

## SPIS TREŚCI

Rozstrzygalność teorii nierówności liniowych <i>Doc. dr hab. Lesław W. Szczerba</i>	str. 1
Laboratorium w domu <i>Dr Jan A. Gaj</i>	str. 3
Co to jest geometria wykreślna? <i>Dr Jerzy Lisiewicz</i>	str. 4
«Delta» z wizytą w Zakładzie Optyki Instytutu Fizyki Doświadczalnej im. Stefana Pieńkowskiego	str. 6
Zadania	str. 7
Kłopoty sprzedawców złotej folii <i>Dr Piotr Mankiewicz</i>	str. 8
Związki fizyki z matematyką <i>Prof. dr Józef Werle</i>	str. 9
Dlaczego Niemcy nie zdążyli wynaleźć bomby atomowej? (5)	str. 12
Fizyka a piękno <i>Doc. dr hab. Tomasz Hofmokl</i>	str. 14
Czytelnicy proponują	str. 17

**Nasza okładka:**  
**Lasery barwnikowe**  
**(patrz str. 6)**

**W następnym numerze:**  
**Maszyna Turinga**  
**Elektromagnesy**

„Delta”  
matematyczno-fizyczny miesięcznik  
popularny  
Polskiego Towarzystwa  
Matematycznego i Polskiego  
Towarzystwa Fizycznego  
wydawany przy poparciu  
Polskiej Akademii Nauk oraz  
Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny  
prof. dr G. Białkowski  
doc. dr A. Blikle  
prof. dr A. Hrynkiewicz  
doc. dr B. Iwaszkiewicz  
prof. dr J. Janik  
doc. dr J. Jatzak  
prof. dr Leon Jeśmanowicz —  
przewodniczący  
prof. dr Z. Krygowska  
prof. dr K. Leibler  
mgr W. Łuczniak  
mgr A. Mąkowski  
prof. dr A. Pełczyński  
prof. dr Arkadiusz Piekara —  
wiceprzewodniczący  
prof. dr J. Rayski  
prof. dr W. Rubinowicz  
prof. dr A. Schinzel

prof. dr Z. Semadeni  
prof. dr M. Subotowicz  
dr A. Wakulicz  
doc. dr W. Zawadowski

Redaguje Kolegium w składzie:  
T. Deskur — red. techn. graf.  
doc. dr T. Hofmokl — z-ca red. nac.  
mgr T. B. Iwiński  
dr M. Kordos — red. nac.  
dr Z. Plochocki  
D. Tys — sekr. red.

opracowanie okładki  
art. graf. K. Dobrowolski

Adres Redakcji  
ul. Śniadeckich 8,  
00-656 Warszawa, PTM

Zakład Narodowy im.  
Ossolińskich — Wydawnictwo.  
Wrocław, Oddział w Warszawie  
Nakład 30000 egz. Objętość 2 ark.  
wyd.; 2,50 ark. druk.;  
papier offsetowy III kl., 80g, 61 × 86  
Wydrukowano w Drukarni im.  
Rewolucji Październikowej,  
Warszawa, ul. Mińska 65.  
Nr zam. 892/74 W-99

**WARUNKI PRENUMERATY** Cena prenumeraty rocznej zł 60,— cena prenumeraty półrocznej zł 30,—

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły — mające siedzibę w miastach wojewódzkich i powiatowych, zamawiać mogą prenumeratę wyłącznie za pośrednictwem miejscowych oddziałów i delegatur RSW-Prasa-Książka-Ruch, w terminie do dnia 25 listopada na rok następny.

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły — mające siedzibę na wsi lub miejscowościach, w których nie ma oddziałów RSW-Prasa-Książka-Ruch, winny opłacać prenumeratę w terenowych właściwych urzędach pocztowych.

Prenumeratę krajową dla czytelników indywidualnych przyjmują urzędy pocztowe, listonosze i Centrala Kolportażu RSW-Prasa-Książka-Ruch, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, konto PKO 1-6-100020 w terminie do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 40% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje Biuro Kolportażu Wydawnictw Zagranicznych RSW-Prasa-Książka-Ruch, 00-840 Warszawa, ul. Wronia 23, konto PKO nr 1-6-100024.

#### Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.  
Sprzedż gotówkowa i wysyłkowa, pojedynczych numerów i w kontynuacji; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.

Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, konto PKO nr 1-6-100312

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

# Rozstrzygalność teorii nierówności liniowych

Doc. dr hab. *Łeśław W. SZCZERBA*



W poprzednim numerze omawialiśmy procedurę dowodzenia twierdzeń pewnej teorii. Była to bardzo uboga teoria, mówiła tylko o uporządkowaniu liczb rzeczywistych. Okazuje się jednak, że rozstrzygalne są niektóre bogatsze teorie. Zajmiemy się tu teorią równości i nierówności liniowych. Przypomnijmy najpierw, czym jest forma liniowa. Jest to mianowicie wyrażenie postaci:

$$a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n,$$

gdzie litery  $a_0, \dots, a_n$  są nazwami konkretnych liczb rzeczywistych (nazywamy je współczynnikami), a litery  $x_1, \dots, x_n$  są zmiennymi. Przez równość liniową nazwiemy dwie formy liniowe połączone znakiem równości:

$$a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b_0 + b_1 y_1 + \dots + b_n y_n,$$

a przez nierówność liniową — dwie formy liniowe połączone znakiem nierówności:

$$a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n < b_0 + b_1 y_1 + \dots + b_n y_n.$$

W obu wyrażeniach niektóre  $x_i$  i  $y_j$  mogą oznaczać tę samą zmienną. Można zatem na ogół oba wyrażenia uprościć. W każdym razie można je doprowadzić do postaci:

$$a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$$

lub

$$a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n < 0.$$

W dalszym zatem ciągu wystarczy rozpatrywać tylko takie równości i nierówności. Przez teorię równości i nierówności liniowych w liczbach rzeczywistych rozumiemy tu zbiór tych wszystkich zdań zbudowanych z równości i nierówności liniowych, jako formuł atomicznych, które są prawdziwe dla liczb rzeczywistych. Pokażemy, że teoria równości i nierówności liniowych dla liczb rzeczywistych jest rozstrzygalna. Pokażemy to, podobnie jak poprzednio, metodą eliminacji kwantyfikatorów. Zacznijmy od pokazania, jak wyeliminować kwantyfikator

z wyrażen postaci  $\bigvee_x \Phi$ , gdzie  $\Phi$  jest formułą bezkwantyfikatorową. Zupełnie tak samo jak w poprzednim artykule, rozpoczynamy od wyeliminowania implikacji ( $\rightarrow$ ) i równoważności ( $\leftrightarrow$ ) przy pomocy wzorów:

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q,$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q).$$

Następnie eliminujemy negację, najpierw przy pomocy praw de Morgana:

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q,$$

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q,$$

oraz prawa:

$$\sim \sim p \equiv p,$$

a potem w następujący sposób: niech  $\alpha$  i  $\beta$  będą dowolnymi formami liniowymi, wówczas

$$\sim (\alpha = \beta) \equiv (\alpha < \beta) \vee (\beta < \alpha),$$

$$\sim (\alpha < \beta) \equiv (\alpha = \beta) \vee (\beta < \alpha);$$

z kolei, posługując się łącznością i rozdzielnością koniunkcji i alternatywy, sprowadzamy naszą formułę do postaci:

$$\bigvee_x (\Phi_0 \vee \Phi_1 \vee \dots \vee \Phi_n),$$

gdzie każde  $\Phi_i$  jest koniunkcją równości i nierówności liniowych. Wobec prawa

$$\bigvee_x [\Psi_0 \vee \Psi_1] \equiv \bigvee_x \Psi_0 \vee \bigvee_x \Psi_1$$

wystarczy, jeśli wyeliminujemy kwantyfikator w każdej z formuł  $\bigvee_x \Phi_i$  z osobna. Wszystkie formuły atomiczne, w których nie występuje zmienna  $x$ , możemy od razu wyłączyć przed znak kwantyfikatora. Załóżmy zatem, że wszystkie formuły atomiczne występujące w  $\Phi_i$  zawierają zmienną  $x$ . Jeśli wśród owych formuł jest przynajmniej jedna równość, to musi ona mieć postać

$$ax + \alpha = 0,$$

gdzie  $a$  jest liczbą różną od zera, a  $\alpha$  pewną formą liniową:

$$\alpha = a_0 x_0 + \dots + a_m x_m,$$

w której nie występuje zmienna  $x$ . Wówczas

$$x = \frac{\alpha}{-a} = \frac{a_0}{-a} x_0 + \dots + \frac{a_m}{-a} x_m.$$

**Przykład**  $a, b > 0$

$$\bigwedge_x \bigwedge_y [(ax + by + c < 0 \wedge bx - ay - c < 0) \rightarrow (x < 0 \vee y < 0)],$$

$$\bigwedge_x \sim \bigvee_y \sim [(ax + by + c < 0 \wedge bx - ay - c < 0) \rightarrow (x < 0 \vee y < 0)],$$

$$\bigwedge_x \sim \bigvee_y \sim [\sim (ax + by + c < 0 \wedge bx - ay - c < 0) \vee (x < 0 \vee y < 0)],$$

$$\bigwedge_x \sim \bigvee_y [\sim \sim (ax + by + c < 0 \wedge bx - ay - c < 0) \wedge \sim (x < 0 \vee y < 0)],$$

$$\bigwedge_x \sim \bigvee_y (ax + by + c < 0 \wedge bx - ay - c < 0 \wedge \sim x < 0 \wedge \sim y < 0),$$

$$\bigwedge_x \sim \bigvee_y [ax + by + c < 0 \wedge bx - ay - c < 0 \wedge (x = 0 \vee 0 < x) \wedge (y = 0 \vee 0 < y)],$$

$$\begin{aligned} \bigwedge_x \sim \bigvee_y [(ax + by + c < 0 \wedge bx - ay - c < 0 \wedge \\ \wedge x = 0 \wedge y = 0) \vee \\ \vee (ax + by + c < 0 \wedge bx - ay - c < 0 \wedge \\ \wedge x = 0 \wedge 0 < y) \vee \\ \vee (ax + by + c < 0 \wedge bx - ay - c < 0 \wedge \\ \wedge 0 < x \wedge y = 0) \vee \\ \vee (ax + by + c < 0 \wedge bx - ay - c < 0 \\ \wedge 0 < x \wedge 0 < y)], \end{aligned}$$

$$\bigwedge_x \sim [x = 0 \wedge \bigvee_y (ax + by + c < 0 \wedge bx - ay - c < 0 \wedge y = 0) \vee$$

$$\vee [x = 0 \wedge \bigvee_y (y < \frac{ax+c}{-b}$$

$$\wedge y < \frac{bx-c}{a} \wedge 0 < y)] \vee$$

$$\vee [0 < x \wedge \bigvee_y (ax + by + c < 0 \wedge bx - ay - c < 0 \wedge y = 0)] \vee$$

$$\vee [0 < x \wedge \bigvee_y (y < \frac{ax+c}{-b}$$

$$\wedge y < \frac{bx-c}{a} \wedge 0 < y)].$$

$$\begin{aligned}
& \bigwedge_x \sim [(x = 0 \wedge ax + c < 0 \wedge bx - c < 0) \wedge \\
& \vee (x = 0 \wedge \frac{ax+c}{-b} < 0 \wedge \frac{bx-c}{a} < 0) \vee \\
& \vee (0 < x \wedge ax + c < 0 \wedge bx - c < 0) \vee \\
& \vee (0 < x \wedge \frac{ax+c}{-b} < 0 \wedge \frac{bx-c}{a} < 0)] \\
& \sim \bigvee_x \sim [(x = 0 \wedge ax + c < 0 \wedge bx - c < 0) \vee \\
& \vee (x = 0 \wedge 0 < ax + c \wedge bx - c < 0) \vee \\
& \vee (0 < x \wedge ax + c < 0 \wedge bx - c < 0) \vee \\
& \vee (0 < x \wedge 0 < ax + c \wedge bx - c < 0)], \\
& \sim \left[ \bigvee_x (x = 0 \wedge ax + c < 0 \wedge bx - c < 0) \vee \right. \\
& \vee \bigvee_x (x = 0 \wedge 0 < ax + c \wedge bx - c < 0) \vee \\
& \vee \bigvee_x \left( 0 < x \wedge \frac{-c}{a} < x \wedge x < \frac{c}{a} \right) \vee \\
& \left. \vee \bigvee_x \left( 0 < x \wedge \frac{-c}{a} < x \wedge x < \frac{c}{a} \right) \right], \\
& \sim \left[ (c < 0 \wedge -c < 0) \vee (0 < c \wedge -c < 0) \vee \right. \\
& \left. \vee 0 < \frac{c}{a} \vee 0 < \frac{c}{a} \right], \\
& \sim (F \vee F \vee 0 < \frac{c}{a}), \\
& \sim 0 < \frac{c}{a}, \\
& \frac{c}{a} < 0 \vee \frac{c}{a} = 0, \\
& c < 0 \vee c = 0
\end{aligned}$$

Podstawiając wyrażenie  $\frac{\alpha}{-a}$  zamiast  $x$  do pozostałych formuł atomicznych, eliminujemy z formuły  $\Phi_i$  zmienną  $x$ , a następnie pomijamy bez obaw kwantyfikator. Załóżmy teraz, że wszystkie formuły atomiczne wyrażenia  $\Phi_i$  są nierównościami; można je zatem przedstawić w postaci

$$a_0 x < \alpha_0 \wedge \dots \wedge a_p x < \alpha_p,$$

gdzie  $a_j$  są liczbami różnymi od zera, a  $\alpha_j$  formami liniowymi, w których zmienna  $x$  nie występuje. Jeśli wszystkie  $a_j$  są dodatnie (lub wszystkie ujemne), to formuła  $\bigvee_x \Phi_i$  jest zawsze prawdziwa. Zastępujemy ją formułą zawsze prawdziwą  $0 = 0$  lub po prostu  $P$  (od „prawda”). W przeciwnym przypadku możemy założyć, że  $a_0 \dots a_q$  są ujemne, zaś  $a_{q+1} \dots a_p$  są dodatnie. Wówczas wyrażenie  $\bigvee_x \Phi_i$  można przedstawić w postaci:

$$\bigvee_x \left[ \frac{\alpha_0}{a_0} < x \wedge \dots \wedge \frac{\alpha_q}{a_q} < x \wedge x < \frac{\alpha_{q+1}}{a_{q+1}} \wedge \dots \wedge x < \frac{\alpha_p}{a_p} \right].$$

