delta

$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$ $\pi = 3{,}141593$

SPIS TREŚCI

W następnym numerze:

Logika kwantowa
Nowe koncepcje w informatyce

„Delta"
matematyczno-fizyczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i Polskiego Towarzystwa Fizycznego wydawany przy poparciu Polskiej Akademii Nauk oraz Ministerstwa Oświaty i Wychowania

zdjęcie na okładce
J. Sobolewski

Adres Redakcji
ul. Śniadeckich 8,
00-656 Warszawa, PTM

Zakład Narodowy im. Ossolińskich — Wydawnictwo. Wrocław, Oddział w Warszawie
Nakład 30000 egz. Objętość 2 ark. wyd.; 2,50 ark. druk.; papier offsetowy III kl., 80g, 61 × 86
Wydrukowano w Drukarni im. Rewolucji Październikowej, Warszawa, ul. Mińska 65.
Nr zam. 1774/74 B-56

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60,— cena prenumeraty półrocznej zł 30,—

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły — mające siedzibę w miastach wojewódzkich i powiatowych, zamawiać mogą prenumeratę wyłącznie za pośrednictwem miejscowych oddziałów i delegatur RSW-Prasa-Książka-Ruch w terminie do dnia 25 listopada na rok następny.

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły — mające siedzibę na wsi lub miejscowościach, w których nie ma oddziałów RSW-Prasa-Książka-Ruch, winny opłacać prenumeratę w terenowo właściwych urzędach pocztowych.

Prenumeratę krajową dla czytelników indywidualnych przyjmują urzędy pocztowe, listonosze i Centrala Kolportażu RSW-Prasa-Książka-Ruch, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, konto PKO 1-6-100020 w terminie do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 40% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje Biuro Kolportażu Wydawnictw Zagranicznych RSW-Prasa-Książka-Ruch, 00-840 Warszawa, ul. Wronia 23, konto PKO nr 1-6-100024.

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTĘ":

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.
Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, pojedynczych numerów i w kontynuacji; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.
Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, konto PKO nr 1-6-100312

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Cena 1 egzemplarza zł 5,— nr indeksu 35723/35550

Laserowa kompresja i synteza termojądrowa plazmy

Prof. dr Sylwester KALISKI, czł. rzeczywisty PAN

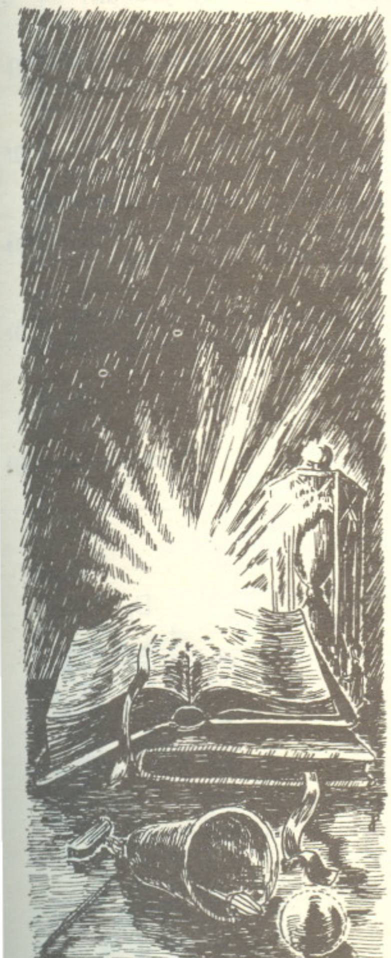
1. Od 25 lat trwają fascynujące zmagania fizyków i inżynierów z problemem syntezy jądrowej. Jak wiadomo, przy rozszczepianiu ciężkich jąder (uran, pluton) oraz przy łączeniu lekkich jąder (wodór, deuter, tryt, lit itd.) następuje znaczne wydzielanie energii jądrowej.
O ile rozszczepienie bazuje na surowcach drogich, rzadkich, o tyle synteza jądrowa, która jest *nota bene* energetycznie wydajniejsza, bazuje na surowcach powszechnie dostępnych. Rozszczepieniu towarzyszą szkodliwe promieniowania, synteza jest pod tym względem procesem na ogół czystym. Jest jednak znacznie trudniejsza do urzeczywistnienia.
W latach pięćdziesiątych, gdy Anglicy dokonali pierwszych eksperymentów z pinczem, wydawało się, że cel jest tuż, tuż. Potem okazało się, że sznur plazmowy, wytwarzany przy znacznych wyładowaniach prądowych prowadzących do ściskania i wysokotemperaturowego nagrzewania plazmy, jest niestabilny — rozlatuje się. I efekt syntezy na tej drodze jest dotychczas nieosiągalny.

Tak się z angielska (*pinch*) nazywa zjawisko skurczu plazmy, polegające na zwężaniu się obszaru wyładowania elektrycznego, w wyniku czego tworzy się swego rodzaju sznur plazmowy (wskutek takiego samościskania się plazmy wzrastają jej gęstość, ciśnienie i temperatura). Zjawisko warunkują efekty magnetodynamiczne. Modelowo można je wyjaśnić po prostu rozważając oddziaływanie magnetyczne między przewodnikami w kablu, przez które płynie prąd elektryczny w tym samym kierunku.

Przez 20 lat budowano mozolnie coraz to większe systemy, bazujące na różnych pułapkach magnetycznych, utrzymujących nagrzaną plazmę w stanie skupienia. Do najbardziej udanych w tym względzie należy rodzina radzieckich „tokomaków", opracowanych pod kierunkiem wybitnego fizyka radzieckiego Lwa Arcymowicza. Na przeszkodzie do osiągnięcia celu ostatecznego stanęły i tutaj problemy stabilności plazmy.
Podstawowym kryterium osiągnięcia progu syntezy jest tzw. kryterium Lawsona:

$$n\tau \geqslant 10^{14}(\mathrm{s/cm^3}),$$

gdzie n oznacza liczbę cząstek w $\mathrm{cm^3}$ plazmy, a τ — czas utrzymania jej w stanie skupienia (w tokomakach czas ten jest rzędu $0{,}01 \div 0{,}1$ s).
Na początku okresu prac nad pułapkami magnetycznymi brakowało trzech rzędów wielkości dla realizacji tego kryterium (1000 razy za mało). Przez 20 lat posunięto się naprzód o ponad 1,5 rzędu wielkości. Dziś do spełnienia tego kryterium brak jeszcze kilkadziesiątkrotnego zwiększenia gęstości plazmy i czasu jej utrzymania w stanie skupienia.



2. Dokładnie 10 lat temu dwóch uczonych, niezależnie, mianowicie Basow (laureat nagrody Nobla) w ZSRR i Dawson w USA, zwróciło uwagę na możliwość wykorzystania laserów do nagrzewania plazmy w bardzo krótkich okresach czasu, wykorzystując fakt, że impulsem laserowym można działać na zestaloną mieszaninę deuteru i trytu o gęstości $n \approx 5 \cdot 10^{22}\ \mathrm{cm^{-3}}$, co prowadzi do żądania, by τ było rzędu zaledwie $2 \cdot 10^{-9}$s. Wtedy czynnikiem utrzymującym plazmę w stanie skupienia byłaby bezwładność cząstek — po prostu w tak krótkim czasie, mimo ogromnych temperatur i ciśnień, plazma nie zdążyłaby się rozlecieć przed zajściem w niej reakcji termojądrowej.
Idea Basowa i Dawsona miała w 1964 roku charakter idei ogólnej, nie wchodzącej szczegółowo w mechanizmy możliwości realizacji tego procesu zarówno od strony fizycznej, jak i technicznej. Później okazało się, że droga, o której początkowo myśleli obaj uczeni, jest praktycznie nie w pełni realna.
Po prostu dlatego, że przy gęstości $n = 5 \cdot 10^{22}\ \mathrm{cm^{-3}}$ i czasie rzędu $2 \cdot 10^{-9}$ s tylko w znikomej części kulki (o masie rzędu miligrama) zdąży zajść reakcja syntezy, czas reakcji termojądrowej jest bowiem ponad 1000 razy dłuższy. W efekcie nie odzyskalibyśmy energii włożonej do nagrzania takiej kulki do temperatury syntezy, tj. około 100 mln K.
Czas ten stałby się wystarczający, gdyby np. udało się przedtem ścisnąć kulkę zmniejszając jej objętość ponad 1000 razy (ze wzrostem gęstości zwiększa się prędkość reakcji syntezy). Ale nie tylko to stało na przeszkodzie.
Obliczona energia potrzebna do nagrzania kulki zestalonej mieszaniny deuteru i trytu (D-T) o masie 1 mg do temperatury 100 mln K wynosiła 10^{10} J, a istniejące wtedy lasery dawały w impulsie nanosekundowym (1 ns $= 10^{-9}$ s) energię rzędu 0,1 J. Tym niemniej prace Basowa i Dawsona mają charakter pionierski i dziś już historyczny; otworzyły one nową, fantastyczną perspektywę realizacji syntezy termojądrowej za pomocą laserów.
Do osiągnięcia celu wytyczonego przez Basowa i Dawsona brakowało 11 rzędów wielkości, co w porównaniu z trzema w systemach pułapek magnetycznych oznaczać mogło czekanie wiekami na osiągnięcie odpowiedniego poziomu techniki

W wyniku łączenia się najlżejszych jąder w cięższe powstają też swobodne neutrony, zwane neutronami syntezy (dla odróżnienia ich od neutronów swobodnych powstających w efekcie innych zjawisk). Powstawanie ich wskazuje, że zachodzi reakcja syntezy jądrowej.

laserowej. Są jednakże dziedziny nauki i techniki, które pokonują normalny rozwój okresu „wieków" w parę lat.

Od czasu pojawienia się prac Basowa i Dawsona praktycznie do 1968 roku, w literaturze naukowej było cicho. W 1968 Basow ze współpracownikami ogłosił, że uzyskali oni za pomocą laserów temperaturę plazmy rzędu kilkunastu mln K i pierwsze neutrony syntezy. Basow operował wtedy już laserem o energii 20 J, zaś dokładniejsze wyliczenia pokazały, że wystarczyłoby do osiągnięcia syntezy energii lasera rzędu 10^9 J. A zatem w przeciągu trzech lat przeskoczono 3 rzędy wielkości.

Autor niniejszego artykułu pracował od 1966/67 r. nad możliwością wstrzeliwania (metodą klasycznego wybuchu) ciężkich otoczek (o odpowiednio dobranej gęstości) do plazmy, proponując wprowadzić impuls laserowy w momencie zbliżonym do momentu maksymalnego sprężenia plazmy.

Taki system powodował znaczne wydłużenie czasu skupienia plazmy (dzięki wstępnej kompresji i bezwładności otoczki). Energia potrzebna do osiągnięcia temperatur krytycznych spadła do 10^5 J, zaś lasery w tym czasie (1969–1970), gdy prace zostały opublikowane, dawały już 100 J w impulsie nanosekundowym. A zatem do celu zabrakło trzech rzędów wielkości, zaś 8 rzędów pokonano w przeciągu pięciu, sześciu lat. Ale pokonanie „ostatnich" rzędów wielkości jest zawsze trudniejsze i nie należy oczekiwać, że można będzie osiągać dalsze sukcesy w czasie wynikającym z ekstrapolacji osiągnięć okresu ostatniego.

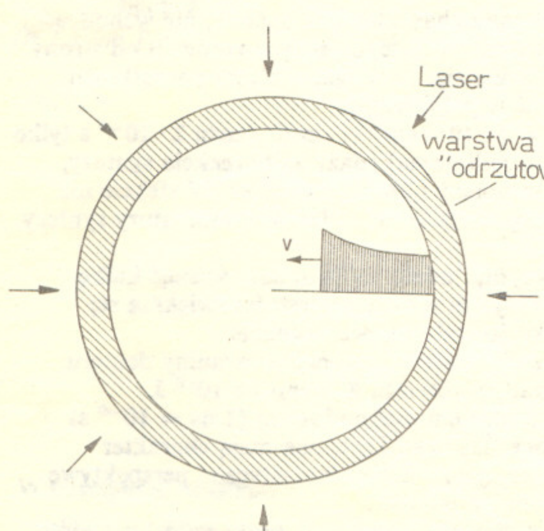
Trzeba tutaj dodać, że metoda wstrzeliwanych dodatkowo otoczek, poza pewnymi komplikacjami natury technicznej, dała również szereg niekorzystnych zjawisk związanych z promieniowaniem otoczek; jej praktyczna realizacja natrafiła na wiele dodatkowych niewiadomych.

Uczonych ciągle jednakże nurtowała myśl, że gdyby udało się ścisnąć materiał 1000 do 10 000 razy, wówczas przy nagrzewaniu kulki cała materia zdążyłaby przereagować jądrowo i reakcja stałaby się wydajna — opłacalna technicznie. Ale aby ścisnąć deuter 10^4 razy, należałoby wytworzyć horendalne ciśnienie 10^{17} paskali, czyli 10^{12} atm ($1 \text{ P} = 1 \text{ N/m}^2 \cong 10^{-5}$ atm) w centrum kuli. Dotąd metodami wybuchowymi (kumulacyjnymi) osiągnięto ciśnienia kilkunastu bilionów paskali, czyli kilkunastu milionów atmosfer, i zaledwie kilkakrotne sprężenie. A zatem wydawałoby się, że sprawa jest utopijna. Przełom nastąpił w 1972 r.

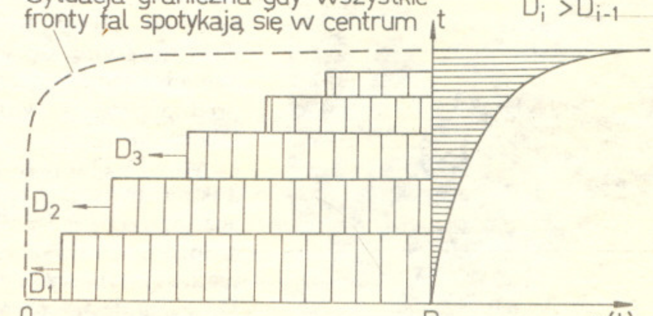
Trzech autorów równolegle: Brueckner oraz Nuckolls i współpracownicy w USA, a także autor niniejszego artykułu w Polsce, opublikowali tzw. laserową metodę kompresji plazmy. Na czym ona polega?

Wyobraźmy sobie kulkę plazmową (rys. 1) o średnicy około 0,1 cm, nagrzaną impulsami z koncentrycznego układu laserów tak, aby promieniowanie laserowe wnikało tylko na nieznaczną głębokość pod powierzchnię kulki — rzędu mikrometrów (nie możemy tutaj wchodzić w mechanizmy, na bazie których tego typu efekt można uzyskać). Wtedy gwałtownemu nagrzaniu podlega tylko zewnętrzna warstewka kulki.

