

## SPIS TREŚCI

Prawo wielkich liczb cz. II <i>Dr Wiesław Szlenk</i>	str. 1
Kwantowy lew, czyli o teorii zjawiska tunelowego <i>Dr Zbigniew Płochocki</i>	str. 2
Zadania	str. 5
Swoboda ruchów <i>Dr Marek Kordos</i>	str. 6
Zegar bez wskazówek <i>Dr inż. Ryszard Kuński</i>	str. 8
Nowy rekord	str. 10
Mała Delta	str. 11
«Delta» z wizytą na Seminarium UNESCO „Matematyka w naukach społecznych”, Jabłonna 15.VII-13.VIII 1974 <i>Mgr Tadeusz B. Iwiński</i>	str. 14
Laboratorium w domu <i>Dr Jan A. Gaj</i>	str. 16

**W następnym numerze:**

**Twierdzenie Gödla**

**Laserowa kompresja i synteza termojądrowa plazmy**

**Nasza okładka**

**Zegary dawniej i dziś**

„Delta”  
matematyczno-fizyczny miesięcznik popularny  
Polskiego Towarzystwa Matematycznego i Polskiego Towarzystwa Fizycznego wydawany przy poparciu Polskiej Akademii Nauk oraz Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny  
prof. dr G. Białkowski  
doc. dr A. Blikle  
prof. dr A. Hryniewicz  
doc. dr B. Iwaskiewicz  
prof. dr J. Janik  
doc. dr J. Jatzak  
prof. dr Leon Jeśmanowicz — przewodniczący  
prof. dr Z. Krygowska  
prof. dr K. Leibler  
mgr W. Łuczniak  
mgr A. Mąkowski  
prof. dr A. Pełczyński  
prof. dr Arkadiusz Piekara — wiceprzewodniczący  
prof. dr J. Rayski  
prof. dr A. Schinzel

prof. dr Z. Semađeni  
prof. dr M. Subotowicz  
dr A. Wakulicz  
doc. dr W. Zawadowski

Redaguje Kolegium w składzie:  
T. Deskur — red. techn. graf.  
doc. dr T. Hofmokr — z-ca red. nacz.  
mgr T. B. Iwiński  
dr M. Kordos — red. nacz.  
dr Z. Płochocki  
D. Tys — sekr. red.

opracowanie okładki  
art. graf. K. Dobrowolski  
Adres Redakcji  
ul. Śniadeckich 8,  
00-656 Warszawa, PTM

Zakład Narodowy im. Ossolińskich — Wydawnictwo.  
Wrocław, Oddział w Warszawie  
Nakład 30000 egz. Objętość 2 ark. wyd.; 2,50 ark. druk.;  
papier offsetowy III kl., 80g, 61 × 84  
Wydrukowano w Drukarni im. Rewolucji Październikowej,  
Warszawa, ul. Mińska 65.  
Nr zam. 1613/74 W-121

**WARUNKI PRENUMERATY** Cena prenumeraty rocznej zł 60,— cena prenumeraty półrocznej zł 30,—

Institucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły — mające siedzibę w miastach wojewódzkich i powiatowych, zamawiać mogą prenumeratę wyłącznie za pośrednictwem miejscowych oddziałów i delegatur RSW-Prasa-Książka-Ruch w terminie do dnia 25 listopada na rok następny.

Institucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły — mające siedzibę na wsi lub miejscowościach, w których nie ma oddziałów RSW-Prasa-Książka-Ruch, winny opłacać prenumeratę w terenowych właściwych urzędach pocztowych.

Prenumeratę krajową dla czytelników indywidualnych przyjmują urzędy pocztowe, listonosze i Centrala Kolportażu RSW-Prasa-Książka-Ruch, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, konto PKO 1-6-100020 w terminie do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 40% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje Biuro Kolportażu Wydawnictw Zagranicznych RSW-Prasa-Książka-Ruch, 00-840 Warszawa, ul. Wronia 23, konto PKO nr 1-6-100024.

**Sprzedż numerów bieżących i uprzednich**

Institucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.  
Sprzedż gotówkowa i wysyłkowa, pojedynczych numerów i w kontynuacji; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.

Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, konto PKO nr 1-6-100312

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Cena 1 egzemplarza zł 5,—

nr indeksu 35723

Dr Wiesław SZLENK

W poprzednim artykule omówiliśmy sens prawa wielkich liczb. Teraz pokażemy, jak można praktycznie je wykorzystywać.

Przypomnijmy treść prawa wielkich liczb. Niech  $A$  będzie możliwym rezultatem pewnego doświadczenia  $\mathcal{D}$ , niech  $p$  będzie prawdopodobieństwem, że

w doświadczeniu  $\mathcal{D}$  zajdzie wynik  $A$  (np.  $\mathcal{D}$  — rzut monetą,  $A$  — „orzeł”,  $p = \frac{1}{2}$ ).

Doświadczenie  $\mathcal{D}$  powtarzamy niezależnie  $n$  razy. Niech  $S_n$  oznacza liczbę tych powtórzeń doświadczenia  $\mathcal{D}$ , w których otrzymaliśmy wynik  $A$ . Wówczas dla każdej liczby  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \left| \frac{S_n}{n} - p \right| < \varepsilon \right) = 1.$$

Praktycznie można ten wynik interpretować następująco: dla dużych liczb  $n$  prawie na pewno (tj. ze znikomo małą szansą popełnienia omyłki) możemy twierdzić, że

$$\left| \frac{S_n}{n} - p \right| < \varepsilon; \text{ inaczej mówiąc } \frac{S_n}{n} \approx p \text{ z dokładnością do } \varepsilon.$$

Do roku 1965 w USA zabiegi przerywania ciąży były prawnie zabronione.

Oczywiście pewni lekarze robili je po kryjomu, ale nie było wiadomo, na jaką skalę. Socjologowie postanowili to zbadać. Zwykły sposób zadawania pytań osobom losowo wybranym nie dałby żadnych wiarygodnych informacji. Pytanie „Czy Pani poddawała się zabiegowi przerywania ciąży?” wkracza bardzo brutalnie w sferę spraw intymnych i poza tym w dany przypadku dotyczy spraw będących w kolizji z prawem. Wybrane losowo kobiety w najlepszym razie nie odpowiedziałyby na to pytanie lub odpowiedziałyby nieprawdę.

Tu w sukurs socjologom przyszli matematycy. Zaproponowali metodę, którą można by przedstawić następująco:

Losowo wybranym kobietom wręczano dwukolorową kostkę (cztery ściany białe i dwie czarne) oraz monetę. Polecenie brzmiało: rzucić kostką i monetą; jeżeli wypadnie kolor biały, odpowiedzieć TAK lub NIE na pytanie dotyczące zabiegu (niezależnie od tego, co wypadło w rzucie monetą); jeżeli wypadnie kolor czarny, to odpowiedzieć TAK lub NIE na pytanie „Czy wypadł orzeł?”. Zakłada się, że cały eksperyment odbywa się bez świadków. W rezultacie testowana osoba odpowiada tylko TAK lub NIE, ale na które pytanie odpowiada (tzn. czy na pytanie o zabieg, czy na pytanie o „orła”), wie ona i tylko ona. Lecz dla celów statystyki to wystarcza.

Przypuśćmy, że w wyniku badań opisaną wyżej metodą otrzymaliśmy  $n$  odpowiedzi TAK i  $m$  odpowiedzi NIE. Niech  $A$  będzie zdarzeniem, że wypadł kolor czarny przy rzucie kostką i orzeł przy rzucie monetą. Doświadczenie (polegające na rzucie kostką i monetą) powtórzyliśmy  $n+m$  razy. Obliczmy prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia  $A$ : kolor czarny wypada 2 razy na 3 rzuty, orzeł 1 raz na

2 rzuty, łącznie wynik  $A$  zdarza się średnio raz na sześć prób. Stąd  $P(A) = \frac{1}{6}$ .

Niech  $S_{n+m}$  oznacza liczbę tych prób, które dały wynik  $A$ . Stąd na mocy prawa wielkich liczb mamy:

$$\frac{S_{n+m}}{n+m} \approx \frac{1}{6}.$$

A więc liczba odpowiedzi TAK na pytanie o wypadnięcie orła wynosi z dobrym przybliżeniem  $\frac{1}{6}(n+m)$ . Analogicznie liczba odpowiedzi NIE na to pytanie

wynosi też  $\frac{1}{6}(n+m)$  (z tym samym przybliżeniem). Liczba kobiet

odpowiadających na pytanie o dokonywaniu zabiegu wynosi  $\frac{2}{3}(n+m)$ , stąd liczba

$$\frac{n - \frac{1}{6}(n+m)}{\frac{2}{3}(n+m)} = \frac{5n-m}{4(n+m)}$$





### Rozwiązanie zadania M.42

Sprawdzimy najpierw, że 38 nie jest sumą dwóch liczb złożonych nieparzystych. Mogłyby to być liczby 9, 15, 21, 25, 27, 33, 35. Jeżeli 38 jest sumą dwóch liczb naturalnych, to któraś z nich jest mniejsza od 19. Gdyby 38 było sumą dwóch liczb złożonych nieparzystych, to jedną z nich byłoby 9 lub 15, ale  $38 - 9 = 29$  i  $38 - 15 = 23$  są liczbami pierwszymi.

Każda liczba parzysta  $\geq 40$  jest jednej z postaci  $10k$ ,  $10k + 2$ ,  $10k + 4$ ,  $10k + 6$ ,  $10k + 8$ , gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą większą od 4. Zachodzą równości:  $10k = 15 + 5(2k - 3)$ ,  $10k + 2 = 27 + 5(2k - 5)$ ,  $10k + 4 = 9 + 5(2k - 1)$ ,  $10k + 6 = 21 + 5(2k - 3)$ ,  $10k + 8 = 33 + 5(2k - 5)$ . Pierwsze składniki są oczywiście liczbami nieparzystymi złożonymi, drugie też są takie, gdyż są iloczynami liczby 5 przez liczbę  $\geq 2k - 5 \geq 3$ . Udowodniliśmy tutaj nawet więcej, mianowicie że każda liczba parzysta  $\geq 40$  jest sumą dwóch liczb nieparzystych, z których jedna jest podzielna przez 3, a druga przez 5.

wyraża stosunek liczby kobiet, które odpowiedziały TAK na pytanie o zabieg, do liczby wszystkich kobiet, którym los i prowadzący badania zadał to pytanie. W ten sposób z dowolną dokładnością i z dowolnie małą szansą pomyłki (jeśli brać duże  $n + m$ ) możemy wyznaczyć procent kobiet, które poddawały się zabiegowi przerywania ciąży. Co ciekawsze, nie możemy wskazać na pewno ani jednej osoby, która się temu zabiegowi poddała.

Opisane powyżej badanie przeprowadzono w USA w początku lat sześćdziesiątych. Wyniki i cały pomysł były referowane na kongresie statystyki w Londynie w roku 1965. Oczywiście techniczna realizacja była nieco inna — wręczanie kostki i monety byłoby zbyt kłopotliwe. Ale idea była taka, jak opisano powyżej.

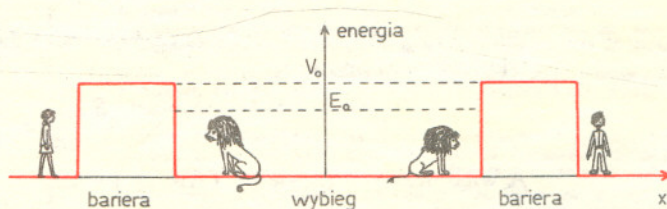
I jeszcze jedna ciekawostka związana z prawem wielkich liczb. Pierwsze systematyczne obserwacje płci noworodków były przeprowadzone we Francji w latach 1800, 1801, 1802 z inicjatywy francuskiego matematyka S. Poissona. Okazało się, że stosunek liczby noworodków płci męskiej do liczby noworodków płci żeńskiej wynosił 22:21. Tylko Paryż wykazywał odchylenie od tej normy, a mianowicie dla Paryża stosunek ten wynosił 24:23. Różnica była zbyt znaczna w stosunku do liczby urodzonych dzieci, aby to mógł być przypadek. Sprawa zaciekaowała szersze grono ludzi. Pobieżne obserwacje w krajach sąsiednich, a nawet wśród tubylczej ludności Ameryki Południowej (dokonane przez W. Humboldta) wykazywały wyniki bliskie 22:21. Wymyślano różne teorie, od bardziej rozsądnych do całkowicie bezsensownych, jak np. że jest to wynik rozwiązłego życia paryżan. Wreszcie Poisson wpadł na właściwe rozwiązanie: wyłączył ze statystyki przytułki Paryża. I wtedy proporcja spadała natychmiast do 22:21. Co z tego wynikało? Otóż to, że okoliczna ludność (a może i nie tylko okoliczna) podrzucała noworodki — i to dziewczynki (chłopcy byli widocznie bardziej w cenie) — do Paryża. Zjawisko to było tak masowe, że aż zakłóciło statystykę. Nigdy nie dowiedzielibyśmy się o tym, gdyby nie obserwacje Poissona.

## Trochę rachunków

# Kwantowy lew, czyli o teorii zjawiska tunelowego

Dr Zbigniew PŁOCHOCKI

W ogrodzie zoologicznym dla kwantowych zwierząt wybieg dla lwów, w postaci długiego pasa, oddziela od publiczności bariera, którą stanowi obszar sztucznie wytworzonego pola grawitacyjnego o dostatecznie dużym i stałym (w tym obszarze) natężeniu. Energia potencjalna, jaką miałby lew w obszarze bariery, gdyby się tam znalazł, jest o  $V_0$  większa (rys. 1) niż na wybiegu (mowa o lwie w normalnej pozycji, na czterech łapach, tak że jego środek masy znajduje się na pewnej wysokości nad ziemią). Maksymalna energia kinetyczna, jaką może mieć rozpedzony lew, wynosi  $E_0 < V_0$ . Jaką wysokość energetyczną musi mieć bariera (tzn. jaka musi być wartość  $V_0$ ), aby była ona ogrodzeniem absolutnie bezpiecznym, czyli — aby żaden lew nie mógł jej nigdy przeskoczyć?