Z tej natomiast formuły eliminujemy kwantyfikator według wzoru z teorii porządku, zastępując ją formułą:

$$\frac{\alpha_0}{a_0} < \frac{\alpha_{q+1}}{a_{q+1}} \wedge \dots \wedge \frac{\alpha_0}{a_0} < \frac{\alpha_p}{a_p} \wedge \dots \wedge \frac{\alpha_q}{a_q} < \frac{\alpha_{q+1}}{a_{q+1}} \wedge \dots \wedge \frac{\alpha_q}{a_q} < \frac{\alpha_p}{a_p}.$$

Kwantyfikatory ogólne eliminujemy, podobnie jak i w teorii porządku, za pomocą prawa de Morgana:

$$\bigwedge_x \Phi \equiv \sim \bigwedge_x \sim \Phi.$$

Jeżeli w formule jest więcej niż jeden kwantyfikator, eliminujemy je po kolei, rozpoczynając od wewnętrznych, to znaczy tych, które nie mają innych kwantyfikatorów w swym zasięgu. W ten sposób możemy wyeliminować kwantyfikatory z dowolnej formuły naszej teorii, to znaczy, dla dowolnej formuły  $\Phi$  potrafimy podać równoważną jej formułę bezkwantyfikatorską  $\Psi$ . Jeśli formuła  $\Phi$  była zdaniem, czyli nie miała zmiennych wolnych, to i formuła  $\Psi$  jest zdaniem. Jest to zdanie bezkwantyfikatorskie, a więc możemy bez trudu obliczyć wartość logiczną tego zdania w oparciu o wartości logiczne formuł atomicznych. Mamy w ten sposób metodę rozstrzygnięcia, czy dane zdanie jest (ewentualnie nie jest) twierdzeniem teorii równości i nierówności liczb rzeczywistych. Mówimy, że teoria ta jest rozstrzygalna.

Podobnie jak w przypadku teorii porządku, można podać aksjomatykę tej teorii. Jest ona szczególnie prosta jeśli ograniczymy się do form liniowych o współczynnikach wymiernych: (symbole  $a, b$  oznaczają w niej dowolne liczby wymierne):

0.  $\bigwedge_x 0 + x = x,$
1.  $\bigwedge_{xy} x + y = y + x,$
2.  $\bigwedge_{xyz} x + (y + z) = (x + y) + z,$
- 3<sub>a</sub>.  $\bigwedge_x \bigvee_y ax = y,$
- 4<sub>a</sub>.  $\bigwedge_x (a + 1)x = ax + x,$
- 5<sub>a</sub>.  $\bigwedge_x (a - 1)x + x = ax,$
- 6<sub>ab</sub>.  $\bigwedge_x a(bx) = (ab)x,$
- 7<sub>a</sub>.  $\bigwedge_{xy} ax = y \leftrightarrow (a = y = 0 \vee x = \frac{1}{a} y).$

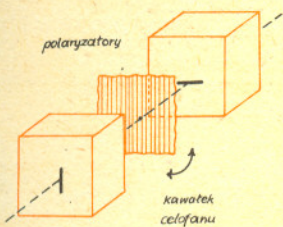
Warto zauważyć, że w przedstawionej wyżej teorii dopuszczaliśmy mnożenie tylko przez liczby konkretne, a nie zmienne. Ograniczenie to nie jest istotne. Podobną eliminację kwantyfikatorów można przeprowadzić dla dowolnych formuł teorii ciała liczb rzeczywistych, pod tym wszelako warunkiem, że kwantyfikatory formuły wiążą zmienne dla liczb, a nie zmienne dla zbiorów liczb (mówimy, że formuła taka jest elementarna). Eliminacja kwantyfikatorów wymaga w tym przypadku konstrukcji z zaawansowanej teorii wielomianów. W związku z tym nie będziemy tu tej konstrukcji przytaczać. Ograniczymy się tylko do informacji, że i w tym przypadku z możliwości wyeliminowania kwantyfikatorów wynika, iż elementarna arytmetyka liczb rzeczywistych jest rozstrzygalna.



## DLACZEGO CELOFAN JEST NIESPRAWIEDLIWY, CZYLI O POPRZECZNOŚCI ŚWIATŁA CIĄG DALSZY

W poprzednim numerze radziłem Wam zbudować dwa polaryzatory światła i wykonać przy ich pomocy kilka prostych doświadczeń. Obecnie chciałbym Was przekonać, że można uzyskać bardzo ciekawe efekty obserwując różne materiały między polaryzatorami skrzyżowanymi.

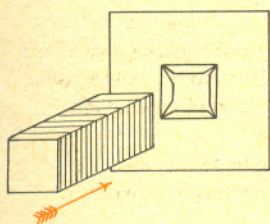
Patrzmy przez dwa polaryzatory obrócone tak, by nie przepuszczały światła, a następnie ustawiamy między nimi kawałek celofanu. Okazuje się, że układ przepuszcza światło, jeżeli celofan jest odpowiednio ustawiony (co radzę Wam sprawdzić przez obracanie kawałka celofanu zgodnie z rys. 1). Wkładając między polaroidy różne kawałki celofanu (może być pognieciony) możecie nawet zobaczyć różne barwy. Okazuje się, że jeśli zmienić ustawienie polaryzatorów na równoległe, obserwowane barwy przechodzą w barwy dopełniające, na przykład zielona w czerwoną, niebieska w żółtą itp. Obserwowane efekty są wynikiem zjawiska **dwójłomności**, odzwierciedlającego „niesprawiedliwość” celofanu, który przepuszcza z inną prędkością światło spolaryzowane równoległe do pewnego wyróżnionego w celofanie kierunku (**osi optycznej**), a z inną — światło spolaryzowane prostopadłe do tej osi. Doświadczenie udaje się najlepiej, gdy oś optyczna celofanu tworzy kąt  $45^\circ$  z kierunkiem drgań wektora elektrycznego padającego światła. Możliwe — powiecie — ale...



Rys. 1

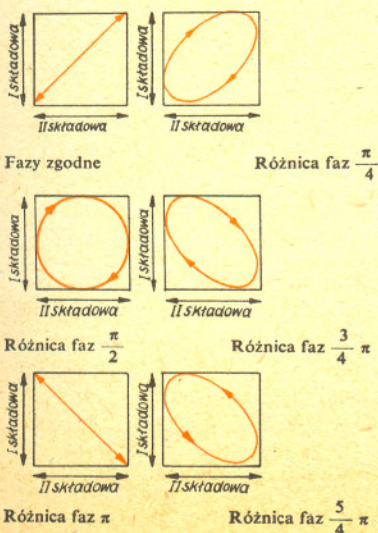


Rys. 2



Rys. 3

**Składanie drgań**  
Drgania zachodzące jednocześnie w dwóch prostopadłych kierunkach możemy składać podobnie, jak to czynimy z siłami czy innymi wielkościami wektorowymi. Drganie wypadkowe odbywa się wtedy po pewnej krzywej. Przy równych częstościach postać drgania wypadkowego zależy od różnicy faz. Poniższe rysunki ilustrują różne możliwe przypadki



### DLACZEGO ŚWIATŁO PRZECHODZI PRZEZ SKRZYŻOWANE POLARYZATORY?

Zastanówmy się. Rys. 2 przedstawia wzajemny układ kierunków drgań światła przepuszczanego przez oba polaryzatory oraz osi optycznej celofanu. Drgania światła przepuszczanego przez pierwszy polaryzator możemy rozłożyć na dwie składowe: równoległą i prostopadłą do osi optycznej (patrz: „Składanie drgań”). Przenikając do celofanu, będą one miały **fazy zgodne**. Ze względu na różnicę prędkości te dwie składowe dotrą do drugiego brzegu celofanu w różnym czasie, a więc opuszczając celofan będą miały **fazy różne**. Dla pewnych długości fali może się zdarzyć, że różnica faz będzie wielokrotnością kąta pełnego, a więc drgania będą takie, jakby różnicy faz nie było. Dla innych długości fali, składając z powrotem obie składowe, otrzymamy już inną polaryzację, na ogół eliptyczną (koniec wektora elektrycznego obiega elipsę). Tak spolaryzowane światło jest częściowo przepuszczane przez drugi polaryzator. Ponieważ zjawisko zależy od długości fali, możemy nieraz obserwować piękne barwy. Zapytacie teraz na pewno: dobrze, ale...

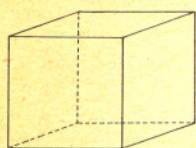
### SKĄD SIĘ BIERZE WYRÓŻNIONY KIERUNEK W CELOFANIE?

Zastosujemy wytłumaczenie często nadużywane, a mianowicie — „trudne dzieciństwo”. Otóż w czasie produkcji celofanu przeciska się go przez wąską szczelinę, przy czym łańcuchowe cząsteczki celulozy, która jest głównym składnikiem celofanu, w pewnym stopniu się porządkują, czyli ustawiają w pewnym kierunku; ten kierunek to właśnie oś optyczna celofanu. Oś optyczna w w przezroczystym materiale może też powstać w wyniku naprężeń mechanicznych. W ten sposób sprawdza się nawet, czy w szklanych przedmiotach występują naprężenia. Możemy zobaczyć to wstawiając między polaryzatory linijkę z pleksiglasu (szkła organicznego) i wyginając ją.

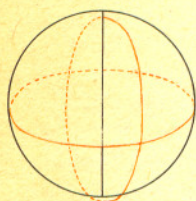
W doświadczeniach tych należy zwracać uwagę, aby badany przedmiot nie był oświetlony światłem z boku, lecz tylko światłem przechodzącym przez polaryzator. Wygodnie założyć na polaryzator tekturową osłonkę (rys. 3). Zastanówcie się jeszcze sami, jak to jest z tymi barwami dopełniającymi. Już się zabieracie do doświadczeń? Czekam na wiadomości od Was. Piszcie też, jakie nowe doświadczenia chcielibyście widzieć w naszym dziale.

# Co to jest geometria wykreślna?

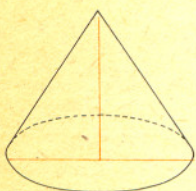
Dr Jerzy LISIEWICZ



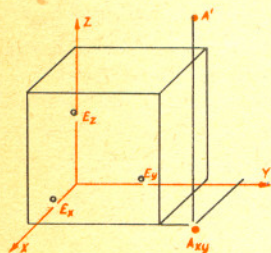
Rys. 1



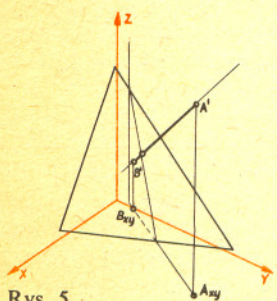
Rys. 2



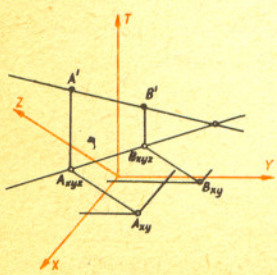
Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

Od dawna, bo od czasów najwybitniejszych geometrów greckich: Pitagorasa Euklidesa, Archimedesesa, Apolloniusza i Pappusa — wymieniliśmy ich razem, choć ostatniego dzieli od pierwszego osiem wieków historii — rozróżniano trzy rodzaje zagadnień typowych dla geometrii:

1. dowody twierdzeń opisujących własności figur;
2. rozwiązywanie problemów algebraicznych metodami geometrycznymi i odwrotnie;
3. rozwiązywanie zadań konstrukcyjnych.

W ciągu wieków zmieniło się niewiele. Tyle, że słuszniej jest mówić obecnie nie o rodzajach zagadnień, a o metodzie uprawiania geometrii.

**Metoda syntetyczna** — zastosowana konsekwentnie najpierw przez Euklidesa, doprowadzona do perfekcji przez Dawida Hilberta — coraz silniej reprezentowana jest w programach szkolnych.

**Metoda analityczna** — za prekursorów której należy uznać Pitagorasa i Apolloniusza — jest nieraz jedyną (zgodnie zresztą z życzeniem jej właściwego twórcy: Kartezjusza) stosowaną w uniwersytetach.

**Metoda wykreślna** — no, właśnie...

Pewną część zadań konstrukcyjnych omawia się marginesowo w szkole. Są to zresztą z reguły zagadnienia *plaskie*, to znaczy dotyczące jednej płaszczyzny. I nic dziwnego. Trzy czwarte szkolnego programu geometrii dotyczy płaszczyzny, a zadania konstrukcyjne stanowią tu jedynie ilustrację pojęć omówionych innymi metodami. Cała reszta to domena geometrii wykreślniej. Czym jest ta „reszta”? Są to najpierw konstrukcje dotyczące jednej płaszczyzny; konstrukcje te powinny się znaleźć w zasadzie w kursie geometrii rzutowej. Pozwalają one zilustrować tak ważne pojęcia teorii stożkowych, jak biegun, biegunowa, średnica, średnice sprzężone, asymptoty itp. Konstrukcje te stanowią przedmiot geometrii wykreślniej głównie dlatego, że potrzebne są jako element składowy innych konstrukcji.