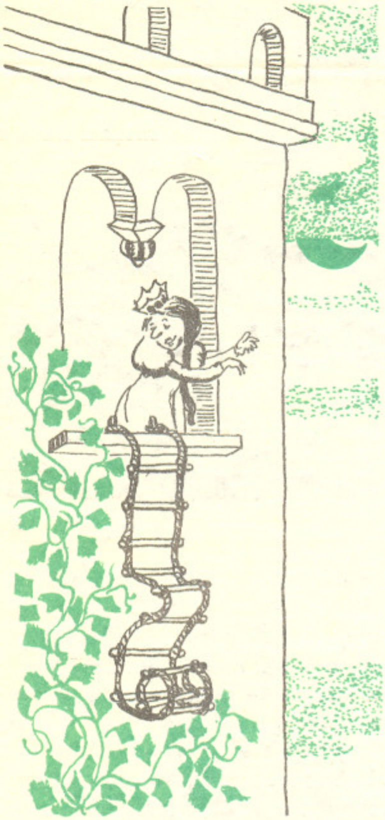
Do nagrzania tej warstewki trzeba znacznie mniejszej energii lasera. Zewnętrzna warstewka podlega gwałtownej ekspansji i odrzutowi na zewnątrz (ablacji), oddając



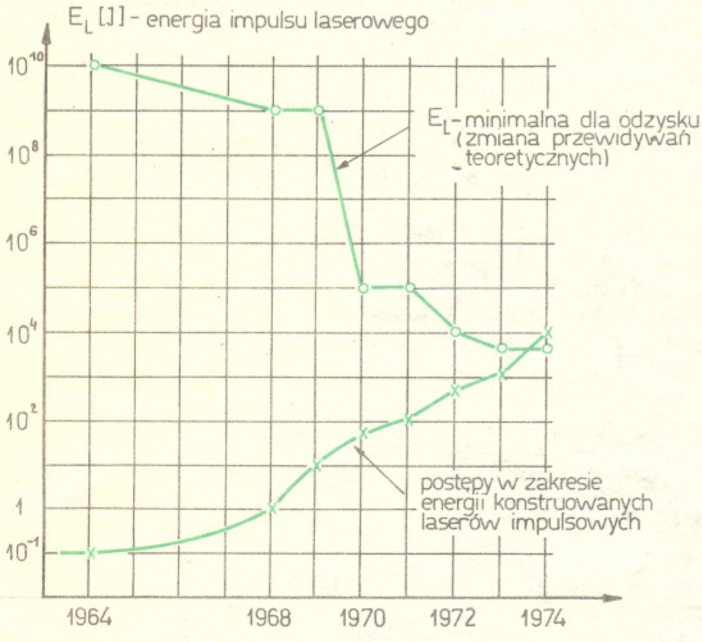
Rys. 1



Rys. 2

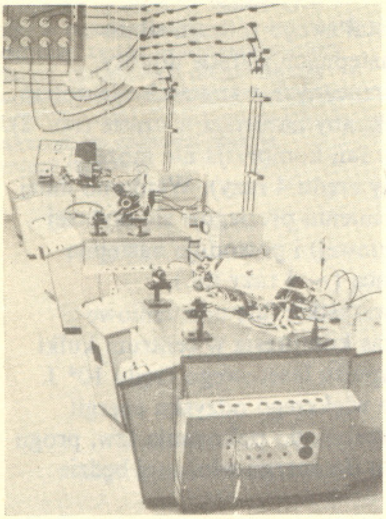


potężny impuls ściskający ku centrum kulki. Powstał swego rodzaju silnik odrzutowy. Laser dalej doprowadza energię do następnych warstw dopóty, dopóki fala uderzeniowa wywołana ciśnieniem odrzucanych warstewek nie dotrze do centrum kulki. Energię lasera kontroluje się tak, aby narastała w czasie (rys. 2). Z teorii fal uderzeniowych wiadomo, że na froncie fali kompresja nie może przekroczyć określonej wartości (dla naszej plazmy rzędu 4 razy). Wiadomo dalej, że każda następna fala uderzeniowa o wyższym ciśnieniu propaguje się szybciej ($D_i > D_{i-1}$, gdzie D_i — prędkość i-tej fali uderzeniowej) i powoduje następną kompresję plazmy ściśniętej przez falę poprzedzającą ($\sim$ 4 razy itd.).
Jeżeli profil impulsu laserowego dobrać tak, aby wszystkie fale uderzeniowe spotkały się jednocześnie w centrum kulki, wówczas kompresja w centrum kulki rzędu 10^3–10^4 jest osiągalna za pomocą energii impulsu laserowego rzędu 10^4 J. Ściślej — energia potrzebna do uzyskania znacznie większego odzysku energii aniżeli włożona wynosi 10^4–10^5 J, zaś energia potrzebna do pokonania tzw. progu krytycznego, przy którym stosunek energii odzysku do energii włożonej będzie większy niż 1, jest rzędu tylko kilku tysięcy dżuli.
Metoda kompresyjna stanowi przełom w laserowej mikrosyntezie. W latach 1973–1974 zbudowano już pojedyncze lasery na szkle neodymowym, o energii 1000 J w impulsie nanosekundowym. Podobne wyniki osiągnięto w roku 1974 w laserach gazowych na CO_2.
Pierwsze operują długością fali 1,06 μm, drugie 10,6 μm. W związku z tym zasady ich stosowania do mikrosyntezy są odmienne. Oczywiście do laserowej syntezy można stosować zespoły laserów (np. prof. Basow osiągnął za pomocą 20 laserów po 100 J energię 2000 J i buduje obecnie układ na 5000 J). Amerykanie budują laser gazowy na 10 000 J. Tak więc krzywe dostępnej energii impulsu laserowego i energii potrzebnej do mikrosyntezy przecięły się. Masa kulki D-T zredukowała się obecnie do rzędu ($10^{-4} \div 10^{-5}$) g. Energia uzyskiwana z „wybuchu" takiej kulki wskutek syntezy termojądrowej odpowiada w przybliżeniu energii wyzwolonej z około kilograma materiału wybuchowego! 100 takich wybuchów w ciągu sekundy to w procesie ciągłym odpowiednik elektrowni o mocy przekraczającej 1 GW!
Tak więc w przeciągu 10 lat bariera 11 rzędów wielkości została teoretycznie pokonana. Takiego fantastycznego postępu chyba nie zna dotąd historia nauki. Sytuację scharakteryzuje rys. 3. „Laserowa droga" do syntezy jądrowej jest więc — jak wykazały dotychczasowe badania teoretyczne i doświadczalne (jeśli chodzi o zagadnienia podstawowe) — możliwa i fizycznie realna. Zadaniem fizyków i inżynierów jest obecnie szczegółowa realizacja tego programu. Od strony technicznej, a również i fizycznej należy pokonać jeszcze ogrom trudności; pojawiają się nowe uboczne efekty, które podobnie jak niestabilności plazmy w tokomakach mogą w decydujący sposób wpłynąć na realizację przedsięwzięcia. Stąd końcowy efekt może stać się osiągalny w przeciągu kilku lat, gdy trudności te nie będą zasadnicze, może jednakże też znacznie się oddalić.

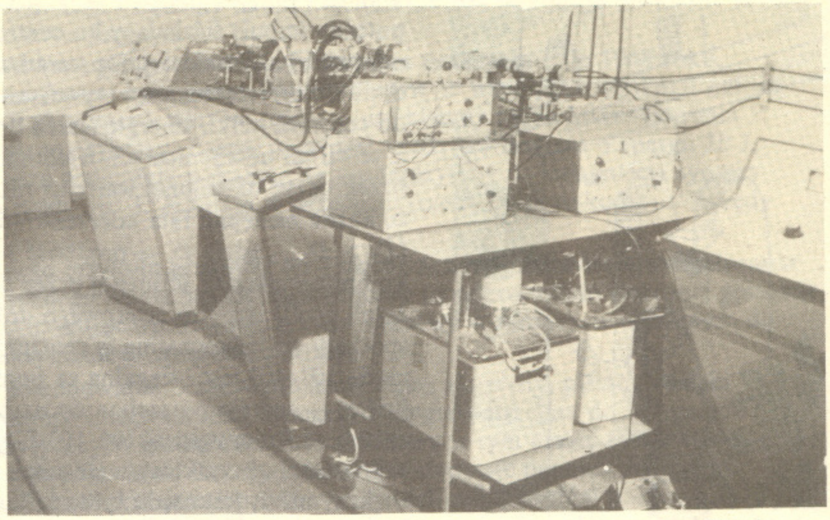


Rys. 3

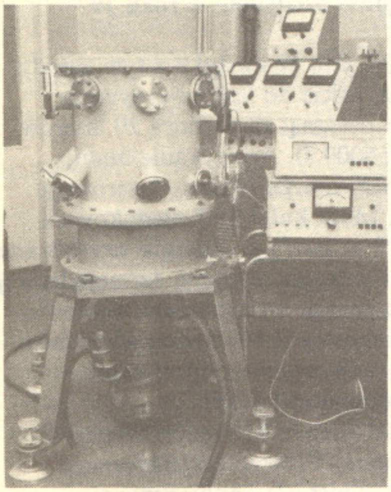
Nie podlega jednakże kwestii, że metody laserowe zbulwersowały świat i stały się jednym z podstawowych konkurentów w wyścigu do syntezy termojądrowej.
W latach 1972–1974 pojawiło się szereg propozycji mutacji metody nakreślonej wyżej; z braku miejsca nie omawiam ich tutaj. Dotąd 6 państw uzyskało za pomocą laserów takie temperatury (rzędu dziesiątek milionów kelwinów), iż zachodzi mikrosynteza termojądrowa, przy której wydzielają się neutrony syntezy. Są to: ZSRR, USA, Francja w pierwszej grupie, w drugiej zaś RFN, Polska i Japonia. W Polsce eksperyment ten zrealizowano w Wojskowej Akademii Technicznej. Pierwszy efekt neutronowy mikrosyntezy termojądrowej uzyskaliśmy w Polsce w kwietniu 1973 r. Wszystkie efekty syntezy otrzymano przy większym wkładzie energii laserowej aniżeli energia odzysku.
Obecnie, jak już wspomniałem, idzie o taką eskalację procesu, aby odzysk był najpierw dodatni, a potem — aby pokrywał wszelkie straty i aby mimo to przeważał. O to toczy się obecnie batalia.



Fot. 2



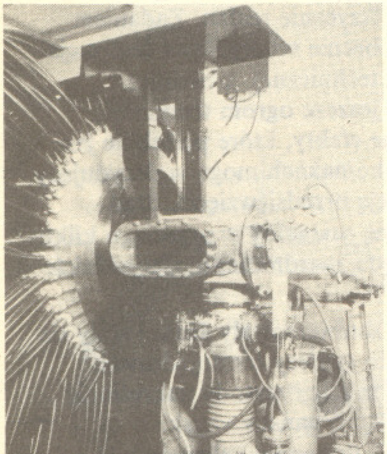
Fot. 1



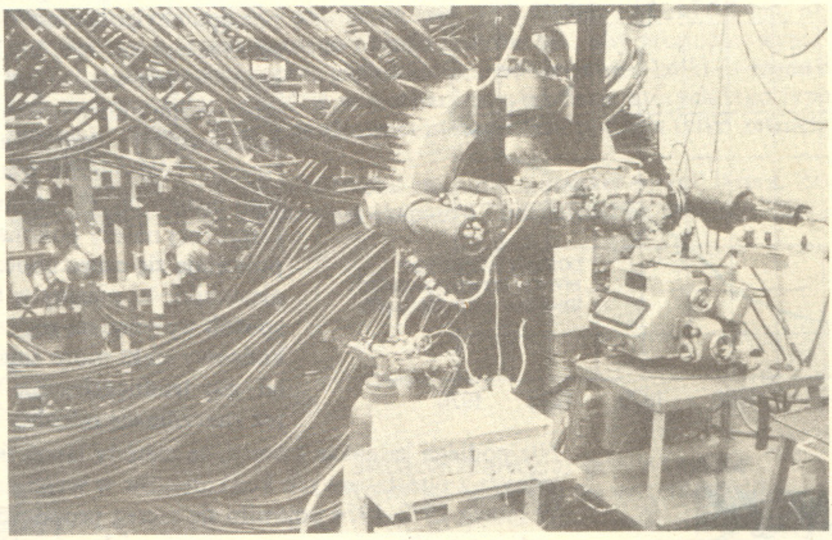
Fot. 3

Układy laserowe i głowice pomiarowe, na których zrealizowano polski eksperyment (energia lasera rzędu 40 J), pokazane są na zdjęciach 1, 2 i 3.

3. Budowa laserów o energiach rzędu 10 tys. J jest niezwykle kosztowna, idzie w miliardy. Trudno byłoby ponieść tak wielkie koszty w kraju naszej wielkości. W związku z tym pracujemy w Polsce nad systemem laser–focus, gdzie focus jest to koncentrator plazmowy, skupiający wstępnie plazmę, na którą następnie działa się impulsem laserowym. Pozwoli to obniżyć krytyczną wartość impulsu. Układ focus pokazany jest na zdjęciach 4 i 5. Został zbudowany dla WAT w IBJ. Niezależnie od tego, autor niniejszego artykułu opracował w 1973 r. metodę prekompresji wybuchowej plazmy, poprzedzającej wstępnie kompresję laserową. Metoda ta, oparta na specjalnych technikach wybuchowych, za pomocą których osiągnięto niezwykle wysokie, nieznane dotychczas efekty kompresyjne, pozwala obniżyć krytyczną wartość energii impulsu laserowego kilkakrotnie, tak że teoretycznie mikrosynteza jest osiągalna przy poziomie energii impulsu rzędu 1000 J, co leży już w granicach naszych możliwości. Możliwości te poza tym potęgują się dzięki współpracy z ZSRR — z grupą prof. Basowa.