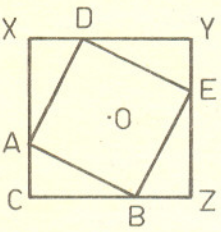
Rys. 1. Ogrodzenie w postaci barier potencjału (energię potencjalną lwa na wybiegu przyjęto za poziom odniesienia, któremu przypisano wartość równą zero)

Gdyby lwy były zwierzętami poruszającymi się zgodnie z prawami mechaniki klasycznej, żaden z nich nie mógłby przeskoczyć bariery. Nasze lwy to jednak zwierzęta kwantowe, wykazujące cechy zarówno korpuskularne, jak i falowe. Ich ruchem rządzą więc prawa mechaniki kwantowej. Przyjmijmy dla prostoty, że każdego lwa można traktować jak cząstkę o masie  $m$ . Odpowiednikiem klasycznego równania ruchu cząstki (wyrażającego II zasadę Newtona) jest w mechanice kwantowej równanie Schrödingera. Jego rozwiązaniem jest tak zwana funkcja falowa, opisująca własności cząstek kwantowych w języku teorii fal. Im większa



Rozwiązanie zadania M.40

Na figurze złożonej z trójkąta i kwadratu opiszemy prostokąt CXYZ (zob. rysunek).



Trójkąty ACB i DXA są przystające, gdyż  $\sphericalangle XAD = 180^\circ - (90^\circ + \sphericalangle CAB) = 90^\circ - \sphericalangle CAB = \sphericalangle CBA$ ,  $\sphericalangle AXD = \sphericalangle ACD$ , więc  $\sphericalangle XDA = \sphericalangle CBA$  oraz  $AB = AD$ . Podobnie wykazujemy, że trójkąty ACB, EYD i BZE są przystające. Mamy więc  $AC = BZ$ ,  $XA = BC$ , stąd  $CZ = CB + BZ = XA + AC = XC$ . Prostokąt jest więc kwadratem. Punkt O jest środkiem symetrii całej narysowanej figury, leży więc na przekątnej CY. Kąt OCB równy jest więc połowie kąta prostego.

wartość (bezwzględna) ma ta funkcja w danym miejscu, tym bardziej prawdopodobne jest znalezienie tam cząstki (dokładniej: gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w danym miejscu jest wprost proporcjonalna do kwadratu bezwzględnej wartości funkcji falowej w tym miejscu). Funkcja falowa ogólnie zależy i od czasu, i od współrzędnych przestrzennych. Załóżmy dla uproszczenia, że lwy biegają po wybiegu w sposób ustalony, a zatem prawdopodobieństwo spotkania lwa w dowolnym miejscu na wybiegu nie zależy od czasu, ponieważ „okupują” one wybieg w sposób średnio równomierny. Wtedy funkcja falowa będzie iloczynem pewnej funkcji czasu i pewnej funkcji współrzędnych przestrzennych. O rozkładzie przestrzennym prawdopodobieństwa znajdowania się lwa w danym miejscu decydować będzie tylko ta druga funkcja. W dalszym ciągu tylko tą funkcją będziemy się zajmowali (i ją też będziemy nazywali funkcją falową). Teraz funkcja falowa zależy od dwóch współrzędnych przestrzennych. Aby sobie jeszcze bardziej uprościć zadanie, przyjmijmy, że lwy biegają tylko od jednej bariery do drugiej po prostych prostopadłych do barier (jedną z tych prostych przyjmiemy za oś 0x). Teraz funkcja falowa zależy tylko od jednej zmiennej. Przy tych wszystkich uproszczeniach pęd lwa opisuje w mechanice klasycznej wielkość:  $p = mv$ , gdzie  $v$  — prędkość lwa; w mechanice kwantowej pęd lwa określa pochodna funkcji falowej;

$$\frac{\hbar}{i} \frac{d\psi}{dx}$$

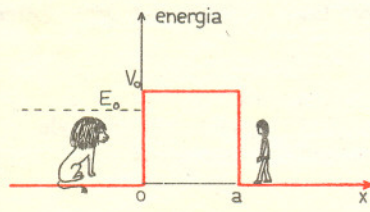
W mechanice klasycznej energia kinetyczna lwa dana jest wzorem  $E = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$ ; w mechanice kwantowej energię kinetyczną lwa określa wielkość;

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2}$$

Jeśli więc  $V$  oznacza energię potencjalną lwa, to zasada zachowania energii w ujęciu kwantowym przyjmie postać:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = E\psi,$$

gdzie  $E$  — całkowita energia cząstki. Jest to właśnie równanie Schrödingera. Aby zatem odpowiedzieć na postawione pytanie, wystarczy znaleźć rozwiązanie tego równania dla podanej na rys. 1 zależności  $V(x)$ , a następnie określić  $V_0$  z warunku, że bezwzględna wartość funkcji falowej poza obszarem bariery jest dokładnie równa zero (inaczej bariera nie byłaby w 100% bezpieczna dla publiczności). Problem możemy jednak rozwiązać prościej, przyjmując mianowicie, że wybieg rozciąga się w jedną stronę nieskończenie daleko, czyli rozstrzygnąć zagadnienie dla jednej tylko bariery (rys. 2). Kto nie wierzy, niech sam się przekona.

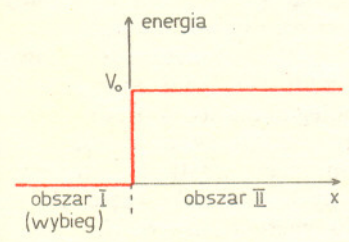


Rys. 2

Jaki uzyskamy wynik? Zapewne Czytelnik będzie wolał sam wykazać, że na to, by bariera była absolutnie bezpieczna dla publiczności, jej wysokość energetyczna  $V_0$  musi być nieskończenie wielka (jeśli ma mieć skończoną szerokość  $a$ ). Tym, którzy nie wiedzą jeszcze, jak się do tego zabrać, przyda się pewnie kilka wskazówek. W tym celu rozważmy najpierw prosty przypadek — progu potencjalnego (rys. 3), tzn. sytuacji, w której gdyby lew znalazł się poza wybiegiem, miałby wszędzie jednakową energię potencjalną o  $V_0$  większą niż na wybiegu. Ponieważ w obszarze I ( $x < 0$ ) możemy przyjąć  $V = 0$  (gdyż interesuje nas jedynie przyrost energii potencjalnej względem energii potencjalnej lwa na wybiegu), a  $V = V_0$  w obszarze II, zatem najprościej jest rozwiązać równanie Schrödingera oddzielnie dla każdego obszaru. Przepisujemy więc najpierw to równanie dla obszaru I. Jeśli Czytelnik uważnie przyjrzy się temu równaniu, to zauważy zapewne, że jest ono formalnie identyczne z równaniem ruchu drgającego. Rozwiązaniami podstawowymi równania są więc funkcje trygonometryczne  $\sin kx$  i  $\cos kx$ , gdzie  $k$  — pewna stała, którą trzeba wyznaczyć. Znacznie prościej jest rozwiązywać tego rodzaju równania, jeśli funkcje trygonometryczne przedstawimy za pomocą funkcji wykładniczej  $e^{iy}$  zmiennej urojonej  $iy$  ( $e$  — podstawa logarytmów naturalnych), korzystając z relacji:

$$e^{\pm iy} = \cos y \pm i \sin y$$

(stąd wynikają relacje odwrotne:  $2 \cos y = e^{iy} + e^{-iy}$  oraz  $2i \sin y = e^{iy} - e^{-iy}$ ), gdzie  $y$  — zmienna rzeczywista. Teraz możemy powiedzieć, że podstawowymi



Rys. 3

rozwiązaniami naszego równania są funkcje:  $e^{ikx}$  oraz  $e^{-ikx}$ . Łatwo to sprawdzić wiedząc, że

$$\frac{d}{dy} e^{Cy} = Ce^{Cy},$$

gdzie  $C$  — stała. Czyżniąc tak dojdziemy do wniosku, że warunkiem tego, by dwie podane funkcje wykładnicze były rozwiązaniami naszego równania, jest relacja określająca  $k$ :

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}.$$

Pierwsza funkcja ( $e^{ikx}$ ) odpowiada fali harmonicznnej (o długości  $\lambda = 2\pi/k$ ) biegnącej z lewa na prawo, druga ( $e^{-ikx}$ ) — takiej samej fali biegnącej w przeciwnym kierunku. Pierwsza funkcja opisuje lwa biegnącego ku barierze, druga — lwa „odbitego” od bariery. Ogólnie funkcja falowa opisująca lwa na wybiegu będzie więc kombinacją:

$$\psi_I = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx},$$

gdzie  $A_1$  i  $B_1$  — stałe. Kwadrat bezwzględnej wartości pierwszego członu tej kombinacji (a więc i pierwszej stałej) określa gęstość prawdopodobieństwa znalezienia na wybiegu lwa biegnącego ku barierze, kwadrat bezwzględnej wartości drugiego członu — lwa biegnącego od bariery (po „odbiciu”). Stałą  $A_1$  będziemy traktowali jako daną, zakładając tym samym, że wiemy wszystko o lwie biegnącym ku barierze. Do wyznaczenia pozostaje więc stała  $B_1$ .

Z kolei przepisujemy równanie Schrödingera dla obszaru II ( $V = V_0$ ). I znowu szukamy rozwiązań podstawowych w postaci  $e^{ik'x}$ . Po zróżniczkowaniu dojdziemy do wniosku, że warunkiem tego, by funkcje takie były rozwiązaniem równania, jest relacja:

$$(k')^2 = \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}.$$

Jednakże z założenia  $E < V_0$ , więc  $k'$  musi być urojone:

$k' = i\kappa$ . Ogólne rozwiązanie równania Schrödingera dla obszaru II ma więc postać kombinacji:

$$\psi_{II} = A_{II} e^{\kappa x} + B_{II} e^{-\kappa x}.$$

Pierwszy człon reprezentuje lwa, któremu udało się wniknąć do obszaru II; funkcja  $e^{\kappa x}$  wzrasta nieograniczenie przy  $x \rightarrow \infty$ , co oznacza, że jeśli  $A_{II} \neq 0$ , to prawdopodobieństwo znalezienia lwa w tym obszarze także wzrasta nieograniczenie. Jest to fizycznie niemożliwe, wobec tego musi być:

$$A_{II} = 0.$$

Co mają ze sobą wspólnego funkcje  $\psi_I$  i  $\psi_{II}$ ? Każda opisuje tę samą cząstkę, tyle tylko, że w innym obszarze. Na granicy obszarów funkcje te muszą być więc równe:  $\psi_I(0) = \psi_{II}(0)$ , skąd:

$$A_1 + B_1 = B_{II}.$$

Dalej, pochodna funkcji falowej przedstawia pęd cząstki. Na granicy obszarów muszą więc być także równe pochodne obydwu funkcji. Z tego ostatniego warunku brzegowego wynika, że

$$ik(A_1 - B_1) = -\kappa B_{II}.$$

Z obydwu relacji dla stałych  $A_1$ ,  $B_1$  i  $B_{II}$  uzyskujemy:

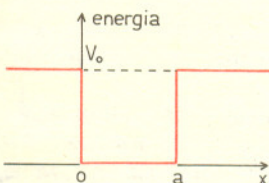
$$B_1 = -\frac{\kappa + ik}{\kappa - ik} A_1, \quad \text{oraz} \quad B_{II} = -\frac{2ik}{\kappa - ik} A_1.$$

Jest to rezultat odmienny niż w mechanice klasycznej, bowiem  $B_1 \neq A_1$  oraz  $B_{II} \neq 0$ . Oznacza to, że fala reprezentująca lwa dobiegającego do progu częściowo odbija się, a częściowo wnika do obszaru progu. Wprawdzie ta fala wnikająca jest silnie tłumiona, jednakże nie znika tożsamościowo. Czy to oznacza, że w chwili odbicia cząstka rozdzwaja się na dwie mniejsze części, z których jedna wraca, a druga wnika do wnętrza progu, by tam w pewnej odległości zniknąć? Nie, uzyskany wynik wskazuje tylko, że prawdopodobieństwo odbicia cząstki jest mniejsze od jedności oraz że prawdopodobieństwo wniknięcia cząstki do wnętrza progu jest różne od zera. Spośród wielu lwów atakujących próg tylko część ich „odbije się”, pewien natomiast ich ułamek wniknie do wnętrza obszaru II. Tłumienie funkcji  $\psi_{II}$  (a więc i gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w danym miejscu obszaru II) jest tym większa, im wyższy jest próg i im mniejszą

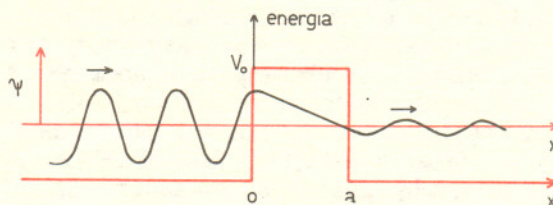
energii ma cząstka. Wynika to z postaci wzorów określających  $\psi_{II}$  oraz współczynnik tłumienia  $\kappa$ . Łatwo też zauważyć, że funkcja  $\psi_{II}$  będzie tożsamościowo równa zero tylko wówczas, gdy  $\kappa \rightarrow \infty$  (nieskończenie silne tłumienie), czyli gdy  $V_0 \rightarrow \infty$ . Tylko w takim przypadku granicznym nastąpi całkowite odbicie.

Jak można sobie tłumaczyć to zjawisko wnikania cząstki do obszaru klasycznie wzbronionego? Niestety, nie ma sposobu przedstawienia tej sytuacji w języku mechaniki klasycznej, gdyż fizyka klasyczna sytuacji takich w ogóle nie dopuszcza. Obrazowo jednak rzecz ujmując, możemy cząstkę kwantową wyobrazić sobie jako swego rodzaju pakiet czy kłębek fal. Zanikający w obszarze II „ogon” funkcji falowej odpowiada w takim niezbyt adekwatnym modelu falowym „ramionom” cząstki, którymi sięga ona bezkarnie tam, gdzie jej mechanika klasyczna zabrania.

W tym miejscu Czytelnik domyśla się pewnie, jak dalej można rozumować. Skoro mianowicie cząstka może wniknąć z pewnym prawdopodobieństwem do obszaru II, to w sytuacji, kiedy obszar ten ma skończoną szerokość (rys. 2), z pewnym prawdopodobieństwem można znaleźć cząstkę po drugiej stronie bariery (jeśli bariera ma skończoną szerokość). Takie przenikanie cząstek przez bariery potencjalne nosi nazwę zjawiska tunelowego.