Pomińmy te zagadnienia. Wspomnę tylko, że jednym z wykorzystywanych tu przekształceń jest — znane ze szkoły średniej — powinowactwo osiowe. Konstrukcje płaskie na dowolnej płaszczyźnie  $\alpha$  zastąpić można konstrukcjami na płaszczyźnie rysunku, bo nawet jeżeli wykonujemy rysunek w pewnej skali, każdemu punktowi płaszczyzny  $\alpha$  przyporządkowany jest dokładnie jeden punkt rysunku — i odwrotnie. Trudniej o takie wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie, gdy problem jest przestrzenny, a więc gdy na rysunku (z natury rzeczy płaskim) przedstawić trzeba figury nie leżące w jednej płaszczyźnie. Czy nie przesada? Wiadomo przecież, że na przykład rys. 1 przedstawia sześcian (taki „ładny”, o ścianach kwadratowych), rys. 2 — kulę, a rys. 3 — stożek obrotowy. Owszem, to mogą być symbole (jak hieroglify egipskie) wymienionych brył. Łatwo jednak przekonać się, choćby rzucając cień odpowiednich modeli przy oświetleniu słonecznym, że:

bryła z rys. 1 jest sześcianem, bo ma sześć ścian, ale jakich — bez dodatkowych informacji nie wiadomo;

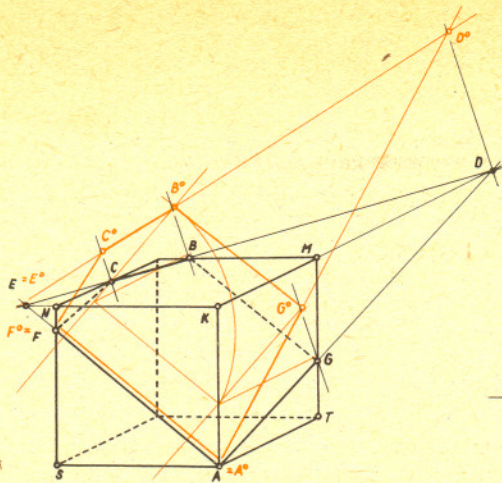
bryła z rys. 2 to w żadnym przypadku nie kula;

bryłę z rys. 3 można by nazwać stożkiem, ale to na pewno nie to, o czym Czytelnik myśli.

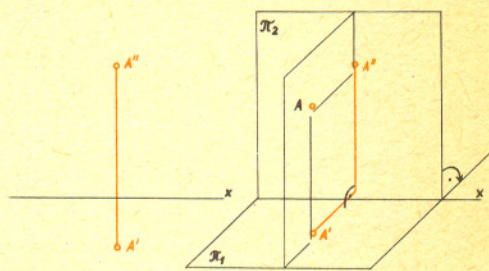
Rzut równoległy — bo tak się nazywa zastosowany tu sposób przyporządkowania punktom przestrzeni punktów płaszczyzny rysunku — dopiero wtedy staje się wzajemnie jednoznaczny, gdy rysunek zawiera pewne dodatkowe dane. Najczęściej, przy tak zwanej aksonometrycznej metodzie rzutowania, umieszcza się na rysunku rzut osi przestrzennego (zazwyczaj prostokątnego) układu współrzędnych z zaznaczeniem np. punktów jednostkowych osi. Rys. 4 przedstawia rzut aksonometryczny sześcianu (długość krawędzi = 2) i punktu  $A$  o współrzędnych 2, 3, 4 (na rysunku oznaczenie  $A$  nie występuje, nie ma tam bowiem narysowanego punktu  $A$ , a tylko jego rzut aksonometryczny).

Na rys. 5 pokazano konstrukcję punktu przecięcia płaszczyzny  $\alpha$  — zadanej śladami na płaszczyznach układu współrzędnych — prostą  $AB$ . Łatwo ekstrapolować tę metodę na przestrzenie wyższych wymiarów. Oto np. rzut aksonometryczny prostej  $AB$  i konstrukcja przecięcia tą prostą trójwymiarowej hiperpłaszczyzny  $XYZ$  w przestrzeni czterowymiarowej (rys. 6). Może Czytelnik zechce wykreślić czterowymiarowy odpowiednik sześcianu?

Pozostawmy jeszcze przy rzucie równoległym i rozwiążmy zadanie konstrukcyjne, w którym zastosować trzeba sposoby charakterystyczne dla geometrii wykreślniej.



Rys. 7



Rys. 8

Zadanie: Dany w rzucie równoległym sześcián przecięć płaszczyzną wyznaczoną przez trzy punkty  $A, B, C$ , przyjęte na krawędziach. Rozwiązanie: Kreślimy sześcián w rzucie równoległym (rys. 7) — a wiedząc, że jest to sześcián, możemy pominąć rzut osi układu współrzędnych — i przyjmujemy na krawędziach punkty  $A, B, C$ . W analizie trzeba ustalić kolejno:

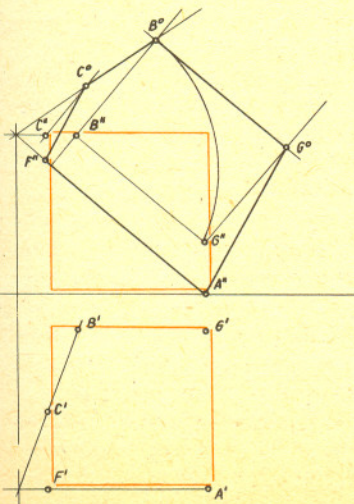
- fakt przecinania się prostej  $BC$  z prostymi  $KM$  i  $KN$  (niech punktami przecięcia będą odpowiednio  $D$  i  $E$ );
- istnienie punktu  $G$  przecięcia prostej  $AD$  z krawędzią  $MT$  i punktu  $F$  przecięcia prostej  $AE$  z krawędzią  $NS$ .

To wystarczy do znalezienia wielokąta przekroju: pięciokąta  $AGBCF$ . Na tym jednak nie koniec. Zauważmy, że frontowa ściana sześcianu zachowała w rzucie swój rzeczywisty kształt (kwadratu). Jeśli zatem obrócimy płaszczyznę przekroju wokół prostej  $AF$  tak, by np. punkt  $B$  znalazł się w płaszczyźnie tej frontowej ściany, to uzyskamy rzeczywisty kształt pięciokąta  $AGBCF$ . Obracamy więc (czyli — jak się to zwie technicznie — dokonujemy *kładu* płaszczyzny  $ADF$  na płaszczyznę  $AKN$ ), przy czym wystarczy obrócić jeden tylko punkt, np.  $B$ . Dlaczego? Bo prosta  $AF$  (jako oś) i para punktów  $B, B^0$  określają... powinowactwo osiowe, a wyznaczenie pozostałych punktów ( $G^0$  i  $C^0$ ) jest zagadnieniem płaskim. Wielokąt  $A^0 G^0 B^0 C^0 F^0$  jest podobny do rzeczywistego wielokąta przekroju w takiej skali, w jakiej wykreślono kwadrat  $AKNS$ . Konstrukcję można by jeszcze uprościć korzystając na przykład z faktu, że rzut równoległy zachowuje równoległość prostych ( $AG$  i  $FC$ , równoległe w przestrzeni, pozostają równoległe i na rysunku).

Uważny Czytelnik spostrzegł być może, że dla zapewnienia sobie wzajemnej jednoznaczności odwzorowania przestrzeni trójwymiarowej na płaszczyznę nie wystarczy z reguły podanie tylko punktu przyporządkowanego punktowi przestrzeni. I tak np. na rys. 4 dopiero zaznaczenie punktu  $A_{XY}$  (rzut punktu, w którym prostopadła do płaszczyzny  $XY$  przechodząca przez  $A$  przebija tę płaszczyznę) określa dokładnie punkt  $A$ . W przypadku przestrzeni czterowymiarowej (rys. 6) potrzebne są prócz  $A'$  jeszcze dwa punkty, np.  $A_{XYZ}$  i  $A_{XY}$ . Uczniowie klasy VIII wiedzą, że istnieje nawet taki sposób odwzorowania przestrzeni trójwymiarowej na płaszczyznę, przy którym punktowi  $A$  przestrzeni przyporządkowuje się parę punktów  $A'$  i  $A''$ , nazywanych odpowiednio: poziomym i pionowym rzutem punktu  $A$ .

Konstrukcję takiego rzutu (jest to tak zwany rzut Monge'a) wyjaśnia rys. 8: rzutuje się prostokątnie punkt  $A$  na dwie wzajemnie prostopadłe płaszczyzny  $\pi_1$  i  $\pi_2$ , a następnie przez obrót jednej z nich wokół krawędzi  $x$  uzyskuje się jedną wspólną płaszczyznę rysunku. Konstrukcje w tym rzucie — poza ważnymi zastosowaniami praktycznymi — ćwiczą świetnie wyobraźnię przestrzenną. Proponuję zatem Czytelnikowi takie ćwiczenie: Na rys. 9 wykonano dokładnie tę samą konstrukcję, co na rys. 7, ale... w rzucie Monge'a. Proszę uzupełnić oznaczenia literowe rys. 9.

Istnieje jeszcze wiele sposobów odwzorowania przestrzeni na płaszczyznę, stosowanych w geometrii wykreślnej. Wystarczy wymienić choćby rzut cechowany używany w topografii, rzuty kartograficzne, czy wreszcie rzut środkowy, którego piękną próbkę widzieliśmy na okładce jednego z numerów «Deltę». Omówienie tych rzutów wykracza poza ramy tego artykułu. I nie o to tu chodzi. Starałem się opowiedzieć, czym jest geometria wykreślna. Żeby ją bliżej poznać, trzeba sięgnąć do... podręcznika.



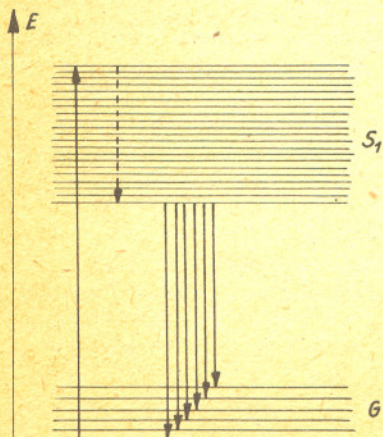
Rys. 9

# Delta z wizytą w Zakładzie Optyki Instytutu Fizyki Doświadczalnej im. Stefana Pieńkowskiego Uniwersytetu Warszawskiego



$E = h\nu$ , gdzie:  
 $E$ —energia kwantu promieniowania,  
 $h$ —stała Plancka,  
 $\nu$ —częstość promieniowania

$\lambda = \frac{c}{\nu}$ , gdzie:  
 $\lambda$ —długość fali,  
 $c$ —prędkość światła w próżni,  
 $\nu$ —częstość promieniowania.



W styczniu 1921 roku w nowo oddanym do użytku budynku przy ul. Hożej 69 w Warszawie nastąpiła inauguracja działalności Zakładu Fizyki Doświadczalnej Uniwersytetu Warszawskiego. Twórcą tej placówki był Stefan Pieńkowski — człowiek o rzadko spotykanej indywidualności, badacz, nauczyciel i organizator. Dziś dawny zakład jest Instytutem Fizyki Doświadczalnej im. Stefana Pieńkowskiego, największą placówką naukową wyższych uczelni w dziedzinie fizyki. Pracujący tu fizycy reprezentują bardzo szeroki wachlarz specjalności, od badania cząstek elementarnych, reakcji jądrowych, poprzez optykę i fizykę ciała stałego, do biofizyki. Nasze wizyty, które niejednokrotnie będziemy w tym Instytucie ponawiać, postanowiliśmy poświęcić określonym zagadnieniom, nad jakimi prowadzone są aktualnie prace. Rozpoczynamy od Zakładu Optyki, którego obecna problematyka stanowi odrodzenie tradycyjnie uprawianej najstarszej problematyki ośrodka w nowej, niezwykle atrakcyjnej formie.

Niecałe dwa lata temu w Zakładzie Optyki Instytutu Fizyki Doświadczalnej UW uruchomiono pierwszy impulsowy laser barwnikowy. Od tego czasu wykonano kilka laserów tego typu, poprawiając stopniowo jego parametry.

Cieczowy laser barwnikowy jest źródłem promieniowania, dającym możliwość wyboru w sposób ciągły dowolnej długości fali, czyli barwy wysyłanego światła, w zakresie fluorescencji danego barwnika.

Fluorescencja jest zjawiskiem fizycznym będącym konsekwencją wzbudzenia, czyli przeniesienia atomów lub cząsteczek z ich stanów podstawowych do wyższych stanów energii. Atomy lub cząsteczki, które znalazły się w stanach wzbudzonych, mogą w nich przebywać bardzo krótko, bo około  $10^{-7}$  —  $10^{-8}$  s, po czym powracają do swoich stanów podstawowych, wysyłając promieniowanie, które nazywamy fluorescencją. Proces gromadzenia atomów lub cząsteczek w stanie, z którego następuje fluorescencja, tzw. inwersję obsadzeń, uzyskuje się na drodze „pompowania”, przy czym inwersja występuje dopiero wówczas, gdy liczba atomów lub cząsteczek w tym stanie jest większa od ich liczby w stanie podstawowym.

Inwersję obsadzeń poziomów w barwniku uzyskuje się na drodze optycznej za pośrednictwem innego lasera, tzw. lasera pompującego, lub za pomocą lamp błyskowych. W wypadku gdy laser pompujący pracuje w sposób ciągły, np. jonowy laser argonowy, także laser barwnikowy pracuje w sposób ciągły. Jeżeli natomiast roztwór barwnika jest pompowany laserem impulsowym lub lampami błyskowymi, pracuje on impulsowo, w takt impulsów pompujących.

Uproszczony schemat energetycznych poziomów cząsteczki barwnika, istotnych dla akcji laserowej, przedstawiony jest na rysunku. Grupa poziomów  $G$  symbolizuje stan podstawowy, zaś  $S_1$  — pierwszy stan wzbudzony cząsteczki. Obie grupy poziomów stanowią w rzeczywistości ciągle pasma. Oś rzędnych jest osią energii. Linie ciągłe oznaczają przejścia promieniste, a linia przerywana oznacza przejście bezpromieniste. Strzałka skierowana do góry oznacza absorpcję promieniowania, którego energia jest w ten sposób przekazana cząsteczce. Strzałka skierowana do dołu oznacza emisję promieniowania.

Jak widać na rysunku, cząsteczki są pompowane promieniowaniem o dużej energii do górnych poziomów szerokiego pasma wzbudzonego, skąd po czasie rzędu  $10^{-12}$  s przechodzą bezpromieniście do stanu, z którego następuje bądź fluorescencja, czyli emisja spontaniczna, bądź emisja wymuszona, czyli tzw. akcja laserowa. W tym drugim wypadku muszą być spełnione specjalne warunki fizyczne. Schemat pokazany na rysunku jest pewną ideą tego, co się dzieje w całym zbiorze identycznych cząsteczek. Strzałki łączące stan  $S_1$  z grupą stanów  $G$  są różnej długości, co oznacza że we fluorescencji możemy obserwować promieniowanie o różnej częstości, a tym samym o różnej barwie.