Fot. 4



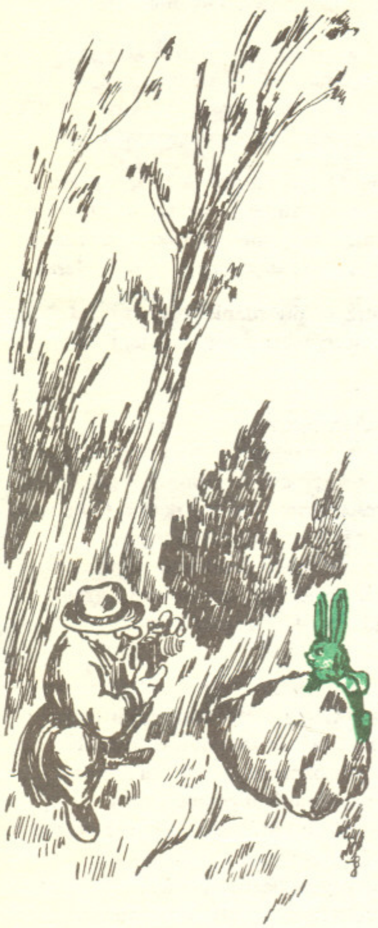
Fot. 5

4. Trudno powiedzieć, jak potoczą się losy „drogi laserowej". Stała się ona jednakże już dziś rewolucyjna. Trudności fizycznych i technicznych jest jeszcze ogrom — dotyczy to w szczególności rozwiązań samych reaktorów mikrosyntezy. Gdyby jednak trudności te zostały pokonane, wówczas skok w rozwoju ludzkości dałby się porównać tylko ze skokiem, jaki spowodowało odkrycie elektryczności. Oznaczałoby to nie tylko wybawienie człowieka od wszelkich kryzysów energetycznych, ale dałoby jeszcze możliwości sztucznego kształtowania klimatu, ocieplania pól, nowe perspektywy komunikacyjne, w szczególności kosmiczne, nowe perspektywy materiałowe, badawcze, słowem — ogromny skok w rozwoju ludzkości. Najbliższe lata winny rozstrzygnąć ten frapujący problem.

Szczegółowe omówienie zagadnień przedstawionych w artykule znajdzie Czytelnik w książce autora *Laserowa mikrosynteza termojądrowa*; książka ta ukaże się w serii „Omega".

Twierdzenie Gödla

Dr Leszek PACHOLSKI



Jedną z najistotniejszych cech matematyki współczesnej jest powszechne używanie metody aksjomatycznej. Chociaż metoda ta była znana już w czasach Euklidesa, dopiero na przełomie wieków dziewiętnastego i dwudziestego sformułowano ją jako zasadę i stworzono podstawy jej badania. Jeden z najwybitniejszych matematyków wszystkich czasów, D. Hilbert (1862–1943), opisał podstawowe warunki, które powinien spełniać system aksjomatyczny, aby był użyteczny i słuszny. On też sformułował program, zwany powszechnie programem Hilberta, sprowadzenia całej matematyki do systemu aksjomatycznego. Możliwość realizacji tego programu stała się w naszym stuleciu przedmiotem intensywnych badań naukowych. Wykazały one, że programu Hilberta nie uda się zrealizować. Wynika to z twierdzenia Churcha i Gödla o niezupełności i nierozstrzygalności arytmetyki.

Najstarszy system aksjomatyczny — geometrię Euklidesa — można poznać już na lekcjach geometrii. W systemie tym, podobnie jak w innych systemach aksjomatycznych, istnieją dwa rodzaje prawd. Prawdy jednego rodzaju to te, których środkami matematyki udowodnić nie można. Noszą one nazwę aksjomatów lub pewników. Przyjmuje się je za oczywiste. Są one fragmentem opisu pewnej rzeczywistości fizycznej (np. aksjomaty geometrii są opisem przestrzeni, w której poruszają się ciała niebieskie). Inna grupa prawd to twierdzenia, czyli zdania, które można z aksjomatów wyprowadzić.

Jednym ze starszych systemów aksjomatycznych jest aksjomatyka liczb naturalnych, stworzona przez włoskiego matematyka G. Peano. Opisuje ona własności liczb naturalnych oraz działań na liczbach naturalnych: dodawania, mnożenia etc. Aksjomaty Peana są oczywiste. Aby się o tym przekonać, wystarczy przejrzeć ich listę:

$$x+1 \neq 0;$$
$$\text{jeśli } x+1 = y+1, \text{ to } x = y;$$
$$x+0 = x; \; x+(y+1) = (x+y)+1;$$
$$x \cdot 0 = 0; \; x(y+1) = xy+x.$$

Ostatni, nie wymieniony jeszcze aksjomat indukcji stwierdza, że zawsze, jeśli istnieje choć jedna liczba naturalna o danej własności, istnieje również najmniejsza liczba o tej własności.

Mimo iż podana wyżej aksjomatyka jest bardzo uboga, wszystkie nawet najbardziej skomplikowane twierdzenia teorii liczb można przy jej pomocy udowodnić.

Przypomnijmy, na czym polega dowodzenie twierdzeń. Dowód twierdzenia można podzielić na pewną liczbę elementarnych kroków. W każdym z nich korzysta się z aksjomatów, wcześniej udowodnionych twierdzeń, a także ze zdań, które wyprowadzone zostały we wcześniejszych krokach dowodu. Na ich podstawie wyciąga się wnioski, które powinny być oczywiste. Wniosek otrzymany w ostatnim kroku — to twierdzenie.

Podana wyżej definicja dowodu jest bardzo nieprecyzyjna. Niejasne jest bowiem, co to znaczy „oczywisty". Aby tę nieścisłość usunąć, wyodrębniono niewielką liczbę tak zwanych reguł wnioskowania. Reguła wnioskowania to zasada, która orzeka, że jeśli pewne zdania zwane przesłankami są prawdziwe, to prawdziwe jest też inne zdanie — wniosek. W każdej z reguł liczba przesłanek i ich kształt są ściśle określone, a gdy przesłanki są dane, wniosek jest jednoznaczny. Przykładem takiej reguły jest reguła odrywania. Mówi ona, że zdanie *B* jest prawdziwe, jeśli prawdziwe są: zdanie *A* oraz zdanie „jeśli *A*, to *B*".

Obecnie możemy podać bardziej precyzyjną definicję dowodu. Dowód jest to ciąg elementarnych kroków polegających na wypisywaniu zdań prawdziwych, przy czym za zdania prawdziwe uznaje się aksjomaty, wcześniej udowodnione twierdzenia i te zdania, które przy pomocy reguł wnioskowania można wyprowadzić ze zdań wypisanych wcześniej. W ten sposób sprawdzenie poprawności dowodu sprowadza się do przejrzenia listy reguł wnioskowania, aksjomatów i wcześniejszej części dowodu.

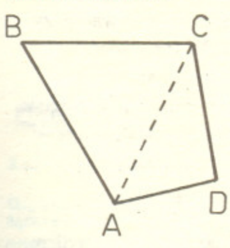
Może nasunąć się pytanie, czy można zbudować kompletną listę reguł wnioskowania, to znaczy taką, aby każde twierdzenie posiadało dowód przy użyciu reguł wnioskowania znajdujących się na tej liście. Odpowiedź na to pytanie jest pozytywna. Wynika to z twierdzenia K. Gödla o zupełności.

Aby reguły wnioskowania mogły precyzyjnie opisać metodę dowodzenia, zdania, do których te reguły stosujemy, muszą być wyrażone w możliwie prostym i jednoznacznym języku. Na szczęście język matematyki jest taki; ponadto, gdy zachodzi potrzeba, język używany na co dzień przez matematyków można zastąpić językiem formalnym, w którym możliwe jest zapisanie najbardziej skomplikowanych zdań wyłącznie przy użyciu symboli.

Podstawowym obiektem języka formalnego jest formuła. Do budowania formuł służą spójniki

Rozwiązanie zadania M43.

Załóżmy, że w czworokącie wypukłym *ABCD* zachodzi nierówność

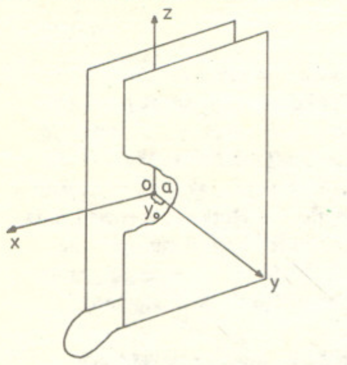


(1) $AB \geq AC$.

Wówczas (zob. rysunek)
$\sphericalangle BCA \geq \sphericalangle ABC$,
skąd $\sphericalangle BCD > \sphericalangle BCA \geq \sphericalangle ABC > \sphericalangle DBC$
a więc $BD > CD$. Dodając stronami nierówność ostatnią i (1) otrzymujemy $AB+BD > AC+CD$. Tak więc wykazaliśmy nie wprost żądane twierdzenie. Czytelnik zechce się zastanowić, czy twierdzenie pozostaje prawdziwe bez założenia wypukłości czworokąta *ABCD*.

Rozwiązanie zadania F15.

Wprowadźmy układ współrzędnych jak na rys. 1 i przyjmijmy, że ciało o ładunku Q



znajduje się w punkcie o współrzędnych $x = z = 0$, $y = y_0$. Ciało to indukuje na wewnętrznych powierzchniach okładek kondensatora ładunek powierzchniowy o sumarycznej wartości — Q. (Zgodnie z twierdzeniem Gaussa). Ładunek na okładkach jest rozłożony nierównomiernie. Jednakże całkowity ładunek zgromadzony na każdej z okładek zależy, przy ustalonych Q i a, tylko od odległości ciała o ładunku Q od danej okładki. Dla naszych celów wystarczy znaleźć tę zależność.

Zgodnie z zasadą superpozycji wypadkowe pole elektrostatyczne pochodzące od wielu ładunków jest sumą pól elektrostatycznych wywołanych przez poszczególne ładunki. Zastosujmy tę zasadę do naszego problemu. Wynika z niej, że np. umieszczenie dodatkowego ciała o ładunku Q w dowolnym punkcie płaszczyzny $y = y_0$, wewnątrz kondensatora, podwaja całkowity ładunek powierzchniowy obu okładek. Można to spostrzeżenie uogólnić stwierdzając, że całkowity ładunek indukowany na okładkach nie zależy od rozmieszczenia ładunków w płaszczyźnie $y = y_0$ wewnątrz kondensatora. Zamiast więc rozpatrywać skomplikowany problem naładowanego ciała punktowego umieszczonego wewnątrz kondensatora, możemy rozwiązać zagadnienie równomiernie naładowanego wycinka płaszczyzny o powierzchni równej powierzchni okładek i o sumarycznym ładunku Q, umieszczonym w płaszczyźnie $y = y_0$. Dla obu przypadków całkowity ładunek na każdej z okładek kondensatora jest taki sam. Oczywiście inny będzie rozkład powierzchniowy ładunku na okładkach, ale to dla naszego zadania nie ma znaczenia. Ponieważ okładki kondensatora są połączone drutem i mają równy potencjał, więc nowy układ jest równoważny układowi dwu równolegle połączonych kondensatorów płaskich. Ładunek zgromadzony na okładkach jest proporcjonalny (przy ustalonej różnicy potencjałów) do pojemności kondensatora, czyli w przypadku kondensatora płaskiego jest odwrotnie proporcjonalny do odległości między okładkami. Stąd stosunek ładunków na okładkach wynosi:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{a-y_0}{y_0}.$$

Ponieważ $-Q = Q_1+Q_2$, więc

$$Q_2 = -Q\frac{y_0}{a}.$$

Przesuwając ciało o ładunku Q o odcinek Δy zmieniamy ładunek Q_2 o $\Delta Q_2 = -Q\frac{\Delta y}{a}$.

I taki właśnie ładunek ΔQ_2 przepłynie przez drut przy przesunięciu ciała naładowanego o odcinek o długości Δy.

logiczne, kwantyfikatory i formuły atomowe. Formuły atomowe są różne dla różnych teorii matematycznych. W teorii liczb są to sensowne wyrażenia utworzone z liczb, zmiennych, czyli liter $x, y, z, \ldots$, oraz symboli $+, \cdot, =, 0, 1$ (ew. innych, które używane są w arytmetyce liczb naturalnych). Spójniki logiczne to wyrażenia „oraz" ($\wedge$), „lub" ($\vee$), „nieprawda, że" ($\sim$), „jeśli ..., to" ($\Rightarrow$). W nawiasach wypisane są symbole, których używa się zamiast odpowiednich zwrotów w języku polskim. Kwantyfikatory są to zwroty „dla pewnego a" ($\bigvee_a$) oraz „dla każdego a" ($\bigwedge_a$). Formuła to odpowiednio połączony ciąg formuł atomowych, spójników logicznych i kwantyfikatorów. Jeśli zmienna występuje pod kwantyfikatorem, nazywamy ją zmienną związaną. Jeżeli w formule wszystkie zmienne są związane, to formułę taką nazywamy zdaniem. Jeśli pewna zmienna nie jest związana, to nazywamy ją zmienną wolną. I tak na przykład w formule $\bigvee_z (yz = x)$ oznaczającej, że x jest podzielne przez y, z jest zmienną związaną, natomiast y i x są zmiennymi wolnymi. W formule „dla każdego y, jeśli x jest podzielne przez y, to $x = y$ lub $y = 1$", która oznacza, że x jest liczbą pierwszą, x jest zmienną wolną, y natomiast jest zmienną związaną. Ostatnią formułę można zapisać używając wyłącznie spójników logicznych, kwantyfikatorów i formuł atomowych teorii liczb — $\bigwedge_y (\bigvee_z (zy = x) \Rightarrow x = y \vee y = 1)$. Jeżeli w formule wszystkie zmienne wolne zastąpimy przez liczby, otrzymamy zdanie. Na przykład zdaniem będzie formuła $\bigwedge_y (\bigvee_z (yz = 7) \Rightarrow 7 = y \vee y = 1)$, otrzymana z poprzedniej przez podstawienie liczby 7 w miejsce jedynej zmiennej wolnej x.

Reguły wnioskowania dla języka symbolicznego stają się zasadami, według których ciąg symboli (formułę) uznajemy za „prawdziwy", jeśli prawdziwe są inne ciągi symboli. Można przy tym reguły wnioskowania opisać w sposób na tyle precyzyjny, że posługiwanie się nimi polega na mechanicznym porównywaniu ich budowy. Rozumienie treści formuł jest tu zbędne. Czynnością mechaniczną jest też wypisywanie wniosków otrzymanych przy pomocy ustalonej reguły dowodzenia z danych przesłanek. Można więc wykonanie tych czynności przekazać maszynom liczącym. Odpowiednio zaprogramowana maszyna jest w stanie stwierdzić, czy zadana formuła jest wnioskiem z innych formuł. Potrafi też podać wniosek, gdy ma dane reguły dowodzenia i przesłanki.