Rys. 5



Rys. 4. Zjawisko tunelowe (schematycznie)

Chętny Czytelnik pewnie zabierze się teraz do dokładnych obliczeń ilustrujących zjawisko tunelowe w przypadku bariery, jak na rys. 2, i w wyniku ich udowodni podany na wstępie warunek absolutnego bezpieczeństwa bariery dla lwów. Obliczenia te nie wniosą wiele nowego do naszej kwestii, choć pewnie poprawią nasze samopoczucie. Wyniknąć w nich powinny jednak nowe, ciekawe kwestie, dlatego warto przeprowadzić przedtem trochę rachunków i dyskusję innego, ale prostszego i pouczającego zagadnienia, mianowicie — cząstki w jamie potencjalnej (rys. 5).

Zjawisko tunelowe występuje dość często w różnych sytuacjach. Dla przykładu wymienimy: autoemisję (emisję zimną elektronów z metalu pod wpływem zewnętrznego pola elektrycznego), emisję cząstek alfa z jąder w wyniku rozpadu alfa oraz zjawiska Josephsona w złączach nadprzewodnikowych. Zapoznanie się z mechanizmami tych zjawisk pozwoli zdać sobie sprawę z realności i znaczenia efektu tunelowego.

Na pewno pomogą w tym książki, np.:  
R. P. Feynmana, R. B. Leightona i M. Sandsa,  
„Feynmana wykłady z fizyki”, tom III;  
E. H. Wichmana „Fizyka kwantowa”  
(IV tom Berkeleyowskiego Kursu Fizyki).



## Zadania

Redaguje dr Andrzej ZIEMIŃSKI

**F14.** W Stanach Zjednoczonych rozważa się projekty budowy pociągów „grawitacyjnych”. Pociągi takie poruszałyby się wydrążonymi we wnętrzu Ziemi tunelami. Tunel łączący dwa miejsca na powierzchni Ziemi byłby prowadzony wzdłuż cięciwy. Pociąg grawitacyjny potrzebowałby lokomotywy jedynie do pokonania sił tarcia. Jakie są teoretyczne podstawy tych projektów? Pomijając na początek tarcie i przyjmując, że gęstość Ziemi jest w każdym jej punkcie jednakowa, obliczcie, ile wynosiłby czas przejazdu oraz jakim przyspieszeniem byłiby poddawani podróżni? Promień Ziemi  $R \approx 6370$  km, a przyspieszenie ziemskie  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup>. Odpowiedzi szukajcie na str. 6

Redaguje mgr Andrzej MAKOWSKI

**M.40.** Dany jest trójkąt prostokątny  $ABC$  ( $\sphericalangle C = 90^\circ$ ). Na przeciwprostokątnej zbudowano na zewnątrz trójkąta kwadrat o boku  $AB$ . Wyznaczyć  $\sphericalangle OCB$ , gdzie  $O$  jest środkiem kwadratu. Rozwiązanie zadania na str. 3

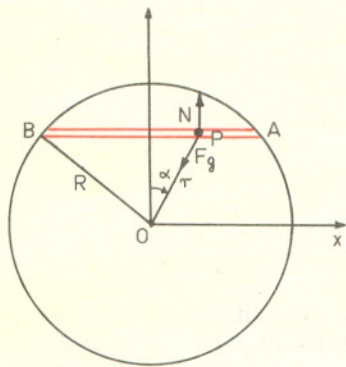
**M.41.** Udowodnić, że w dowolnym dwunastokącie wypukłym istnieją dwie przekątne tworzące kąt o mierze mniejszej od  $4^\circ$  (przyjmujemy, że proste równoległe tworzą kąt  $0^\circ$ ).  
Rozwiązanie zadania na str. 10

**M.42.** Udowodnić, że 38 jest największą liczbą parzystą, która nie jest sumą dwóch liczb złożonych nieparzystych. Rozwiązanie zadania na str. 2



### Rozwiązanie zadania F.14

Jeśli pominiemy tarcie, to na pociąg znajdujący się w punkcie P tunelu AB



Rys. 1

działa siła przyciągania grawitacyjnego Ziemi  $F_g$ , skierowana wzdłuż jej promienia i siła reakcji podłoża  $N$ , równoważąca składową siły ciężkości prostopadłą do torów (osi tunelu). Niezrównoważona składowa siły ciężkości, skierowana wzdłuż osi tunelu, powoduje ruch pociągu. Gdy pociąg znajduje się w odległości  $r$  od środka Ziemi, siła przyciągania grawitacyjnego wynosi (twierdzenie Gaussa):

$$F_g = k \frac{M_r \cdot m}{r^2},$$

gdzie:  $k$  — stała powszechnego ciążenia,  $m$  — masa pociągu, a  $M_r$  — masa zawarta w kuli o promieniu  $r$ . Przy upraszczającym założeniu, że gęstość Ziemi jest w każdym

jej punkcie jednakowa, mamy:  $M_r = M \cdot \frac{r^3}{R^3}$ ,

gdzie  $M$  jest masą Ziemi. Przy tych upraszczających założeniach równanie ruchu pociągu jest następujące (rys. 1):

$$m \cdot a = -k \frac{M_r m}{r^2} \cos \alpha = -\frac{kM \cdot m}{R^3} \cdot x,$$

gdzie  $x$  określa odległość pociągu od środka tunelu AB. Z powyższego równania wynika, że ruch pociągu będzie ruchem harmonicznym (przyspieszenie jest proporcjonalne do wychylenia i przeciwnie skierowane):

$$a = -\frac{kM}{R^3} x = -\frac{g}{R} x, \quad \text{bo } g = \frac{Mk}{R^2}.$$

Półokres takiego ruchu wynosi:

$$T = \pi \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

To jest właśnie czas potrzebny na przebycie odległości AB. Wartość  $T$  nie zależy od odległości punktów A i B. Innymi słowy, czas przejazdu np. z Warszawy do Łodzi czy do Moskwy teoretycznie powinien być identyczny i wynosić około 42 min. 10 s.

D. c. na str. 7

W jaki sposób zmierzyć długość śrubki leżącej pod szafą? Ano, trzeba wyciągnąć śrubkę spod szafy, wziąć linijkę z podziałką i zmierzyć śrubkę.

Ta trywialna uwaga ma jednak pewien sens — wskazuje ona mianowicie, że przemieszczenie śrubki (spod szafy, dajmy na to, na stół) nie ma wpływu na wynik pomiaru długości. Nie wszystkie pomiary są niezależne od przemieszczeń, np. znajdowanie pozycji statku na morzu (pomiar długości i szerokości geograficznej).

Oba opisane zagadnienia mówią o pewnych stosunkach przestrzennych. Oba należą tym samym do obszaru zainteresowań geometrii. Jak to więc jest: możemy, czy nie możemy dokonywać przemieszczeń obiektów, których cechy geometryczne chcemy badać? Raz tak, raz inaczej? Jak zgadnąć kiedy wolno, kiedy nie?

Żeby sytuację bardziej skomplikować rozpatrzmy jeszcze dwa przykłady. Chcąc zmierzyć kąty wielokąta możemy bez szkody dla wyników zmniejszyć go, bądź powiększyć, jak nam wygodniej. Dla sprawdzenia czy skarpetka ma dziurę (dziura to też pojęcie z obszaru geometrii) możemy ją miąć, naciągać, rozciągać, słowem deformować dowolnie wystrzegając się tylko rozerwania. Tymczasem zdeformowanie śrubki (np. za pomocą młotka) mogłoby zmienić rezultat badania długości dość znacznie.

Co więc wolno robić z przedmiotem poddając go geometrycznym badaniom, aby nie zafałszować rezultatów badań? Odpowiedź ogólna wydaje się niemożliwa. Chyba, żeby uznać, że przytoczone tu własności geometryczne (długość, położenie, rozwartość kąta, posiadanie dziur) pochodzą nie z jednej, a z różnych geometrii.

### PODSTAWY GEOMETRII

Na to, by jakieś badania mogły rościć sobie prawo do nazwy „nauka”, trzeba by spełniały określone warunki. Trzeba mianowicie, by został jasno określony przedmiot badania. To oczywiście. Trzeba też, a to już rzecz mniej oczywista, by jednocześnie określone zostały metody badania. Dopuszczając bowiem w tym względzie absolutną dowolność możemy zaprzeczyć najoczywistszym prawdom. Tlen w temperaturze pokojowej i pod ciśnieniem atmosferycznym jest gazem. Tak? No to wpuszczamy do zbiornika z tlenem pewną (złośliwie dobraną) ilość wodoru, mała iskierka i (o ile uszliśmy z życiem) stwierdzamy, że jest ciecz. Że nie wolno przy badaniu stanu skupienia robić takich machinacji? To właśnie jest ograniczenie metodologiczne. Dyscyplina zajmująca się ustalaniem przedmiotu badań i dopuszczalnych metod danej dziedziny wiedzy nazywa się podstawami tej dziedziny. Pytania zawarte we wstępie należą więc do podstaw geometrii. Co do przedmiotu, to w rozpatrywanych konkretnych przykładach wszystko wydaje się być w porządku — chodzi o stosunki przestrzenne. Co do metod zaś — nie zdołaliśmy uzyskać tu odpowiedzi.

Artykuł ten jest poświęcony wskazaniu, że ustalenie metod może mieć wpływ na ustalenie przedmiotu badania.

### PROGRAM ERLANGENSKI

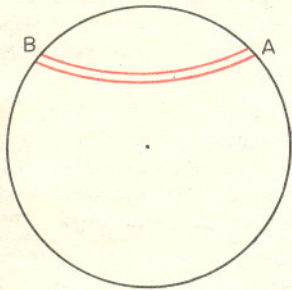
Sto dwa i pół roku temu wykład inaugurujący rok akademicki na Uniwersytecie w Erlangen (Niemcy) wygłaszał wybitny matematyk Felix Klein (1849–1925). Poświęcił go geometrii. Dziś powiedzielibyśmy: podstawom geometrii — wówczas tej nazwy nie używano. Konkretnie mówił on o wpływie metod uprawiania tej dyscypliny na jej przedmiot. Zaproponował nawet, aby rozbić geometrię na szereg dyscyplin stosując zasadę — każdy zestaw metod wyznacza odrębną geometrię. Podał też sposób budowania takich „zestawów”. Propozycja ta została później nazwana programem Kleina lub programem erlangenkim. I powszechnie przyjęta. Zasada budowania zestawu dopuszczalnych metod jest prosta: umawiamy się jakie przekształcenia badanych obiektów są dopuszczalne. Aby nie uzyskać sprzeczności konieczne jest tylko przestrzeganie następujących trzech rygorów:

1. Zawsze dopuszczamy niewykonywanie żadnych przekształceń.
2. Wraz z dopuszczeniem jakiegoś przekształcenia dopuścić musimy i przekształcenie do niego odwrotne (by móc wrócić do punktu wyjścia).
3. Jeżeli dopuścimy dwa przekształcenia, musimy dopuścić i takie, które polegają na wykonaniu ich kolejno.

Każdy zestaw przekształceń spełniający powyższe rygory nazywamy grupą przekształceń. Zatem Klein proponował, aby konkretną geometrię wyznaczała wybrana grupa przekształceń dopuszczalnych.

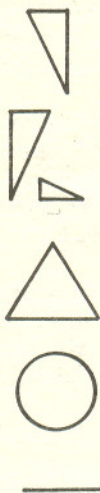
Wzdłuż osi tunelu zarówno pociąg, jak i podróżni byłoby poddawani tej samej składowej przyspieszenia grawitacyjnego Ziemi. Oznacza to, że w tym kierunku znajdowałyby się podróżni w stanie nieważkości względem pociągu. Nie odczuwaliby, że pociąg przyspiesza lub zwalnia, odczuwaliby natomiast przyspieszenie grawitacyjne względem podłogi wagonów. Wartość tego przyspieszenia zmieniałaby się wzdłuż drogi i zależałaby od głębokości tunelu.

Zastanówcie się jeszcze, ale już sami, jak na nasze wyniki i wnioski wpłynęło uwzględnienie tarcia oraz faktu, że gęstość Ziemi jest monotoniczną (jaką?) funkcją odległości (przy upraszczającym założeniu, że rozkład masy Ziemi jest kulisto-symetryczny). Ambitniejszym z Was proponujemy zastanowienie się nad jeszcze jednym problemem: czy zmiana



Rys. 2

kształtu toru (jak na rys. 2) zwiększy, czy zmniejszy okres  $T$  (ew. przy tych samych uproszczeniach, jakie poczyniliśmy w podanym wyżej rozwiązaniu).



#### Literatura

Pewne informacje związane z tematem artykułu można znaleźć w podręczniku Z. Krygowska, O. Maroszkowa: *Geometria II*. Szersze potraktowanie tematu zawiera np. L. S. M. Coxeter: *Wstęp do geometrii dawnej i nowej*.  
Interesujących się zagadnieniem od strony geometrii analitycznej kierujemy do podręcznika K. Borsuk: *Geometria analityczna wielowymiarowa*.

Oczywisty wniosek z tych założeń jest następujący: Jeżeli geometria  $G$  jest wyznaczona przez grupę  $G$  to obiektom badań geometrii  $G$  mogą być tylko te stosunki przestrzenne, których nie zmienia żadne z przekształceń grupy  $G$ . Te stosunki przestrzenne nazywamy *niezmiennikami* grupy  $G$ .  
A więc istotnie, przez wybór metod wyznaczamy przedmiot badania!

## RÓŻNE GEOMETRIE KLEINOWSKIE

Jak wynika z przytoczonych rygorów istnieje najmniejsza grupa przekształceń. Taka mianowicie, w której nie dopuszczamy żadnych w ogóle przekształceń (aby nie różniła się od innych, brak przekształcenia oznaczmy literą  $I$  i też uważamy za przekształcenie — *tożsamościowe*) — oznaczmy ją  $I$ . Każdy stosunek przestrzenny jest niezmiennikiem tej grupy (nic przecież nie może ulec zmianie). Geometria  $I$  bada więc wszystkie stosunki przestrzenne, w szczególności położenie. Żadna inna geometria nie bada już położenia (dlaczego?), może tylko badać wzajemne położenie dwóch obiektów.  $I$  jest geometrią używaną przez astronomów, kartografów, topografów (w niej mieści się właśnie problem położenia statku). Jeżeli dopuścimy wszystkie przekształcenia nie zmieniające odległości — *izometrie* (spełniają one rygor — proszę sprawdzić) otrzymamy *geometrię metryczną*. Będzie to już mniej szczegółowa geometria — wśród niezmienników nie ma już położenia, ani orientacji kątów na płaszczyźnie. Z niej korzystają inżynierowie mechanicy, budowlani, krawcy itp. (tu — śrubka).