W omawianym laserze barwnikowym fluorescencja roztworu barwnika pobudzana jest promieniowaniem monochromatycznym jednobarwnym z lasera azotowego. Zdjęcie górne na IV stronie okładki pokazuje fluorescencję roztworu barwnika wzbudzonego światłem pochodzącym z lasera azotowego. Fluorescencja zamienia się w akcję laserową po wstawieniu komórki z barwnikiem między dwa odpowiednio ustawione zwierciadła stanowiące rezonator.

Zdjęcie dolne na IV stronie okładki pokazuje niestrojony laser barwnikowy. Rezonator stanowią tu ścianki kuwetki zawierającej roztwór barwnika. Światło pompujące — wiązka żółtozielona — pochodzi z innego lasera barwnikowego. Emitowana czerwona wiązka laserowa jest charakterystyczna dla barwnika, który znajduje się w kuwecie. Wstawiając dodatkowy element optyczny do rezonatora, w danym wypadku pryzmat, możemy wybrać za jego pośrednictwem tylko jedną dowolną linię z ciągłego zakresu widmowego fluorescencji barwnika. Dzięki temu, że różne barwniki fluoryzują w różnych obszarach długości fal, przez odpowiedni ich dobór możemy pokryć cały zakres widzialny wraz z bliskim ultrafioletem i bliską podczerwonią.

Na I stronie okładki pokazany jest układ lasera barwnikowego pompowanego laserem azotowym. Laser azotowy widoczny jest w postaci metalowego pudła z lewej strony zdjęcia. Przez otwory ułatwiający chłodzenie widać światło pochodzące od wyładowania w rurze laserowej. Laser ten emituje niewidzialne dla oka promieniowanie ultrafioletowe o długości fali 337,1 nm. Na płycie znajduje się układ lasera barwnikowego składający się z kuwety zawierającej roztwór barwnika, w tym wypadku rodaminy 6 G, zwierciadeł rezonatora oraz pryzmatu. Dla pokazania możliwości strojenia lasera barwnikowego wykonano poczworną ekspozycję, zmieniając za każdym razem nachylenie jednego ze zwierciadeł rezonatora. Aby kolejne wiązki nie nałożyły się na siebie, do ich rozdzielania użyto siatki dyfrakcyjnej.

Istnieje szereg zastosowań promieniowania laserowego, w których jego długość fali nie gra istotnej roli. Dla tych zastosowań ważniejsze są na ogół inne cechy promieniowania laserowego, jak jego ogromne natężenie, wysoka monochromatyczność i duży stopień spójności. (W 2 nrze «Delfy», w artykule o holografii, objaśniono spójność promieniowania laserowego).

W spektroskopii natomiast możliwość ciągłej zmiany długości fali promieniowania, bez ztracenia jego cech promieniowania laserowego, jest niezwykle ważna. Funkcję monochromatora, który analizował i wybierał promieniowanie o żądanej długości fali z konwencjonalnego źródła światła, przejmuje strojony laser barwnikowy. Parametry jego promieniowania są jednak o kilka, a nawet o kilkanaście rzędów wielkości lepsze od parametrów promieniowania wychodzącego z monochromatora.

Jak już wspomniano, laser barwnikowy może wysyłać promieniowanie zarówno w sposób ciągły, jak i w impulsach. Do pewnych celów eksperymentalnych oba typy laserów służą na równych prawach.

Laser barwnikowy pompowany laserem azotowym ma czas trwania impulsu rzędu 10 ns (1 nanosekunda =  $10^{-9}$  sekundy). Daje się to wykorzystać do badania różnych szybko zachodzących procesów, na przykład do fotografowania rozprzestrzeniania się plazmy wytworzonej impulsem laserowym o dużej mocy.



## Zadania

Redaguje mgr Andrzej MAKOWSKI

**M25.** Podzielić zbiór liczb naturalnych na dwa podzbiory w ten sposób, by żaden z tych podzbiorów nie zawierał żadnego ciągu arytmetycznego nieskończonego.  
Rozwiązanie na str. 17

**M26.** Na płaszczyźnie dane są cztery punkty, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Udowodnić, że istnieje trójkąt o wierzchołkach w trzech spośród danych punktów, mający jeden z kątów nieostry.  
Rozwiązanie na str. 10

**M27.** Udowodnić, że jeżeli wielomian przyjmuje dla  $x = 26$  wartość 8, a dla  $x = 29$  wartość 15, to co najmniej jeden z jego współczynników nie jest liczbą całkowitą.  
Rozwiązanie na str. 15

Redaguje dr Andrzej ZIEMIŃSKI

**F9.** Pojazd kosmiczny powracający na Ziemię i poruszający się wzdłuż jej promienia wchodzi w zgęszczające się warstwy atmosfery wytracając szybkość. Oszacujcie, jaka jest dopuszczalna początkowa prędkość pojazdu  $v_0$ , aby maksymalne przeciążenie, jakiemu poddawana jest załoga, nie przekraczało  $n$ -krotnej wartości przyspieszenia ziemskiego  $g$ . (Przedyskutujcie otrzymany wynik dla  $n = 5, 10$ ) Gęstość atmosfery Ziemi  $\rho$  maleje z wysokością nad powierzchnią Ziemi  $h$ , zgodnie ze wzorem  $\rho = Ae^{-\beta h}$ , gdzie  $A$  i  $\beta$  są stałymi, równymi:  $A =$

$$= 1,3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad \beta = 1,3 \cdot 10^{-4} \text{m}^{-1}.$$

Siłę oporu powietrza należy przyjąć za proporcjonalną do  $\rho$  i do kwadratu prędkości pojazdu:  $F = k\rho v^2$ .

Czy trzeba włączyć dodatkowe hamowanie pojazdu, aby uchronić go przed rozbiciem się o powierzchnię Ziemi?

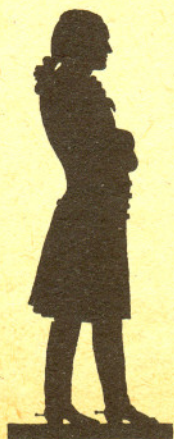
Rozwiązanie na str. 13

Występująca we wzorze liczba  $e$  jest podstawą logarytmu naturalnego  $\ln x = \log_e x$ . Pochodna funkcji wykładniczej  $e^x$ , spełnia wzór

$$\frac{de^x}{dx} = e^x.$$

Pochodną logarytmu naturalnego,  $\ln x$ , jest funkcja

$$\frac{1}{x}, \quad (x > 0).$$



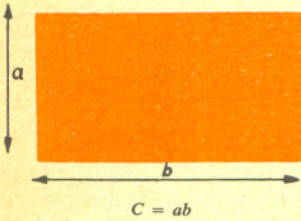


# Kłopoty sprzedawców złotej folii

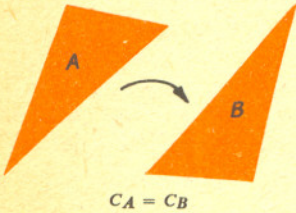
Dr Piotr MANKIEWICZ

## WYCENA

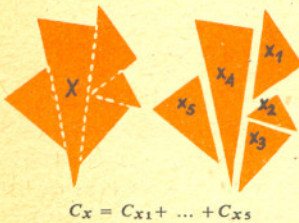
### ZASADA 1



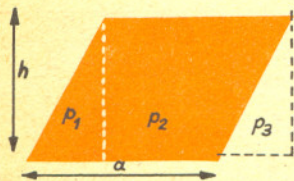
### ZASADA 2



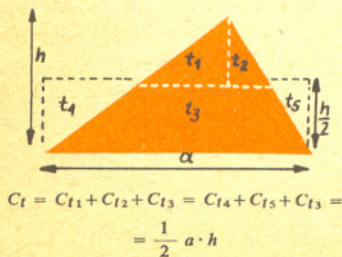
### ZASADA 3



Na przykład



$$C_p = C_{p_1} + C_{p_2} = C_{p_3} + C_{p_2} = a \cdot h$$



$$C_t = C_{t_1} + C_{t_2} + C_{t_3} = C_{t_4} + C_{t_5} + C_{t_3} = \frac{1}{2} a \cdot h$$

— Otwieram naradę pracowników naszego Banku, zwołaną w sprawie ustalenia cennika złotej folii, którą nasz Bank, w ramach wzbogacania asortymentu, wprowadza do sprzedaży. Państwo pozwolą, że przypomnę, na czym polega problem. Gdybyśmy mieli zamiar sprzedawać tylko wycinki folii o określonym regularnym kształcie, kwadratowe lub prostokątne, każdy kasjer bez najmniejszego kłopotu mógłby określić cenę takiego wycinka. My jednak, kierując się hasłem „Nasz klient — nasz pan”, chcemy ustalić cennik jak najszerszego asortymentu kształtów, tak by każdy mógł nabyć wycinek złotej folii o kształcie najbardziej mu odpowiadającym. Uprzejmie proszę o zgłaszanie propozycji takiego cennika. Widzę, że pan Starszy Kasjer Euklides ma jakąś propozycję.

— Przygotowałem następującą propozycję cennika składającą się z trzech zasad:

Zasada 1. Cena prostokąta o bokach  $a$  i  $b$  wynosi  $ab$ .

Zasada 2. Ceny takich samych wycinków folii (przystających), jeżeli dają się określić, są sobie równe.

Zasada 3. Jeżeli ceny wycinków folii  $A_1, A_2, \dots, A_n$  są odpowiednio równe  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , to łączna cena tych wycinków wynosi  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ .

A oto plakat wyjaśniający naszym klientom mechanizm stosowania cennika, a jednocześnie podający ceny najczęściej żądanych figur.

— Brawo, panie Starszy Kasjerze! Czy ktoś chciałby skomentować propozycję pana Euklidesa?

— Udzielam głosu inżynierowi Archimedesowi z Wydziału Postępu Technicznego.

— Moim zdaniem, *Cennik Euklidesa* ma pewne istotne wady. Mianowicie, nie można za jego pomocą wyznaczyć ceny wielu często spotykanych figur, na przykład wycinka w kształcie koła. Moja propozycja jest prosta. Jeżeli klient zażąda jakiegoś wycinka, to kasjer porównuje ciężar tego wycinka z ciężarem kwadratu jednostkowego i w ten sposób określa jego cenę. Banalne!

— W imieniu dyrekcji muszę stwierdzić, że propozycja inżyniera Archimedes jest nie do przyjęcia. Po pierwsze, ze względu na kłopoty ze znalezieniem idealnie dokładnej wagi, na której można by dokładnie ważyć rzeczy tak cenne i lekkie, jak złota folia. Po drugie, metoda ta może narazić nas na poważne straty.

Przypuśćmy, że przychodzi klient i pyta o cenę kawałka folii w kształcie swojego cienia. Przy pańskiej metodzie powinien kasjer wyciąć taki kawałek folii, by następnie go zważyć. Istnieje poważne ryzyko, że wtedy klient stwierdzi, że ten kawałek jest dla niego zbyt drogi. I co wtedy zrobi nasz Bank z tak nietypowym kawałkiem folii? Trudno oczekiwać, że zjawi się inny klient z żądaniem folii w kształcie cienia pana X!

— Czy są inne jakieś propozycje? Proszę, pan Kasjer Jordan.

— Moja propozycja zmierza do wzbogacenia *Cennika Euklidesa* o zasadę 4, niestety nieco skomplikowaną.

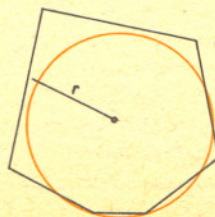
Zasada 4. Dla każdego kawałka folii  $A$  niech  $\bar{a}_A$  oznacza dolny kres cen, według *Cennika Euklidesa*, wszystkich figur zawierających  $A$ , zaś  $\underline{a}_A$  oznacza górny kres cen, według *Cennika Euklidesa*, wszystkich figur zawartych w  $A$ . Jeżeli dla pewnego kawałka folii  $A$

$$\underline{a}_A = \bar{a}_A,$$

to ta wspólna wartość jest ceną  $A$ .

A oto rysunek wyjaśniający mechanizm stosowania tej zasady na przykładzie wycinka w kształcie koła.

### ZASADA 4



Cena wielokąta opisanego na kole =

$$= \frac{\text{obwód wielokąta} \cdot \text{promień koła}}{2}$$

skąd

$$\bar{a}_0 = \frac{\text{obwód koła} \cdot \text{promień}}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} =$$

$$= \pi r^2.$$

Można pokazać, że  $\underline{a}_0 = \bar{a}_0$ . Więc cena koła wynosi

$$C_0 = \pi r^2$$

— Dziękujemy panu Jordanowi za istotny wkład do cennika. Czy są jeszcze jakieś propozycje? Pan Lebesgue, Młodszy Kasjer!

— Moja propozycja zmierza do pewnej modyfikacji *Cennika Euklidesa–Jordana*. Po pierwsze, trzeba zastąpić zasadę 3 przez

Zasadę 3\*. Jeżeli ceny wycinków folii  $A_1, A_2, \dots$ , są odpowiednio równe  $a_1, a_2, \dots$ , to łączna cena tych wycinków wynosi  $a_1 + a_2 + \dots$

Po drugie, nazwijmy *Cennikiem* (\*) cennik złożony z zasady 1, 2 i 3\* oraz dla każdego kawałka folii  $A$  oznaczmy przez  $\tilde{a}_A$  dolny kres cen, według *Cennika* (\*), wszystkich zbiorów zawierających  $A$ . Wtedy zasadę pana Jordana pragnęlbym zastąpić przez

Zasadę 4\*. Jeżeli  $A$  jest kawałkiem folii zawartym w kwadracie  $Q$ , takim że  $\tilde{a}_A + \tilde{a}_{Q-A} = \text{cena } Q$ , to cena  $A$  wynosi  $\tilde{a}_A$ .