Powszechnie znany jest sposób porozumiewania się z maszyną liczącą. Programy, polecenia oraz dane koduje się za pomocą otworów na taśmie papierowej. Na takiej taśmie maszyna drukuje też odpowiedzi na zadane pytania. W podobny sposób można na taśmie zakodować formuły. Jeżeli, tak jak się to często robi, przyjmiemy, że dziurka w taśmie oznacza jedynkę, natomiast brak dziurki oznacza zero, to każdy kod na taśmie stanie się rozwinięciem pewnej liczby naturalnej w systemie dwójkowym. Wobec tego można utożsamić kod formuły z odpowiadającą mu liczbą. Po to, aby otrzymać kod wniosku, gdy dane są kody przesłanek i gdy dana jest reguła dowodzenia, którą należy zastosować, maszyna wykona pewną liczbę operacji arytmetycznych. Z każdą regułą dowodzenia związana jest przeto funkcja całkowitoliczbowa o tej własności, że wartość tej funkcji na kodach przesłanek jest kodem wniosku. Funkcję tę można wyrazić przy pomocy działań arytmetycznych $+$, $\cdot$, etc.

Przyjmijmy dla uproszczenia, że są dwie reguły dowodzenia, każda o dwóch przesłankach. Niech f_1, f_2 będą funkcjami odpowiadającymi tym regułom. Dalej niech $a_1, \ldots, a_n$ będą kodami aksjomatów. Jeśli zadany jest ciąg formuł o kodach $b_1, \ldots, b_k$, to ciąg ten jest dowodem, gdy

$$\bigwedge_{i\leqslant k} (\bigvee_{j\leqslant n} (b_i = a_j) \vee \bigvee_{s<i} \bigvee_{t<i} (f_1(b_s, b_t) = b_i \vee f_2(b_s, b_t) = b_i)).$$

Powyższy wzór w sposób symboliczny opisuje to, że każdy element ciągu $b_1, \ldots, b_k$ jest aksjomatem lub też wynika z wcześniejszych elementów na mocy jednej z reguł dowodzenia. Wyżej opisaną formułę, oznaczającą, że ciąg $b_1, \ldots, b_k$ jest kodem dowodu, oznaczamy przez $E'(b_1, \ldots, b_k)$. Zadany ciąg liczb naturalnych $b_1, \ldots, b_k$ można w prosty sposób zakodować przy pomocy jednej liczby naturalnej $p_1^{b_1} \ldots p_k^{b_k}$, gdzie p_i jest i-tą liczbą pierwszą. W ten sposób nie tylko pojedyncze formuły, ale także ciągi formuł będą utożsamiane z liczbami naturalnymi. Z formuły E' można w łatwy sposób otrzymać formułę $E(x)$ oznaczającą, że x jest kodem ciągu liczb, które są kodami formuł tworzących dowód. Niech f oznacza funkcje taką, że jeśli x jest kodem ciągu, to $f(x)$ jest ostatnim elementem tego ciągu. Oznaczmy przez $D(y)$ formułę $\bigvee_x (E(x) \wedge f(x) = y)$. Nietrudno zauważyć, że $D(y)$ oznacza, iż y jest kodem twierdzenia.

Oczywiście to, że są tylko dwie reguły i skończona liczba aksjomatów, jest dużym uproszczeniem. Wypisanie formuły E oraz D bez tych uproszczeń jest nieco bardziej skomplikowane. Zasada jest jednak ta sama.

W czwartym wieku przed naszą erą, w czasach gdy Kreteńczycy byli sławnymi na cały świat kłamcami, Eubulides, uczeń Euklidesa, postawił pytanie: „Czy Kreteńczyk Epimenides mówił prawdę, gdy mówił «kłamię»?". Na to pytanie nie można udzielić poprawnej odpowiedzi. Jeśli bowiem mówił prawdę, to prawdziwe było zdanie „kłamię", a przeto prawdy nie powiedział. Jeśli natomiast skłamał, to mówiąc „kłamię" mówił prawdę, a więc nie kłamał.

Przytoczone powyżej pytanie nosi nazwę antynomii kłamcy lub paradoksu Epimenidesa i jest jednym z wielu paradoksów, które od starożytności spędzały sen z powiek filozofom i zapładniały ich wyobraźnię, zmuszały do nieustannych rewizji poglądów na znane i często bardzo proste sprawy. Wśród antynomii można wyróżnić bogatą klasę tak zwanych antynomii semantycznych, do których należy antynomia kłamcy. Istota tych antynomii polega na tym, że buduje się je ze zdań autoreferujących, to znaczy orzekających coś o sobie. „Kłamię" Epimenidesa stwierdza, że zdanie „kłamię" jest kłamstwem.

Podam jeszcze jeden przykład antynomii tego samego typu — oczywiście nieznany w starożytności. Przypuśćmy, że mamy do dyspozycji doskonałą maszynę cyfrową z olbrzymią pamięcią, szybko działającą i niezawodną. Na wyjściu maszyny umieszczamy przyrząd, który w chwili gdy maszyna drukuje odpowiedź „nie", wyłącza ją z sieci, natomiast na inne sygnały nie reaguje. Podajemy maszynie informacje o działaniu tego przyrządu i zadajemy pytanie „czy po udzieleniu odpowiedzi na to pytanie zostaniesz wyłączona z sieci?". I cokolwiek maszyna wydrukuje, odpowiedź będzie błędna. Jeśli wydrukuje „tak", przyrząd na tę odpowiedź nie zareaguje i maszyna nie zostanie wyłączona, jeśli natomiast wydrukuje „nie", przyrząd zareaguje i maszyna zostanie wyłączona wbrew temu, co wydrukowała.

Można także zbudować bardziej skomplikowaną antynomię, z pomocą której można otrzymać wspomniane na wstępie twierdzenie Churcha i Gödla. Z twierdzenia tego wynika między innymi, że program Hilberta zaksjomatyzowania całej matematyki nie może zostać zrealizowany. Jakikolwiek rozsądny układ aksjomatów przyjmiemy, zawsze znajdziemy zdanie, którego przy pomocy tych aksjomatów nie uda się ani udowodnić, ani obalić.

Zbiór aksjomatów będziemy nazywali niesprzecznym, jeśli przy jego pomocy nie można udowodnić zdań sprzecznych. Układ aksjomatów nazywamy zupełnym, jeśli każde zdanie można przy jego pomocy udowodnić albo obalić. Układ jest obliczalny, jeśli można tak zaprogramować maszynę, żeby umiała stwierdzić, czy dane zdanie jest twierdzeniem. Używając przed chwilą zdefiniowanych pojęć, można sformułować twierdzenie Gödla: żaden obliczalny i niesprzeczny układ aksjomatów arytmetyki nie jest zupełny.

Istotą obu cytowanych wcześniej antynomii jest występowanie w nich zdań autoreferujących. Kody formuł arytmetyki można utożsamić z liczbami naturalnymi. Zdania arytmetyki opisują własności liczb, może się więc zdarzyć, że formuła orzeka o swoim kodzie, a więc w pewnym sensie o sobie. Fakt, że formuła jest twierdzeniem, jest równoważny z tym, że po podstawieniu jej kodu do formuły D otrzymamy zdanie prawdziwe. A więc tu także istnieje możliwość zbudowania zdania autoreferującego, wystarczy do formuły D podstawić kod tej formuły.

Gdy dana jest formuła, odpowiednio zaprogramowana maszyna może podstawić dowolną liczbę w miejsce zmiennej wolnej. W szczególności za tę zmienną maszyna może podstawić kod tej formuły. Mając dany kod x formuły X maszyna będzie mogła wydrukować kod zdania Y, otrzymanego przez podstawienie liczby x do formuły X. Proces obliczania kodu y, gdy dany jest kod x, opisuje pewną funkcję arytmetyczną. Oznaczmy ją literą F.

Niech A będzie zaprzeczeniem zdefiniowanej wyżej formuły D. Wtedy $A(x)$ oznacza, że x nie jest kodem twierdzenia. Z formuły A tworzymy nową formułę podstawiając $F(x)$ w miejsce zmiennej x. Tak otrzymaną formułę oznaczamy literą B, jej kod natomiast literą b. Oczywiście b można obliczyć, gdy tylko dany jest kod f funkcji F oraz kod formuły A. Podstawiając b w miejsce zmiennej wolnej w formule B otrzymujemy zdanie C. Z definicji funkcji F wynika, że kod c zdania C jest równy $F(b)$. Okazuje się, że zdanie C oraz zdanie $A(c)$ są równoważne. Istotnie $A(c)$ to $A(F(b))$, gdyż $c = F(b)$. Natomiast C to $B(b)$. Ale $B(x)$ — to z definicji $A(F(x))$, a więc $B(b)$ jest także równe $A(F(b))$. W ten sposób przez kolejne podstawienie do formuły jej kodu, a więc stosując metodę zasugerowaną przez przytoczone antynomie, znaleźliśmy dla danej formuły A zdanie samoreferujące B, które jest równoważne ze zdaniem $A(c)$.

Jeśli układ aksjomatów jest zupełny, C powinno być twierdzeniem lub zaprzeczeniem twierdzenia. Okazuje się jednak, że jest to niemożliwe. Przypuśćmy bowiem, że C jest twierdzeniem. Wtedy zdanie $A(c)$, które jest z nim równoważne, jest także twierdzeniem. To znaczy twierdzeniem jest fakt opisany przez $A(c)$ — „c jest kodem zdania, które nie jest twierdzeniem", a więc C nie jest twierdzeniem. Z drugiej strony, jeśli założyć, że twierdzeniem jest zaprzeczenie zdania C, to twierdzeniem będzie zdanie „c nie jest kodem twierdzenia", czyli — $A(c)$. Ale $A(c)$ jest równoważne z C, przeto C jest także twierdzeniem. W obu przypadkach z założenia, że pewne zdanie jest twierdzeniem, wynika, że twierdzeniem jest jego zaprzeczenie, co jest niemożliwe, jeśli tylko układ aksjomatów jest niesprzeczny.

Tym samym pokazaliśmy, że nie można podać takiego układu aksjomatów arytmetyki, przy pomocy którego można by rozstrzygnąć prawdziwość wszystkich zdań. W podobny sposób można też udowodnić, że nie ma algorytmu pozwalającego na sprawdzenie czy zdania arytmetyki są, czy nie są twierdzeniami arytmetyki Peana.

Przytoczone powyżej rozumowanie zawiera szereg luk. Przede wszystkim posługiwaliśmy się pojęciem maszyny cyfrowej o nieograniczonych możliwościach. W dowodach podawanych w podręczniku logiki używa się w tym miejscu teorii maszyn Turinga (por. artykuły prof. A. Mostowskiego, «Delta», 1974, 10, 11).

Rozwiązanie zadania M45.

Gdyby liczba $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ była wymierna, żądane twierdzenie byłoby prawdziwe, przyjęlibyśmy bowiem $x = y = \sqrt{2}$. Pozostaje więc do rozpatrzenia przypadek, gdy liczba a jest niewymierna. Wówczas liczba $b = a^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$ jest wymierna i można przyjąć $x = a$, $y = \sqrt{2}$.

Uwaga. Wiadomo, że liczba a jest niewymierna i przestępna, tzn. nie jest pierwiastkiem żadnego wielomianu stopnia dodatniego o współczynnikach całkowitych.

XXV Olimpiada Matematyczna, czyli Turniej Mózgów widziany oczyma uczestnika

Piotr SYRYCZYŃSKI

Stając przed rokiem w szranki Olimpiady Matematycznej obawiałem się spotkania z dostojnym areopagiem brodatych starców, którzy wnikliwie zanalizują moje zdolności i wiadomości. Dużym więc zaskoczeniem było dla mnie spotkanie wśród nich olimpijczyków sprzed 15, 10 czy zaledwie 8 lat — tych co „przecierali szlaki". Stanowią oni trzon obecnych komitetów. Znając na wylot wszystkie ciekawe zadania potrafią wymyślać takie, od których jeżą się włosy na głowie.

Pierwszy etap zmagań okazał się przyjemny dla osób lubiących spokój i stateczny tryb życia. Otóż polegał on na rozwiązywaniu zadań przysyłanych co miesiąc do szkół. Start nastąpił 1 października. Łącznie w trzech rzutach oddano do naszej dyspozycji 12 zadań. Każdy uczeń mógł pracować nad nimi tam, gdzie było mu wygodnie. Ich pisemne rozwiązania przesyłał do swoich Komitetów Okręgowych stając się w tym momencie autentycznym uczestnikiem Olimpiady.

Szybko przeleciały ferie zimowe w oczekiwaniu na wyniki. Uff! Nadszedł upragniony list kwalifikujący do zawodów okręgowych. Ich miejscem były niektóre ośrodki akademickie. Podczas dwóch dni zawodów naszym celem było rozwiązanie sześciu zadań zaproponowanych przez Komitet Główny. Odbywało się to wszystko „w warunkach kontrolowanej samodzielności" — jak brzmi § 16 regulaminu! Jedyną pomocą mogła nam służyć roznoszona herbata oraz smaczne, dietetyczne kanapeczki.

Drugiego dnia wieczorem, po zakończeniu zawodów, odbyła się tradycyjna herbatka połączona z pączkami i analizą rozwiązanych (lub nie) zadań. Wśród nich najmocniej utkwił mi w pamięci problem rozmnażającego się przez podział czworokąta.

Uczestnicy, którzy rozwiązali zadania wystarczająco dobrze, zostali o tym powiadomieni już nie listem, ale pismem. Charakteryzowała je podwójna liczba podpisów i pieczęci. Jego posiadacze mają wolny wstęp na studia matematyczne. W przypadku ubiegania się o przyjęcie na inny kierunek studiów są zwolnieni z egzaminu z matematyki. Pismo to uprawniało do udziału w następnym, ostatnim etapie.

Zawody III stopnia (ogólnopolskie) odbywały się w końcu kwietnia w Warszawie.

Olimpijczycy zjawiali się ponurzy i markotni lub kryjący swą tremę nerwową wesołością. Jednym z najspokojniejszych był kolega, który dobrnął na miejsce z ciężko chorą nogą.

Dwudniowe zmagania zakończyły się znaną już „herbatką". Najwięcej zaciętych dyskusji wywołało zadanie z pułapką o rozmiarach dołu na hipopotama. Wpadł w nią też autor niniejszego artykułu.