Biorąc jako grupę przekształceń *podobieństwa* (możemy zmieniać odległości, ale wszystkie w tym samym stosunku) otrzymamy tę geometrię, którą uprawiali Euklides i Pitagoras — domenę matematyków. Odległość nie będzie tu już obiektem badań, ani pole (można badać tylko ich stosunek), pozostaną np. kąty (tu zaś — kąty wielokąta).

Jeżeli dopuścilibyśmy wszelkie przekształcenia nie wykrzywiające prostych i zachowujące ich równoległość (*przekształcenia afiniczne*) stracilibyśmy możliwość badania rozwartości kątów. Ciekawe, że pozostałyby wśród obiektów badanych środek odcinka.

Wszystkie przekształcenia nie „rozrywające” ani nie „sklejające” figur (*homeomorfizmy*) wyznaczają geometrię o nazwie *topologia* (tu z kolei — skarpetka). Przekształcenia *wzajemnie jednoznaczne* (jeszcze ogólniejsze — figury mogą się „rozrywać” i „sklejać”, nie mogą się „rozrywać” ani „sklejać” punkty) wyznaczają *teorię mnogości* — tak jest! — teorię zbiorów.

Można wyżej podane pojęcia zilustrować w następujący sposób: Przekształcenia każdej z wymienionych grup pozwalają pewne figury nałożyć na siebie, zaś innych nie. Te, które dadzą się na siebie nałożyć są z punktu widzenia odpowiedniej geometrii identyczne. Na podanym obok rysunku mamy sześć różnych figur z punktu widzenia geometrii położenia, tylko pięć różnych z punktu widzenia geometrii metrycznej (pierwsze dwie są identyczne), cztery różne z punktu widzenia geometrii podobieństw (pierwsze trzy są identyczne), trzy — z punktu widzenia geometrii afinicznej (pierwsze cztery, piąta i szósta), dwie — z punktu widzenia topologii (pierwszych pięć i szósta) i jedną — z punktu widzenia teorii mnogości.

#### Uwaga!

Niedoskonałość powyższego tekstu, może spowodować kilka nieporozumień. „Odetnijmy się” zatem od dwóch najbardziej prawdopodobnych.

— Zwrot „różne geometrie” jest używany nie tylko w podanym wyżej sensie, lecz także dla określenia stosunków przestrzennych w różnych przestrzeniach (np. przestrzeń Euklidesa i przestrzeń Bolyai-Łobaczewskiego). Tutaj mówimy o różnych geometriach tej samej przestrzeni (konkretnie Euklidesa). Dla podkreślenia napisaliśmy więc „różne geometrie kleinowskie”. Oczywiście istnieją różne geometrie kleinowskie przestrzeni Bolyai-Łobaczewskiego (choć już nie takie same) i innych przestrzeni.

— Podane przykłady geometrii są uszeregowane od najbardziej szczegółowej do najbardziej ogólnej. Geometrii kleinowskich przestrzeni Euklidesa jest wiele (nieskończenie wiele). Błędem byłby wniosek, że dadzą się one wszystkie w takim „rosnącym” ciągu ustawić. Np. grupa przekształceń zachowujących pola wyznacza geometrię ani bardziej szczegółową, ani bardziej ogólną od geometrii podobieństw.

#### Ćwiczenia

- Przez wybranie odpowiedniej grupy przekształceń określić geometrię bardziej ogólną od geometrii położenia i zarazem bardziej szczegółową od geometrii metrycznej. Grupa ta musi mieć zatem jakiś niezmiennik nieobecny wśród niezmienników izometrii i dopuszczać zmianę położenia.
- W których z wymienionych geometrii można sformułować twierdzenie Pitagorasa. Niby jest tam mowa o odległości, ale...
- Jeżeli środek jest niezmiennikiem geometrii afinicznej to może być skonstruowany za pomocą jej pojęć. Istotnie można skonstruować środek odcinka tylko kreśląc proste i prowadząc równoległe (bez cyrkla i żadnego odmierzenia). Warto spróbować.



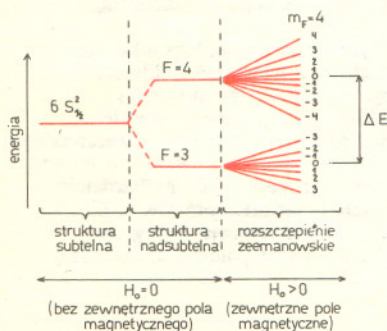
Dr inż. Ryszard KUŃSKI



Pieniądzy też mają ludzie zwykle za mało, z czego można wnioskować, że „czas to pieniądz”.

$$f = \frac{1}{T}$$

Cez (Cs) to metal alkaliczny. Liczba atomowa 55. Masa atomowa 132,05. Izotop naturalny 133. Potencjał jonizacji 3,89 eV. Temperatura topnienia +28,5°C, temperatura wrzenia +670°C (pod ciśnieniem normalnym). Gęstość 1,873 g/cm<sup>3</sup> w temperaturze +20°C. Cez odkryli Bunsen i Kirchoff w roku 1860 w trakcie badań spektroskopowych.



Współczynnik liczbowy 427 odnosi się do wartości natężenia pola  $H_0$ , wyrażonego w erstedach. W obowiązującym obecnie układzie jednostek SI, natężenie pola magnetycznego należy wyrażać w amperach na metr [A/m]. Z uwagi na dostępną literaturę dotyczącą wzorców atomowych zastosowano „stare” współczynniki, wyrażone w układzie CGS–M.

W codziennym życiu wiele naszych działań uwarunkowanych jest przez czas. Nie zdajemy sobie z tego sprawy, bo od pierwszych naszych dni żyjemy w określonej cywilizacji, determinującej nasze postępowanie, m.in. — w skali czasu.

Dobrze pamiętamy pewne zdarzenia, ale nie rejestrujemy upływu czasu w sposób jednostajny. Upływ czasu jest tworem wyobraźni człowieka. Obiektywnie rejestruje się go za pomocą zegarów. W miarę rozwoju społeczeństw — rośnie potrzeba rejestracji coraz krótszych odcinków czasu i rosną wymagania co do precyzji ich pomiarów. Rozwija się dziedzina nauki i techniki zajmująca się badaniem zjawisk mogących stanowić „zegar”, tzn. urządzenie do określania odcinków czasu. Funkcję zegara mogą spełniać procesy, które przebiegają cyklicznie. Mogą to być ruchy Ziemi, procesy biologiczne, procesy radioaktywne, drgania mechaniczne, drgania elektromagnetyczne, absorpcja lub emisja kwantów energii przy przejściach energetycznych atomów i molekuł itp. Wykorzystanie jednej z możliwych metod czy jakiegos zjawiska do budowy zegara związane jest z potrzebą pomiaru określonego odcinka czasu. We wszystkich pomiarach czasu wykorzystuje się w tym celu w sposób umowny cykle przebiegu jakiegos zjawiska, a przez zliczanie cyklicznych jego przebiegów otrzymujemy informację, jak „dużo czasu upłynęło”.

Sam czas jest pojęciem pierwotnym, ale jak powiedział jeden z moich kolegów: „ma tę cechę, że jest go zawsze za mało”. W tym humorystycznym stwierdzeniu jest dużo prawdy. W wielu doświadczeniach fizycznych i w procesach technicznych pomiar czasu musi być dokonywany bardzo szybko. Innymi słowy, zdolność rozdzielcza układu mierzącego czas musi być dużo większa od mierzonego odcinka czasu. Oznacza to, że zjawiska okresowe, wykorzystywane w danym zegarze, muszą trwać dużo krócej od mierzonego odcinka czasu. Współczesny rozwój nauki i techniki, stymulując z jednej strony rozwój metod i urządzeń, domaga się jednocześnie coraz precyzyjniejszych metod i narzędzi.

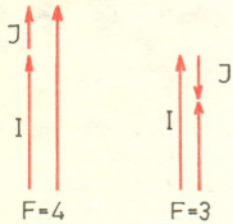
W dziedzinie pomiarów i odtwarzania skali czasu najprecyzyjniejsze są w chwili obecnej atomowe wzorce częstotliwości. Popularna nazwa tych urządzeń — zegary atomowe — wiąże się ze ścisłą zależnością okresu (T) i częstotliwości (f), charakteryzujących każde zjawisko okresowe. Na obecnym etapie rozwoju techniki i technologii najszerze rozpowszechnienie znalazły wzorce częstotliwości z wiązką atomów cezu, masery wodorowe i wzorce rubidowe z pompowaniem optycznym. Parametry i właściwości tych wzorców są różne, ale wzajemnie się one uzupełniają. Dzięki temu najpoważniejsze laboratoria czasu i częstotliwości dysponują zestawem wymienionych wyżej wzorców. Pozwala to zaspokoić wszystkie potrzeby aktualnych użytkowników wzorców czasu (a więc i częstotliwości). Należy podkreślić, że pierwotnym wzorcem częstotliwości, tzn. takim z którym porównuje się wszystkie inne wzorce częstotliwości, jest wzorec z wiązką atomów cezu.

Wspólną cechą atomowych wzorców częstotliwości jest wykorzystanie zbiorowiska swobodnych atomów wodoru lub metali alkalicznych (z jednym elektronem walencyjnym) w stanie podstawowym. Przy zachowaniu pewnych warunków technicznych eksperymentu możliwe jest wywołanie przejść pomiędzy odpowiednimi poziomami energetycznymi atomów, a to związane jest z absorpcją lub emisją kwantu energii. Zachodzi więc absorpcja lub emisja fali elektromagnetycznej o określonej częstotliwości.

Prześledzimy procesy i zasadę działania wzorca z wiązką atomów cezu. Dla celów stabilizacji częstotliwości wykorzystuje się naturalny izotop cezu  $Cs^{133}$  w stanie podstawowym, tzn. w stanie, w którym atomy posiadają najniższą energię potencjalną (nie mylić z energią kinetyczną). Atomy cezu w stanie podstawowym mają dwa poziomy energetyczne struktury nadsubtelnej o liczbach kwantowych  $F = 4$  i  $F = 3$ . W obecności zewnętrznego pola magnetycznego o natężeniu  $H_0$  następuje rozszczepienie tych poziomów na 9 i 7 składowych zeemanowskich (zjawisko Zeemana) o liczbach kwantowych  $m_F$ . Jak widać na rysunku, jest to struktura skomplikowana. W cezowych wzorcach częstotliwości wykorzystuje się jedynie dwa poziomy zeemanowskie o liczbach kwantowych  $m_F = 0$  z grup poziomów  $F = 3$  i  $F = 4$ . Realizuje się przejścia  $F = 4, m_F = 0 \rightleftharpoons F = 3, m_F = 0$ . Przejście energetyczne atomu pomiędzy tymi poziomami zachodzi przy emisji lub absorpcji kwantu energii  $\Delta E$  o częstotliwości  $f_0 = 9\,192\,631\,770$  Hz. Wartość tej częstotliwości jest aproksymowana dla przypadku, gdy na zbiorowisko atomów cezu nie działają żadne pola. Ale, jak powiedziano wyżej, dla rozszczepienia poziomów struktury nadsubtelnej na składowe zeemanowskie konieczne jest działanie zewnętrznego pola magnetycznego o natężeniu  $H_0$ . Pole to powoduje, że częstotliwość podanego przejścia energetycznego jest większa o wartość  $\Delta f = 427 H_0^2 \text{ Oe}^{-2} \text{ Hz}$ . Tak więc w warunkach fizycznych realizacji eksperymentu przy przejściach energetycznych cezu  $Cs^{133}$  pomiędzy poziomami  $F = 4, m_F = 0 \rightleftharpoons F = 3, m_F = 0$ , częstotliwość przejścia wynosi  $f = (9\,192\,631\,770 + 427 H_0^2 \text{ Oe}^{-2}) \text{ Hz}$ .

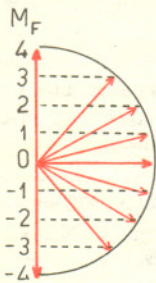
Jak działa wzorec częstotliwości z wiązką atomów cezu? Zasadniczą jego cechą jest bierność. Oznacza to, że procesy fizyczne (przejścia energetyczne atomów cezu) służą jedynie do

Struktura nadsubtelna poziomu energetycznego atomu związana jest z momentem  $J$  i  $m$  oraz momentem  $I$  i  $m$  w atomie  $I$  oraz momentem całkowitym  $J$  elektronu na zewnętrznej orbicie atomu. Z uwagi na możliwe dwie wzajemnie orientacje tych momentów: równoległą i antyrównoległą — liczba

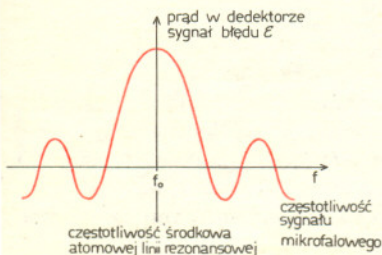


kwantowa  $F$  poziomów struktury nadsubtelnej przybiera wartości  $F = I + J$ . Dla cezu  $Cs^{133}$  w stanie podstawowym  $I = 7/2$ ,  $J = 1/2$ , więc  $F = 7/2 \pm 1/2$ ; daje to wartości  $F = 4$  i  $F = 3$ .

Istnienie poziomów zeemanowskich, oznaczanych za pomocą liczby kwantowej  $m_F$ , jest wynikiem magnetycznych właściwości atomów. Jeśli atom znajduje się w polu magnetycznym o natężeniu skierowanym np. wzdłuż osi  $Oz$ , to istnieje  $2F + 1$  możliwych orientacji momentu magnetycznego atomu — takich mianowicie, że rzuty momentu magnetycznego atomu na wyróżniony kierunek przybierają wartości skwantowane. Dla cezu  $Cs^{133}$  w stanie podstawowym mamy  $F = 4$  i  $F = 3$ . Możliwych jest więc 9 i 7 orientacji momentu magnetycznego atomu cezu względem kierunku natężenia zewnętrznego pola magnetycznego.