Pragnę podkreślić, że cennik obejmujący zasady 1, 2, 3\* i 4\* jest istotnie lepszy od *Cennika Euklidesa–Jordana*. To znaczy, że jeżeli cenę pewnego wycinka folii można ustalić posługując się *Cennikiem Euklidesa–Jordana*, to można tę cenę ustalić także za pomocą cennika obejmującego zasady 1, 2, 3\* i 4\*; w obu przypadkach otrzymamy tę samą cenę. Z drugiej jednak strony istnieją kawałki, których cenę można wyznaczyć posługując się cennikiem obejmującym zasady 1, 2, 3\* i 4\*, a nie można w obrębie *Cennika Euklidesa–Jordana*. Jako przykład takiego kawałka niech służy podzbiór kwadratu  $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ , złożony z punktów o obu współrzędnych niewymiernych. Cena jego, w ramach cennika obejmującego zasady 1, 2, 3\* i 4\* wynosi 1, natomiast w obrębie *Cennika Euklidesa–Jordana* nie można jej wyznaczyć (fachowcy mówią, że zbiór jest niemierzalny w sensie Jordana.)

— Dziękuję panu Lebusgue'owi. Proponuję przyjąć cennik złożony z zasad 1, 2, 3\* i 4\* jako obowiązujący w naszym Banku i nazwać go „miarą Lebesgue'a”. Kto jest za? Wszyscy. I słusznie, jest to bowiem najlepsza miara. Dziękuję panom. A teraz do mierzenia złotej folii.

## Związki fizyki z matematyką

*Prof. dr Józef WERLE, członek korespondent PAN*

Fizyka jest nauką ścisłą, bardzo mocno związaną z matematyką. Czy jednak zastanawialiście się, na czym te związki polegają? Dzięki czemu są one możliwe i płodne? Jaki jest ich charakter i znaczenie dla obu nauk? Czy możliwa jest prawdziwa, nowoczesna fizyka bez matematyki? Czy możliwa jest matematyka bez fizyki? Jak przedstawiały się związki między tymi naukami dawniej i jak przedstawiają się dziś? Czy każdą naukę, w której stosuje się wzory matematyczne, można tym samym zaliczyć do nauk ścisłych?

Oto garść pytań, na które nielatwo odpowiedzieć tylko na podstawie szkolnych lekcji fizyki i matematyki. W szkole średniej o takich problemach nie mówi się raczej wcale, a na studiach wyższych — tym bardziej nie. Cała sprawa należy więc z reguły do bardzo subiektywnej i ukrytej sfery podświadomości, a ta — wiadomo — lubi płać figle naszej świadomości. Nie są to bynajmniej figle niewinne, lecz takie, które wyrządzają duże szkody społeczne. Ale to już inna historia, której lepiej nie opowiadać nieświadomym ofiarom tej sytuacji. Postarajmy się więc przede wszystkim pogłębić naszą świadomość.

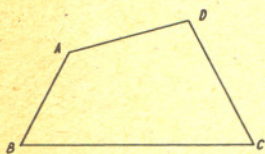
Na laboratoryjnych, eksperymentalnych lekcjach fizyki robimy rzeczy na pozór nie mające nic wspólnego z matematyką: obserwujemy różne zjawiska przyrody, robimy doświadczenia, uczymy się posługiwania podstawowymi aparatami fizycznymi. Warto jednak zauważyć, że nie wystarczają nam jakościowe obserwacje, np. że włączenie prądu powoduje nagrzewanie się przewodnika oraz odchylenie igły stojącej obok busoli. Pytamy od razu o ilość wydzielanego w przewodniku ciepła, o wielkość odchylenia busoli, o ich zależność od napięcia i natężenia prądu, położenia busoli, własności przewodnika itp. Aby odpowiedzieć na takie pytania, musimy wykonać szereg odpowiednich pomiarów przy pomocy termometru, woltomierza, amperomierza itd. Wszystkie tego typu przyrządy, służące pierwotnie do czysto jakościowego wykrywania pewnych określonych efektów fizycznych, po odpowiednim wycechowaniu zamieniają się w przyrządy do mierzenia tychże efektów. Innymi słowy, każde zjawisko fizyczne staramy się zawsze opisać jak najściślej za pomocą odpowiednich cech ilościowych, czyli tak zwanych wielkości fizycznych. Jest rzeczą zdumiewającą, że to się udaje, i do tego — tak dobrze. Każdy pomiar ustala pewną ilościową relację między odpowiednimi wielkościami fizycznymi; relacja





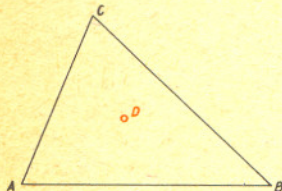
### Rozwiązanie zadania M26

Rozważmy tak zwane domknięcie wypukłe zbioru złożonego z danych czterech punktów. Jest to najmniejszy zbiór wypukły, zawierający dany zbiór; można go sobie wyobrazić jako obszar (domknięty) ograniczony gumką, którą początkowo rozciągnięto tak, by obejmowała wszystkie punkty, a później ją zwolniono umieszczając w danych punktach szpilki. W sytuacji przedstawionej w zadaniu możliwe są dwa przypadki: w pierwszym — domknięciem wypukłym danego zbioru jest czworokąt wypukły i jeden z jego kątów jest  $\geq 90^\circ$  (na rysunku jest to kąt przy wierzchołku  $A$ ); wówczas szukany trójkątem jest trójkąt  $DAB$ . Oczywiście wszystkie kąty czworokąta nie mogą być ostre, gdyż wówczas suma jego kątów wewnętrznych byłaby  $< 360^\circ$ , a wiadomo, że suma ta jest równa  $360^\circ$ .



W drugim przypadku domknięciem wypukłym danego zbioru jest trójkąt i jeden z danych punktów (na rysunku —  $D$ ) leży wewnątrz tego trójkąta.

Wówczas jeden z kątów  $ADB$ ,  $BDC$ ,  $CDA$  jest  $\geq 120^\circ$ .



ta ma tę „cudowną” własność, że daje się zawsze wyrazić matematycznie. W zależności od rodzaju badanego zjawiska mamy do czynienia z różnymi typami relacji dających się wyrazić przez jedną liczbę albo określony zbiór liczb (np. wektor, tensor), albo odpowiednią funkcję, albo funkcjonal itd. Przyrządy pomiarowe umożliwiają więc wszechstronne stosowanie matematyki do opisu i zapisu wyników obserwacji zjawisk fizycznych, do formułowania praw fizyki, do rozwiązywania wielu problemów i wyciągania fizycznych i praktycznych wniosków z teorii fizycznych.

Na lekcjach matematyki w szkole średniej poznajemy oczywiście tylko najbardziej podstawowe pojęcia i metody matematyczne, uczy się ścisłego matematycznego myślenia oraz nabywamy pewnych nieodzownych dla bardzo wielu zawodów umiejętności rachunkowych. Ilustracją i zastosowaniem poznanych pojęć i teorii matematycznych oraz sprawdzianem nabytych umiejętności są zadania zaczerpnięte z różnych dziedzin nauki i praktyki, ale przede wszystkim z fizyki.

Pracujący naukowo fizyk, a szczególnie fizyk teoretyk, musi oczywiście znać matematykę dużo lepiej. Nie wystarcza mu elementarna arytmetyka i geometria ani nawet rachunek różniczkowy i całkowy. Musi często korzystać z analizy funkcjonalnej, teorii grup, topologii itd.

Fizyka eksperymentalna dostarcza nam więc wiedzy o realnych faktach (zjawiskach fizycznych), natomiast matematyka dostarcza ścisłych metod do formalnego opisu tych faktów przy pomocy odpowiednich symboli i wzorów. Niewątpliwie jest wiele racji w często głoszonym twierdzeniu, że najważniejsze w fizyce są fakty w postaci wyników obserwacji i pomiarów dotyczących interesujących nas zjawisk (obiektów, zdarzeń, procesów itp.). Nawet jednak najskrupulatniejszy opis zjawisk, nawet najstaranniej ułożony katalog faktów nie jest w stanie wyjaśnić przyczyn ani nie stwarza możliwości głębszych przewidywań. Katalogi wprowadzie mogą pomóc w znalezieniu pewnych korelacji i prawidłowości, ale nie wyjaśnią ich sensu i znaczenia oraz przyczyn i skutków. Katalog więc może dać pewne cząstkowe odpowiedzi na pytania typu „co i jak?”, ale nie może dać odpowiedzi na pytanie typu „dlaczego?” i „co z tego wynika?”. Na takie bardziej wnikliwe pytania mogą dać odpowiedź jedynie przyczynowe, ilościowe teorie fizyczne podające strukturalne lub dynamiczne prawa rządzące obserwowanymi zjawiskami. Znajomość tych praw pozwala nie tylko na głębsze uporządkowanie faktów, nie tylko na zrozumienie przyczyn, lecz także i skutków, to znaczy na dokładne ilościowe przewidywanie. A umiejętność przewidywania jest podstawą wszelkiego skutecznego działania praktycznego.

Rola matematyki w konstrukcji teorii fizycznych jest więc ogromna. Matematyka dostarcza po prostu metod nieodzownych do konstrukcji teorii fizycznych, bez których teorie te byłyby przynajmniej znacznie uboższe, jeśli nie wręcz niemożliwe. Wprowadzie w niektórych teoriach fizycznych podstawowe koncepcje mają charakter bardzo pogładowego i prostego — najczęściej mechanicznego — modelu, który można jako tako zrozumieć bez matematyki, jednakże użycie metod matematycznych staje się konieczne nawet wówczas, gdy od czysto jakościowego wyjaśnienia prostych zjawisk i praw chcemy przejść do głębszych i bardziej konkretnych, ilościowych rezultatów.

Weźmy jako przykład kinetyczną teorię gazów. Uproszczony model gazu opiera się na założeniu, że jego cząsteczki są doskonale sprężystymi kulkami poruszającymi się „całkowicie bezładnym” ruchem termicznym z tym większą średnią prędkością, im wyższa jest temperatura gazu. Na gruncie takiego modelu możemy wyjaśnić jakościowo ciśnienie jako wynik elastycznych zderzeń cząsteczek między sobą oraz ze ściankami naczynia. Możemy też wyjaśnić, na czym polega proces wyrównywania ciśnień i temperatur oraz dążenia do stanu równowagi. Jeśli jednak chcemy znaleźć równanie stanu gazu, czyli zależność ciśnienia od gęstości i temperatury, jeśli chcemy znaleźć zależność temperatury od średniej energii kinetycznej lub wartość współczynnika przewodnictwa cieplnego itp., musimy wyrazić nasz mechaniczny model gazu w postaci matematycznej. W matematycznym sformułowaniu występuje nie tylko wartość masy i promienia cząsteczki, lecz także prawo rozkładu prędkości; teoria taka podaje też sposób liczenia prawdopodobieństw oraz wartości średnich, to jest sposób obliczania wielkości makroskopowych na podstawie znajomości odpowiednich charakterystyk mikroskopowych. Okazuje się, że za pomocą takiej bardziej matematycznie rozbudowanej teorii możemy nie tylko obliczyć wspomniane wyżej własności gazu, lecz także podać głębsze wyjaśnienie wielu obserwowanych zjawisk i praw, na przykład procesów przewodnictwa cieplnego i dążenia do stanu równowagi termodynamicznej, pierwszej i drugiej zasady termodynamiki, prawa wzrostu entropii itp.

Konstrukcja poprawnej, jak najogólniejszej, ilościowej, matematycznej teorii badanych zjawisk jest z jednej strony celem i uwieńczeniem określonych etapów badań naukowych, a z drugiej strony jest punktem wyjścia do wielu dedukcji i wniosków naukowych oraz zastosowań praktycznych. I tak na przykład szerokie zastosowania zjawisk elektromagnetycznych stały się możliwe dopiero po powstaniu teorii Maxwella, która przewidywała na przykład istnienie i konkretne własności tak ważnych dla praktyki fal elektromagnetycznych.

Różne zjawiska fizyczne wymagają stosowania różnych metod matematycznych. Potrzeby szybko rozwijającej się nowożytnej fizyki wyprzedzały często rozwój matematyki. W takich sytuacjach niejednokrotnie sami fizycy lub współpracujący z nimi matematycy, stwarzali niejako na

zamówienie fizyki nowe metody i nowe działy matematyki. W ten właśnie sposób, „na zamówienie” lub z inspiracji fizyki, powstała geometria analityczna, rachunek różniczkowy i całkowy, teoria równań różniczkowych i całkowych, rachunek wariacyjny, analiza wektorowa i tensorowa itd. aż do powstałej w XX wieku teorii dystrybucji. Taka sytuacja wytworzyła przekonanie, że matematyka jest swoistą nauką przyrodniczą charakteryzującą się największym stopniem ogólności i abstrakcji. Jako taka została nawet nazwana „królową nauk przyrodniczych”. Jednakże począwszy od połowy XIX wieku sytuacja zaczęła się stopniowo zmieniać. Coraz częściej powstają w matematyce nowe konstrukcje logiczne (systemy dedukcyjne, teorie) oparte na zupełnie nie związanych z jakimikolwiek doświadczalnymi faktami pojęciach i aksjomatach. Z drugiej strony poza fizyką, astronomią i chemią z uniwersalnych metod matematyki zaczynają korzystać w coraz większym stopniu nauki biologiczne, psychologiczne, społeczne, a nawet humanistyczne. Wystarczy wskazać na szybko rosnącą rolę matematyki w ekonomii, socjologii czy lingwistyce.

W XX wieku matematyka uniezależniła się w sposób już bardzo wyraźny od fizyki. Słyszysz się często, że dzisiejsza matematyka nie czeka na zapotrzebowanie fizyki i innych nauk, lecz pracuje niejako na wyrost tworząc drogą czysto logicznych rozważań systemy dedukcyjne, które mogą znaleźć później zastosowanie do opisu realnych faktów. W rzeczywistości jednak chodzi o znacznie głębszą zmianę charakteru współczesnej matematyki.