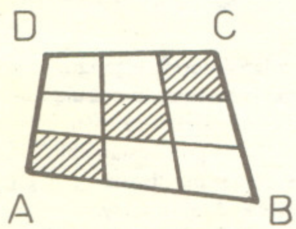
Ci, którzy najlepiej przebrnęli przez wszystkie trudności, spotkali się w początkach czerwca na uroczystym rozdaniu nagród. Medalami Komisji Edukacji Narodowej uhonorowani zostali zasłużeni działacze Olimpiady. Nam, zwycięzcom ubiegłorocznej, XXV Olimpiady, wręczono dyplomy laureatów oraz nagrody książkowe. Nie dla wszystkich był to koniec pracy. Ósemka uczniów wzięła udział w odbywającej się w lipcu Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej w Erfurcie (NRD).

Po czerwcowym zakończeniu XXV Olimpiady okazało się, że dała ona najwięcej satysfakcji tym, którzy traktowali ją jako piękną i pasjonującą próbę swych sił.

Zadania — tak jak zwykle — nie były łatwe. W porównaniu z poprzednimi wymagały nieco mniej pracy. Musiała być ona oczywiście połączona z intensywnym wysiłkiem myślowym. Mnie osobiście Olimpiada i jej zadania sprawiły dużo przyjemności i zadowolenia.

Zadanie 4. (zawody stopnia II)

W czworokącie wypukłym $ABCD$ o polu S każdy z boków podzielono na 3 równe części i poprowadzono odcinki łączące odpowiednie punkty podziału przeciwległych boków w ten sposób, że czworokąt został podzielony na 9 czworokątów. Dowieść, że suma pól trzech czworokątów powstałych z podziału — zawierającego wierzchołek A, środkowego i zawierającego wierzchołek C — równa się $S/3$.



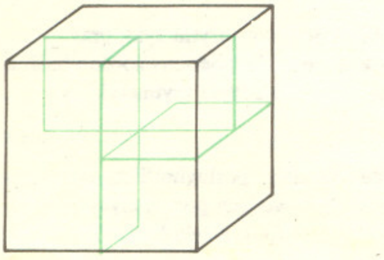
Zadanie 1. (zawody stopnia III)

W czworościanie $ABCD$ bok $\overline{AB}$ jest prostopadły do boku $\overline{CD}$ i $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$. Udowodnić, że płaszczyzna wyznaczona przez krawędź $\overline{AB}$ i środek krawędzi $\overline{CD}$ jest prostopadła do krawędzi CD.

Rozwiązanie — klocek

Jak to pokazuje rysunek, cięliśmy trzy razy w płaszczyznach wzajemnie prostopadłych tak, aby kolejne cięcie nie przecinało śladu przecięć poprzednich.

Nie jest to jedyne rozwiązanie.

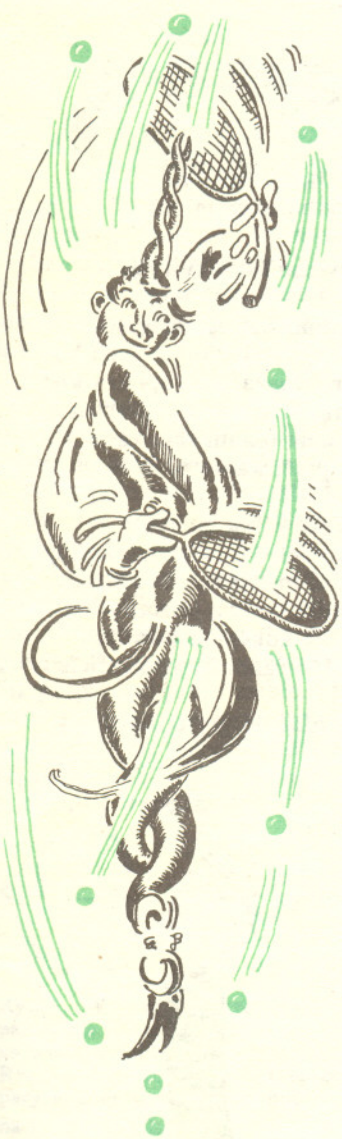


Gry — rozwiązanie.

Naśladując rozumowanie przeprowadzone w tekście stwierdzimy, że macierz wypłat dla tak zmodyfikowanej gry jest, po wykreśleniu strategii zdominowanych (nieopłacalnych), następująca:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathrm{O} & \mathrm{B} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{O} \\ \mathrm{B} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4}b \\ \frac{1}{4}(8-b) & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Fakt, że graczowi I nie opłaca się blefować, oznacza dokładnie tyle, że w rozwiązaniu gry u gracza I nie wystąpi strategia B; strategia ostrożna tego gracza jest zatem dominująca. A to ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{1}{4}\ (8-b) \leqslant 0$, czyli $b \geqslant 8$. Przy tak dużym b blefując ryzykuje się za duże straty co czyni blef nieopłacalnym, a grę — nieciekawą.



Demon Maxwella*

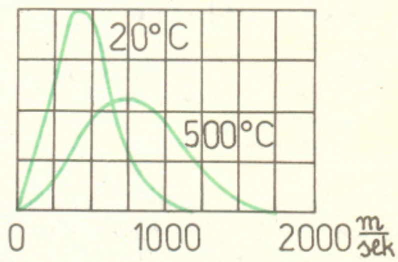
Demon Maxwella jest oczywiście żartem. Jest to jednak postać znana wśród fizyków, ułatwia bowiem wyobrażenie sobie, na czym mogłyby polegać tak absurdalne zjawiska, jak np. samoistne zagotowanie się wody w szklance, zgromadzenie się całego powietrza w jednym kącie pokoju, czy też wyskoczenie rozbitego samochodu z dna przepaści na szosę. Jak pamiętasz z poprzedniego numeru «Delty», są to procesy możliwe, lecz niewyobrażalnie mało prawdopodobne.

Właśnie aby podkreślić małe prawdopodobieństwo ich wystąpienia, Maxwell nadał fikcyjnej istocie, która może je spowodować, nazwę Demona. Jak wygląda Demon Maxwella? Sądzę, że śmiało możemy uznać w tym względzie autorytet pana Tompkinsa**, jedynego, obok jego żony, człowieka, który widział Demona Maxwella w akcji, a nawet z nim rozmawiał. Otóż, wyobraźmy sobie istotę tak małą, że atomy, których średnica wynosi około jedną dziesięciomilionową część milimetra, mają dla niej rozmiary piłek tenisowych. Jest ona poza tym tak szybka i zręczna, że bez trudu odbija swoją rakietką tenisową atomy nawet bardzo gorącego gazu (jak wiesz, wysoka temperatura oznacza szybki ruch atomów). Jednym słowem, jest to genialny żongler-tenisista w świecie atomów i cząsteczek. Jego umiejętności pokażę Ci na jednym bardzo ciekawym przykładzie: Demon Maxwella potrafi odwrócić naturalny kierunek przepływu ciepła, tzn. spowodować, że po zetknięciu dwóch ciał o różnych temperaturach to cieplejsze będzie się ogrzewać coraz bardziej, czerpiąc energię cieplną z ciała zimniejszego, które tym samym będzie się stawać coraz zimniejsze.

— Coś takiego! Można zrobić jedno urządzenie, które będzie u dołu lodówką, u góry kuchenką i w ogóle nie będzie wymagało zasilania z zewnątrz. To chyba jest sprzeczne ze wszystkimi prawami fizyki!

— Nie ze wszystkimi, a tylko z jednym: drugą zasadą termodynamiki, która właśnie zabrania ciepłu płynąć od ciała zimniejszego do cieplejszego. Natomiast zasady zachowania energii Demon Maxwella nie narusza. On tylko zmienia kierunek ruchu cząsteczek bez zmiany ich prędkości. Odbija je sprężyście, jak to się mówi w fizyce.

Mam pewien pomysł. Stawiam ci Wielkie Zadanie Konstrukcyjne. Zakładając, że udało ci się namówić do współpracy Demona Maxwella, zaprojektuj silnik cieplny. Dla ułatwienia zadania przypomnę ci, że każdej temperaturze odpowiada określona **średnia** prędkość atomów. Zawsze jednak istnieją w ciele atomy dużo szybsze i dużo wolniejsze niż te, które mają prędkość średnią. Przyjrzyj się rysunkowi obok i pomyśl, jaką rolę mógłby odegrać Demon Maxwella w działaniu twojego silnika.



Rozkład maxwellowski prędkości cząsteczek dla azotu w temperaturach 20°C i 500°C

Proponujemy Wam, Czytelnicy, rozwiązanie problemu:
Jak działałby silnik sprzeczny z drugą zasadą termodynamiki, czyli tzw. *perpetuum mobile* drugiego rodzaju?
Jak zwykle, czekamy na listy.

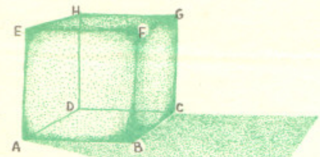
---

* James Clerk Maxwell był fizykiem angielskim. Żył w latach 1831–1879. Jego prace dotyczą różnych dziedzin fizyki: elektromagnetyzmu, fizyki molekularnej, optyki, mechaniki i teorii sprężystości. W roku 1860 Maxwell podał prawo rozkładu prędkości cząsteczek gazu, zwane później prawem rozkładu Maxwella.

** Pan Tompkins jest bohaterem książki wybitnego fizyka G. Gamowa *Mr Tompkins w Krainie Czarów*. Dzięki tej książce otrzymał autor ufundowaną przez UNESCO nagrodę za wybitną działalność popularnonaukową. Książkę Gamowa wydawano wielokrotnie w Polsce. Zachęcamy do jej przeczytania.

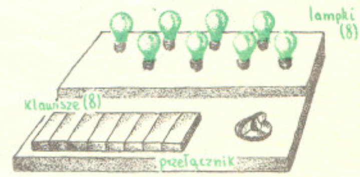
Czy znacie grę „W dwadzieścia pytań”? Chodzi w niej o to, żeby odgadnąć — zadając przy tym jak najmniej pytań, najwyżej dwadzieścia — przedmiot lub osobę pomyślaną przez drugiego z grających. Pytania muszą być tak sformułowane, aby można odpowiedzieć na nie „tak” lub „nie”. Innych odpowiedzi dawać nie wolno. A oto kilka prostych odmian tej gry:

ODGADYWANIE POMYŚLANEGO WIERZCHOŁKA SZEŚCIANU



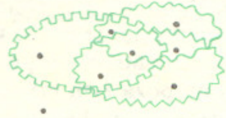
Do gry potrzebny jest rysunek sześcianu z widocznymi wszystkimi ośmioma wierzchołkami, które najlepiej jakoś oznaczyć, na przykład literami. Jeden z grających wybiera któryś wierzchołek i nie pokazując go drugiemu notuje na kartce odpowiednią literę. Drugi z grających, umiejętnie zadając pytania, musi odgadnąć wybrany wierzchołek.

BADANIE ZEPSUTEJ MASZYNY

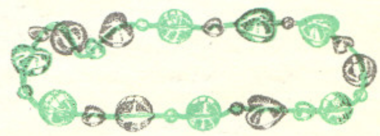


Maszyna pokazana na rysunku działa w taki sposób: jeśli wciśniemy klawisze (jeden lub kilka), a następnie przekręcimy przełącznik, powinno się zapalić tyle lampek, ile wcisnęliśmy klawiszy. Ponowne przekręcenie przełącznika gasi wszystkie lampki. Jeden z klawiszy jest zepsuty i nie zapala lampki. Niestety nie wiadomo, który. Jak wykryć zepsuty klawisz dokonując możliwie najmniej manipulacji przełącznikiem? A w jaki sposób wykryć zepsutą lampkę?

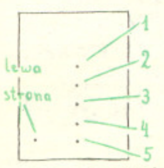
KORALIKI I KROPKI W PĘTLACH



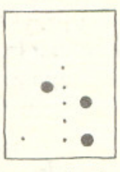
Spróbujcie sami sformułować przepisy zgadywanek do narysowanych obok koralików i kropek w pętelkach.



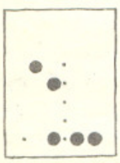
Kody i kodowanie



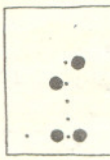
małe dziurki mają znaczenie pomocnicze



tu są zakodowane dwie cyfry; po lewej 2, po prawej 8 (3+5)



17–55

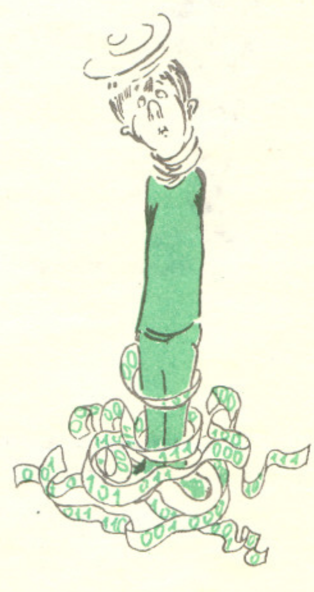


08–60

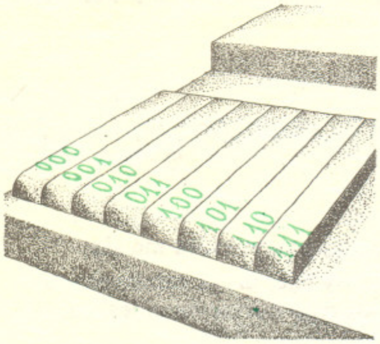
Czy wiecie, co to jest szyfr? A może pisaliście zaszyfrowane listy, których niewtajemniczeni nie powinni odczytać?
Szyfr kojarzy się z ukrytą tajemnicą — nie wszystkie jednak szyfry służą do ukrywania tajemnic. Są również inne, bardzo pożyteczne szyfry. Pożyteczne, bo usprawniają przekazywanie informacji albo pomagają rozwiązać skomplikowane zadanie czy też ułatwiają porozumiewanie się z maszyną. Takie szyfry nazywa się kodami. Alfabet, znaki drogowe, umowne oznakowanie tkanin (np. znak przekreślonego żelazka mówi, że nie wolno tej tkaniny prasować) itp. — to wszystko przykłady różnych kodów.
Bardzo ciekawy kod znalazł zastosowanie w systemie kasowania biletów warszawskich środków komunikacji miejskiej. Kasując bilet w kasowniku kodujemy na nim cztery cyfry: pierwsze dwie z nich wskazują dzień miesiąca, dwie ostatnie natomiast — końcówkę numeru wozu (niektóre kasowniki kodują jeszcze dodatkową, piątą cyfrę w środku). Zamieściliśmy rysunek kilku skasowanych biletów z wyjaśnieniem, jakie cyfry zostały na nich zakodowane. Czy potraficie rozszyfrować zasadę kasowania biletów?
Omówimy jeszcze jeden prosty kod, który może się przydać do gry opisanej na wstępie zabawy.