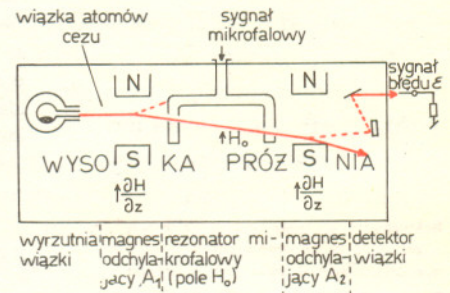
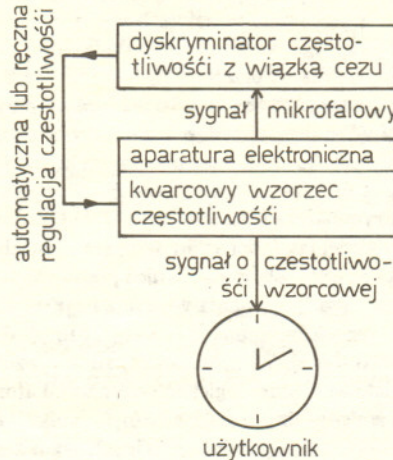


Jeśli na atomy nie działa żadne pole magnetyczne, to poziomy energetyczne odpowiadające różnym orientacjom momentu magnetycznego atomu pokrywają się. Mówi się, że poziom  $F$  jest  $2F + 1$ -krotnie zdegenerowany (zwyrodniały). Jeśli na atom działa pole magnetyczne, to różnym orientacjom momentu magnetycznego odpowiadają różne wartości energii potencjalnej momentu magnetycznego; w polu tym poziomy rozszczepiają się. Mówi się, że pole magnetyczne usuwa degenerację poziomu energetycznego  $F$ .



precyzyjnego określenia częstotliwości z zewnętrznego źródła. W zespole urządzeń stanowiących wzorzec można wyróżnić atomowy dyskryminator częstotliwości oraz zespół aparatury elektronicznej z precyzyjnym wzorcem kwarcowym. Dyskryminator częstotliwości jest układem odniesienia, a wzorzec kwarcowy z aparaturą elektroniczną służy do wytworzenia sygnału mikrofalowego o częstotliwości przejść energetycznych atomów cezu. W zespole aparatury elektronicznej wykorzystuje się zwykle wysokiej klasy wzorzec kwarcowy o częstotliwości 2,5 MHz lub 5 MHz. Stanowi on źródło częstotliwości służącej do wytworzenia sygnału pobudzającego dyskryminator oraz jest źródłem sygnału dla użytkownika.

Jak jest zbudowany atomowy dyskryminator częstotliwości? Zasadniczym zadaniem dyskryminatora z wiązką cezu jest wytworzenie takich warunków, które umożliwią oddziaływanie pola mikrofalowego na swobodne atomy cezu. Ma to doprowadzić do wymuszenia żądanych przejść energetycznych w ciezie przez pole mikrofalowe. Jeżeli sygnał mikrofalowy wywoła żądane przejścia energetyczne, zmieni się natężenie padającego na detektor strumienia atomów cezu. Jest to informacja, że częstotliwość sygnału mikrofalowego mieści się w zakresie szerokości atomowej linii rezonansowej dyskryminatora.



Istnieje szereg rozwiązań technicznych atomowego dyskryminatora częstotliwości z wiązką atomową cezu. Zasada działania jest jednak wspólna. Wiązkę atomową cezu wytwarza się w specjalnej wyrzutni. Cez w pojemniku podgrzewa się do temperatury ok.  $+100^\circ C$ . Prężność par cezu w tej temperaturze wynosi ok.  $10^{-6}$  Tr. W jednej ścianie wyrzutni znajdują się bardzo precyzyjnie uformowane kanały, które kształtują efundujące do obszaru z wysoką próżnią atomy cezu w wiązkę. Atomy w wiązce poddawane są kolejno działaniu stałego pola magnetycznego w obszarze magnesu odchyłającego  $A_1$ , pola mikrofalowego w obszarze rezonatora, stałego pola magnetycznego w obszarze magnesu  $A_2$  i wpadają w obszar detektora wiązki atomowej. Pola magnetyczne w magnesach  $A_1$  i  $A_2$ , posiadające natężenie 5–10 kOe i gradient ok. 10 kOe/cm, powodują, że wiązka atomowa rozszczepia się na dwie składowe. Wykorzystuje się tu efekt kwantyzacji przestrzennej momentów magnetycznych atomów cezu. Część wiązki w obszarze magnesu  $A_1$  odchyłana jest w kierunku osi układu.

Załóżmy, że do rezonatora mikrofalowego nie przykładamy pola mikrofalowego lub że częstotliwość tego pola jest tak odległa od częstotliwości nominalnej przejścia energetycznego cezu, że pole nie działa na atomy. W takim przypadku w obszarze magnesu  $A_2$  wiązka cezu zostanie odchyłona w tym samym kierunku jak w obszarze magnesu  $A_1$ . Przy podanej konfiguracji elementów dyskryminatora wiązka atomów cezu nie trafi do detektora. Jeżeli w obszarze rezonatora mikrofalowego wywołamy przejścia energetyczne atomów cezu ( $F = 4, m_F = 0 \rightleftharpoons F = 3, m_F = 0$ ), będzie to równoznaczne ze zmianą orientacji spinu elektronu walencyjnego względem momentu jądrowego, a więc ze zmianą orientacji całkowitego momentu magnetycznego atomów cezu względem kierunku natężenia pola. W takim przypadku w obszarze magnesu  $A_2$  kierunek odchylenia wiązki będzie przeciwny w stosunku do odchylenia w obszarze magnesu  $A_1$  i wiązka trafi na detektor. Pojawi się sygnał błędny  $\epsilon$  w postaci prądu płynącego w obwodzie detektora.

Dlaczego sygnał błędny? Otóż efekt działania pola mikrofalowego na atomy cezu w wiązce ma charakter statystyczny. Prawdopodobieństwo wywołania przejścia energetycznego zależy m.in. od różnicy między częstotliwością odpowiadającą środkowi atomowej linii rezonansowej (w danych warunkach realizacji eksperymentu) a częstotliwością pola mikrofalowego. Tak więc natężenie prądu płynącego w obwodzie detektora wiązki atomowej świadczy o dokładności dostrojenia częstotliwości pola mikrofalowego do częstotliwości atomowego dyskryminatora częstotliwości. Powiedzieliśmy we wstępie, że wzorzec cezowy jest wzorcem typu pierwotnego. Na czym to polega? Najważniejszą właściwością tego urządzenia jest to, że układ atomowego dyskryminatora



#### Rozwiązanie zadania M.41

W  $n$ -kącie wypukłym z jednego wierzchołka wychodzi  $n-3$  przekątnych, wobec

czego wszystkich przekątnych jest  $\frac{1}{2} n(n-3)$

(dzielimy przez 2, ponieważ każda przekątna została dwukrotnie policzona: raz przy każdym swym końcu). Dwunastokąt wypukły ma więc 54 przekątne. Przez dowolny punkt płaszczyzny poprowadzimy proste równoległe do tych przekątnych. Dzielą one płaszczyznę na 108 kątów. Któryś z nich musi być mniejszy od  $4^\circ$ , gdyż w przeciwnym przypadku suma wszystkich kątów byłaby  $\geq 108 \cdot 4^\circ = 732^\circ$  — sprzeczność. Przekątne równoległe do prostych wyznaczających kąt  $< 4^\circ$  same tworzą kąt  $< 4^\circ$ .

Sekunda jest czasem równym 9 192 631 770 okresów promieniowania odpowiadającego przejściu między dwoma nadsubtelnymi poziomami stanu podstawowego atomu cezu 133<sup>m</sup>.

Definicja ta jest oparta na uchwałach XI Generalnej Konferencji Miar 1960 r. Zarządzenie Prezesa Centralnego Urzędu Jakości i Miar z dnia 17 kwietnia 1971 r. Monitor Polski, r 25, z dnia 3 maja 1971).

częstotliwości umożliwiają autokalibrację. Dzieje się tak z dwu głównych przyczyn. Po pierwsze — zbiorowisko atomów cezu, decydujące o wartości częstotliwości własnej atomowego dyskryminatora częstotliwości, ma cechy zbioru atomów swobodnych. Dzięki temu, że w obszarze oddziaływania pola mikrofalowego atomy uformowane są w wiązkę, pomija się wpływ zderzeń pomiędzy atomami na częstotliwości przejścia energetycznego. Cez w postaci gazu atomowego przy odpowiedniej konstrukcji dyskryminatora posiada cechy zbiorowiska swobodnych atomów. Konstrukcja dyskryminatora i dobór materiałów powinny być takie, aby atomy w wiązce były chronione przed działaniem niepożądanych pól. Po drugie — dla uzyskania rozszczepienia zeemanowskiego w obszarze rezonatora konieczne jest wytworzenie stałego pola magnetycznego o natężeniu  $H_0$ . Pole to, konieczne dla właściwego działania dyskryminatora, wpływa na częstotliwość własną dyskryminatora. Jest to efekt szkodliwy, wynikający z zasady działania i konstrukcji urządzenia.

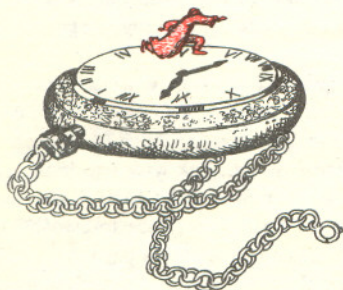
Kapitał jednak znaczenie ma okoliczność, że wpływ tego efektu można określić za pomocą tego samego dyskryminatora. Wykorzystuje się tu przejścia  $\Delta m_F = \pm 1$  dla poziomu  $F = 4$  lub  $F = 3$  struktury nadsubtelnej. Częstotliwość związana z przejściem  $m_F = 0 \rightleftharpoons m_F = \pm 1$  dla poziomu  $F = 3$  lub  $F = 4$  wynosi ok. 350 kHz dla pola o natężeniu  $H_0 = 1$  Oe. W typowych konstrukcjach dyskryminatorów cezowych natężenie pola  $H_0$  wynosi 20 do 50 mOe, co odpowiada częstotliwości przy przejściach  $m_F = \pm 1$  od 7 do 17,5 kHz. Jeśli w obszarze rezonatora mikrofalowego będzie działało dodatkowe pole elektromagnetyczne o częstotliwości odpowiedniej dla wywołania przejść  $\Delta m_F = \pm 1$ ,  $F = 0$ , to spowoduje ono wzrost lub zmniejszenie wartości prądu płynącego w obwodzie detektora atomowego dyskryminatora częstotliwości. Efekt ten nastąpi tylko przy określonej częstotliwości tego pola, wyznaczonej przez wartość natężenia stałego pola  $H_0$ . Tak więc przez pomiar częstotliwości pola wywołującego przejścia  $\Delta m_F = \pm 1$  można określić natężenie pola  $H_0$ . Pozwala to na określenie własnego błędu atomowego dyskryminatora częstotliwości. Układ jest samokalibrowalny, dzięki czemu traktuje się go w chwili obecnej jako pierwotny wzorzec częstotliwości. Częstotliwość przejścia energetycznego cezu  $\text{Cs}^{133}$  stanowi również podstawę obowiązującej obecnie definicji sekundy. Podany wyżej opis zasady działania wzorca z wiązką cezu zawiera jedynie szkic kinetyki działania takiego układu. Warunków technicznych koniecznych dla realizacji eksperymentu jest w rzeczywistości dużo więcej. W technicznej realizacji wzorca występują ponadto bardzo poważne problemy materiałowe i technologiczne. We wzorcu atomowym spotykają się techniki wysokiej próżni, stałych i zmiennych pól magnetycznych, mikrofal, pomiarów prądów ekstremalnie małych, układów pomiarowych ekstremalnie stabilnych sygnałów wzorcowych i in.

Z tych powodów budową atomowych wzorców częstotliwości mogą zajmować się tylko laboratoria mające zaplecze technologiczne i techniczne na bardzo wysokim poziomie. Przy budowie wzorców atomowych wykorzystuje się zwykle doświadczenia i możliwości technologiczne wielu instytutów i fabryk. Tak było przy budowie pierwszego w Polsce wzorca z wiązką cezu. Prace nad atomowym cezowym wzorcem częstotliwości rozpoczęto w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki PAN w roku 1960. W skład zespołu pracowników naukowych wchodził prof. dr S. Hahn (kierownik pracowni), dr inż. A. Chachulski oraz autor niniejszego artykułu. Model laboratoryjny wzorca uruchomiono w roku 1966. W latach następnych, w pracowni Atomowych Wzorców Częstotliwości IPPT, pod kierownictwem dr A. Chachulskiego, prowadzono prace nad wzorcem częstotliwości typu stacjonarnego, przeznaczonego dla Krajowej Służby Częstotliwości Wzorcowych. W roku 1972 wzorzec cezowy wraz z odpowiednią aparaturą towarzyszącą przekazano resortowi łączności. Od roku 1972 sygnały częstotliwości wzorcowej, emitowane przez stację Warszawa I, odnoszone są do częstotliwości wzorca atomowego.

W czasie realizacji prac nad wzorcami atomowymi z zespołem pracowników w IPPT współpracowali ściśle specjaliści z wielu instytutów i zakładów produkcyjnych w kraju. Z usług systemów częstotliwości wzorcowej korzysta nie tylko służba czasu, ale też wiele innych dziedzin nauki i techniki: radionawigacja, geodezja, radiokomunikacja i inne. Od precyzji źródeł sygnału wzorcowego zależy bezpieczeństwo i prowadzenie lotów kosmicznych — z jednej strony oraz dokładność i szybkość pomiarów w przemyśle — z drugiej, żeby już nie wspomnieć o dokładnych pomiarach bardzo szybkich i niezwykle krótkotrwałych zjawisk w laboratoriach naukowych.

