako miarę prędkości tego wzrostu (spadku).

Zbieżność metody. Metoda, pozwalająca na znajdowanie rozwiązań przybliżonych nazywa się zbieżną, jeśli można udowodnić, że ciąg otrzymywanych przy zastosowaniu tej metody rozwiązań przybliżonych jest zbieżny do rozwiązania dokładnego.

Od Red.: Nie zawsze zagadnienia optymalizacji polegają na maksymalizacji funkcji celu. Niekiedy zagadnień praktycznych nie da się sprowadzić do takiego modelu. Do tej sprawy wrócimy w przyszłości.

Korespondencyjne Towarzystwo Naukowe

Inicjatywa kol. Snopczyńskiego «Delta» 1975,1 — okazała się bardzo cenna. Wielu Czytelników prosi o zamieszczenie ich adresów chcąc nawiązać kontakt z kolegami o podobnych zainteresowaniach. Być może z czasem wypracujemy jakąś formę organizacyjną tych kontaktów — np. Młodzieżowe Towarzystwo Naukowe lub koła Młodzieżowe Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Czekamy na wypowiedzi. Na łamach «Delt» w kąci Korespondencyjne Towarzystwo Naukowe będziemy zamieszczać adresy Czytelników pragnących nawiązać kontakt listowny z kolegami i koleżankami.

Adresy

Jerzy Brołoń 95-021 Andrzejów k/Łodzi ul. Słowackiego 23
Miroslaw Pstrągowski 93-219 Łódź ul. Tatrzańska 69 m. 33
Artur Kalita 22-460 Szczepieszyn ul. Ogrodowa 17
Stanisław Wróbel 33-101 Tarnów ul. Traugutta 7/1

Tomasz Prokop 15-215 Białystok ul. Konopnickiej 12 m 9
Romuald Mirski 64-920 Piła ul. Bieruta 15 m 1
Tomasz Kasperski 84-300 Łębork ul. 15 Grudnia 29a m 6
Lidia Czajkowska 26-110 Skarżysko-Kam. ul. Zielona 47