Według obecnie przyjętej klasyfikacji dzielimy nauki na faktualne, tj. zajmujące się odkrywaniem i badaniem realnych faktów, i formalne, które zajmują się badaniem logicznie poprawnych relacji między abstrakcyjnie określonymi obiektami, które mogą nie mieć żadnych realnych odpowiedników. Współczesna nam matematyka należy z pewnością do nauk formalnych. Jej zadaniem nie jest odkrywanie realnych faktów przyrodniczych, lecz tworzenie i rozwijanie coraz nowych i coraz potężniejszych języków symbolicznych służących do opisu i badania relacji, dla których języki naturalne (narodowe) byłyby zbyt trudne, skomplikowane czy wręcz nieadekwatne. Matematyka współczesna bada więc coraz nowe logicznie dopuszczalne struktury (relacje) i tworzy odpowiednie do nich uniwersalne, sztuczne języki symboli i reguł postępowania. Dopiero nauki faktualne rozstrzygają, które ze skonstruowanych przez matematyków struktur logicznych znajdują odbicie w rzeczywistości i które z utworzonych matematycznych języków znajdują zastosowanie i do czego.

Praca badawcza matematyków wyprzedza więc w podanym wyżej sensie potrzeby fizyki i innych nauk faktualnych i staje się coraz bardziej niezależna od nich. Oczywiście takie niezależne badania w zakresie matematyki, wyprzedzające zapotrzebowanie, mogą być niezwykle pożyteczne dla wielu nauk faktualnych, które często znajdują w matematyce współczesnej potrzebne im metody w gotowej do użycia postaci. Nie podzielał jednak wiary, że wszystkie logicznie dopuszczalne schematy matematyczne mają odbicie w realnych faktach (które jeśli nawet nie są dziś znane, to jakoby zostaną odkryte w przyszłości). Jestem przekonany, że nie wszystko, co jest w umyśle, ma swe odbicie w rzeczywistości i że umysł ludzki jest w tym sensie bogatszy od Natury.

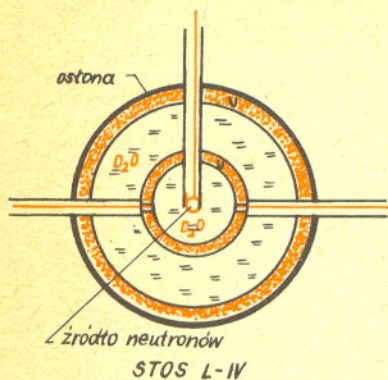
Jeśli nawet nie mam racji absolutnej, to pozostaje jeszcze racja praktyczna: odkrycie faktów wymagających stosowania jakiejś konkretnej teorii matematycznej może nastąpić po naszej śmierci... Tak więc, po zdobyciu pewnego ogólnego wykształcenia matematycznego w szkole podstawowej i średniej, każdy użytkownik matematyki powinien przede wszystkim poznać te języki matematyczne, które są używane i nieodzowne w jego zawodzie. Uczenie się matematyki bez takiego wyboru, na wyrost i na chybił-trafił wydaje się bardzo ryzykowne, ale z drugiej strony każdy twórczy umysł powinien być otwarty i przygotowany do przyswojenia sobie w razie potrzeby nowych metod matematycznych.

W zakresie fizyki funkcje spełniane dawniej przez matematyków przejęli w XX wieku fizycy-teoretycy. Ich główne zadanie polega na tworzeniu jak najogólniejszych i ścisłych, przyczynowych, matematycznych teorii obserwowanych zjawisk fizycznych. Po skonstruowaniu teorii bada się — znowu drogą matematyczną — jej różne konsekwencje fizyczne, filozoficzne i praktyczne. Podstawowym kryterium przydatności teorii fizycznej jest jej ilościowa zgodność z obserwowanymi faktami.

Oczywiście powstanie nowej, dobrej teorii fizycznej odbywa się zupełnie inaczej niż powstanie nowej teorii matematycznej. Konstrukcję teorii fizycznej poprzedza z reguły szereg próbnych hipotez, stopniowo doskonalonych przez porównanie z realnymi faktami. Konfrontacja konkretnej próbnej hipotezy z faktami doświadczalnymi prowadzi albo do jej odrzucenia, jako wyraźnie fałszywej, albo do konieczności częściowej modyfikacji, albo do jej potwierdzenia i stopniowego utwierdzenia jako poprawnej teorii. Tworzenie nowych teorii fizycznych wymaga więc silnego sprzężenia zwrotnego między realnymi faktami i ich pojęciowym i matematycznym opisem, czyli między teorią i eksperymentem. Istnienie tego sprzężenia warunkuje postęp fizyki jako nauki ścisłej, ale przyrodniczej. Ten związek metod eksperymentalnych z matematycznymi czyni z fizyki naukę trudną, ale jednocześnie porywającą i piękną dzięki pięknu Natury, którą fizyka bada, i dzięki pięknu matematyki, którą fizyka się posługuje.



## Dlaczego Niemcy nie zdążyli wynaleźć bomby atomowej? (5)



— To był wspaniały pokaz rozszczepienia atomowego, Herr profesor... Strażak umilkł nagle, napotkawszy wzrok profesora. Istotnie, gdyby wzrok zabijał, Werner Heisenberg musiałby stanąć przed sądem pod zarzutem zabójstwa komendanta lipskiej straży pożarnej. Złość na niefortunnego strażaka szybko mu jednak minęła. Zaczął wspominać, jak wielkie nadzieje wiązał on sam i jego współpracownicy z tym eksperymentem. Sądził, że będzie on wreszcie asem atutowym zarówno w ich bataliach naukowych z konkurencyjnymi grupami uczonych, jak i w rozgrywkach o fundusze z wojskiem i rządem Rzeszy. Nadzieje te były w pełni uzasadnione. Pod koniec 1941 roku Heisenberg wraz z Döpelem zbudowali stos atomowy oznaczony kryptonimem L-III. Wyniki pomiarów zdawały się wskazywać, że nareszcie znaleźli drogę wyjścia z zaczarowanego kręgu. Heisenberg postanowił wtedy zbudować większy stos, nazwany L-IV, który miał spełnić ich nadzieje. Był to stos o symetrii kulistej (rys. obok). Składał się z dwóch sferycznych warstw metalicznego uranu, oddzielonych ciężką wodą ( $D_2O$ ) jako moderatorem. Całość była zamknięta w szczelnej obudowie aluminiowej z dwu skręconych śrubami półkul. Do wnętrza prowadziły kanały pomiarowe. Całość była zanurzona w basenie ze zwykłą wodą. W maju 1942 roku stos L-IV był gotów. Rozpoczęto pierwsze pomiary. Nareszcie sukces! Na zewnątrz zarejestrowano przyrost strumienia neutronów sięgający 18%. Był to pierwszy na świecie udany eksperyment, w którym osiągnięto powielenie strumienia neutronów. Amerykanie osiągnęli sukces, ale już całkowity, pół roku później. „Udało nam się wreszcie zrealizować taką konfigurację stosu, dzięki której powstaje więcej neutronów, niż ulega pochłonięciu” — pisali Döpel i Heisenberg do Ministerstwa Wojny. Dalsza droga wydawała się już prosta: jeśli reaktor będzie tylko dostatecznie duży, będzie on dostarczał energii w ilościach zbliżonych do teoretycznie osiągalnych. Z pośpiesznych oszacowań uczonych wynikało, że reaktor energetyczny powinien zawierać około 5 ton ciężkiej wody i około 10 ton metalicznego uranu. Oczywiście, rzecz wymagała dokładniejszych badań i obliczeń. Nie mogli ich jednak przeprowadzić, gdyż po stosie L-IV pozostała wrząca i dymiąca kipiela, którą całkowicie zgaszono dopiero po dwóch dniach.

Oczywiście nie był to wybuch jądrowy. W osłonie powstał przeciek, woda zaczęła reagować z uranem, wydzielać się zaczął wodór i powstała mieszanina piorunująca. O tym, że w reaktorze powstał przeciek, wiedzieli już wcześniej, ale po wyciągnięciu kuli z basenu objawy nieprzeczuwanej katastrofy zaczęły słabnąć. Sądziłi, że w ogóle ustąpią. Kiedy jednak Döpel polecił wywołać Heisenberga z wykładu i gdy już obaj zauważyli, że aluminiowa powłoka nagle zaczyna puchnąć, nie pozostało im już nic innego jak tylko szybko uciekać z hali reaktora. Wybuch usłyszeli już na korytarzu. Po hali rozproszył się płonący uran, musieli więc wezwać straż pożarną.

Kontynuacja badań wymagała budowy nowego stosu. Do tego konieczny był uran i ciężka woda. Znowu więc mieli przed sobą żmudne starania o przydziały tych materiałów, nie mówiąc już o funduszach. Sytuacja była dodatkowo niepomysłna w tym sensie, że Heisenberg już zaczynał grać swym asem atutowym z przedstawicielami wojska i gospodarki o priorytety wojenne i zwiększenie funduszu dla programu U (niemieckiego programu badań jądrowych). A było o co. Na przełomie bowiem lat 1941 i 1942 nastąpiły w gospodarce niemieckiej dalsze oszczędnościowe ograniczenia, które niemal wszystko podporządkowywały aktualnym i bezpośrednim potrzebom zbrojeniowym. Wtedy właśnie władze Trzeciej Rzeszy doszły do wniosku, że projekt U wymaga albo znacznych ograniczeń, albo reorganizacji. Decyzję uzależniono od gwarancji uzyskania bliskich sukcesów. Takiej gwarancji uczeni niemieccy dać wtedy nie mogli. Postanowiono więc, że program będzie kontynuowany, ale już nie w ramach badań wojskowych. Pieczę nad nim miała przejąć Rada Badań Naukowych Rzeszy, ciało cywilne i raczej opiniotwórcze Ministerstwa Oświaty Rzeszy. Profesor Schumann, kierownik badań naukowych w wojsku, czuł się w obowiązku przekazać swe gospodarstwo jądrowe w sposób lojalny. Zorganizował więc dwie konferencje dyrektorów instytutów biorących udział w programie U — w grudniu 1941 roku i w lutym roku następnego. Ta druga konferencja miała być (i istotnie była) przeglądem dotychczasowych wyników badań, z udziałem prawie wszystkich naukowców pracujących w tej dziedzinie.

Uczeni, ciesząc się w duchu, że przestaną podlegać wojsku, zdawali sobie jednak sprawę, iż w trudnej sytuacji gospodarczej i finansowej Niemiec muszą pozyskać





Rozwiązanie zadania F9.

Równanie ruchu pojazdu, wynikające z II zasady dynamiki Newtona jest następujące:

$$ma = m \frac{dv}{dt} = -k\varrho v^2 + mg.$$

Ponieważ interesujemy się przyspieszeniami hamowania wielokrotnie przewyższającymi przyspieszenie ziemskie, siłę przyciągania grawitacyjnego można zaniedbać w porównaniu z siłą oporu. Wówczas:

$$a = - \frac{k\varrho v^2}{m}.$$

Szukamy maksimum przyspieszenia hamowania  $a$ . Przyspieszenie  $a$  możemy traktować jako funkcję gęstości powietrza w punkcie, w którym znajduje się aktualnie pojazd, lub jako funkcję prędkości pojazdu. Istnieje bowiem jednoznaczny związek pomiędzy prędkością pojazdu i gęstością powietrza w danym punkcie. Aby znaleźć ten związek, należy zmianę prędkości w czasie wyrazić przez zmianę prędkości jako funkcję  $e$ . Mianowicie:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \beta \frac{dv}{d\theta} \cdot e \left( - \frac{dh}{dt} \right) = \beta \frac{dv}{d\theta} \varrho v.$$

Podstawiając otrzymany wynik do równania ruchu, otrzymujemy:

$$\frac{dv}{v} = - \frac{k}{m\beta} d\theta.$$

następnie całkując prędkość od  $v_0$  do  $v$  i gęstość od  $\theta$  do  $e$ , otrzymujemy

$$\ln \frac{v}{v_0} = - \frac{k}{m\beta} e.$$

Stąd, w dowolnym punkcie, w którym znajduje się pojazd, zachodzi związek:

$$a = \beta v^2 \ln \frac{v}{v_0}.$$

Maksymalna, bezwzględna wartość przyspieszenia hamowania wynosi:

$$|a_{max}| = \beta \frac{v_0^2}{2e},$$

gdzie  $e$  jest podstawą logarytmu naturalnego. Zauważcie, że  $|a_{max}|$  jest funkcją jedynie  $\beta$  i  $v_0$ , natomiast nie zależy od  $m$ ,  $k$  i  $A$ . Dopuszczalna prędkość pojazdu wynosi:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2neg}{\beta}}.$$

Podstawiając wartości liczbowe, dla  $n = 5$  otrzymujemy  $v_0 \approx 1,5$  km/s. Otrzymana wartość  $v_0$  jest przybliżona, ze względu na pominięcie siły ciężkości i uproszczonej postaci siły oporu (słuszną jedynie dla dużych prędkości pojazdu).

Gdyby nie zostało włączone dodatkowe hamowanie, prędkość pojazdu przy powierzchni ziemi wyniosłaby przy powyższych uproszczeniach:

$$v_x = v_0 e^{- \frac{kA}{m\beta}} > 0.$$

Rzeczywista prędkość byłaby jeszcze większa. Dlatego konieczne jest włączenie dodatkowego hamowania pojazdu.

poważniejszy mecenat, i to na jak najwyższym szczeblu. Korzystając więc z okazji postanowili równoległe z konferencją naukową w lutym 1942 roku zorganizować cykl popularnych pogadarek dla najwyższych osobistości. Zaproszenia otrzymali między innymi minister Speer, feldmarszałek Keitel, reichsführer Himmler, admirał Raeder, marszałek Göring, reichsleiter Bormann. Učení przygotowali się bardzo solidnie. Na wysokości zadania nie stanęła jedynie... sekretarka w Urzędzie Uzbrojenia Armii, która wysyłała zaproszenia. Po prostu pomyliła programy obydwu posiedzeń. Nic dziwnego, że skoro Keitel, Himmler, Göring i inni otrzymali zaproszenie na konferencję z programem zawierającym zupełnie niezrozumiałe dla laika tytuły referatów naukowych, wykręcili się brakiem czasu.