## Nowy rekord

Pisaliśmy w zeszłym roku («Delta», 1974, 3, str. 5) o matematyku pracującym w Europejskiej Organizacji Badań Jądrowych CERN pod Genewą, który w ciągu 5 minut obliczył pierwiastek 19 stopnia z liczby 133 cyfrowej. Rekord został pobity latem 1974 roku. Tym razem zadanie było trudniejsze. Wim Klein obliczył pierwiastek 37 stopnia z liczby 220 cyfrowej w czasie 3 minut i 26 sekund. System kontroli był dokładnie taki sam jak poprzednio. Wynik sprawdzono przy pomocy maszyny cyfrowej. Okazał się bezbłędny.





## Samochód, który spadł w przepaść, może wrócić na szosę i pojechać dalej, ale ... jest to bardzo mało prawdopodobne

Znamy wiele takich procesów, których odwrócenia nikt nigdy nie obserwował. Gdyby ktoś puścił dowolny film od tyłu, wszyscy zaczęliby się śmiać, natomiast fizycy oburzyliby się, że coś tu nie jest w porządku, że oglądane zdarzenia są sprzeczne z prawami przyrody. Nie zdarza się na przykład, żeby herbata, która była od godziny w filiżance, nagle samorzutnie zaczęła stawać się coraz bardziej gorąca. Podobnie nikt nie widział, żeby, jak to sugeruje tytuł, energia spadającego samochodu, która rozproszyła się wśród cząsteczek ziemi w postaci ciepła, z powrotem skupiła się w samochodzie w postaci energii kinetycznej, dzięki której wzniósłby się on do góry. Albo: czy ktoś widział, żeby gaz, wypełniający naczynie, samorzutnie skupił się w jego połowie, pozostawiając w drugiej połowie próżnię? Zastanówmy się nad tymi niemożliwymi procesami na przykładzie owego gazu, skupionego w połowie naczynia. Wyobraźmy sobie, że w całym naczyniu jest tylko jedna cząsteczka. Prawdopodobieństwo, że znajduje się ona w lewej połowie naczynia, wynosi oczywiście  $\frac{1}{2}$ . Gdyby w naczyniu znajdowały się dwie cząsteczki, to prawdopodobieństwo, że obie znalazłyby się w lewej połowie naczynia, wyniosłoby  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ . Łatwo teraz obliczyć prawdopodobieństwo, że wszystkie cząsteczki znajdują się w lewej połowie naczynia, gdy cząsteczek tych jest 10. Wynosi ono

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024}.$$

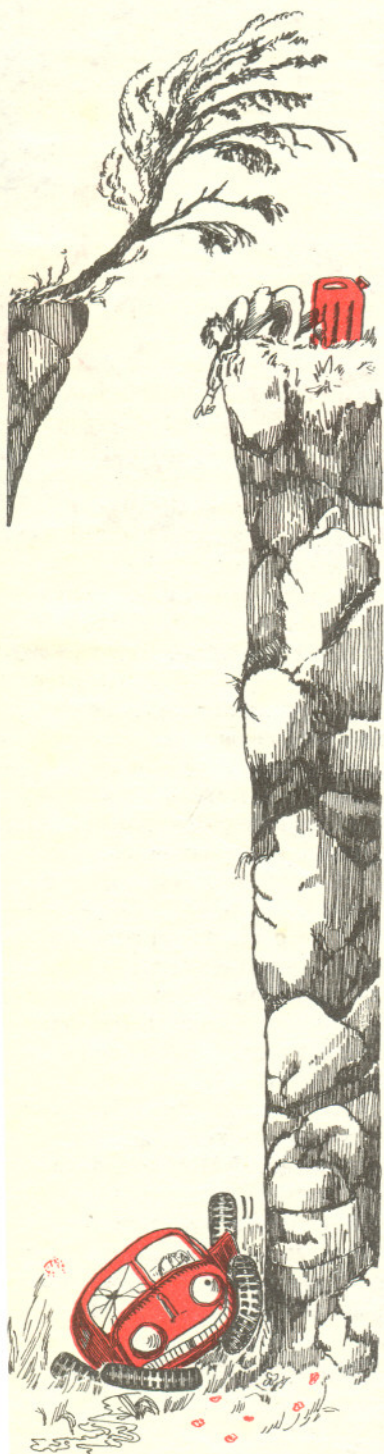
Gdybyśmy umieli sfotografować gaz w naczyniu tak, żeby widać było wszystkie cząsteczki, to tylko w jednej na tysiąc klętek sytuacja byłaby taka, że lewa połowa naczynia zawierałaby 10 cząsteczek, a prawa żadnej.

Ogólnie, gdy w naczyniu znajduje się  $N$  cząsteczek, to prawdopodobieństwo, że

wszystkie one skupiają w lewej połowie naczynia wynosi  $\frac{1}{2^N}$ . W praktyce liczba cząsteczek gazu w naczyniu jest na ogół bardzo duża. Litrowe naczynie wypełnione powietrzem o temperaturze  $0^\circ\text{C}$  i pod ciśnieniem atmosferycznym zawiera około  $3 \cdot 10^{22}$  cząsteczek. Prawdopodobieństwo, że w wyniku bezładnego ruchu w pewnej chwili wszystkie cząsteczki powietrza wypełnią połowę litrowego naczynia, wynosi

$$\frac{1}{2^{3 \cdot 10^{22}}}$$

Jest ono niezmiernie małe. Gdybyśmy mieli ogromną liczbę zdjęć naczynia, uwidaczniających położenie wszystkich cząsteczek w różnych chwilach czasu, i przeglądali te zdjęcia z szybkością miliona zdjęć na sekundę, to nie starczyłoby nam nie tylko naszego życia, ale i wiek Ziemi byłby za krótki na to, by natrafić na tak niezwykły przypadek. Tak więc, mimo że prawa ruchu tego nie zabraniają, samorzutne skupienie cząsteczek gazu w połowie naczynia jest praktycznie niemożliwe. Czy to wyjaśnienie pomaga również zrozumieć brak pozostałych, niemożliwych procesów?

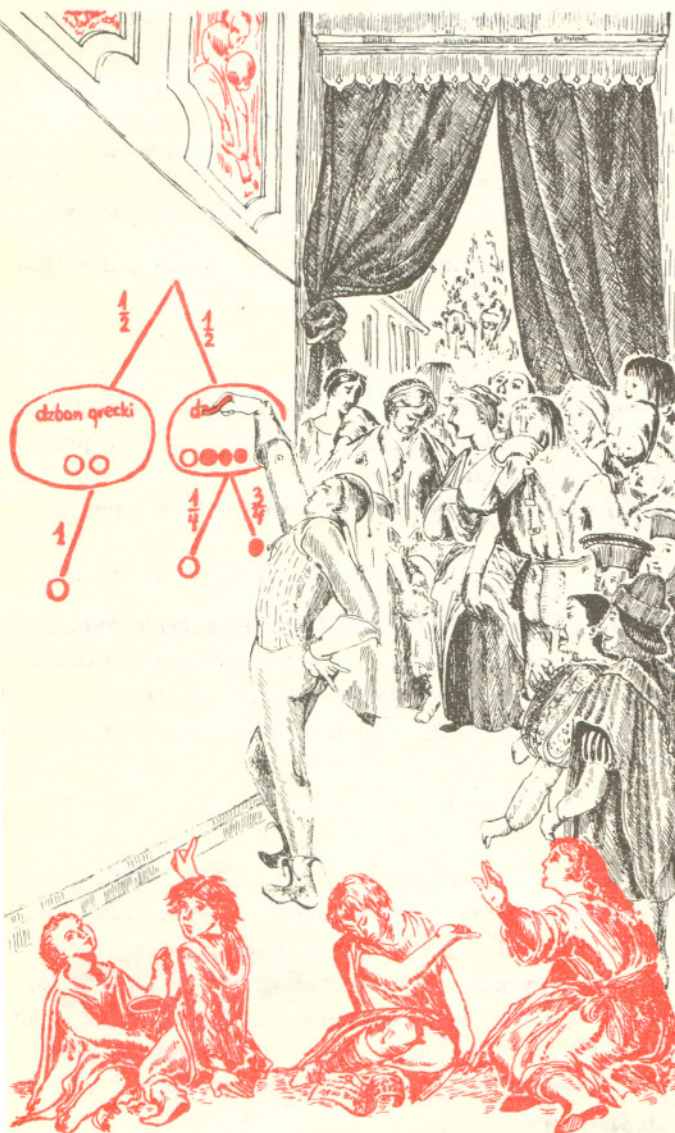
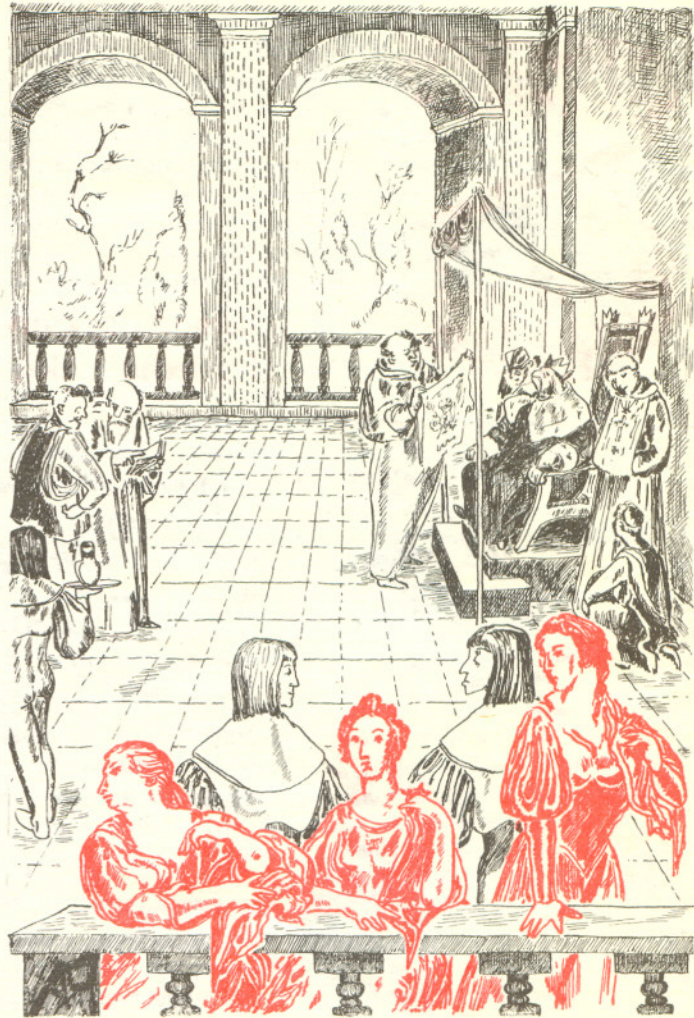


## Kłopotów królewskiego błazna ciąg dalszy

Na dworze króla Ponuraka odbędzie się losowanie. W dwóch dzbanach — greckim i perskim — zostanie rozmieszczonych 6 kul: 3 białe i 3 czarne. Król rzuci swoją złotą kością do gry. Jeżeli wyrzuci nieparzystą liczbę oczek, wyciągnie jedną kulę z greckiego dzbana. Jeżeli wyrzuci parzystą, wyciągnie kulę z dzbana perskiego. Gdy wylosowana w ten sposób kula będzie biała, błazen Śmieszek zostanie uwolniony od kary. Natomiast czarna kula oznacza dla Śmieszka skazanie na chłostę i ciemnicę. Król zgodził się łaskawie, aby kule do dzbanów włożył sam błazen, i zostawił mu trochę czasu do namysłu. Nawet nie przypuszczał, że Śmieszek postanowił spróbować tak rozmieścić kule w dzbanach, aby mieć większą od 1/2 szansę uwolnienia.

Na początek włożył do greckiego dzbana 2 kule białe, a do perskiego pozostałe: 1 białą i 3 czarne.

— Zobaczmy, jak wyglądają moje szanse przy takim ułożeniu kul — mówi do siebie. — Szansa wybrania dzbana greckiego jest taka sama, jak dzbana perskiego, każda z nich jest równa 1/2. Jeżeli król wylosuje dzban grecki, to oczywiście wyciągnie z niego białą kulę, bo są tam tylko dwie białe i żadnej innej. Jeżeli wybierze dzban perski, to szansa, że wyciągnie z niego kulę białą, wynosi 1/4, bo na 4 kule w dzbanie perskim jedna jest biała.



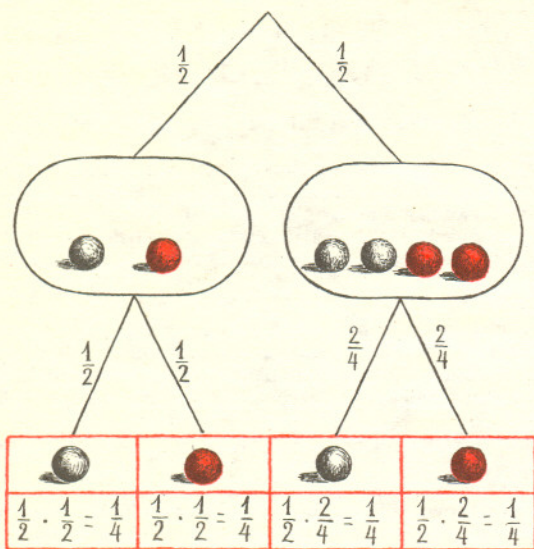
(Nasi Czytelnicy znają to także z rozważań w poprzednim numerze «Delfy»).

Śmieszek narysował sobie wszystkie możliwości i otrzymał taki schemat jak na rysunku.