WIERZCHOŁEK SZEŚCIANU

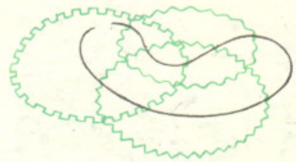
Umówmy się, że ścianę BCGF będziemy nazywać prawą ścianą sześcianu, ścianę DCGH tylną ścianą, a ścianę EFGH — górną. Wybierzmy teraz dowolny wierzchołek i postawmy następujące trzy pytania:
1. Czy wierzchołek leży na prawej ścianie? 2. Czy wierzchołek leży na tylnej ścianie? 3. Czy wierzchołek leży na górnej ścianie?
Zanotujmy odpowiedzi na te pytania przy pomocy zer i jedynek, pisząc zero, gdy odpowiedź brzmi „nie”, a jedynkę, gdy brzmi „tak”. Otrzymamy ciąg trzech cyfr zapiszmy przy wybranym wierzchołku. Podobne ciągi umieścimy przy pozostałych wierzchołkach sześcianu.
Pamiętajmy tylko, żeby pytania stawiać zawsze w tej samej kolejności. I to już koniec — zakodowaliśmy wierzchołki sześcianu.
Domyślacie się na pewno, jak wykorzystać ten kod do gry w odgadywanie pomyślanego wierzchołka. Acha, jeszcze jedna uwaga! Grając przy pomocy naszego kodu stawiamy zawsze trzy pytania. Nie ma pewnego sposobu na odgadnięcie pomyślanego wierzchołka przy pomocy mniejszej liczby pytań. Wprawdzie zgadując na chybił trafił mamy pewne szanse trafienia w szukany wierzchołek już za pierwszym pytaniem, ale równie dobrze możemy zużyć na to siedem pytań (ósmego pytania nie trzeba już stawiać!).
Możecie sami sprawdzić, że gracz, który gra systematycznie, będzie wygrywał częściej niż ten, który zgaduje na chybił trafił.



TAJEMNICZA MASZYNA

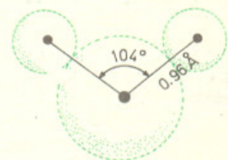


Zaczniemy od zakodowania klawiszy w sposób pokazany na rysunku. Do wykrycia uszkodzonego klawisza wystarczą trzy próby. W pierwszej wciskamy wszystkie te klawisze, których kody mają na pierwszym miejscu zero. W drugiej te, których kody mają na drugim miejscu zero, i w trzeciej te, których kody mają na trzecim miejscu zero. Wynik każdej próby notujemy przy pomocy zer i jedynek: zero, gdy zapaliło się tyle lampek, ile wcisnęliśmy klawiszy, a jedynkę, gdy lampek zapaliło się mniej, niż było wciśniętych klawiszy. Kod przeprowadzonej próby będzie się zgadzał z kodem uszkodzonego klawisza (sprawdźcie). Pomyślcie też, jak uprościć podaną tu metodę postępowania. Czy można zmniejszyć liczbę klawiszy, jakie wciskamy w poszczególnych próbach?
Natomiast uszkodzoną lampkę wykryć bardzo łatwo. Wciskamy wszystkie klawisze, przekręcamy przełącznik. Zapalą się wszystkie lampki oprócz ... zepsutej.



Na zakończenie mamy dla Was kilka pytań. Jak zakodować koraliki, a jak kropki w pętelkach? Jakie pytania powinniśmy postawić?
Jak radzić sobie z wykryciem uszkodzonego klawisza, gdyby maszyna miała ich nie 8, lecz na przykład 23?
Na rysunku obok do trzech pętelek z gry w odgadywanie kropek dorysowaliśmy czwartą w ten sposób, że rozcina ona każdą z ośmiu części na dwie. Czy umielibyście dorysować w ten sposób piątą i dalsze pętle?

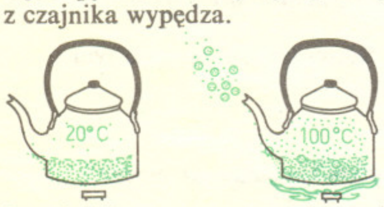
Opowiadanie czajnika



Rys. 1. Cząsteczka wody to układ trzech atomów. Jednego atomu tlenu (duża kulka) i dwóch atomów wodoru (małe kulki). Odległość pomiędzy środkami atomu tlenu i atomu wodoru jest nieco mniejsza od 1 angstrema. 1 angstrem (1 Å jest to $\frac{1}{10\,000\,000}$ milimetra).

Jakaż jest ta dzisiejsza młodzież! Przyjdzie taki, naleje wody, postawi na gazie i leci przed telewizor. Ty dopiero wołaj na niego z kuchni. A on tylko w tę durną szybkę patrzy, nie pomyśli, co to jest woda i dlaczego ona się gotuje.
A ta woda składa się z cząsteczek. Cząsteczki te — maleńkie. Milion ich pod sznurek ułożysz, a jeszcze milimetra nie będzie. Każda z trzech atomów zrobiona: jeden atom tlenu i dwa atomy wodoru. Krzywo to jakoś poszczepiane, jak uszy u zająca.
Nalejesz wody do czajnika, to trzymają się one jedna drugiej. Tylko cały czas ruszają się jak mrówki, chwili spokoju z nimi nie ma. A poniektóra z wierzchu nawet do góry ucieka. Inne ją trzymają, ale — gdzie tam! Na dziobek trafi, to w świat pójdzie. A nie trafi, trochę się pokręci i do innych wraca.
Najgorzej, kiedy na ogień czajnik postawisz. Zaczynają coraz szybciej się ruszać. Mówią: „Ty stary, ciągle byś w miejscu siedział, a teraz inne czasy. Nie można wciąż razem się trzymać, każda powinna poruszać się osobno. Trzeba w stan pary przechodzić".
No i przechodzą w ten stan pary, każda zaczyna biegać w swoją stronę. Nie powiem — dalej się przyciągają, ale co z tego! Nie mogą już się utrzymać, bo każda jak głupia leci przed siebie. Miejsca im ciągle mało. Najpierw ileś ich tam siedziało w centymetrze sześciennym, teraz te same na cały litr się rozłażą. A kiedy już zacznie się wrzenie, takie się robią niecierpliwe, że od samego dna zaczynają się rozpychać. Robią się bąble tej pary i uciekają do góry. Całe powietrze z czajnika wypędza.

Rys. 2. Woda i para wodna. W wodzie cząsteczki znajdują się bardzo blisko siebie. W parze wodnej każda cząsteczka porusza się osobno, odległości pomiędzy cząsteczkami są znacznie większe



Rys. 3. W temperaturze pokojowej parowanie zachodzi tylko na powierzchni wody
Rys. 4. Kiedy woda wrze, pęcherze pary wodnej tworzą się na dnie naczynia i ściankach

Ta para wygląda jak powietrze, jak zwykły gaz. A może nie wierzysz, że gdy woda gotuje się, to w czajniku jest już tylko para wodna? Zdejmij pokrywkę i włóż zapaloną zapałkę. Gaśnie? A jak ma się palić, skoro już powietrza nie ma?
Gdy cząsteczki pary wylecą już dziobkiem na zewnątrz, zimno im się robi, niebożątkom. Z powrotem zbierają się razem i tworzą małe kropelki wody. Takie same jak wtedy, kiedy jest mgła na dworze. Ludzie mówią, że to para, ale prawdziwej pary nie widać, póki się nie skropli.
Skoro jesteś już taki mądry, to zadam ci na koniec zagadkę. Postaw na gazie odkryty czajnik. Gdy w nim woda zagotuje się, przyjrzyj się dobrze, ile mgły nad nim się unosi. A teraz szybko zgaś gaz. Dlaczego teraz mgła jest znacznie lepiej widoczna?

Rozwiązanie problemu Śmieszka z poprzedniego numeru

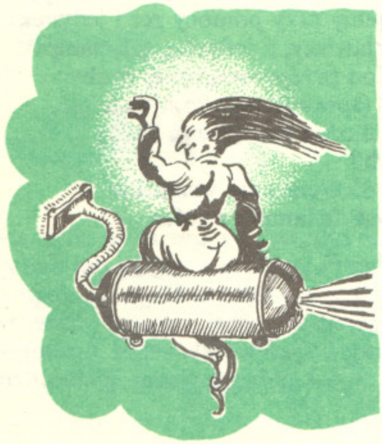
Zwróćmy uwagę np. na dzban grecki. Gdy znajdą się w nim 3 kule — obojętnie jakie — to szanse Śmieszka wyniosą $\frac{1}{2}$. Gdy dzbanie będą dwie kule białe, to — jak ustaliliśmy — szanse Śmieszka wyniosą $\frac{5}{8}$. Przy dwóch czarnych będą więc równe $1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$. Przy jednej białej i jednej czarnej — też obliczaliśmy — szanse wyniosą $\frac{1}{2}$. Rozpatrzmy z kolei włożenie jednej kuli. Dla białej szanse wyniosą $\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}=\frac{7}{10}$, a dla czarnej $1-\frac{7}{10}=\frac{3}{10}$. Gdy w dzbanie greckim jest więcej kul niż trzy to w perskim jest ich mniej — liczymy więc analogicznie. Rozpatrzyliśmy wszystkie możliwe rozwiązania. Możemy więc udzielić Śmieszkomi rady: Wrzuć do jednego dzbanka tylko jedną białą kulę, a do drugiego resztę. Takie rozwiązanie daje ci największą szansę bezbolesnego przeżycia tej ponurej zabawy!

Małą Deltę« »opracowali: Jerzy Ginter, Maciej Iżycki, Przemysław Nowicki i Daria Ziemińska.

Dr Jan A. GAJ

KRÓTKI KURS PILOTAŻU DLA CZAROWNIC

CZĘŚĆ TEORETYCZNA: AERODYNAMIKA



Pozwólcie zaprezentować sobie fragmenty obszerniejszej pracy, która ma się niebawem ukazać w druku. Fragmenty te, jak mi się wydaje, mogą zainteresować Czytelników naszej rubryki, także spoza kręgu, do którego adresowana jest całość.

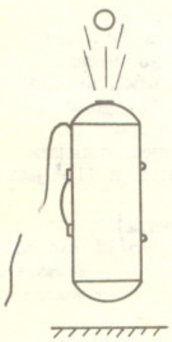
„DEFINICJE

[...] *Podstawowy Przyrząd Latający (PPL) znany jest pod potoczną nazwą odkurzacza albo elektroluksu. Pewne starsze źródła utożsamiają PPL z miotłą. Niniejszy podręcznik stoi konsekwentnie na stanowisku, że prawdziwie nowoczesna czarownica używa wyłącznie odkurzacza* [...]

DOŚWIADCZENIE

Wierzę, że fizycy amatorzy poradzą sobie z tym bez uciekania się do praktyk magicznych.

Umieszczamy PPL w stacjonarnym polu sił magicznych utrzymujących go nieruchomo w położeniu pionowym wylotem w górę. Zaklęciem nr 27/PPL wprawiamy w ruch silnik przyrządu. W strumieniu powietrza umieszczamy piłeczkę pingpongową. Obserwujemy, że piłeczka utrzymuje się na pewnej wysokości nad PPL (rys. 1) wykonując większe lub mniejsze wahania wokół położenia równowagi.
Wniosek: Na piłeczkę działa najwidoczniej jakaś siła sprawiająca, że przy drobnych odchyleniach od osi strumienia powietrza piłeczka jest wciągana z powrotem w obszar największej prędkości [...]



Rys. 1

PRĘDKOŚCIOMIERZ

Jest on ważnym elementem wyposażenia PPL. Umożliwia on stałą kontrolę prędkości w czasie lotu, co jest szczególnie ważne dla uniknięcia przekroczenia prędkości fal magicznych, co może spowodować utratę łączności z Centralą. Prędkościomierz składa się z czujnika i manometru różnicowego. Czujnikiem są dwie rurki szklane: prosta i zagięta umieszczone w strumieniu powietrza, względem którego PPL się porusza (*rys. 2*). *Są one połączone przewodem z manometrem różnicowym, którym jest odpowiednio zgięta rurka* (*rys. 3*) *napełniona wodą piekielną* [...]"

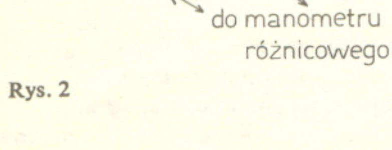
Ciecz znana pod potoczną nazwą denaturatu.

My użyjemy prędkościomierza do pomiaru prędkości strumienia powietrza.

„OPÓR POWIETRZA

W czasie lotu nie możemy zapominać o włączeniu ochronnego pola sił magicznych o opływowym kształcie. W przeciwnym razie opór powietrza **rosnący proporcjonalnie do kwadratu prędkości** *może doprowadzić do oderwania mniej wprawnych pilotek od PPL* [...]".

Tyle cytowany podręcznik. Na pewno wielu z Was zauważyło, że w opisanym doświadczeniu uzewnętrznia się



Rys. 2

PRAWO BERNOULLIEGO

Wyraża ono zasadę zachowania energii w poruszającym się gazie lub cieczy:

$$\frac{1}{\varrho}p + \frac{1}{2}\varrho v^2 = \text{const};$$

p jest tu oczywiście ciśnieniem, ϱ — gęstością, a v — prędkością. Wzdłuż osi strumienia powietrza, gdzie prędkość jest największa, człon energii kinetycznej $\frac{1}{2}\varrho v^2$ jest duży, a zatem ciśnienie p, reprezentujące energię potencjalną, jest odpowiednio mniejsze niż poza osią, aby suma mogła pozostać stała. Piłeczka jest spychana do obszaru o najniższym ciśnieniu.

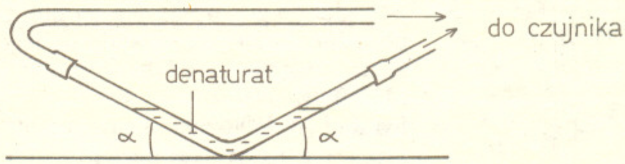
Daniel Bernoulli (1700–1782) — matematyk i fizyk szwajcarski. Prawo Bernoulliego, jako forma zasady zachowania energii, jest spełnione ściśle tylko w przypadku ruchu bez żadnych oporów. W sytuacjach rzeczywistych jest ono zawsze przybliżeniem. Stosując je musimy więc oceniać, w jakim stopniu to przybliżenie jest słuszne.