Był to dla naukowców niemieckich dotkliwy cios. Nie opuścili jednak rąk i w dalszym ciągu podejmowali próby zainteresowania władz swymi badaniami; w pewnej mierze udało im się to wkrótce. Na razie jednak musieli pogodzić się z faktem, iż opiekę nad programem U przejęła Rada Badań Naukowych Rzeszy. Sekcją fizyki Rady kierował nazista, profesor Abraham Esau. Nie był to najszcześniejszy układ. Esau pierwszy, już przed wojną, wystąpił z propozycją programu rządowego w zakresie badań jądrowych. Rychło został dość brutalnie wyeliminowany z gry przez wojsko, co uczeni niemieccy zatrudnieni w programie U przyjęli bez żalu. I teraz oto Esau, zdawałoby się, wrócił do łask. Jego kierownictwo programem U ograniczyło się jednak do spraw administracyjnych i finansowych. Jako naukowiec nie miał żadnego autorytetu. W sprawach merytorycznych miał więc wpływ na prowadzone badania faktycznie tylko o tyle, o ile decydował o rozdziale przyznanych na te cele funduszy. Učení niemieccy pracowali więc nadal w osobnych grupach, dążąc do realizacji swoich koncepcji nie zawsze uzgodnionych, a częstokroć wręcz konkurencyjnych. Dalsze ograniczenia w polityce gospodarczej Rzeszy stworzyły dla władz pilną konieczność podjęcia decyzji co do celowości kontynuowania programu U. Spadło to na barki ministra Speera, gdyż tylko on miał prawo uchylić wydane zimą przez Göringa zarządzenie nieprowadzenia jakichkolwiek badań nie mających bezpośredniego znaczenia dla armii. Na konferencji w dniu 4 czerwca 1942 roku, z udziałem Speera, jego doradców, oraz wysokich przedstawicieli wojska, próbował Heisenberg zdobyć poparcie dla programu U dość wyraźnie kreślonymi możliwościami militarnymi bomby jądrowej. Nie umiał jednak czy nie chciał doprowadzić przetargu do końca; nie będąc jeszcze pewny, czy uda mu się przeprowadzić kontrolowaną reakcję rozszczepienia, nie chciał podejmować żadnych zobowiązań, studząc zapał marszałków i generałów do bomby perspektywą wieloletnich badań. Trudno jednak oczekiwać, by takie ryzyko wziął na siebie Speer.

Program U nie został jednak wstrzymany. Był to bowiem okres, kiedy rząd Rzeszy postanowił ściślej podporządkować naukę niemiecką potrzebom wojującego państwa. 9 czerwca podpisał Hitler dekret, powołujący w miejsce dawnej Rady Badań Naukowych Rzeszy Ministerstwa Oświaty ciało o tej samej nazwie, które miało podlegać bezpośrednio Radzie Ministerialnej do Spraw Obrony Rzeszy (w skład której wchodziłi najważniejsi przedstawiciele rządu, wojska oraz partii nazistowskiej). Göring, który przewodniczył Radzie Ministerialnej, nie miał jednak zamiaru zabierać się do porządkowania nauki niemieckiej. Na naradzie w dniu 6 lipca przyznał wręcz otwarcie, z właściwą sobie rubasnością: „[...] nie możemy studiować prac, które ci mądrale piszą — przynajmniej ja jestem na to za głupi”. W efekcie nowy sztyl mieli wypełnić treścią zaufani naukowcy, powoływani jako „pełnomocnicy marszałka Göringa do spraw [...]”. Göring wyznaczył więc odpowiednich pełnomocników, a kierownictwo Rady poszło po najmniejszej linii oporu i zajęło się własną organizacją. Jak łatwo przewidzieć, pełnomocnikiem Göringa do spraw badań jądrowych został dotychczasowy kierownik programu U, profesor Esau. Wprawdzie przyznano pewne priorytety (niektóre nawet większe niż dla programu V — latających bomb) i zwiększono, nawet dość pokaźnie, budżet na te badania (czego naukowcy wcale nie spodziewali), ale organizacyjnie wszystko pozostało po starym. Zwiększone fundusze umożliwiły podjęcie szerszej zakrojonych prac, ale zaostrzyły jeszcze konkurencję między różnymi grupami, zupełnie jak w starym przysłowiu: im większy ser, tym głośniejszą się wrony.

Dokończenie w numerze 11

Oprac. Z.P.  
wg książki D. Irvinga  
The Virus House

*Doc. dr hab. Tomasz HOFMOKL*

Szkic obok przedstawia dziewczynę z wachlarzem. Jest piękna. Jesteście zdziwieni, nie widać tego — no trudno, to jest tylko uproszczony rysunek. Widać elementy jej postaci: tułów, ręce, nie jest ani łysa, ani ślepa. Macie jednak rację, w tak dużym uproszczeniu tracimy wiele informacji, które mogłyby pozwolić ocenić jej piękno.

Twierdzę, że badanie własności pól magnetycznego i elektrycznego jest piękną i pasjonującą dziedziną fizyki. Macie wątpliwości? A może to brak informacji nie pozwala na pełny zachwyt? Program szkolny dostarcza ogromnej ilości wiedzy o poszczególnych zjawiskach. Uczymy się elektrostatyki, magnetostatyki, o zjawiskach związanych z przepływem prądu elektrycznego, ale są to oddzielne, słabo powiązane ze sobą rozdziały fizyki. W szkole brak czasu na szersze spojrzenie — gdzieś trzeba się zatrzymać. Nas ograniczenia te nie dotyczą. Możemy swobodnie gawędzić, opuszczając co żmudniejsze wyprowadzanie wzorów. A może dzięki temu dostrzeżecie prawdziwie piękno ukryte za długimi przekształceniami formalnymi. Spróbujmy. Przedstawiam nowe twierdzenie pachnące herezją: Pojęcie pola magnetycznego jest niepotrzebne. Na pewno jest wygodne w użyciu, jesteśmy doń przyzwyczajeni, ale twierdzę, że możemy się beżeń obyć. Nie wierzycie? Spróbuję ująć to bardziej precyzyjnie.

**Wystarczy:**

1. umieć obliczyć wyniki obserwacji zjawiska fizycznego w jednym inercjalnym układzie odniesienia na podstawie obserwacji tego samego zjawiska i w innym układzie inercjalnym,
2. znać prawo Coulomba, zasadę zachowania ładunku i, co wcale na jedno nie wychodzi, zasadę niezmienniczości ładunku,

**aby:**

wnioskować, że przewodnik z prądem elektrycznym odpycha lub przyciąga ładunek elektryczny poruszający się równoległe do przewodnika.

Stąd już krok do opisanie tych wszystkich zjawisk towarzyszących przepływowi prądu elektrycznego, które zwykle określamy mianem magnetycznych.

Hasło wystarczy tylko pozornie wygląda tak skromnie. Punkt pierwszy to w praktyce cała szczególna teoria względności Einsteina. Nie przejmujcie się, jeżeli jej nie znacie. To co jest nam potrzebne do rozważań, zrozumiecie bez trudu. Punktem wyjścia każdej teorii są założenia będące uogólnieniem pewnych faktów doświadczalnych. Jednym z takich podstawowych założeń szczególnej teorii względności jest stałość prędkości światła, niezależnie od tego, czy obserwator i źródło są nieruchome, czy któreś z nich porusza się. Kierowca samochodu zbliżając się do światła na skrzyżowaniu zarejestruje tę samą prędkość docierającego doń promienia świetlnego, co pieszy stojący na chodniku. Ten zaskakujący wniosek wypływa z negatywnych wyników doświadczeń przeprowadzonych w II połowie XIX i na początku XX wieku; w doświadczeniach tych usiłowano wyznaczyć prędkość hipotetycznego wiatru eterowego. Stałość prędkości światła wydaje się przeczyć zdrowemu rozsądkowi, jest to jednak fakt dobrze ustalony — i trzeba go włączyć do naszej wiedzy o otaczającym świecie. Konsekwentne uznanie stałości prędkości światła niezależnie od ruchu źródła i obserwatora wymaga daleko idących modyfikacji w dotychczasowych teoriach fizycznych. Musimy przede wszystkim znaleźć taki sposób przeliczania (transformowania) wyników obserwacji z jednego układu inercjalnego do drugiego układu inercjalnego, aby prędkość światła była w obu układach jednakowa. Skorzystajmy z tego, czego inni dokonali, i popatrzmy, jak to można zrobić i jakie są konsekwencje wynikające z takiego postępowania.

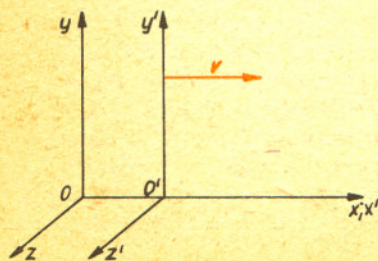
Przyjmując oznaczenia z rysunku, reguły przeliczania współrzędnych w układzie  $x, y, z$  na współrzędne układu  $x', y', z'$ , poruszającego się względem pierwszego wzdłuż osi  $x$  z prędkością  $V$ , można ująć wzorami:

$$(1) \quad x' = \frac{x - V \cdot t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \frac{t - \frac{V}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

gdzie  $c = 2,997925 \cdot 10^8$  m/s — prędkość światła w próżni.

2) Długość odcinka transformuje się następująco:

$$L' = L \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$



Sztaba w ruchu jest krótsza od takiej samej sztaby spoczywającej.

(3) Transformacja prędkości ciała poruszającego się wzdłuż osi  $x$  wyraża się wzorem:

$$v' = \frac{v - V}{1 - \frac{vV}{c^2}}$$

gdzie  $v$  — prędkość ciała względem układu  $x, y, z$ ;  $v'$  — prędkość tego samego ciała względem układu  $x', y', z'$ . Jeżeli obiektem jest foton poruszający się z prędkością światła  $c$  względem układu  $x, y, z$ , to jego prędkość względem układu  $x', y', z'$  wyniesie:

$$v' = \frac{c - V}{1 - \frac{cV}{c^2}} = c \frac{c - V}{c - V} = c.$$

a więc w obu układach prędkość jest taka sama.

Transformacja (1) nosi nazwę transformacji Lorentza. Możemy ją stosować również w warunkach życia codziennego, czyli dla małych prędkości  $V$  i  $v$ . Jeżeli  $v \ll c$  oraz  $V \ll c$ , to  $v' = v - V$ . Do tej zależności jesteśmy od dawna przyzwyczajeni.

Wiemy już, jak postąpić przy przeliczaniu wyników pomiarów wielkości fizycznych mierzonych względem różnych układów inercjalnych. Czy to jest jednak takie ważne? W tym właśnie miejscu należy przypomnieć sobie starą hipotezę niezmienniczości:

*Podstawowe prawa fizyki są jednakowe we wszystkich inercjalnych układach odniesienia.*

Hipotezę tę sformułował w odniesieniu do praw mechaniki Galileusz. Einstein rozciągnął ją na wszystkie dziedziny fizyki. Jest ona na tyle dobrze sprawdzona doświadczalnie, że mamy wszelkie podstawy, aby nazwać ją zasadą niezmienniczości i uważać ją za ustalone prawo naukowe.

Jeżeli zgodzimy się z takim jej potraktowaniem, otrzymamy potężne narzędzie badawcze: z jednej strony receptę na przeliczanie wartości wszystkich wielkości fizycznych mierzonych względem różnych układów inercjalnych, z drugiej strony zasadę, która mówi, że po przeliczeniu prawa fizyczne nie mogą ulec zmianie. Możemy sprawdzać i poprawiać każdą nową teorię fizyczną modyfikując ją dopóty, dopóki, jak to się mówi, nie będzie ona relatywistycznie niezmiennicza. Nie zawsze jest to łatwe i nie zawsze umiemy przeprowadzać niezbędne poprawki. W mechanice klasycznej i w jej dziale zwanym dynamiką trudności te pokonano, a wyniki są zaskakujące.

Okazało się na przykład, że masa ciała poruszającego się rośnie wraz z prędkością ruchu zgodnie

z zależnością  $m' = \frac{m}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$ . Wynik ten potwierdzono doświadczalnie.

Konsekwencją zasady niezmienniczości i transformacji Lorentza jest prawo transformacji siły działającej na ciało, czyli — związki między wartościami siły mierzonej raz w jednym układzie inercjalnym, raz w drugim. Podamy je w szczególnym przypadku. Jeżeli cząstka spoczywa w układzie  $u'$ , a układ  $u$  jest innym układem inercjalnym, który porusza się względem  $u'$  z dowolną prędkością  $V$  — to transformacja składowych (prostopadłej i równoległej do kierunku ruchu) siły działającej w układzie  $u'$  na cząstkę ma postać:

$$F_{||} = F'_{||},$$

(4)

$$F_{\perp} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} F'_{\perp}.$$

Można wykazać, że zjawiska zwane magnetycznymi są prostą konsekwencją zastosowania transformacji Lorentza do zjawisk związanych z ruchem ładunku elektrycznego oraz relatywistycznej niezmienniczości ładunku.

(5) Co wiemy o ładunkach elektrycznych? Zwykle to, co pamiętamy z elektrostatyki. Wiemy jeszcze nieco więcej, ale jest to wiedza niemal podświadoma — z jej posiadania nie zdajemy sobie sprawy albo nie doceniamy jej znaczenia. Czy prawdziwe jest zdanie: całkowity ładunek układu nie zmienia się na skutek ruchu nośników ładunku? Prawie każdy odpowie twierdząco; trudniej będzie uzasadnić to stanowisko. Zatrzymajmy się na chwilę przy tym twierdzeniu, warto je poprzeć danymi doświadczalnymi — przekonaliśmy się bowiem, że rzeczy oczywiste nie muszą być prawdziwe. Danych doświadczalnych na poparcie głoszonej tezy mamy bardzo wiele, i to dosłownie pod ręką. Należy tylko dokładnie sprawdzić, że atomy i cząsteczki różnych substancji są neutralne elektrycznie. Widzicie już związek? To bardzo proste. Atomy różnych substancji są zbudowane w różny sposób nie tylko pod względem liczby protonów i elektronów jako nośników ładunku; cząstki te poruszają się przecież w różnych substancjach w różny sposób. Elektrony krążą po różnych orbitach, protony związane są w jądrze słabiej lub silniej. Jeżeli atom wodoru jest elektrycznie neutralny, to fakt, że atom helu jest również neutralny, świadczy na korzyść relatywistycznej niezmienniczości ładunku. Pomiar neutralności ładunkowej atomów wykonano stosunkowo niedawno. J. G. King wykazał («Physical Review Letters», 5 (1960), s. 562), że atom wodoru jest elektrycznie neutralny z dokładnością  $1:10^{20}$ . Podobny wynik otrzymano dla atomów helu.