Podobne, lecz prostsze schematy nazywaliśmy poprzednio rozgałęzieniami. Tu rozgałęzienie jest bardziej rozrośnięte i Śmieszek nazwał je drzewkiem. Może zająć jedno z trzech zdarzeń — myśli Śmieszek — przy czym każdemu z nich odpowiada jedna gałąź drzewka. Jeżeli król wylosuje dzban grecki, to wyciągnie z niego białą kulę i zostanie uwolniony. Jeżeli król wylosuje dzban perski i wyciągnie z niego białą kulę, wówczas także zostanie uwolniony. Jeżeli król wylosuje dzban perski i wyciągnie z niego kulę czarną — zostanie skazany. Teraz Śmieszek chce obliczyć prawdopodobieństwo sprzyjających uwolnieniu go dwóch pierwszych zdarzeń. Wie, że informacji dostarczyć mu może wykonanie dużej liczby doświadczeń, więc myśli sobie tak:

— Gdyby król chciał wykonać całe losowanie 1000 razy, to około 500 razy musiałby wyciągnąć kulę z greckiego dzbana i około 500 razy z perskiego. Z greckiego dzbana zawsze wyciągnie kulę białą. Oczywiście musi ją przed powtórzeniem doświadczenia wrzucić z powrotem do dzbana. Natomiast szansa wyciągnięcia kuli białej z perskiego dzbana jest równa 1/4, więc przy około 500 ciągnięciach powinien wyciągnąć białą kulę w około 125 przypadkach. Czyli razem na 1000 losowań około 625 powinno zakończyć się wyciągnięciem kuli białej:

$$\frac{625}{1000} = \frac{5}{8}$$



Taka jest moja szansa na uwolnienie. Znakomicie! Jest to szansa większa niż  $1/2$ , a więc przechrztyłem króla — ucieśli się błazen.

— Ale może da się znaleźć jeszcze lepsze rozmieszczenie kul? — pomyślał i narysował szybko wszystkie możliwe rozmieszczenia kul w dzbanach.

Potem dla każdego z tych rozmieszczeń narysował drzewko i przeprowadził potrzebne obliczenia. Szło to szybko, bo po kilku próbach zauważył, że obliczenia można sobie uprościć, i nie liczył już szansy dla bardzo wielu prób. Rysunek pokazuje, jak to na przykład wyglądało dla jednej kuli białej i jednej czarnej w greckim dzbanie, a dwóch białych i dwóch czarnych w perskim. Takie rozłożenie kul w dzbanach daje więc prawdopodobieństwo uwolnienia błazna równe

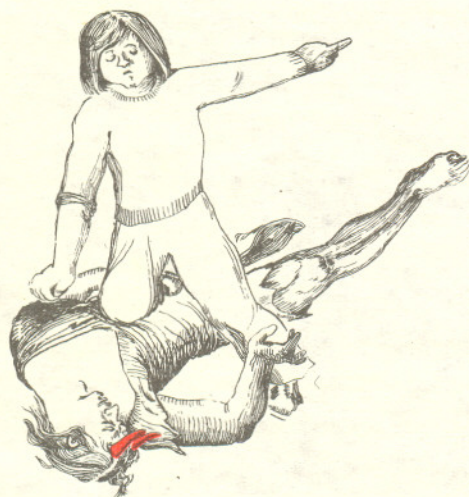
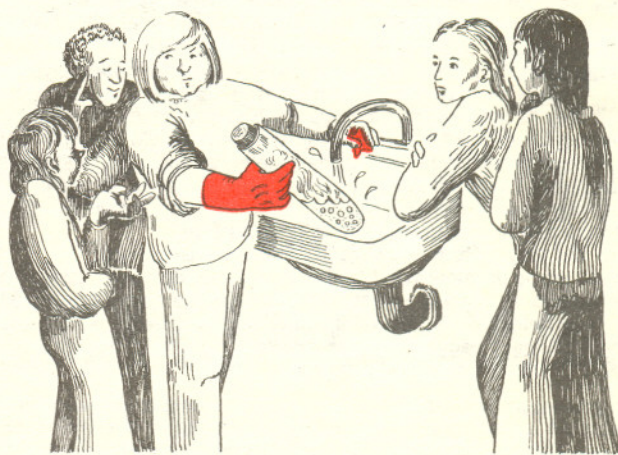
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Proponujemy naszym Czytelnikom, aby sami spróbowali w ten sposób znaleźć najlepsze rozmieszczenie kul. Swoje rozwiązanie będziecie mogli porównać z rozwiązaniem Śmieszka w następnym numerze.



## Kran zamiast kuchenki

Całe popołudnie mój młodszy brat Maciek przeprowadzał w kuchni jakieś eksperymenty z gorącą wodą; wynikiem ich było kilka pękniętych słoików i poparzony palec. Wieczorem przyszedł do mnie z dosyć skwaszoną miną. — Musisz mi pomóc. Coś mi się wydaje, że Jacek, ten którego nazywamy Grubym, zakpił ze mnie i kilku jeszcze chłopaków. Dziś po lekcjach zaprosił nas do siebie i oświadczył z tajemniczym uśmiechem, że będziemy świadkami zjawiska, które być może występuje po raz pierwszy od chwili powstania Ziemi. Ten jego uśmiech był trochę podejrzany. Posłuchaj jednak, co było dalej. Gruby zagotował w zwykłej kolbie trochę wody. Następnie zdjął kolbę z ognia i woda oczywiście przestała wrzeć. Wtedy Gruby krzyknął: „Patrzcie, bo więcej tego nie zobaczycie!”, połał kolbę zimną wodą i, wyobraź sobie, woda zawrzała.



— Coś podobnego! — udałem wielkie zdziwienie. — Na pewno zaraz po zdjęciu kolby z ognia zatkał ją korkiem gumowym, w przeciwnym bowiem przypadku musielibyśmy uwierzyć, że Gruby zmusił do posłuszeństwa Demona Maxwella.

— Zmówiliście się, czy co? Jeszcze by demonów w fizyce brakowało? — rozłościł się Maciek. — Ale faktem jest, że zapomniałem o tym korku, że to tylko po to, żeby mu się zimnej wody nie nalało do środka.

— Nie tylko. Szczelny korek ma zasadnicze znaczenie. Zjawisko, które pokazał wam Gruby, jest bardzo pospolite i powinniście je sami zrozumieć. Gruby zażartował sobie korzystając z waszej ignorancji. Mogę ci tylko powiedzieć, że jest pewien związek między tym zjawiskiem a gotowaniem wody wysoko w górach. Pamiętasz, jak gotowaliśmy w górach jajka na miękko? — Zaraz, coś sobie zaczynam przypominać. Dobrze, zajmę się tym, powiedz mi jeszcze, co z tym demonem. Czy to też żart?

— Wcale nie, ale o tym za miesiąc.

«Małą Deltę» opracowali: M. Izycy, P. Nowicki, A. Olecka, D. Ziemińska.

# «Delta» z wizytą na Seminarium UNESCO

„Matematyka w naukach społecznych“, Jabłonna, od 5 VII do 13 VIII 1974

\* Usiłuję rozmawiać jednocześnie z Rafem (Moskwa) po rosyjsku i z Syahrudinem (Sumatra) po angielsku: — You понимает? — zwracam się do Rafa, wszystko mi się poplątało. Śmiech uniemożliwia dalszą rozmowę.

\* Plansza gry „risk” jest uproszczoną mapą świata. — Oh, my Siberia! — zrozpaczony Borys (Nowosybirsk) traci ostatniego piona na tym terytorium i Khalifa (Kair) wprowadza tam z triumfem swoje wojska poprzez Cieśninę Beringa. „Risk” dostarcza co wieczór dobrej zabawy zarówno graczom, jak i kibicom, których czarny jak smoła Sam (Akkra) nazywa zagranicznymi doradcami.

\* — Wonderful! — Alan (Southampton) spóźnił się na kolację. Jest zachwycony, bo zwiedzając Warszawę trafił na ciuchcię, wsiadł w nią i dojechał aż do Radzymina. Zobaczył kawałek zwyczajnej Polski. Alan każdą wolną chwilę spędza na zwiedzaniu. Zdobył już sobie przydomek „Alan the Traveller” (Alan Podróżniczek).

\* — W życiu Francuza najważniejszą rolę odgrywają dziewczyny, wina i sery — rozważa głośno Claude (Aix-en-Provence). — Pochwałę wina i pochwałę dziewczyny można po francusku wyrazić na setki sposobów, słownictwo tu jest niezwykle bogate, pełne subtelnych odcieni nieprzetłumaczalnych na żaden inny język. Z serem jest inaczej, ser nazywa się tak a tak i jest lepszy lub gorszy; brak mu zupełnie tej poetyckiej oprawy językowej. — Jest to zadziwiające zjawisko językowe — mówi całkiem już serio — i na pewno jest jakoś uwarunkowane historycznie i społecznie. Ale jak? Warto by przeprowadzić odpowiednie badania, wyniki mogłyby okazać się bardzo interesujące. Tylko czy znajdzie się taki odważny, który da na to pieniądze?

W oficjalnym podsumowaniu VII Seminarium UNESCO „Wykorzystanie matematyki w naukach społecznych” scenki takie, i podobne, kryją się pod kryptonimem „ogólna atmosfera”. Czytamy tam:

„Ogólna atmosfera Seminarium była jego szczególną zaletą. W rezultacie wspólnego pobytu w stosunkowo odosobnionym miejscu uczestnicy i wykładowcy szybko nawiązali ten typ kontaktów nieformalnych, który stanowi najlepszą podstawę do wspólnej działalności intelektualnej”.

Na czym polegała ta wspólna działalność intelektualna? Seminarium, siódme z cyklu odbywających się co 2 lata tego rodzaju spotkań, zostało zorganizowane przez UNESCO i Wydział Nauk Społecznych PAN. Jak wszystkie, miało ono na celu umożliwić uczestnikom jak najliczniejszych krajów zapoznanie się z najnowszymi osiągnięciami w zakresie wykorzystania matematyki w naukach społecznych — naukach o człowieku i jego oddziaływaniach ze środowiskiem, w którym żyje (ekonomii, socjologii, psychologii). Miało również ułatwić konfrontacje i porównania tego, co robi się w różnych ośrodkach naukowych czy różnych dyscyplinach.

Seminarium zgromadziło około 30 osób (uczestników i wykładowców) z 14 krajów i 5 kontynentów. Kierownikiem naukowym był prof. dr K. Szaniawski z Uniwersytetu Warszawskiego, organizację nadzorował doc. dr hab. H. Kubiak z Uniwersytetu Jagiellońskiego, a koordynatorem całości z ramienia UNESCO był dr Z. Goulekwa z Gruzińskiej SRR. Zawodowo stanowili grupę dość specyficzną. Prócz statystyków ekonomistów, socjologów i psychologów spotkać tu można było i logika zajmującego się socjologią, i psychologa, który ma w swoim dorobku książki i prace naukowe z „czystej” matematyki. Był socjolog dowodzący twierdzeń z teorii informacji i był matematyk publikujący swe prace w czasopismach psychologicznych. Wysłuchali oni 11 różnych cykli wykładów i pięciu krótszych odczytów poświadczonej bardzo różnorodnej problematyce szczegółowej. Wszystkie bez wyjątku dotyczyły możliwości i sposobów wykorzystywania matematyki przy analizie i opisie zjawisk społecznych.

Dlaczego usiłuje się stosować matematykę w naukach społecznych? O ile jeszcze w odniesieniu do ekonomii odpowiedź wydaje się dość prosta — zdążyliśmy się już bowiem przyzwyczaić, iż w ekonomii buduje się modele formalne, pozwalające na opis i analizę zachodzących zjawisk oraz na przewidywanie (lepsze lub gorsze) skutków podejmowanych działań — o tyle sensowność żenienia socjologii i psychologii z matematyką wydaje się znacznie mniej oczywista. Co więcej — wiadomo dobrze, że panująca obecnie w nauce moda na matematyzowanie „wszystkiego co się rusza” często staje się parawanem dla braku głębszej myśli, metodą mówienia rzeczy prostych w sposób możliwie niezrozumiały i skomplikowany. Ze tak nie jest zawsze, że pewne problemy, np. właśnie z zakresu psychologii i socjologii, dają się w sensowny sposób sformułować i rozwiązywać dopiero wtedy, gdy zaangażuje się do tego właściwy aparat matematyczny, można się było przekonać również i na omawianym tu spotkaniu.

Ważnym dla przykładu pod uwagę zagadnienie następujące:

Zbadano grupę uczniów szkół średnich. Badania dotyczyły postaw młodzieży wobec szkoły, domu, społeczeństwa, samych siebie. Każda osoba badana wypełniała ankietę odpowiadając na szereg postawionych jej pytań. Prócz tego każdą z nich zbadano przy pomocy zestawu testów psychologicznych, uzyskując informacje o szeregu właściwości psychicznych: inteligencji, neurotyczności, agresywności itp. Zespół przeprowadzający badania pragnie uzyskać odpowiedzi na najróżnorodniejsze pytania: Czy można wyróżnić jakieś typowe postawy lub ich zespoły? Czym się one charakteryzują? Czy może jest to tak, że pewne postawy wiążą się ściśle z pewnymi charakterystykami czysto



Dr Samuel Addo w Żelazowej Woli



Na pożegnalnym koktajlu. Od lewej: J. Coleman, C. Flament, autor, Z Walaszek — Coleman.



Na pożegnalnym koktajlu. Od lewej: G. Lissowski (Uniwersytet Warszawski), A. Kapiszewski (Uniwersytet Jagielloński), J. Coleman (University of Chicago), Z. Goulekva (UNESCO), W. Kamler (PAN), H. Kubiak (Uniwersytet Jagielloński), K. Szaniawski (Uniwersytet Warszawski).

Oni wykorzystują matematykę w badaniach społecznych. Od lewej: R. Hall (Australia), J. Coleman (USA), C. Flament (Francja)

psychologicznymi? I tak dalej. Istotną cechą tak pomyślanego badania jest to, że nie interesują nas tu charakterystyki poszczególnych osób badanych — chcemy dowiedzieć się czegoś o całej zbiorowości, wychwycić ewentualne prawidłowości. Jeśli wyobrazimy sobie, że osób badanych było kilkaset, a o każdej z nich uzyskano kilkadziesiąt informacji (nie jest to sytuacja rzadka w praktyce badań eksperymentalnych), to jasne się stanie, że posługując się gołym okiem i zdrowym rozsądkiem nie będziemy umieli wykorzystać jednocześnie wszystkich otrzymanych informacji i wyłowić ewentualnych prawidłowości. Rodzi się więc potrzeba przetworzenia uzyskanego materiału w taki sposób, by to, co się otrzyma, dawało się już ogarnąć wyobraźnią. Jednym z prostych, a niezwykle (jak tego dowodzą przykłady Linneusza i Mendelejewa) owocnych zabiegów pozwalających lepiej poznać nasz świat jest klasyfikacja, podział zbioru badanych obiektów na pewne rozłączne podzbiory. Im te podzbiory są bardziej jednorodne, a wewnątrz nich im bardziej różnią się między sobą pod względem badanych cech, tym więcej wniosków lub hipotez o rzeczywistości można sformułować. Metody klasyfikacji tego typu nazywa się u nas, ze względu na panującą modę na zagraniczne wyrazy, „procedurami taksonomicznymi”.