To samo prawo Bernoulliego rządzi działaniem prędkościomierza. W rurce, której wylot jest skierowany prostopadle do kierunku przepływu gazu, panuje ciśnienie równe ciśnieniu poruszającego się gazu. Inaczej z drugą zgiętą rurką; zatrzymuje ona wpadający do niej gaz, a więc, zgodnie z prawem Bernoulliego, przy $v = 0$ ciśnienie w rurce będzie równe sumie $p + \frac{1}{2}\varrho v^2$ gazu poruszającego się.

Manometr różnicowy wyznacza więc $\frac{1}{2}\varrho v^2$, a stąd możemy łatwo określić

Henri Pitot (1696–1771) — fizyk i inżynier francuski.

prędkość gazu. Taka zgięta rurka nosi nazwę rurki Pitota. Pochylenie rurek manometru ma na celu zwiększenie dokładności pomiaru (większe przesunięcia). Oczywiście przesunięcie poziomu denaturatu mierzone wzdłuż rurki x_1 wiąże się przy stałym przekroju rurki z różnicą poziomów x mierzoną pionowo, a więc będącą miarą ciśnienia cieczy w obu ramionach rurki prostą zależnością: $x = 2x_1 \sin\alpha$ (którą łatwo możecie wyprowadzić), gdzie α jest kątem nachylenia rurki do poziomu (rys. 3).



Rys. 3

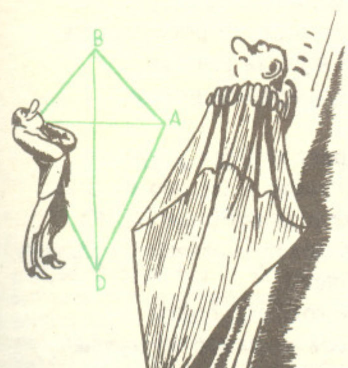
Sądzę, że potraficie zrobić sobie taki prędkościomierz i wyznaczyć nim zależność prędkości v strumienia powietrza wypływającego z odkurzacza od odległości od wylotu y. Wyniki nanosimy na wykres.

Można to zrobić wkładając kawałki drutu do małego otworka wykonanego w piłeczce.

A teraz wykonujemy inny eksperyment: zmieniając ciężar piłeczki notujemy za każdym razem, na jakiej wysokości y unosi się ona nad wylotem odkurzacza. Ze sporządzonego wykresu możemy teraz odczytać, przy jakiej prędkości strumienia powietrza ciężar piłeczki i siła oporu aerodynamicznego równoważą się. Możemy więc ostatecznie sprawdzić, czy teza z cytowanego podręcznika, że opór powietrza jest proporcjonalny do kwadratu prędkości, jest prawdziwa. W praktyce najwygodniej sprawdzić to przedstawiając na wykresie siłę oporu (ciężar) po prostu jako funkcję różnicy poziomów z manometru. Jeżeli zależność kwadratowa jest prawdziwa, powinniśmy otrzymać prostą. Nieco więcej na temat przedstawiania wyników pomiarów w różnych skalach możecie znaleźć w październikowym numerze «Delty» z ubiegłego roku.
Zapytacie pewnie jeszcze, dlaczego czasem mówią, że opór ośrodka (na przykład wody dla płynącej łódki) jest proporcjonalny do prędkości, a czasem, że do jej kwadratu. Czy różnica tkwi w tym, że raz mamy do czynienia z wodą, a raz z powietrzem? Zastanowimy się nad tym wspólnie innym razem.

Zadania

Redaguje mgr Andrzej MĄKOWSKI



M 43. Udowodnić, że jeżeli $ABCD$ jest czworokątem wypukłym i $AC + CD \geqslant AB + BD$, to $AB < AC$.
Rozwiązanie na str. 5

M 44. Udowodnić, że dla nieskończenie wielu wartości naturalnych n liczby n oraz $2^n - 1$ nie są względnie pierwsze.
Rozwiązanie na str. 14

M 45. Udowodnić, że istnieją liczby niewymierne dodatnie x i y, dla których x^y jest liczbą wymierną.
Rozwiązanie na str. 7

Redaguje dr Andrzej ZIEMIŃSKI

F 15. W zadaniach z elektrostatyki często stosuje się metodę zastępowania danego układu innym, równoważnym układem, dla którego łatwiej jest rozwiązać postawiony problem. Przykładem takiego postępowania może być rozwiązanie następującego zadania.
W przestrzeni między dwiema okładkami kondensatora płaskiego zostało umieszczone punktowe ciało o ładunku elektrycznym Q. Okładki kondensatora zostały połączone drutem, a odległość między nimi wynosi a. Jaki ładunek przepłynie przez drut jeżeli przesuniemy ciało o ładunku Q o odcinek Δy w kierunku prostopadłym do powierzchni okładek kondensatora?
Rozwiązanie na str. 6

Sztuka wygrywania

Mgr Tadeusz B. IWIŃSKI

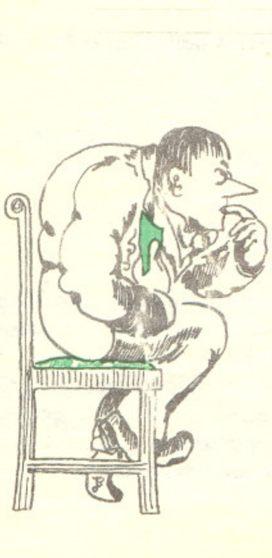
Czy i jak często warto blefować? To pytanie postawiliśmy i pozostawiliśmy bez odpowiedzi w poprzednim odcinku „Sztuki wygrywania” («Delta», 1974, 10). Każdy, kto zetknął się z jakąkolwiek grą, w której blef jest dopuszczalną strategią (a życie samo jest jedną z takich gier), wie dobrze, że warto — ba, czasem nawet trzeba — trochę poblefować. Byle nie za często. Czy można tu podać jakieś zasady?
Rozważmy następującą prostą grę dwuosobową. Dysponujemy talią, w której są tylko dwa rodzaje kart: „Wysokie” (W) i „niskie” (N). Każdy z graczy wchodzi do gry wpłacając do puli po 8 j.r. (jednostek rozliczeniowych) i otrzymuje po jednej karcie, która staje się jego „ręką”. „Rozdaniem” nazywamy więc parę kart; mogą się przy tym wydarzyć tylko cztery różne rozdania: (W,W), (W,N), (N,W) i (N,N).
Symbol (N,W) oznacza tu rozdanie, w którym pierwszy z graczy otrzymał kartę niską, a drugi — wysoką itd. Jeśli przyjąć, że kart w talii jest dużo, a liczba kart niskich — równa liczbie kart wysokich, to wszystkie rozdania będą jednakowo prawdopodobne; każde z nich będzie występowało przeciętnie raz na cztery gry.
Po rozdaniu kart gracz I ma dwie możliwości: może albo „sprawdzić”, albo „podnieść”. Sprawdzenie polega na porównaniu obu „rąk” — posiadacz wyższej karty wygrywa całą pulę; jeśli obie karty są jednakowe, to gracze dzielą się pulą po połowie. Jeśli I zdecyduje się podnieść, to wpłaca do puli 4 j.r. W tym przypadku wkracza gracz II. Może on albo zrezygnować (wtedy gracz I bierze wszystko, co jest w puli bez pokazywania ręki), albo sprawdzić dokładając uprzednio do puli 4 j.r. I to są wszystkie reguły tej gry. Została ona opisana przez znanego teoretyka gier, A. W. Tuckera.
Na to, by móc zanalizować tę grę omawianymi w poprzednich odcinkach metodami, musimy po pierwsze ustalić, jakie są możliwe strategie graczy; po drugie — zobaczyć, jaka jest macierz gry, a następnie znaleźć rozwiązanie (to ostatnie okaże się zresztą najłatwiejsze).
Jakie są możliwe strategie graczy? Jak pamiętamy («Delta», 1974, 6) strategia to nic innego, jak ustalona zasada postępowania we wszystkich mogących się wydarzyć sytuacjach. Jedną z możliwych strategii gracza I jest: „sprawdzaj, jeśli masz w ręku niską kartę, i podnoś, jeśli masz wysoką”; nazwiemy ją krótko „strategią sprawdź–podnieś” (w skrócie S–P). Nietrudno zauważyć, że gracz I dysponuje dokładnie czterema różnymi strategiami; prócz S–P mógłby on jeszcze stosować S–S (= „sprawdzaj niezależnie od tego, co masz w ręku”), P–S oraz P–P.
Gracz II, o ile I dopuści go do decydowania o przebiegu gry, też ma do dyspozycji cztery strategie. Jedną z nich jest strategia „rezygnuj, jeśli masz w ręku kartę niską, i sprawdzaj, jeśli masz wysoką”; oznaczymy ją symbolem R–S. Pozostałe strategie gracza II to R–R, S–R oraz S–S.
Zobaczymy, co by się działo, gdyby I systematycznie stosował S–P, a II posługiwał się wyłącznie strategią R–S. W przypadku rozdania (W,W) gracz pierwszy podnosi, a gracz drugi sprawdza, po czym obaj dzielą się po połowie pulą, do której każdy z nich zdążył wpłacić po 12 j.r (po 8 j.r. na początku gry i ponadto: pierwszy 4 j.r. za prawo podniesienia, drugi 4 j.r. za prawo sprawdzenia). W efekcie każdy odbiera tyle, ile wpłacił, i wygrana gracza I wynosi 0 j.r.
W przypadku rozdania (W,N) zastosowanie tej samej pary strategii przynosi graczowi I wygraną 8 (bo I podniesie, a II zrezygnuje, tracąc w ten sposób 8 j.r. wpłaconych na początku). Analogicznie stwierdzimy, że przy rozdaniu (N,W) gracz I przegrywa 8 j.r., bo przyjęta strategia S–P nakazuje mu sprawdzać; przy rozdaniu (N,N) gracz I sprawdza — i odbiera to, co wpłacił.
Jak wspomnieliśmy wyżej, przy dużej liczbie gier każde rozdanie będzie występowało jednakowo często. Zatem gracz I będzie równie często wygrywał 8 j.r. (na rozdaniach (W,N)) co przegrywał tyle samo (na rozdaniach (N,W)). Zatem można oczekiwać, że jego przeciętna wygrana przypadająca na jedną rozgrywkę wyniesie zero. Inaczej mówiąc: oczekiwana wypłata gracza I przy stosowaniu pary strategii S–P i R–S wynosi 0.

Rozwiązanie zadania M44.

Dla $n = 1, 2, 3, 4, 5$ liczby $2^n - 1$ są równe odpowiednio 1, 3, 7, 15, 31 i są względnie pierwsze z n. Największy wspólny dzielnik liczb 6 i $2^6 - 1 = 63$ równy jest 3. Dla każdej liczby naturalnej k liczby $6k$ i $2^{6k} - 1$ mają więc wspólny dzielnik (niekoniecznie największy) równy 3, liczba $2^{6k} - 1$ jest bowiem podzielna przez $2^6 - 1$, co wynika z tożsamości

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

zastosowanej dla liczb $a = 2^6, b = 1, n = k$.



Zobaczmy jeszcze, co by się działo, gdyby I systematycznie stosował strategię P–S, a II — strategię R–S. Jeśli wydarzy się rozdanie (W,W) to pierwszy sprawdzi i wycofa z puli swoje 8 j.r. Przy rozdaniu (W,N) też sprawdzi i wygra 8. Przy rozdaniu (N,W) pierwszy podniesie, drugi sprawdzi — i pierwszy przegra 12 j.r. Przy rozdaniu (N,N) pierwszy podniesie, drugi zrezygnuje, co da pierwszemu wygraną 8. Ponieważ zaś każde rozdanie zdarza się przeciętnie raz na cztery gry, to przy dużej liczbie gier gracz I może oczekiwać, że średnio na jedną grę wypadnie mu wypłata:

$$\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot 8+\frac{1}{4}(-12)+\frac{1}{4}\cdot 8=1,$$

a więc może oczekiwać średnio z jednej gry wygranej 1 j.r.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \text{R-R} & \text{R-S} & \text{S-R} & \text{S-S} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{S-S} \\ \text{S-P} \\ \text{P-S} \\ \text{P-P} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 4 & -1 \\ 8 & 1 & 7 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

W analogiczny sposób możemy określić (z punktu widzenia gracza I) oczekiwane wypłaty dla pozostałych par strategii. Otrzymamy macierz wypłat podaną obok. Zauważmy, że graczowi I nie opłaca się nigdy stosować strategii P–S, bowiem strategia ta jest zdominowana przez strategię P–P, która daje zawsze niegorsze, a czasem lepsze rezultaty, niezależnie od tego, jaką strategię zastosuje gracz II. Gracz I może więc w ogóle nie brać pod uwagę strategii P–S.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{R-S} & \text{S-S} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{S-S} \\ \text{S-P} \\ \text{P-P} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Rozsądny gracz II z analogicznych względów nigdy nie zastosuje strategii R–R, przynosi mu ona bowiem zawsze nie mniejsze (a czasem większe) straty niż strategia R–S; z tych samych powodów nigdy nie zastosuje on strategii S–R. Obaj o tym wiedzą i wobec tego obaj biorą pod uwagę tylko strategie nie odrzucone — którym odpowiada podana obok macierz wypłat. Ale w tej sytuacji gracz I zrezygnuje również ze stosowania strategii S–S, która jest dla niego mniej korzystna niż każda z pozostałych. Okazuje się więc, że w rzeczywistości będą gracze rozgrywali grę, w której pierwszy dysponuje tylko strategiami S–P i P–P, a drugi tylko R–S i S–S.

Strategia P–P jest najwyraźniej strategią blefową: „podnoś zawsze niezależnie od tego, co masz w ręku". Również w strategii S–S drugiego gracza (sprawdzaj zawsze, mimo że może cię to kosztować) kryje się element blefu. Strategie te nazwiemy blefowymi. Z analogicznych względów strategie S–P i R–S można nazwać ostrożnymi.

Zauważmy: na początku podaliśmy reguły pewnej gry. Założyliśmy, że gracze są ludźmi rozsądnymi i że grę tę rozgrywają między sobą wiele razy. Z reguł gry i tych założeń wywnioskowaliśmy, że powinni oni rozgrywać grę następującą

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{Ostr.} & \text{Blef} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Ostr.} \\ \text{Blef} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{array}$$

Por. „Krótki kurs gier 2×2", «Delta», 1974, 10.

a więc grę 2×2 o bardzo prostej macierzy wypłat. Z łatwością stwierdzamy, że gra ta nie posiada pary strategii czystych w równowadze, a rozwiązanie jej stanowi para strategii mieszanych: każdy z graczy powinien wykorzystywać strategię ostrożną i strategię blefową z częstością 1/2. Przez zastosowanie strategii mieszanej (1/2, 1/2) gracz I zapewnia sobie to, że w dużej liczbie gier będzie wygrywał przeciętnie nie mniej niż 1/2 j.r. na jedną grę, a gracz II — że nie będzie przegrywał przeciętnie więcej niż 1/2 j.r. na jedną grę. Zauważmy przy tym, że realizacja strategii (1/2, 1/2) przez gracza I oznacza stosowanie przez niego następującej reguły: „jeśli masz rękę wysoką — zawsze podnoś; jeśli masz rękę niską — w połowie przypadków podnoś, a w połowie sprawdzaj".