#### Rozwiązanie zadania M27

Przypuśćmy, że wielomian  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  o współczynnikach całkowitych spełnia podane warunki.

Mamy wówczas

$$a_0 + 29a_1 + 29^2a_2 + \dots + 29^n a_n = 15,$$

$$a_0 + 26a_1 + 26^2a_2 + \dots + 26^n a_n = 8,$$

skąd, odejmując stronami, otrzymujemy:

$$(*) (29 - 26)a_1 + (29^2 - 26^2)a_2 + \dots + (29^n - 26^n)a_n = 7.$$

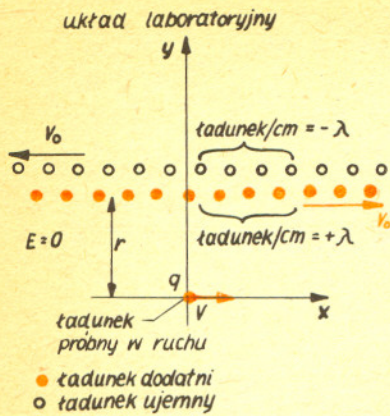
Zauważmy, że

$$29^k - 26^k = (29 - 26)(29^{k-1} + 29^{k-2} \cdot 26 + \dots + 29 \cdot 26^{k-2} + 26^{k-1}),$$

Lewa strona równości (\*) jest więc podzielna przez 3, a prawa nie. Przypuszczenie nasze było więc fałszywe, a więc wielomian spełniający warunki podane w zadaniu, jeżeli istnieje, to ma któryś współczynnik niecałkowity. Łatwo sprawdzić, że wielomianem takim jest na przykład

$$f(x) = \frac{7}{3}x - \frac{158}{3}.$$





(6) Pozwoliwszy ładunkowi na ruch, sprawiamy sobie wiele kłopotów. Pojawiają się nowe problemy, które trzeba rozstrzygać. Pamiętamy z elektrostatyki, że siła działająca na nieruchomy ładunek  $q$  umieszczony w polu elektrycznym o natężeniu  $\vec{E}$  wynosi  $\vec{F} = q\vec{E}$ . Czy związek pozostaje słuszny, gdy ładunek  $q$  porusza się? Nie można dać odpowiedzi jednym słowem. Musimy zrobić zastrzeżenie co do źródła pola. Aby można było zastosować wzór  $\vec{F} = q\vec{E}$ , pole musi pochodzić od układu ładunków, które w jakimś układzie odniesienia znajdują się w spoczynku. Dwa ładunki umieszczone nieruchomo w lecącym samolocie spełniają podany warunek. Jeżeli każdy ładunek będzie spoczywał w innym samolocie, a samoloty te z kolei będą leciały w przeciwnych kierunkach, to warunek oczywiście nie będzie spełniony, ponieważ nie można dobrać układu współrzędnych, w którym oba ładunki byłyby jednocześnie w spoczynku. Być może zastrzeżenie co do źródła pola wydaje się mało ważne, ale skorzystamy zeń w dalszej części rozważań. To co powiedziałem, jest wynikiem zastosowania transformacji Lorentza do pola elektrycznego, wynikiem potwierdzonym doświadczalnie w ogromnym zakresie prędkości poruszającego się ładunku.

Mamy już wystarczający zapas informacji, aby przystąpić do spełnienia obietnicy zapowiedzianej na początku. Zbudujemy w tym celu uproszczony model przewodnika. Bez obaw! Uproszczenie nie oznacza rezygnacji ze ścisłości, jest to tylko wybór prostszej drogi postępowania. Otóż niech nasz przewodnik składa się z ładunków dodatnich poruszających się w prawo i ładunków ujemnych poruszających się w lewo. Wielkość ładunku każdego znaku, przypadająca na jednostkę długości przewodnika (gęstość liniowa ładunku  $\lambda$  obserwowana przez nieruchomego obserwatora — układ laboratoryjny), jest stała ( $\lambda_+ = \lambda_-$ ). Ostrożnie! Nasze rozumowanie wymaga bacznej uwagi. Pamiętajcie, w jakim układzie odniesienia prowadzimy kolejny etap rozumowania. Niech nikt nie zostaje w starym układzie, gdy my przeskoczmy do nowego, bo grozi nam straszny galimatias. Dla uproszczenia zapisu wzorów wprowadźmy zgodnie z ogólnie przyjętymi oznaczeniami w mechanice relatywistycznej symbole  $\beta = V/c$  oraz  $\gamma = 1/\sqrt{1-V^2/c^2}$ .

(7) Tak dla wprawy, a przyda to się później, znajdziemy gęstość ładunku w układzie, w którym ładunki dodatnie będą w spoczynku. Układ taki porusza się razem z ładunkami dodatnimi z tą samą co one prędkością. Obszar zajmowany przez rozkład ładunków dodatnich zwiększy się, wracamy bowiem do układu spoczynkowego ładunków (2). Sam ładunek natomiast nie ulega zmianie (5). Wynika stąd, że gęstość ładunku zmniejszy się i będzie równa  $\lambda_+/\gamma_0$  ( $\gamma_0 = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ ). Podobne rozumowanie możemy zastosować do ładunków ujemnych.

Mamy już przewodnik, w którym płynie prąd. W odległości  $r$  od tego ładunku umieszczamy ładunek próbny  $q$ . Niech pozostaje on, przynajmniej chwilowo, w spoczynku w układzie laboratoryjnym. Znajdujemy się w układzie laboratorium. Gęstość ładunków dodatnich i ujemnych jest taka sama. Pola elektryczne równoważą się. Wypadkowy wektor natężenia pola jest równy zeru. Wniosek jest gotowy. Przewodnik z prądem nie działa na nieruchomy ładunek. Nadajmy teraz ładunkowi próbnemu prędkość  $v_0$  w kierunku ruchu ładunków dodatnich. I co teraz?

W pierwszej chwili chciałoby się powiedzieć, że siła pozostanie równa zeru, bo ładunek porusza się w polu o natężeniu  $E = 0$ , a przecież dopiero co stwierdziliśmy, że siła działająca na poruszający się ładunek nie zależy od jego prędkości (6). Bądźcie ostrożni! To zdanie jest prawdziwe z pewnym zastrzeżeniem co do źródła pola. A czy zastrzeżenie to jest spełnione w tym przypadku? Prawda, że nie? Co robić? Otóż należy się, ale wcale nie płakać, tylko sięść lub, mówiąc zwyczajnie, związać się z ładunkiem próbnym.

Przeniesiemy się teraz do układu, w którym ładunek próbny znajduje się w spoczynku. Nazwiemy ten układ układem ładunku próbnego. Przejście do nowego układu wymaga przeliczenia interesujących nas wielkości. W pierwszej kolejności przeliczymy prędkości ładunków dodatnich i ujemnych wyrażone w jednostkach prędkości światła  $c$ :

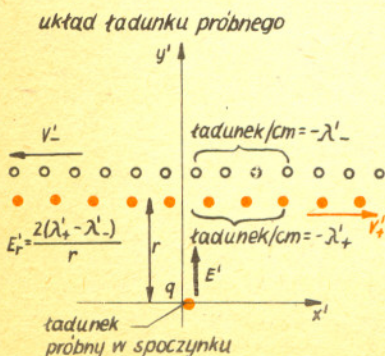
$$\beta_+ = \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta_0\beta}; \quad \beta_- = \frac{\beta_0 + \beta}{1 + \beta_0\beta}.$$

Znany prędkości ładunków dodatnich i ujemnych w układzie ładunku próbnego, obliczyliśmy (7) gęstości ładunków w swoich własnych układach spoczynkowych. Łatwo obliczyć gęstości ładunków w układzie ładunku próbnego:

$$\lambda'_+ = \gamma'_+ \left( \frac{\lambda}{\gamma_0} \right), \quad \lambda'_- = \gamma'_- \left( \frac{\lambda}{\gamma_0} \right).$$

Wypadkową gęstość ładunku  $\lambda'_+ - \lambda'_-$  możemy wyrazić po pewnych nieco nudnych przekształceniach:

$$\begin{aligned} \lambda'_+ - \lambda'_- &= \frac{\lambda}{\gamma_0} (\gamma'_+ - \gamma'_-) = \frac{\lambda}{\gamma_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta_0\beta} \right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{\beta_0 + \beta}{1 + \beta_0\beta} \right)^2}} \right] = \\ &= -2\lambda\beta_0\beta\gamma = \frac{-2\lambda\gamma V v_0}{c^2}. \end{aligned}$$





Znając wypadkową gęstość ładunku znajdziemy natężenie pola elektrycznego. Należy w tym miejscu odszukać w jakimś podręczniku elektrostatyki wyrażenie na pole elektryczne wokół jednorodnie naładowanego walca:

$$E(r) = \frac{2\lambda}{r},$$

stąd

$$E'_r = \frac{4\lambda\gamma V v_0}{rc^2},$$

a więc siła

$$F' = \frac{4q\gamma\lambda V v_0}{rc^2}$$

jest skierowana poprzecznie do kierunku ruchu cząstki i ładunków w przewodniku. Czeką nas ostatni krok. Musimy przetransformować siłę z powrotem do układu laboratorium. To już umiemy robić (4):

$$F = \frac{1}{\gamma} F' = \frac{4q\lambda V v_0}{rc^2}.$$

Dotarliśmy do miejsca, w którym można podelektować się wynikiem. Zwróćcie uwagę, że

$$2\lambda v_0 \text{ oznacza wartość natężenia prądu } I \text{ płynącego w przewodniku, a więc } F = \frac{2qVI}{rc^2}.$$

Stwierdzamy, że na ładunek poruszający się równoległe do przewodnika z prądem działa siła skierowana prostopadle do przewodnika i proporcjonalna do prędkości ruchu ładunku. Zadanie można by rozwiązać wprowadzając pojęcie pola magnetycznego. Przewodnik z prądem wytwarza wokół siebie pole magnetyczne o indukcji  $\vec{B}$ . Na ładunek poruszający się w tym polu działa siła  $\vec{F} = q \cdot \vec{V} \times \vec{B}$ . Jeżeli tylko przypomnimy sobie, czemu równa jest indukcja pola magnetycznego wokół przewodnika z prądem, to okaże się, że wyprowadziliśmy wzór identyczny. To, że nazywamy pewne wyrażenie indukcją pola magnetycznego, jest kwestią przede wszystkim historyczną. Czy mamy wobec tego prawo twierdzić, że pole magnetyczne nie istnieje? Oczywiście nie. Obserwujemy w przyrodzie szereg zjawisk, które można wytłumaczyć korzystając z pojęcia pola elektrycznego i szeregu innych, które tłumaczymy korzystając z pojęcia pola magnetycznego. Wykazaliśmy, że nie są to wielkości niezależne. Należy pamiętać, że zawsze istnieje pole elektromagnetyczne, którego działanie przejawia się w różny sposób, w zależności od warunków doświadczenia. Jeżeli chciałbyś, Czytelniku, prześledzić naszkicowane rozumowanie w szczegółach, radzimy Ci zajrzeć do podręcznika E. M. Purcella *Elektryczność i magnetyzm*, 1974, PWN, rozdz. V. Przedstawiliśmy w ogromnym skrócie informacje o polu elektrycznym i magnetycznym. Pozwoliły one wypełnić te luki, które uniemożliwiały otrzymanie jednolitego obrazu zjawisk elektromagnetycznych. Czy obraz ten jest piękny i pociągający — kwestia gustu. Macie jednak podstawy do samodzielnej oceny. Podobnie nie spodziewam się, że pomimo dostarczenia większości brakujących informacji (reprodukcja jest tylko czarno-biała) o dziewczynie z wachlarzem Piotra Augusta Renoira (1841–1919) podobała się ona wszystkim jednakowo. Można ją jednak ocenić.



#### Rozwiązanie zadania M25

Podzielmy najpierw zbiór liczb naturalnych uporządkowany rosnąco na odcinki zawierające 2, 2, 4, 8, 16, 32, ... liczb, to znaczy

1|2|3|4|5|6|7|8|9|10|...|16|17|...|32|33|...|64|65|...

Do pierwszego z szukanych podzbiorów zaliczymy liczby należące do pierwszego, trzeciego, piątego, ... odcinka, do drugiego zaś — należące do drugiego, czwartego, szóstego, ... odcinka.

W żadnym z tak określonych zbiorów nie jest zawarty żaden ciąg arytmetyczny nieskończony. Gdyby bowiem w pierwszym ze zbiorów był ciąg arytmetyczny nieskończony o różnicy  $r$ , to różnica między kolejnymi co do wielkości liczbami tego zbioru byłaby  $< r$  (gdyż różnica między kolejnymi wyrazami ciągu jest równa  $r$ ). Tymczasem różnice takie są dowolnie wielkie, co wynika ze sposobu konstrukcji zbioru. Podobnie dowodzi się, że drugi zbiór nie zawiera ciągu arytmetycznego nieskończonego.

## Czytelnicy proponują

Mgr inż. J. Kawecki z Warszawy podaje geometryczny sposób znajdowania zespolonych pierwiastków równania kwadratowego

$$ax^2 + bx + c = 0$$

o ujemnym wyróżniku:

— w przestrzeni trójwymiarowej rysujemy parabolę

$$y = ax^2 + bx + c, \\ z = 0;$$

— odbijamy tę parabolę symetrycznie względem jej wierzchołka, a następnie obracamy o kąt  $90^\circ$  względem jej osi (rysunek);

— znajdujemy punkty przecięcia przekształconej paraboli z płaszczyzną  $y = 0$ .

Otrzymane punkty będą miały współrzędne  $(p, 0, q)$  i  $(p, 0, -q)$ . Poszukiwane pierwiastki to właśnie  $p + iq, p - iq$ , gdzie  $i^2 = -1$ .

Propozycja jest następująca:

— sprawdzić, czy opisana metoda jest poprawna (dowieść lub obalić);

— podać inne rozwiązanie tego problemu.

Informacje o liczbach zespolonych zamieściliśmy w 3 nrze «Deltę».