W omawianym tu przykładzie można by próbować postąpić tak: Każda osoba badana reprezentowana jest przez zbiór informacji o niej. Pewne osoby mogą okazać się identyczne — na wszystkie pytania odpowiedziały tak samo i uzyskały te same wyniki w badaniach psychologicznych. Łatwo również jest wskazać osoby, które różnią się mało, i takie, które różnią się bardzo. Stąd pomysł: należy jakoś mierzyć „odległość” pomiędzy różnymi osobami badanymi. Mówiąc porządnie, należy zmetryzować w jakiś sensowny i zgodny z intuicją sposób zbiór wyników badania (por. artykuł M. Moszyńskiej o przestrzeniach metrycznych w poprzednim numerze «Delfty»). Przepuścimy, że się to udało. Następnym krokiem byłoby dokonanie takiej klasyfikacji naszego zbioru wyników, by wewnątrz otrzymanych grup odległości były jak najmniejsze, a jednocześnie pomiędzy grupami jak największe. Gdyby nam się i to udało, to uzyskalibyśmy klasyfikację z której, być może, udało by się odczytać pewne odpowiedzi na postawione wcześniej pytania.

Czy jednak możliwe jest wprowadzenie do naszego zbioru wyników „sensownej” metryki? Jeśli tak, to czy, kiedy i w jaki sposób może stać się ona podstawą do przeprowadzania klasyfikacji spełniającej nałożone warunki? Jeśli to jest możliwe, to jak tego dokonywać w praktyce? Okazuje się, że są to pytania z matematyki i że w pewnych przypadkach można na nie odpowiedzieć zadowalająco. Te właśnie problemy były tematem cyklu wykładów profesora Borysa („Oh, my Siberia!”) Mirkina, matematyka z Instytutu Ekonomii Syberyjskiego Oddziału Akademii Nauk ZSRR.

Dr Marek Styczeń z Wydziału Socjologii Uniwersytetu Warszawskiego zaproponował zupełnie inną procedurę taksonomiczną, opartą nie na pojęciu odległości pomiędzy wynikami osób badanych, lecz na pewnych pomysłach związanych ze statystyką matematyczną. Metoda ta została wypróbowana na uczestnikach Seminarium, klasyfikacji dokonano przy użyciu komputera GIER. Uzyskano wynik, który wyróżniał jedną stosunkowo dużą podgrupę uczestników i kilka jedno- lub dwuosobowych podgrupek. Bliższa analiza składu tej dużej podgrupy wykazała, że są to „młodsi (do 35 lat), niepalący (do 3 papierosów dziennie), z małych miast (do  $3 \cdot 10^6$  mieszkańców)”. Warto podkreślić, że granice te (35 l., 3 papierosy, 3 miliony mieszkańców) nie były ustalone z góry i nie stanowiły wstępnej podstawy klasyfikacji. Z komputera wyszła jedynie lista osób, które zostały zaliczone przy pomocy zaprogramowanej procedury do jednej grupy. Fakt, że te właśnie kryteria wyróżniają trzon uczestników, został „odkryty” dzięki zastosowaniu procedury taksonomicznej (np. odkryto również, że ilość wypitego w czasie trwania Seminarium alkoholu w zasadzie nie różnicowała uczestników).

Procedury klasyfikacyjne można i warto stosować tylko w takich sytuacjach, w których intuicja badawcza pozwala przypuszczać, że grupa badanych obiektów (np. osób) da się w jakiś sensowny sposób podzielić na istotnie różniące się między sobą podzbiory. Nie zawsze jednak tak jest. W badaniach socjologicznych dotyczących postaw i poglądów często oczekuje się wniosków w postaci „jeśli ktoś jest taki a taki i robi to a to, to ma takie a takie poglądy”. Oczekuje się więc, że wnioski z przeprowadzonego badania będą miały charakter implikacji. Implikacje tłumaczą się na język rachunku zbiorów jako zawierania się pewnych zbiorów w innych. Wynika stąd, że taksonomia, prowadząca do wyróżniania zbiorów rozłącznych, nie jest najwłaściwszą metodą analizy danych w takiej sytuacji.

Profesor Claude (rozważania o serach) Flament z Wydziału Psychologii Uniwersytetu w Aix-en-Provence (jest on specjalistą z zakresu psychologii społecznej) zademonstrował na swoich wykładach metodę analizy danych pozwalającą na odkrywanie właśnie takich struktur implikacyjnych. Narzędzia potrzebne do analizy tego rodzaju danych istniały, jak się okazuje, od wielu dziesiątków lat: jest to aparat pojęciowy teorii algebr Boole’a (zob. np. cytowaną w artykule o zbiorach rozmytych książkę W. Marka i J. Onyszkiewicza).

C. Flament wpadł na pomysł, by je odpowiednio wykorzystać. Praktyczne skutki okazały się niezwykle owocne. Dla przykładu: w przeprowadzonych przed kilku laty badaniach nad poglądami politycznymi Francuzów zastosowano do analizy wyników tę właśnie metodę. Jedną z implikacji wyłowionych przez (odpowiednio zaprogramowany) komputer po przetłumaczeniu na język potoczny brzmiała: „Jeśli ktoś jest członkiem związków zawodowych i uważa, że sytuacja ekonomiczna Francji pogarsza się, to jest przeciwnikiem de Gaulle’a”. Mało to może odkrywcza obserwacja, ale dobrze świadcząca o sensowności i skuteczności metody.

Przytoczone tu przykłady obejmują niewielki tylko fragment problematyki omawianej na Seminarium. Do problemów wykorzystywania matematyki w dziedzinach tradycyjnie od niej odległych będziemy jeszcze wracać niejednokrotnie, między innymi w artykułach uczestników Seminarium.



## PRAWO OHMA DO LAMUSA?— CZYLI STRASZNE WNIOSKI, DO JAKICH MOŻNA DOJŚĆ PRZY CECHOWANIU PIROMETRU

W ubiegłym miesiącu skonstruowaliśmy wspólnie pirometr, który może służyć do pomiaru temperatury silnie rozgrzanych ciał. Składa się on z żaróweczki, baterijki i spirali grzejnej, połączonych w szereg. Regulując prąd żaróweczki przy użyciu spirali jako opornicy suwakowej doprowadzamy do zrównania się temperatury włókna żaróweczki z temperaturą na przykład płomienia świecy, co poznajemy po tym, że włókno obserwowane na tle płomienia zlewa się z nim. Odczytujemy następnie położenie suwaka naszej opornicy i ... nadal nie znamy temperatury. Aby móc określić jej wartość, zajmiemy się zagadnieniem z pozoru nie związanym z budową pirometrów, a mianowicie

### CZY ŻARÓWKA SPEŁNIA PRAWO OHMA?

Na takie pytanie może odpowiedzieć jedynie doświadczenie. Dla wykonania go zestawiamy obwód według rysunku. Wykorzystujemy drugą spiralę napiętą na tej samej linii, co pierwsza, która służyła nam do regulacji prądu w żarówce. Nasz obwód różni się od pierwotnego obwodu pirometru jedynie tym, że między bieguny baterii została włączona dodatkowo druga spirala. Chcemy wiedzieć, jakie jest napięcie na żarówce, czyli napięcie punktu  $A$  względem punktu  $B$ . Znajdziemy w tym celu na drugiej spirali punkt  $C$  o potencjale równym potencjałowi punktu  $A$ . Wtedy napięcie punktu  $C$  względem punktu  $B$  ( $U_{CB}$ ), równe napięciu na żarówce, obliczymy łatwo wiedząc, że napięcie spada proporcjonalnie do długości przewodnika:

$$\frac{U_{CB}}{U_b} = \frac{l_{CB}}{l},$$

gdzie  $l_{CB}$  jest odległością między punktami  $C$  i  $B$ , zaś  $l$  — całkowitą długością spirali, a  $U_b$  — napięciem baterii. Na pewno zapytacie teraz: A po czym poznać ten punkt  $C$ , którego potencjał równy jest potencjałowi punktu  $A$ ? Bardzo prosto: trzeba je połączyć drutem. Jeśli potencjały punktów są równe, pomimo połączenia ich prąd nie popłynie i nic w obwodzie się nie zmieni, a w szczególności żarówka nie zmieni natężenia świecenia. Przy nierównych potencjałach popłynie prąd przez łączący przewód i, w zależności od jego kierunku, żarówka rozjaśni się lub zmniejszy natężenie świecenia. W praktyce jeden koniec przewodu łączymy na stałe z punktem  $A$ , a drugim końcem z dołączoną wtyczką radiową dotykamy spirali w różnych punktach szukając takiego, w którym zwieranie nie powoduje zmiany jasności żarówki. W taki sposób określimy napięcie na żarówce:

$$U_z = U_b \frac{l_{BC}}{l}.$$

Oczywiście napięcie na opornicy regulującej prąd żarówki wyniesie:

$$U_R = U_b - U_z = U_b \frac{l - l_{BC}}{l}.$$

Możemy teraz obliczyć natężenie prądu płynącego przez opornicę  $I_R$ , jeśli tylko znamy jej opór  $R_1$ :

$$I_R = \frac{U_R}{R_1} = \frac{U_b}{R_1} \frac{l - l_{BC}}{l}.$$

Jest ono oczywiście równe natężeniu prądu płynącego przez żarówkę  $I_z$ . Brakujący opór  $R_1$  wyliczamy ze wzoru wynikającego z II prawa Ohma:

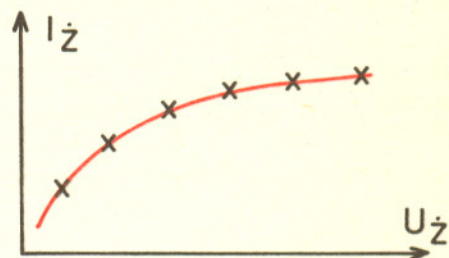
$$R_1 = R \frac{l_1}{l},$$

gdzie  $R$  jest oporem całej spirali, a  $l_1$  długością jej czynnej części. Wobec tego mamy:

$$I_2 = I_R = \frac{U_B}{R} \frac{l - l_{BC}}{l_1}.$$

Po sporządzeniu stosownej tabelki dla szeregu położenia suwaka opornicy możemy narysować wykres zależności natężenia prądu płynącego przez żarówkę  $I_2$  od napięcia na żarówce  $U_2$ . Wiemy z prawa Ohma, że natężenie prądu jest wprost proporcjonalne do napięcia. Wykres takiej zależności jest, jak wiadomo, linią prostą. Jeżeli sporządzimy starannie wykres  $I_2$  w funkcji  $U_2$ , przekonamy się ze zgrozą, że nie jest on linią prostą, a wygląda na przykład tak, jak ten na rysunku.

Nr	1	2	3	4...
$l_{CB}$				
$l_1$				
$U_2$				
$I_2$				



Czyżby więc Georg Simon Ohm był w błędzie, a wraz z nim i Wasz nauczyciel fizyki? Nie jest tak źle. Obaj mają rację, natomiast w interpretacji naszego doświadczenia tkwi błąd. Zmieniając napięcie na żarówce zmienialiśmy przecież także jej temperaturę! „Czyste” sprawdzenie prawa Ohma wymagałoby stałej temperatury. W takich warunkach przekonalibyście się, że jest ono rzeczywiście spełnione. Tu pytanie do przemyślenia: Jak wyobrażalibyście sobie poprawne sprawdzenie doświadczalne prawa Ohma? Wracając do naszego doświadczenia, jego wynik był na pozór tak dziwny, ponieważ **opór włókna żarówki silnie zależy od temperatury**. Właśnie to zjawisko fizyczne, które sprawiło nam tyle kłopotu przy rozważaniu prawa Ohma, umożliwi nam wreszcie

### CECHOWANIE PIROMETRU

Liczne pomiary wykazały, że opór wolframu zmienia się w przybliżeniu liniowo z temperaturą według wzoru:  $R = R_0(1 + \alpha t)$ , gdzie  $R$  jest oporem w temperaturze  $t$ , a  $R_0$  oporem w temperaturze  $0^\circ\text{C}$ . Wielkość  $\alpha$ , czyli współczynnik temperaturowy zmian oporu, wynosi dla wolframu  $0,0045 \text{ K}^{-1}$ . Wobec tego znając opór włókna żarówki w jakiejś temperaturze i opór w  $0^\circ\text{C}$ , możemy tę temperaturę wyznaczyć. Na podstawie tabeli napięcia i natężenia, którą sporządziliśmy przy wykonywaniu wykresu  $I_2$  w funkcji  $U_2$ , możemy obliczyć wartości oporu:

$$R = \frac{U_2}{I_2},$$

a następnie narysować wykres  $R$  w funkcji położenia suwaka opornicy  $l_1$ . Nasza tabela zawiera oczywiście  $l_1$ , potrzebne do wyznaczania  $I_2$ . Kiedy więc określimy, przy jakim położeniu  $l_1$  włókno żarówki zlewa się z przedmiotem, na którego tle je obserwujemy, odczytujemy z wykresu wartość  $R$ , a następnie wyliczamy temperaturę z podanego wyżej wzoru. Wartości temperatury odpowiadające poszczególnym położeniom suwaka opornicy możemy też nanieść wprost na linijkę i odczytywać z niej temperaturę bezpośrednio. Pozostaje jeszcze pytanie, skąd mamy znać opór całkowity spirali grzejnej oraz opór zimnego włókna żarówki.

Najlepiej poszukać w szkole lub w zaprzyjaźnionym warsztacie radiotechnicznym możliwości zmierzenia tych wartości omomierzem. Jeśli Wam się to nie uda, moja najlepsza rada brzmi: przyjąć opór spirali równy wyliczonemu z podanej mocy spirali i napięcia ( $220 \text{ V}$ ), natomiast opór żarówki na zimno — wynoszący około jednej dziesiątej jej oporu w warunkach normalnej pracy — znajdziemy dzieląc przez siebie nominalne wartości napięcia i natężenia, wypisane na cokole żarówki.

Jak zwykle, proszę Was o listy z uwagami na temat naszej rubryki i propozycjami nowych doświadczeń.