Wykazaliśmy przy okazji, że reguły gry faworyzują gracza I. Grę — jeśli jest rozgrywana wielokrotnie — można uczynić sprawiedliwą przyjmując dodatkową regułę, że po każdej grze gracze zamieniają się rolami.

Uzyskaliśmy przy okazji odpowiedź na pytanie postawione na wstępie: są takie sytuacje, w których nie tylko można, ale powinno się blefować — i to z określoną częstością. Jak twierdzi J. Kemeny, amerykański filozof i matematyk, jest to jeden z najbardziej interesujących wyników uzyskanych w teorii gier.

Zadanie. Załóżmy, że przy nie zmienionej wpłacie początkowej (8 j.r.) wpłaty za podniesienie (gracz I) i sprawdzenie (gracz II) wynoszą b j.r. Przy jakich b graczowi I nie opłaca się blefować? (Rozwiązanie na str. 8).

Chemia kwantowa, czyli maszyna cyfrowa, ołówek i papier narzędziami badania chemicznego

Dr Lucjan PIELA

$$E = \frac{\sum_i \sum_j c_i^* c_j \int\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int \psi_i^*(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) \left(\hat{H}_0 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} [U_{ij}^{N-N} + U_{ij}^{e-N} + U_{ij}^{e-e}] \right) \psi_j(\vec{r}_1, \dots \vec{r}_n) \, d\tau_1 \dots d\tau_n}{\sum_i \sum_j c_i^* c_j \int\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int \psi_i^*(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) \psi_j(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) \, d\tau_1 \cdot \dots \cdot d\tau_n}$$

Godna podziwu jest droga chemików, którzy od gmatwaniny zaklęć, zabobonów i wiedzy alchemii poprzez badania makroskopowe doszli do przekonania, że świat zbudowany jest z atomów i molekuł (cząsteczek chemicznych). Chemia kwantowa jest mechaniką kwantową atomów, molekuł i ich zbiorów. Jej zadaniem jest wyjaśnienie tak frapujących zjawisk, jak np. łączenie się atomów w molekułę. Dlaczego dwa elektrycznie obojętne atomy wodoru przyciągają się i zbliżają do siebie na odległość 0,7Å? Co przeszkadza im w dalszym zbliżaniu się? Jak to jest możliwe, by wiązanie chemiczne istniało dzięki dwom elektronom, skoro odpychają się one bardzo silnie? Jak w ogóle należy sobie wyobrazić wiązanie chemiczne? Można zadać w chemii bardzo wiele takich prostych pytań. Odpowiedzi na proste pytania są, jak to i w życiu bywa, najtrudniejsze i nie znajdziemy ich w starej mechanice Newtona.

Konieczność powstania nowej mechaniki — mechaniki kwantowej — pojawiła się na przełomie wieków dziewiętnastego i dwudziestego. Tworzyło ją wielu Wielkich: Planck, Bohr, de Broglie, Heisenberg, Schrödinger. Nowa mechanika rezygnowała z pojęcia toru cząstki, a operowała pojęciem prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w jakiejś części przestrzeni. Jeśli prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w jakiejś małej części przestrzeni podzielimy przez objętość tej części przestrzeni, to otrzymamy tzw. gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki. Otóż według mechaniki kwantowej gęstość ta zależy tak od położenia cząstki jak funkcja $|\psi|^2$, gdzie ψ oznacza tzw. funkcję falową cząstki. Funkcja ta jest funkcją współrzędnych cząstki i czasu.

Jeśli chodzi nie o jedną cząstkę, lecz o zbiór elektronów i jąder, np. molekułę, to według mechaniki kwantowej istnieje również taka funkcja ψ położeń wszystkich elektronów i jąder oraz czasu, że wielkość $|\psi|^2$ dla danych położeń tych cząstek i danej chwili czasu oznacza gęstość prawdopodobieństwa tego, iż poszczególne cząstki zajmą w tej chwili czasu właśnie takie położenia.

Marzeniem chemika kwantowego jest znalezienie takiej właśnie funkcji falowej dla interesującej go molekuły. Dlaczego funkcja falowa jest tak poszukiwana przez badaczy molekuł? Otóż znając funkcję ψ można wyliczyć wszystkie własności molekuły, a więc np. długości wiązań, kąty między wiązaniami, moment dipolowy, wyższe momenty elektryczne itp. Znając funkcję falową układu np. $HCl + NH_3$ możemy obliczyć energię wiązania tego układu, czyli — molekuły NH_4Cl; możemy określić, jak podczas zbliżania się amoniaku i chlorowodoru zmieniają się długości wiązań N—H, H—Cl itp.

Mechanika kwantowa podaje sposób znalezienia funkcji ψ. W tym celu trzeba mianowicie rozwiązać tzw. równanie Schrödingera. Równanie Schrödingera, którego rozwiązaniem jest funkcja falowa, napisać jest bardzo łatwo, o wiele trudniej jest je rozwiązać. Ścisłe rozwiązanie otrzymać można jedynie dla najprostszych układów. Dla interesujących z punktu widzenia chemii obiektów rozwiązanie ścisłe można uzyskać jedynie dla atomu wodoru. Mechanika kwantowa zmusza nas do szukania funkcji falowej. Znajomość tej funkcji umożliwia nam bowiem obliczenie wielu interesujących nas wielkości fizycznych układu. Być może istnieje prostsza droga, jako że dla tych celów wystarczyłoby nam coś znacznie prostszego niż funkcja falowa, a mianowicie tzw. macierz gęstości drugiego rzędu. Nie wdając się w głębsze rozważania można powiedzieć, że funkcja falowa jest zbyt szczegółowa, zawiera wiele dla nas niepotrzebnych informacji. Ponadto, równanie z którego ją otrzymujemy, jest bardzo trudne do rozwiązania. Jednakże możemy jedynie marzyć, by istniało równanie na macierz gęstości drugiego rzędu i dawało się łatwo rozwiązać! Dość marzeń, wróćmy do równania Schrödingera!

Dokładne rozwiązania tego równania (nie ścisłe, lecz z żądaną dokładnością) zostały znalezione dla wielu, ale jedynie najprostszych molekuł wielkości molekuły F_2. Przed nami rozciąga się dżungla molekuł czekająca na eksplorację. Jakie trudności stoją przed badaczami? Sytuacja wygląda mniej więcej tak: jeśli rozwój chemii kwantowej będzie postępował w dotychczasowym kierunku, to trudności w obliczeniu funkcji ψ będą wzrastały gwałtownie, gdy przyjdzie ją obliczać dla coraz większych układów. Oczywiście, chemia kwantowa posługuje się najnowocześniejszą techniką cyfrową, ale liczba pojawiających się w obliczeniach całek jest tak ogromna, że i najszybsze maszyny muszą kapitulować już przy stosunkowo małych molekułach. Wystarczy powiedzieć, że liczba całek jest proporcjonalna do czwartej potęgi liczby elektronów w molekule. Czyli np. jeśli czas obliczeń dla molekuły wody (10 elektronów) przyjmiemy za 1, to czas obliczeń dla molekuły benzenu (42 elektrony) będzie około 300 razy większy. Dla wyobrażenia sobie skali trudności podam, że aby na przykład uzyskać niezłe przybliżenie funkcji falowej dla molekuły wody, trzeba obliczyć ok. 3 milionów całek sześciokrotnych. Na razie stosowane są środki polegające z reguły na zachowaniu metody obliczeń, a udoskonalaniu techniki cyfrowej. Postęp jest widoczny. Najlepszym dowodem jest fakt, że wykonano już obliczenia dla niektórych układów, w których liczba elektronów dochodzi do 300. Jest to wynik imponujący, choć trzeba podkreślić, że stosowano w tych obliczeniach uproszczenia, uzyskano wyniki niezbyt dokładne, a wykonanie obliczeń było niesłychanie kosztowne. Np. tego typu obliczenia wykonał Enrico Clementi dla asocjatu guanina-cytozyna, czyli dla pary tzw. komplementarnych zasad wchodzących w skład molekuły DNA, odgrywającej kluczową rolę w procesach dziedziczenia. Wielki atak ze wszystkich frontów nauk przyrodniczych idzie na tajemnice genetyki. Mamy tam do czynienia z ogromnymi molekułami. Czy chemia kwantowa jest wobec tak wielkich układów bezradna? Nie, lecz w tym polowaniu „na grubego zwierza" nie może niestety pozwolić sobie na zachowanie drobiazgowości i elegancji, a musi sięgnąć do wielu, często ryzykownych, uproszczeń. Mowa tu o tzw. półempirycznych metodach chemii kwantowej. W większości z tych metod przy rozwiązywaniu (zwykle zresztą przybliżonego) równania Schrödingera nie liczy się ani jednej całki, co usuwa największą trudność metod dokładnych (tzw. metod *ab initio*). Korzysta się po prostu z tego, że wiele całek przyjmuje bardzo małe wartości, więc zastępuje się je zerami; inne całki traktuje się jako parametry. Parametry te dobiera się tak, aby otrzymana przy ich użyciu funkcja falowa pozwoliła uzyskać zgodne z doświadczeniem wartości dla określonych wielkości fizycznych molekuły. Oczywiście, nie miałoby sensu ustalanie takich parametrów dla jednej tylko molekuły. Probierzem „dobroci" parametrów jest zgodność wyników obliczeń (wykonanych dla innych cząsteczek z użyciem tych parametrów) z wartościami doświadczalnymi. Taką zgodność da się w pewnym stopniu osiągnąć. Czasem jednak za zaniedbanie całek trzeba płacić. Niemniej tego rodzaju przybliżone metody obliczeń oddają wielkie usługi w badaniach większych molekuł, dają one bowiem przybliżony opis bardzo skomplikowanej sytuacji (bez nich nie mielibyśmy żadnego opisu), próbują ujawnić główne cechy ukrytego przed nami obrazu. I najczęściej im się to udaje.

Dżungla przed nami. Jesteśmy na jej skraju i ten mały wycinek dobrze znamy. Posuwamy się powoli w jej głąb. Wiemy, że stosujemy poprawne, ale mało wydajne metody eksploracji. Jedynie najodważniejsi z nas wybierają się w głąb puszczy. Ich badania dają nam pewne pojęcie o tym, co się tam dzieje. Czasem jednak przynoszą wiadomości o strachach, strzygach i potworach, w które trudno uwierzyć i które po uruchomieniu naszej wspaniałej „maszyny *ab initio*" rozwiewają się jak mgła. Potrzeba chemii kwantowej nowych, skutecznych metod. Czekają pasjonujące problemy reakcji chemicznych, czeka wiek biologii.

Sprostowanie

W rozwiązaniu zadania F11 («Delta», 1974, 11) został popełniony błąd, za co Czytelników bardzo przepraszamy.
Mianowicie w rozumowaniu uwzględniono jedynie przenikanie fal padających w pierwszej i drugiej strunie do trzeciej struny, natomiast pominięto wzajemne przenikanie fali z pierwszej struny do drugiej i odwrotnie. Poniżej przytaczamy poprawne rozwiązanie zadania.
Fala o amplitudzie A traktowana jako krótki sygnał, biegnąca w pierwszej strunie, będzie ulegała częściowemu odbiciu od punktu rozgałęzienia. Amplituda fali odbitej wyniesie RA, gdzie R jest współczynnikiem odbicia. Pozostała część fali będzie przenikała do drugiej i trzeciej struny wywołując w każdej z nich fale o amplitudzie $\frac{1}{2}(1-R)A$.
Analogicznie będzie zachowywała się fala padająca w drugiej strunie. Fale przechodzące i odbite będą interferowały ze sobą w odpowiednich strunach. Ostatecznie w poszczególnych strunach będą poruszały się fale o amplitudach:

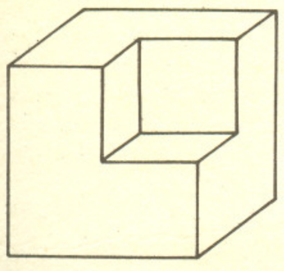
1 struna: $RA+\frac{1}{2}(1-R)A=\frac{1}{2}(1+R)A$,

2 struna: $\frac{1}{2}(1-R)A+RA=\frac{1}{2}(1+R)A$,

3 struna: $\frac{1}{2}(1-R)A+\frac{1}{2}(1-R)A=$
$=(1-R)A$.

Wartość współczynnika odbicia R wynosi $\frac{1}{3}$, zgodnie ze wzorem $\frac{Z_1-Z_2}{Z_1+Z_2}$, gdzie Z_1 i Z_2 są odpowiednio impedancjami ośrodka, w którym fala się porusza i od którego następuje odbicie (tutaj $Z_2=2Z_1$). Po podstawieniu wartości R okazuje się, że w pierwszej i drugiej strunie będą poruszały się fale o amplitudzie $\frac{1}{3}A$ i fazie zgodnej z fazą fali padającej (a nie z fazą przeciwną, jak było w błędnym rozwiązaniu), natomiast w trzeciej strunie — o amplitudzie $\frac{4}{3}A$ oraz fazie również zgodnej z fazą fali padającej.
Oczywiście prawo zachowania energii jest spełnione, a suma amplitud fal poruszających się w 3 strunach jest równa $2A$, tzn. wynosi tyle, co suma amplitud fal początkowych.
Sugerujemy Czytelnikom rozpatrzenie przypadków, gdy amplitudy fal w strunie 1 i 2 nie są jednakowe.

Klocek



W jaki sposób wyciąć laubzegą z sześciennej kostki drewna (powiedzmy o krawędzi 5 cm) klocek taki, jak na rysunku, czyli jak wyciąć z sześcianu sześcian $\frac{1}{8}$ całości tak, aby „pozostałość" była w jednym kawałku? Klocka dokładnie takiego jak na rysunku uzyskać się nie da, to znaczy będzie on musiał być nieco ponadcinany. Wobec tego proponujemy zastanowienie się nad tym, jak ciąć, aby owo ponadcinanie jak najmniej osłabiało spoistość otrzymanego klocka.
Nasze rozwiązanie na str. 8